

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Ульяновский государственный технический университет

Научно-методический совет по математике МОН РФ

Российская академия естественных наук

Средневолжское математическое общество

# **Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании**

Сборник научных трудов

Ульяновск 2009

УДК 51 (04)

ББК 22 я43

М75

### Рецензенты:

Д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой «Информационная безопасность и теория управления» Ульяновского государственного университета А. С. Андреев

Д-р техн. наук, профессор кафедры «Информационные технологии» Ульяновского государственного университета К. В. Кумунжиев

### Редакционная коллегия:

А. В. Анкилов (г. Ульяновск, отв. секретарь), П. А. Вельмисов (г. Ульяновск, отв. редактор), В. А. Лазарев (г. Москва), В. А. Сергеев (г. Ульяновск), Л. А. Сухарев (г. Саранск), С. А. Розанова (г. Москва), В. В. Шишкин (г. Ульяновск), Н. Г. Ярушкина (г. Ульяновск).

УДК 51(04)

**Математические** методы и модели: теория, приложения и роль в образовании : сборник научных трудов. – Ульяновск : УлГТУ, 2009. – 324 с.

Сборник, большая часть статей которого подготовлена совместно со студентами, продолжает серию сборников «Математические методы и модели в науке, технике, естествознании и экономике», изданных в УлГТУ в рамках международных конференций под аббревиатурой КЛИН. Посвящается памяти д.т.н., профессора, заслуженного деятеля науки и техники РФ Волгина Л.И. – основателя этих конференций.

В сборнике представлены статьи, посвященные разработке математических методов и моделей и применению их в задачах естествознания, техники и экономики. Часть работ посвящена проблемам математического образования.

Для специалистов в области математического моделирования, прикладной математики, образования.

Статьи печатаются в авторской редакции.

ISBN 978-5-9795-0512-1

© Колл. авторов, 2009

© Оформление. УлГТУ, 2009

# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ИХ МАЛОЙ НЕСФЕРИЧНОСТИ

А. А. Аганин, А. И. Давлетшин, Д. Ю. Топорков

**1. Введение.** В настоящее время все большее внимание уделяется изучению динамики пузырьков в сильных акустических полях, когда акустическое давление сравнимо со статическим давлением жидкости [1]. При относительно близком расположении пузырьков друг к другу, когда отношение характерных размеров пузырьков к характерному расстоянию между ними не превышает  $10^{-2}$ , важную роль в динамике пузырьков начинает играть их взаимодействие [2]. В результате взаимодействия пузырьки могут притягиваться друг к другу, отталкиваться друг от друга, формировать устойчивые образования (пары, кластеры).

В настоящей работе предлагается математическая модель взаимодействия произвольного числа пузырьков, находящихся на одной оси, в сильном акустическом поле с учетом малых деформаций их поверхностей. Данная модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиусов пузырьков, координат их центров и амплитуд отклонений формы поверхностей пузырьков от сферической. Она имеет четвертый порядок точности относительно отношения характерного радиуса пузырьков к характерному расстоянию между ними. В ней приближенно учитываются эффекты вязкости и сжимаемости жидкости, газ в пузырьках полагается гомобарическим.

**2. Постановка задачи.** Рассматривается взаимодействие нескольких газовых пузырьков, радиально пульсирующих под действием переменного давления окружающей жидкости. Сила тяжести не учитывается. В результате взаимодействия пузырьки могут перемещаться в пространстве, испытывать малые соосные осесимметричные деформации. Перемещения пузырьков происходят вдоль оси симметрии деформаций пузырьков, так что данная ось является также и осью симметрии задачи.

Без учета эффектов вязкости и сжимаемости уравнения динамики жидкости (уравнение неразрывности и интеграл Коши-Лагранжа) в терминах потенциала скорости  $\Phi$  можно записать следующим образом

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + \frac{p - p_\infty}{\rho_0} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $t$  – время,  $\rho_0$  – плотность жидкости,  $p$  – давление в произвольной точке жидкости,  $p_\infty$  – давление жидкости на бесконечном удалении от пузырьков.

Газ в пузырьках принимается идеальным гомобарическим с давлением, изменяющимся по закону

$$p_i = \left( p_0 + \frac{2\sigma}{R_{0i}} \right) \left( \frac{R_{0i}}{R_i} \right)^{3\kappa}. \quad (3)$$

Здесь  $p_0$  – статическое давление жидкости,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $R_i$ ,  $R_{0i}$  – текущий и начальный радиусы пузырька,  $\kappa$  – показатель адиабаты,  $i$  – номер пузырька ( $1 \leq i \leq K$ ,  $K$  – количество взаимодействующих пузырьков).

Уравнения поверхности пузырьков имеют вид  $F_i(x, y, z, t) = 0$ , где  $i = 1, 2, \dots, K$ ,  $K$  – количество взаимодействующих пузырьков,  $x, y, z$  – компоненты неподвижной декартовой системы координат. На поверхности каждого пузырька, ставятся кинематическое и динамическое контактные условия. В терминах потенциала скорости кинематические условия имеют вид

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} + \nabla \Phi \cdot \nabla F_i = 0, \quad (4)$$

а динамические

$$p = p_i - 2H_i\sigma, \quad (5)$$

где  $2H_i$  – средняя кривизна поверхности.

На бесконечном удалении от пузырьков давление жидкости  $p_\infty$  совершает гармонические колебания

$$p_\infty = p_0 - \Delta p \sin \omega t, \quad (6)$$

где  $\Delta p$ ,  $\omega$  – амплитуда и частота колебаний.

Постановку задачи (1)-(6) можно использовать для изучения взаимодействия пузырьков методом прямого численного моделирования. В настоящей работе она используется лишь для построения упрощенной математической модели. Упрощения достигаются за счет того, что искажения сферической формы пузырьков в процессе взаимодействия считаются малыми. Кроме того, полагается, что пузырьки находятся не очень близко друг к другу, так, что величиной  $\delta_{ij}^5$  по сравнению с 1 можно пренебречь (здесь  $\delta_{ij} = (R_i + R_j) / d_{ij}$ , где  $d_{ij}$  – расстояние между центрами пузырьков,  $d_{ij} = |z_i - z_j|$ , где  $z_i$ ,  $z_j$  – координаты центров пузырьков).

**3. Математическая модель.** При построении математической модели наряду с неподвижной декартовой системой координат  $x, y, z$  и временем  $t$  используются также подвижные сферические системы отсчета  $r_i, \theta_i, \varphi_i$ , «вмороженные» в соответствующие пузырьки, и связанное с ними время  $\tau$ . Радиальные координаты отсчитываются от центров пузырьков.

Потенциал скорости жидкости при наличии в ней двух пузырьков принимается в следующем виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^K \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{B_{\gamma i}(\tau) P_{\gamma}(\cos \theta_i)}{r_i^{\gamma+1}}.$$

Здесь  $P_{\gamma}(\cos \theta_i)$  – полином Лежандра степени  $\gamma$  от  $\cos \theta_i$ .

Поверхность  $i$ -го пузырька представляется в виде суммы поверхностных сферических гармоник

$$F_i(r_i, \theta_i, \tau) = r_i - r_{si}(\theta_i, \tau) = 0, \quad r_{si}(\theta_i, \tau) = R_i(\tau) + \sum_{n=2}^N a_{ni}(\tau) P_n(\cos \theta_i),$$

где  $N$  – число гармоник, используемых в представлении поверхности пузырьков,  $a_{ni}$  – амплитуда отклонения поверхности  $i$ -го пузырька от сферической формы  $r_i = R_i$  в виде поверхностной гармоники  $P_n(\cos \theta_i)$  с номером  $n$ . Относительную амплитуду отклонения  $\varepsilon_{ni} = a_{ni}/R_i$  будем называть также искажением сферической формы  $r_i = R_i$ . В настоящей работе искажения сферической формы пузырьков предполагаются малыми, так, что степенями  $\varepsilon_{ni}^2$  и выше по сравнению с 1 можно пренебречь.

Проведя ряд довольно громоздких преобразований, следуя [3], получим обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка для радиуса  $i$ -го пузырька  $R_i$ , положения его центра  $z_i$  и амплитуды отклонения формы его поверхности от сферической  $a_{ni}$ . Эти уравнения, с учетом того, что величины  $\varepsilon_{nk}^2$  и  $\delta_{ij}^5$  значительно меньше 1, можно записать в виде

$$R_i \ddot{R}_i + \frac{3\dot{R}_i^2}{2} - \frac{\dot{z}_i^2}{4} - \frac{p_i - p_{\infty}}{\rho_0} + \frac{2\sigma}{\rho_0 R_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \left[ -\frac{(R_j \ddot{R}_j + 2\dot{R}_j^2) R_j}{d_{ij}} + \frac{s_{ij} (R_j \ddot{z}_j + \dot{R}_j \dot{z}_i + 5\dot{R}_j \dot{z}_j) R_j^2}{2d_{ij}^2} - \frac{R_j^3 \dot{z}_j (\dot{z}_i + 2\dot{z}_j)}{2d_{ij}^3} - \frac{(2R_i^2 R_j \ddot{R}_i + 4R_i \dot{R}_i^2 R_j + 6R_i^2 \dot{R}_i \dot{R}_j - 3R_j^2 \dot{R}_j^2) R_j^2}{4d_{ij}^4} - \frac{3s_{ij} (\ddot{z}_j a_{2j} + 2\dot{R}_j \dot{z}_j \varepsilon_{2j} + \dot{z}_j \dot{a}_{2j}) R_j^2}{10d_{ij}^2} \right] + \Psi_{0i} + \Delta_i, \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{7\varepsilon_{2i}}{5}\right) R_i \ddot{z}_i + 3 \left(1 - \frac{4\varepsilon_{2i}}{5}\right) \dot{R}_i \dot{z}_i - \frac{9\dot{z}_i \dot{a}_{2i}}{5} - \dot{z}_i^2 \sum_{m=2}^N c_{m,1} \varepsilon_{mi} = \\ & = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \left[ -\frac{3s_{ij} (R_i R_j \ddot{R}_j + 2R_i \dot{R}_j^2 + \dot{R}_i R_j \dot{R}_j) R_j}{d_{ij}^2} + \frac{3(R_i R_j \ddot{z}_j + 5R_i \dot{R}_j \dot{z}_j + \dot{R}_i R_j \dot{z}_j) R_j^2}{d_{ij}^3} - \frac{9s_{ij} R_i R_j^3 \dot{z}_j^2}{d_{ij}^4} + \frac{3s_{ij} (R_j \ddot{R}_j a_{2i} + 2\dot{R}_j^2 a_{2i} + 4\dot{R}_i R_j \dot{R}_j \varepsilon_{2i} + 3R_j \dot{R}_j \dot{a}_{2i}) R_j}{5d_{ij}^2} + \right. \\ & \quad \left. + 2s_{ij} R_j^2 \dot{R}_j \dot{z}_i / d_{ij}^2 \sum_{m=2}^N c_{m,1} \varepsilon_{mi} \right] + \Psi_{1i}, \quad (7b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n+1} \left[ R_i \ddot{a}_{ni} - (n-1) \ddot{R}_i a_{ni} + 3 \dot{R}_i \dot{a}_{ni} + \sum_{m=2}^N (c_{mn,1} \ddot{z}_i a_{mi} + c_{mn,5} \dot{z}_i \dot{a}_{mi}) \right] + \frac{9\alpha_{11n} \dot{z}_i^2}{8} + \\
& + \dot{z}_i \sum_{m=2}^N \left[ c_{mn,2} \dot{z}_i \varepsilon_{mi} - \frac{3\beta_{m1n} (\dot{a}_{mi} + 2\dot{R}_i \varepsilon_{mi})}{2(m+1)} \right] + \frac{(n-1)(n+2)\sigma\varepsilon_{ni}}{\rho_0 R_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \left\{ \frac{9s_{ij}\beta_{11n} R_j^2 \dot{R}_j \dot{z}_i}{4d_{ij}^2} - \right. \\
& - \frac{9\beta_{11n} R_j^3 \dot{z}_i \dot{z}_j}{4d_{ij}^3} + \frac{5\beta_{21n} R_i R_j^2 \dot{R}_j \dot{z}_i}{2d_{ij}^3} + \frac{9\beta_{11n} R_j^4 \dot{R}_j^2}{8d_{ij}^4} - \frac{15s_{ij}\beta_{21n} R_i R_j^3 \dot{z}_i \dot{z}_j}{4d_{ij}^4} + \frac{21s_{ij}\beta_{31n} R_i^2 R_j^2 \dot{R}_j \dot{z}_i}{8d_{ij}^4} - \\
& - \frac{s_{ij}^n (2n+1) (R_i R_j \ddot{R}_j + 2R_i \dot{R}_j^2 + n \dot{R}_i R_j \dot{R}_j) R_i^{n-1} R_j}{(n+1) d_{ij}^{n+1}} + \\
& + \frac{s_{ij}^{n+1} (2n+1) (R_i R_j \ddot{z}_j + 5R_i \dot{R}_j \dot{z}_j - 2R_i \dot{R}_j \dot{z}_i + n \dot{R}_i R_j \dot{z}_j) R_i^{n-1} R_j^2}{2d_{ij}^{n+2}} + \frac{9s_{ij}\alpha_{11n} R_j^2 \dot{R}_j \dot{z}_i \varepsilon_{2i}}{10d_{ij}^2} - \\
& \left. - \frac{s_{ij} R_j}{d_{ij}^2} \sum_{m=2}^N \left[ \frac{c_{mn,5} (R_j \ddot{R}_j a_{mi} + 2\dot{R}_j^2 a_{mi} + R_j \dot{R}_j \dot{a}_{mi})}{(n+1)} - R_j \dot{R}_j (c_{mn,4} (\dot{a}_{mi} + 2\dot{R}_i \varepsilon_{mi}) - c_{mn,3} \dot{z}_i \varepsilon_{mi}) \right] \right\} + \Psi_{ni}, \quad (7c)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Psi_{0i} &= -\frac{4v\dot{R}_i}{R_i}, \quad \Psi_{1i} = -\frac{12v\dot{z}_i}{R_i} (1 - \varepsilon_{2i}) - \frac{12v}{R_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \left[ \frac{s_{ij} R_j^2 \dot{R}_j}{d_{ij}^2} - \frac{R_j^3 \dot{z}_j}{d_{ij}^3} - \frac{s_{ij} R_j^2 \dot{R}_j \varepsilon_{2i}}{d_{ij}^2} \right], \\
\Psi_{ni} &= -\frac{2v}{R_i} \left[ (n+2) \dot{a}_{ni} + 2(n-1) \dot{R}_i \varepsilon_{ni} + \dot{z}_i \sum_{m=2}^N c_{mn,6} \varepsilon_{mi} \right] - \quad (8) \\
& - \frac{2v}{R_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \left[ \frac{s_{ij}^n n (2n+1) R_i^{n-1} R_j^2 \dot{R}_j}{d_{ij}^{n+1}} - \frac{s_{ij}^{n+1} n (n+1) (2n+1) R_i^{n-1} R_j^3 \dot{z}_j}{2d_{ij}^{n+2}} + \frac{s_{ij} R_j^2 \dot{R}_j}{d_{ij}^2} \sum_{m=2}^N c_{mn,6} \varepsilon_{mi} \right], \\
\Delta_i &= \frac{1}{c_0} \left[ \dot{R}_i \left( R_i \ddot{R}_i + \frac{\dot{R}_i^2}{2} + \frac{\dot{z}_i^2}{4} + \frac{p_i - p_\infty}{\rho_0} \right) + R_i \left( \frac{\dot{z}_i \ddot{z}_i}{2} + \frac{\dot{p}_i - \dot{p}_\infty}{\rho_0} \right) \right], \quad (9)
\end{aligned}$$

числа  $c_{q,1}$ ,  $c_{qn,1}$ ,  $c_{qn,2}$ ,  $c_{qn,3}$ ,  $c_{qn,4}$ ,  $c_{qn,5}$ ,  $c_{qn,6}$ ,  $\alpha_{\gamma 1\zeta}$ ,  $\beta_{\gamma 1\zeta}$ ,  $\chi_{\gamma 11\zeta}$  определяются как

$$\begin{aligned}
c_{q,1} &= \frac{9}{5} (3\alpha_{q12} - \beta_{q12}), \quad c_{qn,1} = -(n-2)\alpha_{q1n} - \frac{3\beta_{q1n}}{2}, \quad c_{qn,2} = -\frac{9}{2} \left[ \sum_{\gamma=0}^{n+1} \frac{c_{q\gamma,5} \beta_{\gamma 1n}}{3(\gamma+1)} - \frac{\chi_{q11n}}{2} \right], \\
c_{qn,3} &= \sum_{\gamma=0}^{n+1} c_{q\gamma,5} \left( \alpha_{\gamma 1n} + \frac{2\beta_{\gamma 1n}}{\gamma+1} \right) - \frac{9\chi_{q11n}}{2}, \quad c_{qn,4} = \alpha_{q1n} + \frac{\beta_{q1n}}{2(q+1)}, \quad c_{qn,5} = 3 \left( \alpha_{q1n} - \frac{\beta_{q1n}}{2} \right), \\
c_{qn,6} &= 3 \left[ (n-2)\alpha_{q1n} - \frac{n\beta_{q1n}}{2} \right], \quad \alpha_{\gamma 1\zeta} = \frac{2\zeta+1}{2} \int_{-1}^1 P_\gamma \eta P_\zeta d\eta, \quad \beta_{\gamma 1\zeta} = \frac{2\zeta+1}{2} \int_{-1}^1 (1-\eta^2) P_\gamma' P_\zeta d\eta, \\
\chi_{\gamma 11\zeta} &= \frac{2\zeta+1}{2} \int_{-1}^1 (1-\eta^2) P_\gamma P_\zeta d\eta, \quad s_{ij} = \begin{cases} 1, & i > j \\ -1, & i < j \end{cases}.
\end{aligned}$$

В подынтегральных выражениях  $P_\gamma = P_\gamma(\eta)$ . Штрих в подынтегральном выражении означает производную по  $\eta$ .

Параметры  $\psi_{0i}$ ,  $\psi_{1i}$ ,  $\psi_{ni}$  – это поправки, обусловленные вязкостью жидкости, а  $\Delta_i$  – ее сжимаемостью. Эффект вязкости жидкости учитывается приближенно в предположении потенциальности ее движения [3]. Эффект сжимаемости жидкости предполагается малым, а потому описывается без учета деформаций и взаимодействия пузырьков [4].

Полученная выше система уравнений (7)-(9) и представляет собой предлагаемую в настоящей работе математическую модель взаимодействия пузырьков. Система уравнений (7) решается численно методом Рунге-Кутты 8-го порядка точности при заданных значениях  $R_k$ ,  $\dot{R}_k$ ,  $z_k$ ,  $\dot{z}_k$ ,  $a_{nk}$ ,  $\dot{a}_{nk}$  в начальный момент времени  $t = 0$ .

**4. Результаты расчетов.** Как правило, в литературе исследуется взаимодействие двух пузырьков. Для иллюстрации применения модели настоящей работы будет проведено сравнение случая двух пузырьков со случаем трех пузырьков. В обоих случаях  $p_0 = 1$  бар,  $\rho_0 = 998$  кг/м<sup>3</sup>,  $\omega/2\pi = 20$  кГц,  $\kappa = 1.4$ ,  $\sigma = 0.0725$  Н/м,  $c_0 = 1500$  м/с,  $\mu = 10^{-3}$  кг/(мс),  $a_{nk}(0) = 10^{-3} R_k(0)$ ,  $\dot{R}_k(0) = \dot{z}_k(0) = \dot{a}_{nk}(0) = 0$ . Представленные на рис.5 результаты получены при  $R_i(0) = 3$  мкм ( $i = 1, 2, 3$ ),  $z_1(0) = 250$  мкм,  $z_2(0) = 0$ ,  $z_3(0) = -250$  мкм,  $\Delta p = 1.2$  бар.

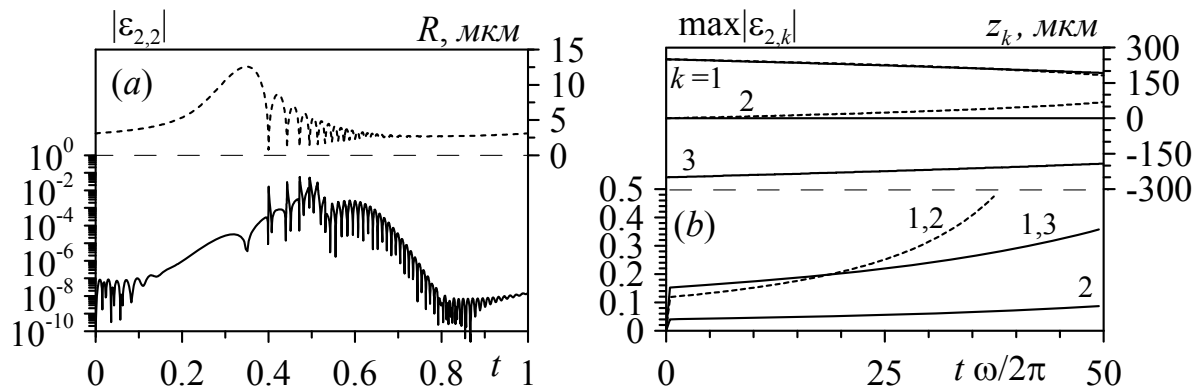


Рис.1. Изменение (а)  $R$  (пунктирная линия) и  $|\varepsilon_{2,2}|$  (сплошная линия), (б)  $z_k$  (сверху) и максимального на периоде значения  $|\varepsilon_{2,k}|$  (снизу) при  $K=2$  (пунктирные линии) и при  $K=3$  (сплошные линии).

На рис.1 для центрального пузырька (в случае трех пузырьков) показано изменение его радиуса и искажения его сферичности на первом периоде колебания внешнего давления по гармоническому закону (6). Сначала радиус пузырька растет (в ответ на понижение давления жидкости  $p_\infty$ ), после чего стремительно уменьшается (на фазе увеличения  $p_\infty$ ). После максимального сжатия пузырька следует серия затухающих радиальных колебаний (отскоков). Форма пузырька на начальном участке относительно слабого

изменения радиуса пузырька испытывает колебания, причем, сначала с переходом через сферическое состояние, а после – без перехода. На фазе более скоростного расширения пузырька искажение сферичности возрастает без колебаний. В ходе первых наиболее сильных отскоков оно начинает испытывать высокоскоростные колебания, амплитуда которых несколько возрастает. После того как интенсивность радиальных отскоков достаточно понизится, колебания искажения становятся затухающими.

На рис.2 дано сравнение зависимостей, полученных при взаимодействии двух ( $K=2$ ) и трех ( $K=3$ ) пузырьков. В обоих случаях пузырьки сближаются. При этом при  $K=2$  они сближаются быстрее, т.к. при  $K=3$  крайние пузырьки препятствуют движению центрального пузырька в сторону какого-либо из пузырьков. Искажение сферичности пузырьков сначала больше при  $K=3$  у крайних. Однако в силу того, что при  $K=2$  пузырьки сближаются быстрее, то и их несферичность возрастает с большей скоростью. В результате, начиная с некоторого периода, искажение сферичности при  $K=3$  у всех трех пузырьков становится меньше, чем при  $K=2$ . Наименьше искажение в ходе колебаний имеет центральный пузырек в случае трех пузырьков. Более того, и скорость возрастания искажений его сферичности оказывается самой низкой.

Таким образом, наличие третьего пузырька понижает скорость роста искажения от периода к периоду в ходе сближения пузырьков. При этом существенно повышается устойчивость сферических колебаний центрального пузырька.

Работа выполнена в рамках программы ОЭММПУ РАН и при поддержке РФФИ (коды проектов 08-01-00215, 08-01-97029).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Putterman S. J., Weninger K. P.* Sonoluminescence: How Bubbles Turn Sound into Light // *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2000, v.32, p.445-476.
2. *Doinikov A. A.* Translational motion of two interacting bubbles in a strong acoustic field // *Phys. Rev. E.*, 2001, v.64, №2, 026301.
3. *Аганин А. А., Давлешиин А. И.* Моделирование взаимодействия газовых пузырьков в жидкости с учетом их малой несферичности// Математическое моделирование, 2009, Т.21, №6, (в печати).
4. *Doinikov A. A.* Equations of coupled radial and translational motions of a bubble in a weakly compressible liquid // *Phys. Fluids*, 2005, v.17, №12, 128101.

•••••

*Аганин Александр Алексеевич; д.ф.-м.н., зав.лаб., Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН (ИММ Каз НЦ РАН); aganin@kfti.knc.ru,*  
*Давлешиин Анас Ильгизович; м.н.с., ИММ Каз НЦ РАН; davanas@mail.ru,*  
*Топорков Дмитрий Юрьевич; к.ф.-м.н., н.с., ИММ Каз НЦ РАН;*  
*dem17@rambler.ru.*



# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА В КАЧЕСТВЕ ДАТЧИКА ТОЛЩИНЫ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛЕНОК НА ПРОВОДЯЩЕМ ОСНОВАНИИ

В. Г. Анисимов

В качестве датчика при измерении толщины диэлектрических пленок возможно использование структуры в виде экранированного диэлектрического резонатора над проводящей плоскостью с диэлектрическим слоем. Такая конструкция показана на рисунке 1.

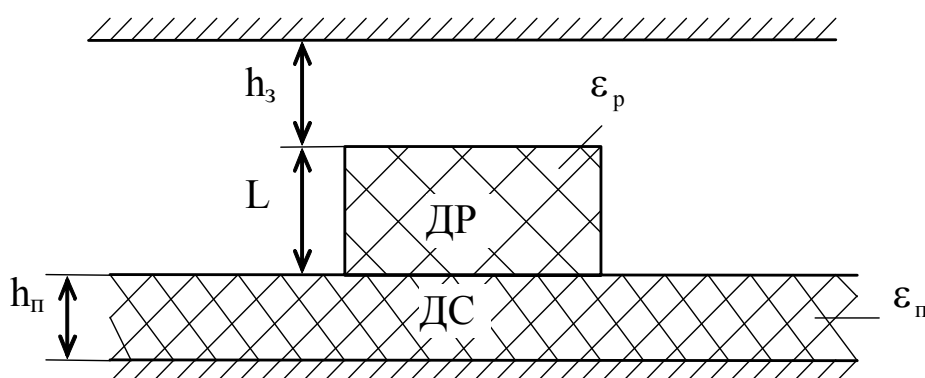


Рис. 1. Модель датчика.

Диэлектрический резонатор ДР лежит на диэлектрическом слое ДС, расположенном на проводящей плоскости. Диэлектрический слой – это диэлектрическая пленка. Сверху расположен металлический экран на расстоянии  $h_з$ . Параметры такой колебательной системы определяются расстоянием между металлическими экранами, геометрическими размерами резонатора, электрическими параметрами диэлектрического резонатора и диэлектрического слоя, удалением ДР от проводящей плоскости и некоторыми другими параметрами.

Рассматриваемый метод измерения толщины диэлектрических пленок основан на зависимости параметров экранированной колебательной системы от толщины диэлектрического слоя. В качестве таких параметров используются резонансная частота колебательной системы и ее добротность.

В одноволновом приближении для структуры, показанной на рисунке 1, при использовании цилиндрического ДР справедлива система нелинейных уравнений [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_\rho \frac{J_0(\chi_\rho)}{J_1(\chi_\rho)} = -\chi_K \frac{K_0(\chi_K)}{K_1(\chi_K)}, \\ 2 \frac{L}{D} \sqrt{\varepsilon_P \chi_0^2 - \chi_\rho^2} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\chi_\rho^2 - \varepsilon_e \chi_0^2}}{\sqrt{\varepsilon_P \chi_0^2 - \chi_\rho^2} \operatorname{th} \left( 2 \frac{h_s}{D} \sqrt{\chi_\rho^2 - \varepsilon_e \chi_0^2} \right)} + \\ + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\chi_\rho^2 - \varepsilon_n \chi_0^2}}{\sqrt{\varepsilon_P \chi_0^2 - \chi_\rho^2} \operatorname{th} \left( 2 \frac{h_n}{D} \sqrt{\chi_\rho^2 - \varepsilon_n \chi_0^2} \right)} \end{array} \right. \quad (1)$$

Где  $\chi_0 = \frac{\pi D f_P}{c}$  – волновое число свободного пространства;  $f_P$  – резонансная частота;  $c$  – скорость света;  $L, D$  – высота и диаметр ДР;  $\varepsilon_e, \varepsilon_P, \varepsilon_n$  – относительная диэлектрическая проницаемость воздуха, ДР и ДС соответственно;  $h_s$  – расстояние от ДР до экрана;  $h_n$  – толщина ДС.

Поперечное и продольное волновые числа в ДР связаны соотношением

$$\chi_\rho^2 + \chi_K^2 = (\varepsilon_P - 1) \chi_0^2. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1), можно определить волновые числа  $\chi_\rho$  и  $\chi_K$  и один из параметров структуры (рисунок 1) при заданных остальных.

При учете конечной проводимости металлической плоскости, на которой расположен ДС, следует использовать выражения, связывающие характеристики колебательной системы с толщиной ДС следующим образом. Добротность экранированного резонатора зависит от расстояния до металлического основания и определяется по формуле

$$Q = \frac{\omega \cdot W}{P},$$

где  $\omega$  – круговая частота,  $W$  – запасенная в колебательной системе энергия,  $P$  – мощность потерь энергии за единицу времени.

Запасенная энергия рассматривается по частичным областям колебательной системы [1].

$$W_i = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_i}{2} \int_{V_i} E_{i\varphi}^2 dV,$$

где  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая постоянная вакуума;  $\varepsilon_i$  – относительная диэлектрическая проницаемость  $i$ -ой области;  $E_{i\varphi}$  –  $\varphi$ -я составляющая электрического поля в  $i$ -ой области;  $V$  – объем  $i$ -ой области.

Мощность потерь определяется в основном тепловыми потерями в металлическом основании, так как ДР изготавливается из качественного



Здесь  $l$  – длина пластины;  $w(x, t)$ ,  $x \in [0, l]$  – неизвестный прогиб пластины; штрих означает производную по  $x$  и  $\tau$ . Ядро  $G(\tau, x, l)$  – учитывает влияние потока газа на пластину.

Ранее было доказано, что  $J(t) \geq 0$ . Получим верхнюю оценку для интеграла. Пусть концы пластины закреплены либо жестко, либо шарнирно

$$1) w(x, t) = w'(x, t) = 0; 2) w(x, t) = w''(x, t) = 0, \quad x = 0, x = l,$$

тогда

$$\begin{aligned} J(t) &= \int_0^l dx \int_0^l w'(x, t) w'(\tau, t) [G(\tau, x, l) + g(x, l) + g(\tau, l)] d\tau \leq \\ &\leq \int_0^l dx \int_0^l |w'(x, t) w'(\tau, t) (G(\tau, x, l) + g(x, l) + g(\tau, l))| d\tau = \\ &= \int_0^l dx \int_0^l |w'(x, t)| \cdot |w'(\tau, t)| \cdot |G(\tau, x, l) + g(x, l) + g(\tau, l)| d\tau, \end{aligned}$$

где  $g(x, l)$  – произвольная интегрируемая по  $x$  на отрезке  $[0, l]$  функция.

Далее, используя очевидное неравенство  $2ab \leq a^2 + b^2$  и симметричность ядра  $G(\tau, x, l) = G(x, \tau, l)$ , получим

$$\begin{aligned} J(t) &\leq \frac{1}{2} \int_0^l dx \int_0^l [w'^2(x, t) + w'^2(\tau, t)] \cdot |G(\tau, x, l) + g(x, l) + g(\tau, l)| d\tau = \\ &= \int_0^l dx \int_0^l w'^2(x, t) \cdot |G(\tau, x, l) + g(x, l) + g(\tau, l)| d\tau. \end{aligned}$$

Введем обозначение  $G_1(x, l) = \int_0^l |G(\tau, x, l) + g(x, l) + g(\tau, l)| d\tau$ , тогда

$$J(t) \leq \int_0^l w'^2(x, t) G_1(x, l) dx \leq \sup_{x \in [0, l]} G_1(x, l) \cdot \int_0^l w'^2(x, t) dx.$$

Таким образом, задача состоит в отыскании такой функции  $g(x, l)$ , чтобы значение  $\sup_{x \in [0, l]} G_1(x, l)$  было наименьшим.

Перейдем к безразмерным переменным, для этого сделаем замену  $x = lx_1$ ,  $\tau = l\tau_1$ . Пусть  $g(x, l) = f\left(\frac{x}{l}\right)$ , тогда получим:

$$\begin{aligned} G_0(l) &= \sup_{x \in [0, l]} G_1(x, l) = \sup_{x \in [0, l]} \int_0^l |G(\tau, x, l) + f\left(\frac{x}{l}\right) + f\left(\frac{\tau}{l}\right)| d\tau = \\ &= l \cdot \sup_{x_1 \in [0, 1]} \int_0^1 |F(\tau_1, x_1) + f(x_1) + f(\tau_1)| d\tau_1, \quad F(\tau_1, x_1) = 2 \cdot \ln \left| \frac{\sqrt{x_1(1-\tau_1)} + \sqrt{\tau_1(1-x_1)}}{\sqrt{x_1(1-\tau_1)} - \sqrt{\tau_1(1-x_1)}} \right|, \end{aligned}$$

т. е.  $G_0(l)$  прямо пропорционально  $l$ .

Найдем число  $K = \inf_f \left( \sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 |F(\tau, x) + f(x) + f(\tau)| d\tau \right)$ .

В ранее проведенных исследованиях использовалась оценка (при  $f(x) \equiv 0$ )  $K = \pi$ . Аналитически проанализировать точную нижнюю грань по неизвестной функции  $f(x)$  сложно, а во многих случаях и невозможно. Для выбора  $f(x)$  воспользуемся геометрическим анализом графика функции

$$S(x) = \int_0^1 F(\tau, x) d\tau :$$

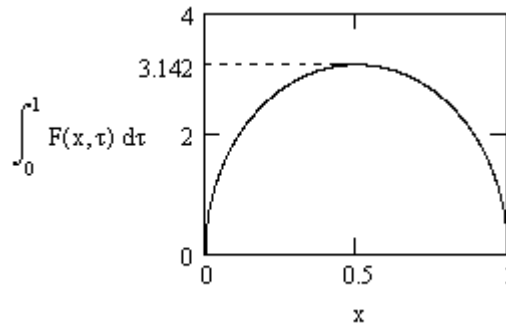


Рис. 1.

Рассмотрим несколько частных случаев выбора функции  $f(x)$ .

1. Возьмем самый простой случай  $f(x) = const = a$ . Найдем  $K_1 = \inf_a \left( \sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 |F(\tau, x) + 2a| d\tau \right)$ . Так как  $F(\tau, x) \geq 0$ , то  $a \leq 0$ . Функция  $S_1(x, a) = \int_0^1 |F(\tau, x) + 2a| d\tau$  непрерывна по обеим переменным, поэтому задача

отыскания точных верхней по  $x$  и нижней по  $a$  граней сводится к задаче отыскания наименьшего значения по  $a \in (-\infty, 0)$  от наибольшего значения функции  $S_1(x, a)$  на отрезке  $x \in [0,1]$ . Так как непрерывная функция  $S_1(x, a)$  на отрезке  $x \in [0,1]$  достигает наибольшего значения либо в единственной точке максимума  $x = 0,5$ , либо на концах отрезка (причем  $S_1(0, a) = S_1(1, a)$ ), то наименьшего значения по переменной  $a$ , функция достигает в единственной точке минимума на  $(-\infty, 0)$  при  $S_1\left(\frac{1}{2}, a\right) = S_1(0, a)$ . Найдем корень этого уравнения:  $a = -0,881$ . При этом значении получим  $K_1 = 1,764$  (рис. 2).

Таким образом, получили оценку меньше в  $K / K_1 = 1,781$  раз.

2. В силу симметричности графика функции  $S(x)$  относительно прямой  $x = l/2$ , будем искать  $f(x)$  в виде линейных комбинаций симметричных относительно этой прямой функций. Возьмем функцию  $f(x)$  в виде  $f(x, a, b) = a\sqrt{x(1-x)} + b$ , где  $a, b$  – произвольные постоянные. Найдем число

$$K_2 = \min_{a,b} \left( \sup_{x \in [0,1]} S_2(x,a,b) \right), \quad S_2(x,a,b) = \int_0^1 |F(\tau,x) + f(x,a,b) + f(\tau,a,b)| d\tau.$$

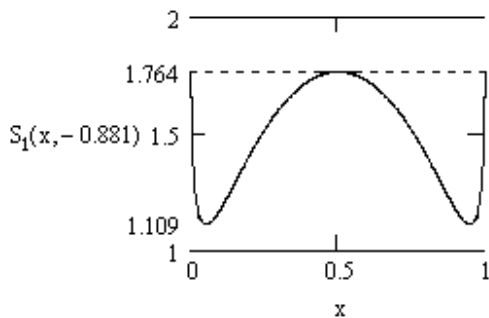


Рис. 2.

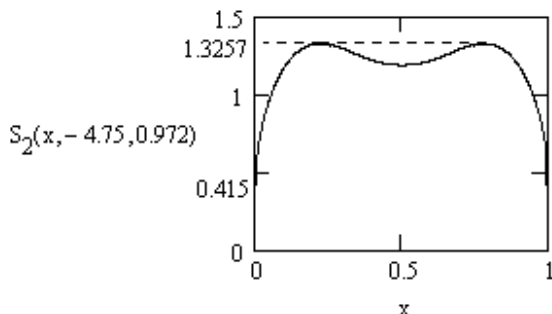


Рис. 3.

Используя метод покоординатного спуска по переменным  $a$  и  $b$ , находим точку минимума  $a = -4,75, b = 0,972$ . В этой точке получим  $K_2 = 1,3257$  (рис. 3). Таким образом, получили оценку меньше в  $K / K_2 = 2,36976$  раз.

3. Возьмем функцию  $f(x)$  в виде  $f(x,a,b,c) = a \cdot \sin(\pi x) + b \cdot \sin(3\pi x) + c$ , где  $a, b, c$  – произвольные постоянные. Найдем число

$$K_3 = \min_{a,b,c} \left( \sup_{x \in [0,1]} S_3(x,a,b,c) \right), \quad S_3(x,a,b,c) = \int_0^1 |F(\tau,x) + f(x,a,b,c) + f(\tau,a,b,c)| d\tau.$$

Используя метод градиентного спуска по переменным  $a, b$  и  $c$  находим точку минимума  $a = -2,14, b = 0,03, c = 0,565$ . В этой точке получим  $K_3 = 1,3259$  (рис. 4).

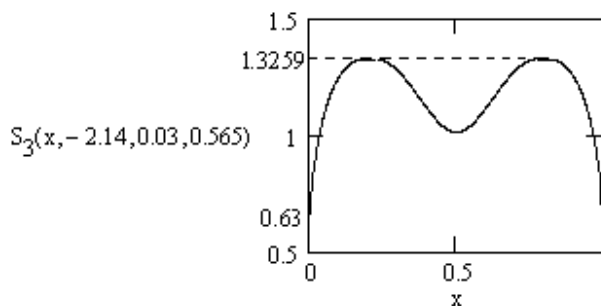


Рис. 4.

Таким образом, проведенные исследования позволяют записать наилучшую пока оценку интеграла (1):

$$0 \leq \int_0^l dx \int_0^l w'(x,t)w'(\tau,t)G(\tau,x,l)d\tau \leq 1,3257 \cdot l \int_0^l w'^2(x,t)dx.$$

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК №П1122, а также поддержана грантом РФФИ № 09-01-97005-р\_поволжье\_a.

•••••

**Анкилов Андрей Владимирович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры “Высшая математика” УлГТУ.

**Судаков Всеволод Александрович**, студент группы ПМд-31 экономико-математического факультета УлГТУ.

# ИССЛЕДОВАНИЕ СЕГМЕНТА КОМБИНИРОВАННОГО ГЕНЕРАТОРА НА ОСНОВЕ ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТОВ

Г. Ф. Афанасьев, А. Ю. Ревенков, О. В. Афанасьева

Пьезоэлектрики могут генерировать энергию, если их механически изгибать, и наоборот – изгибаться, если к ним прикладывать напряжение. Такое интересное свойство пьезоэлектриков сразу приводит к множеству новых применений – начиная от микроскопических сенсоров, регистрирующих механические усилия, до пленок адаптивной оптики на космических телескопах.

В настоящее время можно найти широкое применение твердотельным преобразователям, работающие на основе использования пьезоэффекта.

Подобные генераторы характеризуются такими преимуществами, как возможность получения высоких напряжений. Однако получение только высоких напряжений не всегда гарантирует стабильность работы такого генератора и резко сужает область его использования.

Особый интерес представляет комбинированный генератор. Внешний вид устройства генератора представлен на рис. 1.

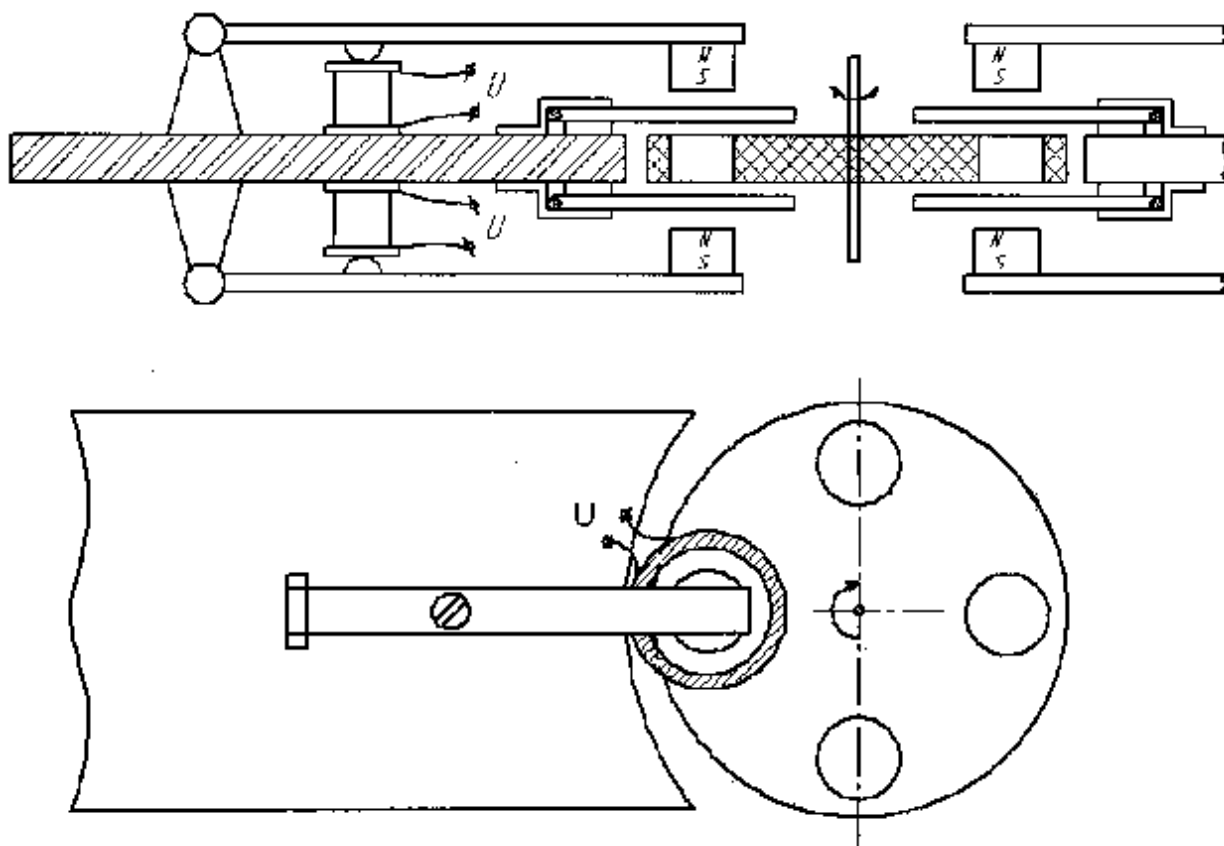


Рис. 1. Комбинированный генератор

Предлагается механическое циклическое сжатие пьезоэлементов с использованием сил притяжения и отталкивания дисковых постоянных магнитов, размещенных на свободных концах рычагов и на роторе, в результате чего все пьезоэлементы работают поочередно на сжатие, на обкладках которых вследствие прямого пьезоэффекта генерируется пульсирующее напряжение. Повышение мощности преобразователя достигается за счет увеличения числа рычагов с пьезоэлементами, размещенными по обеим сторонам системы статор - ротор, и за счет того, что преобразователь имеет дополнительные кольцевые обмотки, расположенные с небольшим зазором по обеим сторонам диска ротора, с дисковыми постоянными магнитами по его окружности, магнитное поле которых при вращении ротора пересекает провода обмоток, благодаря чему на участках обмоток, расположенных под роторными дисковыми постоянными магнитами, наводится переменная ЭДС, которая суммируется по всем участкам и составляет дополнительную часть энергии, получаемой от преобразователя. В конечном итоге комбинированный генератор представляет собой два источника: один источник напряжения с высоким внутренним сопротивлением; второй – источник тока с малым внутренним сопротивлением.

С целью выявления особенностей такого генератора были проведены теоретические исследования одного сегмента.

При последовательном соединении выводов пьезоэлементов и, размещенных на статоре катушек индуктивности (для упрощения расчетов было выбрано число витков  $n = 100$ ), результирующая характеристика может быть рассчитана путем суперпозиции характеристик сигнала с пьезоэлемента и с катушек индуктивности.

Расчет напряжения на выходе катушек индуктивности был произведен по формуле:

$$E = B \cdot L \cdot V,$$

где  $B = 0,6 \sim 0,8$  Тл,  $L$  – длина провода,  $V$  – скорость вращения роторного диска. Диапазон изменения частоты вращения ротора от 5 об/с до 32 об/с.

Расчет напряжения на выводе пьезоэлементов был произведен экспериментальным способом при помощи осциллографа. При эксперименте использовались пьезокерамические элементы цилиндрической формы, а также дисковые постоянные магниты с осевой намагниченностью.

График зависимости напряжения от частоты вращения роторного диска представлен на рис. 2.





# АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА АНАЛИЗА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ (АС АЭД)

С. Г. Валеев, С. В. Куркина, А. Ю. Михеев, Д. В. Ведута

**Введение.** Информатизация и компьютеризация в современном обществе приобретают все больший размах. Компьютеры входят во все новые и новые области человеческой практики, трансформируя при этом не только отдельные действия, но и человеческую деятельность в целом.

Непременным условием повышения эффективности управленческого труда является оптимальная информационная технология, обладающая гибкостью, мобильностью и адаптивностью к внешним воздействиям.

Разработка математических методов и моделей оптимизации отдельных производственно-экономических процессов, общественного производства, в целом, оказалась тесно связанной с конкретными проблемами экономической теории стоимости, ценообразования. Во всей полноте стоит проблема измерения затрат и результатов производства, эффективности капиталовложений и путей рационального использования ресурсов производства. Существует необходимость выявления сущности предельных величин, их роли в экономическом анализе, в процессах ценообразования и определения эффективности затрат.

Эти задачи призвана решать «Автоматизированная система анализа экономической деятельности предприятия» (АС АЭД). В статье рассматриваются структура пакета, его функциональное наполнение и процедуры, разрабатываемые в настоящее время.

**Структура и функциональное наполнение пакета АС АЭД.** На данный момент программный комплекс включает в себя три подсистемы, реализующие соответственно: - получение оптимальных регрессионных моделей функционирования звеньев производства, - решение задач оптимизации, - контроль качества изделий производства с использованием регрессий и технологических карт. Основной задачей пакета является получение оптимальных регрессионных моделей [1].

**Сценарии поиска оптимальной регрессии.** При реализации подхода регрессионного моделирования (РМ) алгоритм обработки может быть представлен в следующем виде [2] (рис. 1), где 1 – загрузка таблицы экспериментальных данных (ТЭД) для исходной модели; 2 – нужны ли преобразования?; 3 – преобразование (новая исходная модель); 4 – есть ли выбросы?; 5 – чистка ТЭД; 6 – пригодна ли модель для прогноза?; 7 – можно ли применить внешний критерий?; 8 – можно ли осуществить полный перебор?; 9 – выбор глобального критерия качества модели; 10 – отсутствует ли эффект мультиколлинеарности?; 11 – все ли слагаемые модели значимы?; 12 – наблюдается ли средняя мультиколлинеарность?; 13 – дальнейшие исследования. Используются следующие методы обработки: Р11 – множественная регрессия для исходной модели, Р12 – множественная регрессия для набора моделей, Р13 –

полный перебор, P2 – пошаговая регрессия, P22 – алгоритм включения с исключением, P3 – неполный перебор, P4 – случайный поиск с адаптацией, P5 – гребневое оценивание, P6 – робастное оценивание. Пункты с первого по пятый – предварительная обработка; с шестого по девятый – выбор меры и метода структурной идентификации (процедуры P12, P13, P2, P3, P4 – поиск оптимальной модели по глобальной мере); пункты с десятого по двенадцатый – анализ на значимость и мультиколлинеарность.

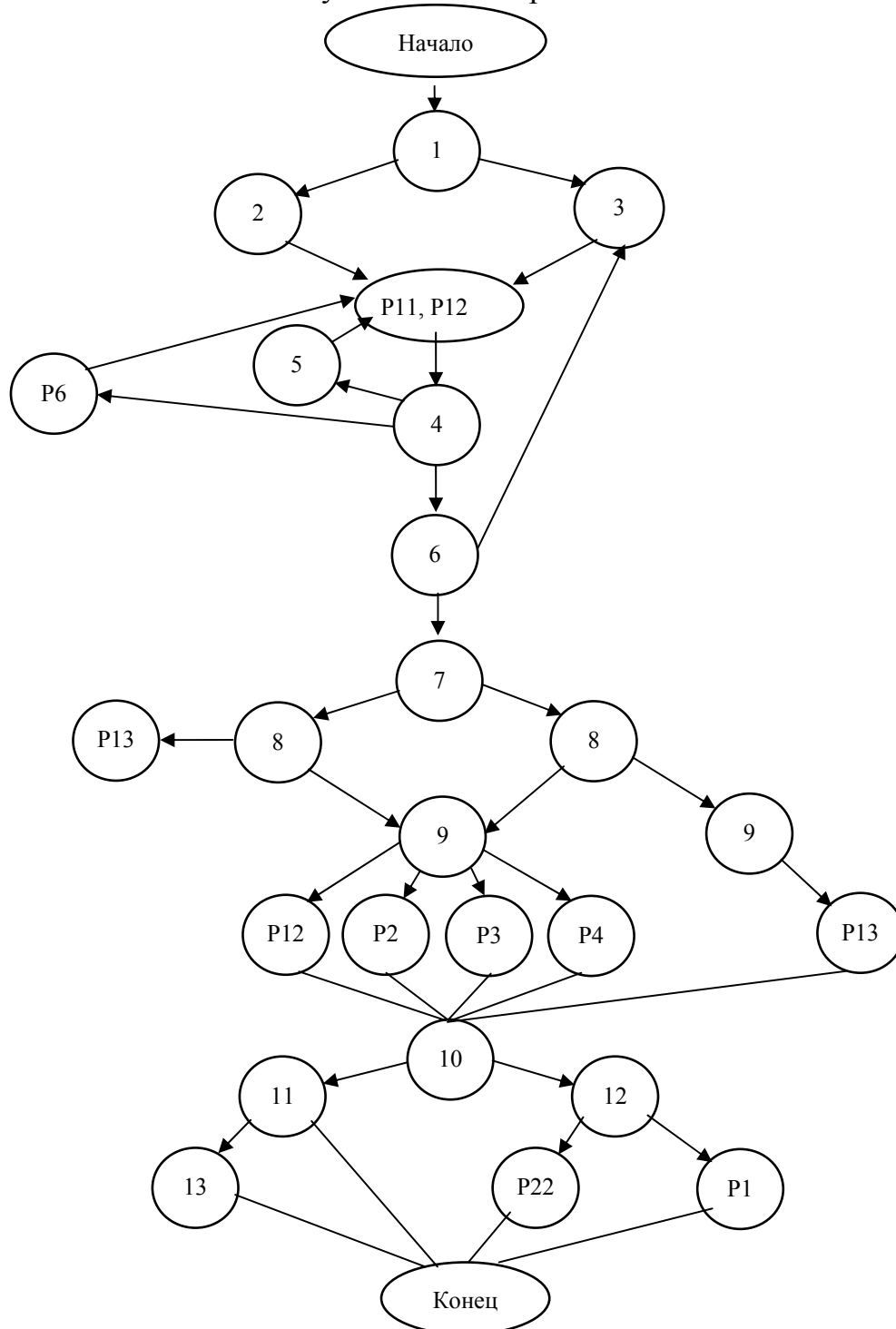


Рисунок 1. Граф этапов РМ.

Результатом адаптации рассмотренного алгоритма к конкретному наблюдательному материалу является тот или иной сценарий обработки. При этом возникает проблема выбора оптимальной стратегии расчетов (оптимального сценария).

В нашем случае конкурирующие сценарии появляются на ветке 9 – 14. Просматриваются три альтернативных сценария:

1) Поиск оптимальной модели по глобальному критерию качества; 2) проверка на мультиколлинеарность найденной модели; 3) проверка на значимость регрессоров в модели по  $t$ -статистике.

1) Поиск оптимальной модели по глобальному критерию качества; 2) проверка на значимость регрессоров в модели по  $t$ -статистике; 3) проверка на мультиколлинеарность найденной модели.

1) Выбор значимых по  $t$ -статистике регрессоров на базе полинома выбранной степени; 2) проверка на мультиколлинеарность найденной модели; 3) поиск оптимальной структуры на базе найденной модели по глобальному критерию качества.

В настоящее время эти и другие сценарии исследуются на предмет соответствия производственным данным.

**Модификации.** Модифицированы управляющий модуль, методы взаимодействия модулей для процедур регрессионной анализа, библиотека математических операций (в т.ч. алгоритм Хаусхолдера).

В связи с переходом на среду разработки Turbo Delphi реализовано графическое представление результатов в библиотеке процедур анализа соблюдения предположений.

Проводится работа по модификации следующих модулей:

- «Метод Кохрейна-Оркатта»,
- «Метод сжатых оценок»,
- «Метод полного перебора»,
- «Метод пошаговой регрессии»,
- «Оптимизация».

Создается база данных для хранения переменных, которая необходима для обеспечения автоматизированного обмена данными между модулями.

**Заключение.** На данном этапе производится переосмысление и переработка накопленных методов и наработок, а также адаптация интерфейса для конечного пользователя.

Конечной целью является создание экспертной системы, используемой без наличия специальных знаний, что требует разработку базы знаний для анализа результатов и их объяснения на доступном для пользователя языке.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Валеев С.Г. Регрессионное моделирование при обработке данных. – Казань: ФЭН. 2001.



реализованы в виде подсистемы «Робастные методы оценивания» (РМО). В качестве объектов исследования выступают: лазерный ряд светолокационных наблюдений Луны, данные по фабрике «Русь».

**Алгоритмы.** С вычислительной точки зрения алгоритм робастного оценивания заключается в следующем [2].

Рассматривается линейная модель:

$$Y = X\beta + \varepsilon. \quad (1)$$

Требуется найти:

$$\min \sum_{i=1}^n \rho[(y_i - x_i\beta) / s].$$

Преобразуем систему уравнений

$$\sum_t \psi[(y_t - x_t'a) / s] x_{tj} = 0, j = 1, \dots, m, \quad (2)$$

где  $\psi(z) = \frac{d\rho(z)}{dz}$ , к виду

$$\sum_t w_t (y_t - x_t'a) x_{tj} = 0, j = 1, \dots, m, \quad (3)$$

причем  $w_t$  – вес придаваемый наблюдению  $t$  и

$$w_t = \psi[(y_t - x_t'a) / s] / [(y_t - x_t'a) / s]. \quad (4)$$

Выбор функции  $\rho$  и, соответственно,  $\psi(z)$  определяет вариант метода оценивания.

Для системы (1) оценка вектора параметров находится по формуле обобщенного метода наименьших квадратов

$$a = (X'WX)^{-1} X'WY, \quad (5)$$

где  $W^1$  – диагональная матрица, составленная из весовых коэффициентов  $w_t$ , определенных выше.

Вычисление вектора  $a$  может быть реализовано в виде итеративной процедуры в силу необходимости задания весов  $w_t$ , зависящих от значений  $a$  и  $s$ . Пусть начальные приближения  $a^0$  для вектора структурных параметров и  $s^0$  для средней меры рассеяния заданы. Тогда, исходя из вида функции  $\psi$  (может быть любая функция из методов, описанных выше), вычисляются начальные значения весовых коэффициентов  $w_t^0$  и формируется оценка

$$a^1 = (X'W^0X)^{-1} X'W^0Y. \quad (6)$$

Далее весь цикл повторяется, исходя из нового значения  $a^1$ .

### **Модификация и интегрирование программного обеспечения.**

Пакет программ «Робастные методы оценивания» был модифицирован в комплекс визуального программирования Turbo Delphi, ориентируясь на имеющиеся в нем компоненты и функциональные возможности. Некоторым изменениям подвергся и сам интерфейс программы. Он отличается простым, наглядным представлением и удобной навигацией.

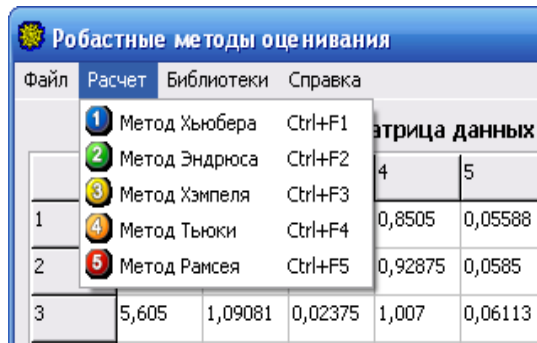


Рис.1. Интерфейс пакета программ «Робастные методы оценивания»

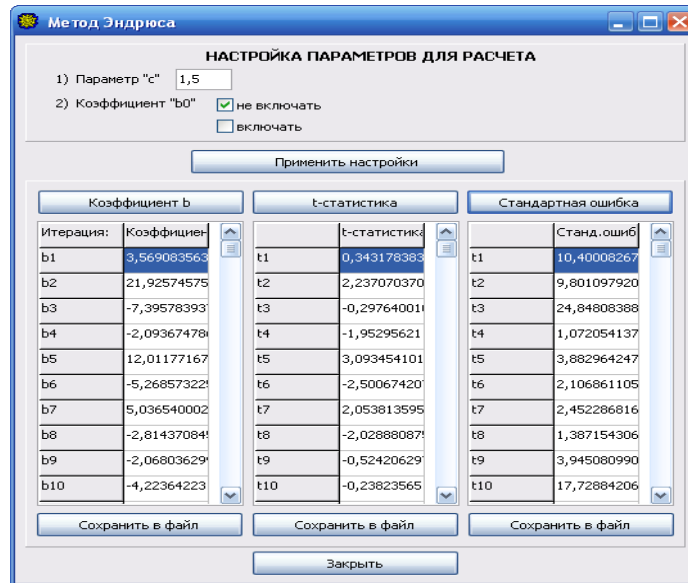


Рис.2. Интерфейс пакета: настройка.

Визуальный результат интегрирования подсистемы «Робастные методы оценивания» (РМО) в программный комплекс «Система поиска оптимальных регрессий, версия 2.0» (СПОР 2.0) представлен на следующем рисунке (рис. 3).

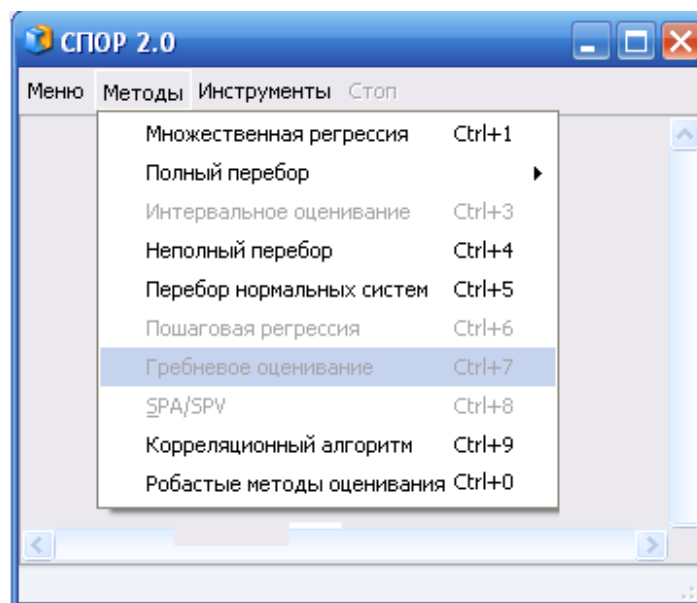


Рис.3. Программный комплекс «Система поиска оптимальных регрессий, версия 2.0».

**Численные эксперименты.** Лазерный ряд светолокационных наблюдений Луны и данные по фабрике «Русь» были исследованы с помощью пяти робастных методов оценивания с учетом изменения для каждого метода параметра «засорения» «с». Выполнена численная проверка эффективности работы методов Хьюбера, Эндрюса, Хэмпеля, Тьюки и Рамсея по эмпирическим данным, как по отдельности, так и относительно стандартного метода наименьших квадратов (МНК).

Таблица 1

**Результаты по данным фабрики «Русь»**

	<i>C</i>	<i>Sigma</i>	<i>R2</i>	<i>F</i>	<i>Sigma Delta</i>
Эндрюс	1,5	2,56148	0,991677	187,008	1,51909
Тьюки	2	3,59766	0,983625	94,0236	1,49570
Хемпель	2,4	2,10717	0,99437	277,09	1,09739
Хьюбер	1,2	1,91121	0,995372	337,163	0,918469
Рамсей	1,3	1,93671	0,99525	328,3	1,36786
МНК		1,83162	0,998676	1158,68	3,45477

По данным фабрики и внешней мере Sigd метод Хьюбера [3] по сравнению с остальными робастными методами и МНК признан наилучшим (Рис.4).

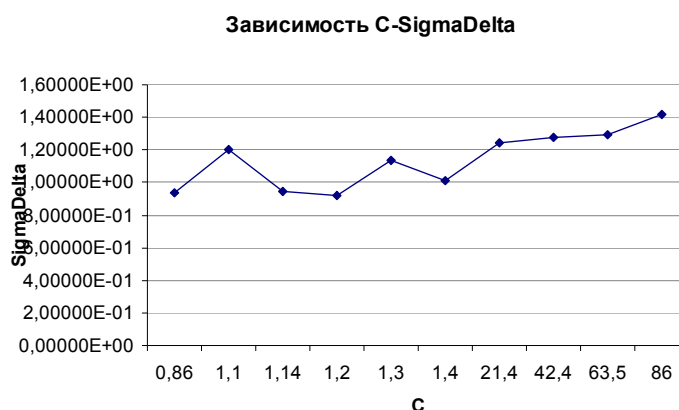


Рис.4. Зависимость C-SigmaDelta

Анализ остатков для метода Хьюбера показал, что полученная модель нуждается в дальнейшем улучшении.

Таблица 2

**Результаты по данным «Лазерный ряд светолокационных наблюдений Луны»**

	<i>C</i>	<i>Sigma</i>	<i>R2</i>	<i>F</i>	<i>SigmaDelta</i>
Эндрюс	1,9	1,17333E-08	0,76064	68,9274	7,99450E-09
Тьюки	1,7	1,17521E-08	0,76012	69,1661	7,65215E-09
Хемпель	1,7	1,17538E-08	0,76011	69,1608	7,65237E-09
Хьюбер	1,3	1,17614E-08	0,76011	69,1557	7,65217E-09
Рамсей	1,3	1,20052E-08	0,751187	64,8682	8,29658E-09
МНК		1,17173E-08	0,813858	94,73191	1,15938E-08





## ВОССТАНОВЛЕНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НЕЧЕТКИХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

С. Г. Валеев, Т. В. Афанасьева, Е. В. Казаева, А. А. Ивахина, А. О. Козлов

**Введение.** При приеме на работу все чаще работодатели предъявляют набор компетенций, которыми должен обладать их будущий сотрудник. Компетенция определяется как основное качество индивидуума, которое является причиной эффективного или превосходного выполнения работы. В данной статье рассматриваются вопросы восстановления и прогнозирования компетенций на основе нечетких временных рядов. Представление исходных данных для анализа в нечетком выражении может быть обусловлено экспертным оцениванием состояния системы, а также несовершенными способами измерения параметров. Модель компетенций удобна тем, что позволяет достаточно точно предсказать, насколько тот или иной человек соответствует своему служебному статусу и что именно в его компетенциях требует развития [4]. Прогноз нам дает тенденцию развития компетенций, изменение их во времени.

Исходные данные для анализа могут быть представлены в нечетком выражении, что может быть обусловлено экспертным оцениванием состояния системы, а также несовершенными способами измерения параметров. Для описания изменений этих нечетких величин во времени вводится нечеткий временной ряд.

Для решения задачи моделирования компетенций использовались нечеткие временные ряды, методы регрессионного анализа, нейросетевого прогнозирования, в частности, применялась искусственная нейронная сеть обратного распространения ошибки.

Результатом работы является подсистема интеллектуального анализа временных рядов. При этом решалась задача восстановления и прогнозирования нечетких временных рядов нейронными сетями, эффективность которых по сравнению с классическим анализом временных рядов также представляет.

**Алгоритм моделирования нечетких временных рядов.** Моделирование компетенций осуществлялось на основе следующего алгоритма:

1. преобразование временного ряда в нечеткий временной ряд;
2. восстановление и прогнозирование нечетких параметров временных рядов с помощью нейронных и динамических регрессионных моделей;
3. обратное преобразование нечетких параметров в четкие значения временного ряда;
4. оценка эффективности восстановления и прогноза.

Фазификация данных представляет собой процедуру приведения исходного временного ряда к нечеткому временному ряду, выраженному с помощью лингвистических термов, а также вычисления степеней

принадлежности каждого элемента временного ряда к нечеткому множеству. В качестве функции принадлежности выбрана функция Гаусса:

$$MF = \exp\left(-\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2\right). \quad (1)$$

Используя правила вывода типа *если a есть A, то b есть B*, где  $a, b$  – значения исходного ряда,  $A, B$  – нечеткие множества, определяется новый ряд, состоящий из максимальных степеней принадлежности. Значения этого ряда будут в диапазоне (0,1).

Для восстановления и прогнозирования использовалась искусственная нейронная сеть обратного распространения, принцип действия которой состоит в следующем:

1. множество входных сигналов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  поступает на искусственный нейрон;
2. каждый сигнал умножается на соответствующий вес  $w_1, w_2, \dots, w_n$  и поступает на суммирующий блок;
3. суммирующий блок складывает взвешенные входы алгебраически, создавая выход;
4. сигнал далее преобразуется пороговой (активационной) функцией:

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (2)$$

и дает выходной нейронный сигнал;

5. этот сигнал сравнивается с соответствующим целевым вектором, разность (ошибка) с помощью обратной связи подается в сеть и веса изменяются так, чтобы минимизировать ошибку.

Кроме нейросетей использовались методы динамического регрессионного моделирования. Для нахождения коэффициентов тренда из множества конкурирующих применяется метод наименьших квадратов (МНК). Его суть заключается в построении такой линии регрессии, чтобы минимизировать квадраты отклонений этой линии от наблюдаемых точек. Далее производится гармонический анализ остатков после тренда по следующему алгоритму:

1. Преобразованием Фурье любой ряд динамики можно представить в виде суммы конечного числа гармоник. Привлекается регрессионная модель вида

$$Y(t) = \sum_{i=1}^k A_i \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T_i} + \varphi_i\right). \quad (3)$$

2. Для выявления гармонических составляющих в анализируемых остатках нужно исследовать их спектральную плотность мощности  $S(f_k)$  на полупериоде исследуемого ряда:  $k=0, 1..N/2$ . Максимумы в спектре целесообразно искать на частотах  $\frac{2\pi}{b}$ ;  $b=0, 1, 2 \dots N/2$ .

Обратное преобразование пар  $(w, v) \rightarrow (A, \varphi)$ :

$$\begin{cases} A = \sqrt{w^2 + v^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{v}{w}\right), \end{cases} \quad (4)$$

определяет коэффициенты модели и при подстановке в (3) дает постулируемую модель:

$$Y(t) = At + B + \sum_{i=1}^k A_i \operatorname{Sin}\left(\frac{2t\pi}{T_i} + \varphi_i\right). \quad (5)$$

Описание последующих этапов представлено в современных журнальных публикациях по расширению подхода ДРМ [2]. Одним из них, в частности, является этап «авторегрессия - скользящее среднее» (АРСС). Идентификация процесса АРСС(p,q) основана на умножении соотношения

$$\varepsilon(t) = \beta_1 \varepsilon(t-1) + \dots + \beta_p \varepsilon(t-p) + \delta(t) - \theta_1 \delta(t-1) - \dots - \theta_q \delta(t-q) \quad (6)$$

на  $\varepsilon(k), (k = t, t-1, t-2, \dots)$ , переходе к математическим ожиданиям от получившихся выражений и использовании образовавшихся связей между автоковариациями процесса  $\varepsilon(t)$  и параметрами АРСС-модели для определения неизвестных значений этих параметров по необходимому набору подсчитанных по исходным статистическим данным выборочных автоковариаций  $\hat{\gamma}(\tau), (\tau = 0, 1, 2, \dots)$ .

Дефазификацией называется процедура преобразования нечеткого множества в четкое число. Дефазификация осуществляется по методу центра тяжести:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^k u_i \mu_A(u_i)}{\sum_{i=1}^k \mu_A(u_i)}, \quad (7)$$

где  $u_i$  – минимальное значение диапазона, в который попал элемент ряда;  $\mu_A(u_i)$  – значение функции принадлежности.

Для оценки эффективности вычисляется СКО:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{(n-1)}}. \quad (8)$$

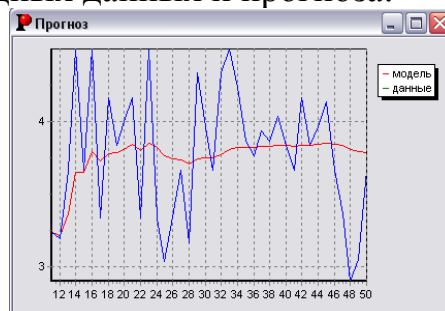
**Программное обеспечение.** Разработанная программа построения нейросетей может быть использована в качестве самостоятельного независимого программного обеспечения для восстановления и прогнозирования нечетких временных рядов. Программа позволяет загрузить исходные данные, осуществить фазификацию и построить модель с помощью алгоритма нейронных сетей.

На форме «Нейронная сеть» проставляется размер входного окна, количество элементов временного ряда для анализа. Если прогноз делается на будущее, то количество элементов временного ряда для анализа равно количеству элементов ряда. Если прогноз делается по выборке, то это количество в сумме с размером входного окна должно давать количество элементов исходного ряда. Количество предсказаний равно размеру входного окна (автоматически). Количество нейронов в каждом слое можно менять, но на последнем слое должен быть всегда 1 нейрон. При обучении НС происходит настройка весов по алгоритму обратного распространения ошибки. Обучение длится 10-15 минут. После обучения прогнозные значения проставляются в таблицу, аналогичную исходной.

Программа позволяет дефазифицировать полученные значения, оценить их точность, построить графики, сохранить результаты в текстовый файл.

Для построения динамической регрессии использовался программный комплекс АС ДРМ [2] современной версии.

**Результаты исследований.** В качестве исходных данных использовались обобщенные оценки компетенции студентов, измеренные за каждый месяц в течение 5 лет обучения. Время работы программы по анализу данных с использованием нейросети составило 11 минут. В результате был получен следующий график исходных данных и прогноза:



Проводилось сравнение методов нейронной сети и динамического регрессионного моделирования. В итоге получили следующие результаты: НС-модель лучше по внутренней точности ДРМ-модели на 5%, но НС-модель прогнозирует хуже ДРМ-модели на 3-4% по внешней точности и является более затратный по времени получения.

**Заключение.** Нечеткая логика является универсальным инструментом для аппроксимации нелинейных зависимостей. Данные, получаемые в результате фазификации, представляют особый интерес ввиду удобства их восприятия. К ряду, представленному в виде лингвистических значений, можно применять аппарат нечеткой логики, что существенно облегчает его обработку.

Применение компетентностного подхода составляет ключевой элемент новизны будущих государственных проектов образования. Моделирование компетенций в данной работе осуществлялось на основе представления исходных данных нечетким временным рядом и дальнейшего прогнозирования с помощью нейронной сети и методов ДРМ. В ходе

исследования выяснилось, что НС-модель лучше ДРМ-модели по внутренней точности, но хуже по точности прогнозирования; время обработки данных нейронной сетью значительно больше времени при динамическом регрессионном моделировании, составляющем несколько секунд.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов В. В. Нечеткие модели и сети. – М.: Горячая линия-Телеком, 2007. – 284с.
2. Валеев С. Г., Регрессионное моделирование при обработке наблюдений. – М.: Наука, 1991 – 272с.
3. Ротштейн А. П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети. – Винница: Универсум – Винница, 1999. -320с.
4. Спенсер Л. М. Компетенции на работе. – <http://www.hrportal.ru/pages/book/competition.php>.
5. Ярушкина Н. Г. Основы теории нечетких и гибридных систем: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 320с.
6. Яхьяева Г. Э. Нечеткие множества и нейронные сети. – М.: Интернет-университет информационных технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 316 с.



*Валеев Султан Галимзянович, доктор физико-математических наук, профессор, окончил физический факультет Казанского государственного университета, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики УлГТУ. Имеет статьи и 6 монографий в области астрометрии и небесной механики, математической статистики и разработки информационно-математических технологий.*

*г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32. тел. 778118, [sgv@ulstu.ru](mailto:sgv@ulstu.ru)*

*Афанасьева Татьяна Васильевна, кандидат технических наук, окончила радиотехнический факультет Ульяновского государственного технического университета, доцент кафедры прикладной математики и информатики УлГТУ. Имеет статьи в области информационных технологий.*

*г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32. тел. 778118, [t.afanaseva@ulstu.ru](mailto:t.afanaseva@ulstu.ru)*

*Казаева Екатерина Владимировна, выпускница 2008 года экономико-математического факультета Ульяновского государственного технического университета по специальности «прикладная математика».*

*Ивахина Анна Александровна, студентка группы ПМд-51 экономико-математического факультета Ульяновского государственного технического университета.*

*Козлов Александр Олегович, студент группы ПМд-51 экономико-математического факультета Ульяновского государственного технического университета.*

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА ПРОДУКЦИИ НА ОСНОВЕ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

С. Г. Валеев, Г. В. Мурнаева

**Введение.** Регрессионное моделирование и методы контроля качества являются важными и действенными инструментами, позволяющими анализировать технологические процессы и разрабатывать эффективные методы управления качеством [1, 2].

Как правило, на практике процесс контролируется сразу по нескольким показателям, которые часто коррелированы, и их независимый контроль может привести к значительным погрешностям. В такой ситуации необходимо применение многомерных контрольных карт и карт регрессионных остатков.

В случае, когда набор контролируемых показателей включает как независимые переменные (факторы), так и зависимые (отклики), исследуемым объектом является система одновременных уравнений.

Для решения задач контроля качества продукции на основе оптимальных регрессионных моделей технологического процесса, в рамках программного комплекса «Автоматизированная система анализа экономической деятельности» предприятия (АС АЭД) реализован алгоритм решения системы одновременных уравнений (СОУ).

**Алгоритм решения СОУ.** Для решения СОУ в пакете АС АЭД создан отдельный модуль, взаимодействующий с подсистемами «Моделирование» и «Контрольные карты». Предусмотрена возможность решения при зависимых и независимых откликах.

Алгоритм решения состоит из следующих этапов:

1. Определяются переменные, для которых будет строиться зависимость (необходимо выбрать какие переменные будут факторами, а какие – откликами). Выбрать зависимые переменные можно в ходе анализа.

На первом этапе предполагается получить систему вида:

$$\begin{aligned} Y_1 &= X\vec{\beta}_1 + \vec{\varepsilon}_1, \\ &\dots \\ Y_n &= X\vec{\beta}_n + \vec{\varepsilon}_n. \end{aligned} \tag{1}$$

В (1) модели строятся в предположении, что отклики не являются зависимыми друг от друга.

2. Необходимо выявить взаимозависимость откликов, вычисляя частные коэффициенты корреляции.

3. По значимости коэффициентов частной корреляции и зависимостям, полученным на первом этапе, делается вывод о составе эндогенных переменных в каждом уравнении. Например, если значимым оказался

коэффициент между  $Y1$  и  $Y3$ , в правую часть первого уравнения необходимо включить  $Y3$ , а в третье –  $Y1$ .

4. По полученным на предыдущем этапе данным строятся модели, формирующие систему вида:

$$\begin{aligned} Y_1 &= X\vec{\beta}_1 + Y\vec{\alpha}_1 + \vec{\varepsilon}_1, \\ &\dots \\ Y_n &= X\vec{\beta}_n + Y\vec{\alpha}_n + \vec{\varepsilon}_n. \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что в полученной системе некоторые отклики, вошедшие в правые части уравнений на третьем этапе, могут оказаться незначимыми.

**Результаты.** Для проведения исследования использовались результаты контроля процесса очистки смазочно-охлаждающей жидкости по девяти показателям (данные представлены ОАО «Северсталь», г. Череповец)[1]:

- $Y_1$  – содержание железа, ppm;
- $Y_2$  – содержание посторонних масел, %;
- $Y_3$  – зольность, мг/л;
- $X_1$  – концентрация эмульсии, %;
- $X_2$  – электропроводность, мкСм/см;
- $X_3$  – индекс устойчивости;
- $X_4$  – число омыления;
- $X_5$  – солесодержание, мг/л;
- $X_6$  – сульфаты, мг/л.

На первом этапе произведен поиск оптимальной модели для каждой из выбранных зависимых переменных методом полного перебора, подсчитаны остатки. Получена система вида:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 44.595 + 18.878 X_1 + 0.131 X_2 + 0.114 X_5, \\ Y_2 &= 93.423 + 1.824 X_1 + 0.010 X_2 - 0.760 X_4 - 0.006 X_5, \\ Y_3 &= 546.028 + 69.808 X_1 + 0.836 X_2 - 4.577 X_4. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее были рассчитаны коэффициенты частной корреляции. Учитывая значимость коэффициентов между первым и третьим, а также между вторым и третьим откликами, сделан вывод, что в правую часть первых двух уравнений войдет в качестве зависимой третья переменная. Соответственно третье уравнение будет иметь в составе первую и вторую переменную.

Вывод о том, какие из зависимых переменных  $x$  войдут в каждое из уравнений СОУ сделан на основе результатов, полученных на первом этапе.

На втором этапе произведен поиск коэффициентов зависимых уравнений методом полного перебора по внешнему критерию - сигма дельта ( $\sigma\Delta$ ). Получены следующие модели:



$$\begin{aligned}
Y_1 &= 41.9416 + 0.1326 Y_3 + 12.269 X_1 + 0.1076 X_5, \\
Y_2 &= 93.1384 + 2.051 X_1 - 0.764 X_4, \\
Y_3 &= 448.76 + 0.6818 Y_1 + 55.854 X_1 + 0.6644 X_2 - 4.086 X_4,
\end{aligned}
\tag{4}$$

Значения ошибок меры для каждого отклика составили соответственно  $\sigma\Delta=18.0317$ ,  $1.17657$  и  $41.7609$ , что ниже, чем у первоначальной модели ( $\sigma\Delta=19.485$ ,  $1.2461$ ,  $46.735$ ).

Проведен многомерный статистический контроль как по всему множеству из девяти показателей процесса очистки, так и по его каждому показателю.

Максимальное значение статистики Хотеллинга, найденное для исходной совокупности данных, оказалось равным  $T^2 = 20.39$ , а критическое значение на уровне значимости  $\alpha = 0.005$   $T_{кр}^2 = 34.48$ , т. е. процесс статистически управляем. Такой же вывод можно сделать и по карте Хотеллинга, на которой ни один из показателей процесса не выходит за контрольные границы.

Также построена контрольная карта Хотеллинга по полученным регрессионным остаткам. Максимальное значение статистики Хотеллинга равно  $T^2 = 11.72$ , а критическое значение на уровне значимости  $\alpha = 0.005$   $T_{кр}^2 = 15.21$ , т. е. процесс статистически управляем. Все значения на карте находятся внутри контрольных границ.

Были получены контрольные карты отдельно для показателей каждой из оптимальных моделей. Результаты также свидетельствуют о статистической управляемости процесса, т.к. на всех картах контрольные точки находятся в пределах границ.

**Заключение.** Многомерный контроль технологического процесса с использованием регрессионных зависимостей является достаточно эффективным инструментом в случаях, когда между показателями наблюдаются значительные корреляции и их независимый контроль может привести к пропускам фактической разладки процесса или его необоснованной остановке.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Валеев С.Г. Регрессионное моделирование при обработке данных. – Казань: ФЭН, 2001. – 296 с.
2. Клячкин В.Н. Многомерный статистический контроль технологического процесса. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 192 с.

•••••

*Валеев Султан Галимзянович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики УлГТУ. Г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32, тел. 778118, sgv@ulstu.ru*

# СТРУКТУРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ НА ОСНОВЕ РЕГУЛЯРНОГО ПОИСКА

С. Г. Валеев, Н. С. Монахова, Ю. В. Шищенко

**Введение.** Часто при обработке наблюдений и данных необходимо выявить наиболее информативные признаки, которые оказывают влияние на отклик. Если число регрессоров не превышает 10-15, то такая задача решается методом полного перебора. Но для большего числа регрессоров этот подход неприемлем из-за чрезмерных затрат машинного времени.

В таких случаях для поиска оптимальной структуры модели помимо случайного поиска может быть применен метод регулярного поиска (РП).

**Методы оптимизации функционалов с булевыми переменными.** Задачу поиска оптимального набора регрессоров можно рассматривать как задачу оптимизации функционалов с булевыми переменными, если ввести целочисленные переменные  $z_j$  ( $j=1, \dots, n$ ), точнее, булевы переменные, принимающие значения 0 или 1 [6].

Обычная модель регрессионного анализа

$$y_i = \sum_{j=0}^{p-1} \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

при введении булевого вектора переписывается в виде

$$y_i = \sum_{j=0}^{p-1} \beta_j x_{ij} z_j + \varepsilon_i. \quad (2)$$

При этом, если компонента вектора  $Z$   $z_j$  равна 1, то  $X_j$  входит в модель, а иначе ( $z_j=0$ ) – не входит в нее.

Очевидно, что при всех  $z_j=1$  (1) и (2) совпадают; если же предполагать, что коэффициенты  $z_j$  могут принять значения 0 или 1, то количество различных структур будет равно  $2^p$ , т.е. количеству всех возможных структур, формируемых на основе исходной модели.

В [6] задача дискретной оптимизации для структурной идентификации сформулирована в виде задачи оптимизации функционала с булевыми переменными. В качестве функционала может быть принята любая из мер качества линейной модели множественной регрессии, например,  $R^2$ ,  $\sigma^2$ ,  $F$  и др.

О свойствах функционала (принадлежность определенному классу полимодальных функций, монотонность, однородность, и т.д.) мало что известно. Следовательно, для разработки неуплучшаемого для этого класса метода необходимы тщательные исследования функционала [6], которые, к тому же, достаточно затруднительны в общем случае.

Задачу оптимизации можно решить точнее и эффективнее по времени в сравнении с методами случайного поиска, если использовать регулярные (неслучайные) методы, соответствующие классу

функционала. После проверки принадлежности функционала к одному из классов полимодальных функционалов можно уже ставить вопрос о выборе регулярного метода оптимизации.

**Методы регулярного поиска.** Очевидно, что решение задачи оптимизации функционала необходимо начать с определения класса функционала. Алгоритм идентификации с учетом результатов, полученных в работах [1-5], может быть следующим:

1. Находим  $i$ -ю производную  $\Delta_i$  для функции  $f(X)$ . Если  $\forall i = \overline{1, n}$   $\Delta_i(X) = 0$  не более одного раза, то функция унимодальная, переходим к п.2. Иначе функция полимодальная, переходим к п. 4.

2. Находим производные  $\Delta_i^{\min}$  и  $\Delta_i^{\max}$   $\forall i = \overline{1, n}$ .

3. Если  $\Delta_i^{\min} \cdot \Delta_i^{\max} \geq 0$ , то функция  $f(X)$  является монотонной. Если  $\Delta_i^{\min} \cdot \Delta_i^{\max} > 0$ , то функция  $f(X)$  строго монотонна. Если  $\Delta_i^{\min} \cdot \Delta_i^{\max} < 0$ , то  $f(X)$  не монотонна.

4. Если в окрестности точки  $X^*$   $\Delta_j^* \cdot \Delta_{-j}^* \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, q}$ , то функция  $f(X)$  является локально монотонной. Если  $\Delta_j^* \cdot \Delta_{-j}^* < 0 \quad \forall j = \overline{1, q}$ , то  $f(X)$  – локально строго монотонная. В противном случае функция является немонотонной.

В основу большинства разрабатываемых алгоритмов оптимизации был положен метод локальной оптимизации, как наиболее универсальный из регулярных методов дискретной оптимизации [1].

**Программное обеспечение.** Программное обеспечение (ПО) «Структурная идентификация на основе регулярного поиска» является системой, реализующей автоматизированный поиск оптимального набора регрессоров и использующей библиотеки процедур анализа качества регрессионных моделей и диагностики соблюдения предположений РА-МНК [6].

**Результаты тестирования ПО.** Для проверки работоспособности и тестирования модуля использовался файл данных в виде двухгодичного ряда лазерных наблюдений уголкового отражателя на Луне.

После проведения анализа результатов работы ПО «Регулярный поиск» и сравнения его с результатами работы ПО «Процедуры случайного интервального поиска» для метода СПА [6] можно сделать следующие выводы:

- по всем критериям поиска ПО «Регулярный поиск» выдает более точные результаты, чем ПО «Процедуры случайного интервального поиска»;

- в сравнении с моделью пошаговой регрессии оба метода предпочтительней по точности выбора оптимальной структуры.

Результаты, полученные при тестировании, свидетельствуют об эффективности методов регулярного поиска.

**Заключение.** Задача оптимизации с помощью регулярного поиска может быть решена в два этапа. На первом необходимо исследовать заданную функцию качества, на втором – выбрать регулярный метод оптимизации.

Требует своего разрешения проблема трудоемкости идентификации при исследовании свойств функционала. При ее выполнении для сбора информации о функционале могут быть использованы различные методы случайного поиска. Однако и в этом случае не гарантируется точная классификация.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антамошкин А.Н. Регулярная оптимизация псевдобулевых функций. – Красноярск: Изд-во Красноярского гос. университета, 1989г.
2. Антамошкин А.Н. Оптимизация функционалов с булевыми переменными/ Под ред. Л.А. Растригина. Томск: ТГУ, 1987, 102с.
3. Антамошкин А.Н., Масич И.С. Неулучшаемый алгоритм условной оптимизации монотонных псевдобулевых функций. Электронный журнал «Исследовано в России», 64, стр. 703-708, 2004г. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articlec/2004/064.pdf>
4. Антамошкин А.Н., Масич И.С. Гриди-алгоритмы и локальный поиск для условной псевдобулевой оптимизации. Электронный журнал «Исследовано в России», 177, стр.2143-2149, 2003 г. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articlec/2003/177.pdf>
5. Антамошкин А.Н., Масич И.С. Идентификация свойств псевдобулевых функций. Электронный журнал «Исследовано в России», стр. 1391-1396, 2004 г. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articlec/2004/130.pdf>
6. Валеев С. Г. Регрессионное моделирование при обработке данных. – Казань: ФЭН. 2001. – 296 с.

●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

*Валеев Султан Галимзянович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики УлГТУ. Г.Ульяновск, ул. Северный Венец, 32, тел. 778118, sgv@ulstu.ru*

*Монахова Надежда Сергеевна, выпускница 2008 года экономико-математического факультета Ульяновского государственного технического университета.*

*Шищенко Юлия Владимировна, студентка группы ПМд-51 экономико-математического факультета Ульяновского государственного технического университета.*

## ПРИМЕНЕНИЕ И АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЕЙВЛЕТОВ ПРИ ОБРАБОТКЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

С. Г. Валеев, Ю. Г. Антонова, Е. А. Унянина

**Введение.** Вейвлет-анализ [3-5] является на сегодняшний день одной из самых перспективных технологий анализа данных. Его инструменты находят применение в самых различных сферах интеллектуальной деятельности [1], таких как экономика, медицина, обработка изображений и сигналов, геофизика и астрономия. Грубую классификацию вейвлет-алгоритмов можно сделать, выделив непрерывное и дискретное вейвлет-преобразования. Получить набор вейвлет-коэффициентов в случае дискретного преобразования быстрее, и этот набор дает достаточно точное представление о сигнале при меньшем объеме получаемых в результате данных. Непрерывное преобразование требует бóльших вычислительных затрат, но, вместе с тем, позволяет детальнее рассмотреть структуру сигнала.

Выбор того или иного метода зависит от поставленной задачи и типа имеющихся данных, которые необходимо обработать, от возможностей вычислительной техники и от того, в каком виде необходимо представить результат.

Данное исследование было посвящено сравнению эффективности применения вейвлетов Добеши, Морле и МНАТ-вейвлета, реализованных в программе «НЕВА», применению вейвлетов для анализа стационарности временных рядов, а также для их восстановления. Кроме реализованной программы «НЕВА» в ходе исследований применялась автоматизированная система АС ДРМ [2].

**Анализ сейсмической активности полуострова Камчатка.** Для анализа использовались дискретный вейвлет Добеши и два непрерывных - Морле и МНАТ.

В качестве исходных данных использовались результаты измерений сейсмической активности Камчатки с 2001 по 2006 годы. Измерения проводились каждую неделю; всего было произведено 265 отсчетов. Измеряемой величиной выступала глубина землетрясений.

Обсуждаемые ниже результаты получены с помощью МНАТ-вейвлета.

На рисунке 1 представлены исходный сигнал (рис. 1а); картина коэффициентов вейвлет-преобразования (рис. 1б) в таком диапазоне масштабов, чтобы охватить по возможности все крупномасштабные детали процесса; спектр плотности энергии (рис. 1в); скелетон (рис. 1г) и спектр плотности энергии коэффициентов, выделенных из шума (рис. 1д).

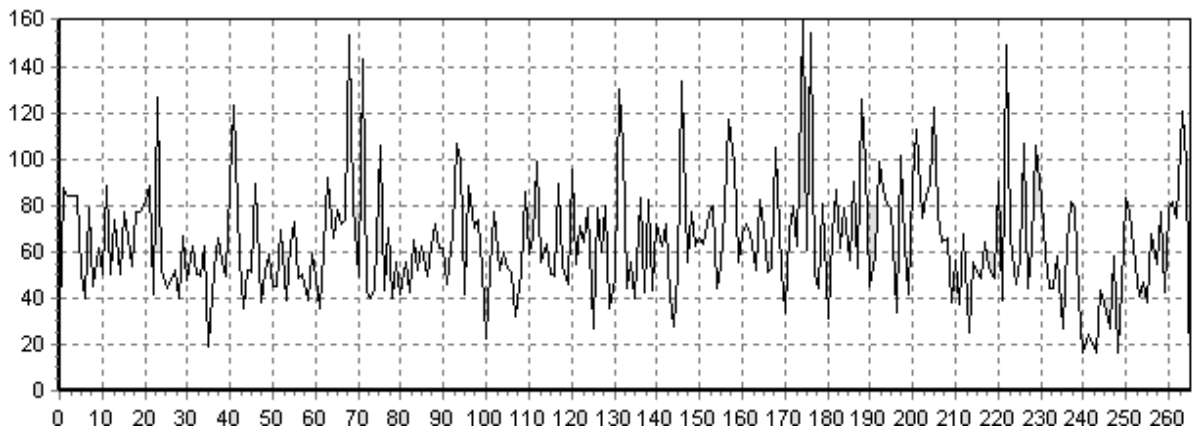


Рис. 1а Ежедневные значения глубины землетрясений за 2001-2006 гг. Исходный ряд

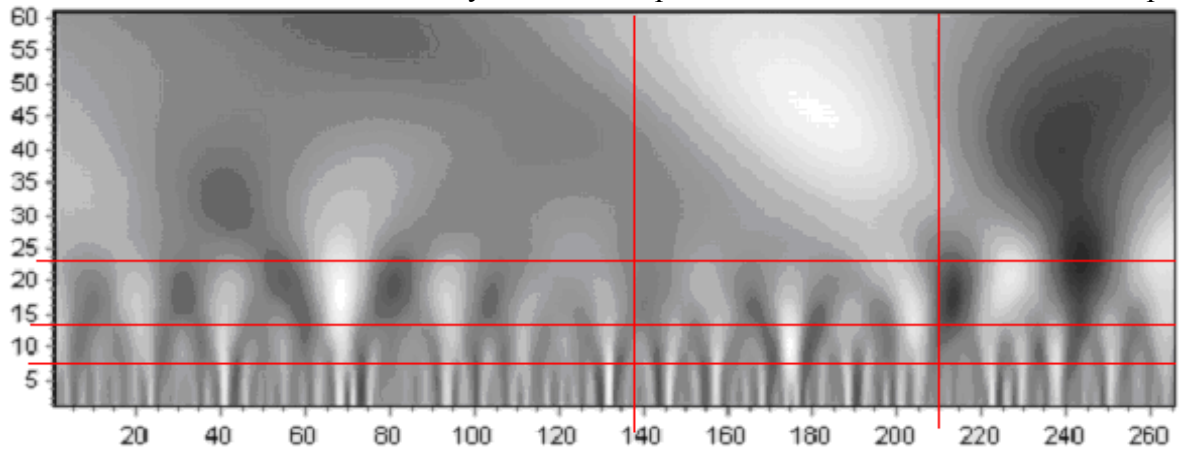


Рис. 1б Спектр вейвлет-коэффициентов

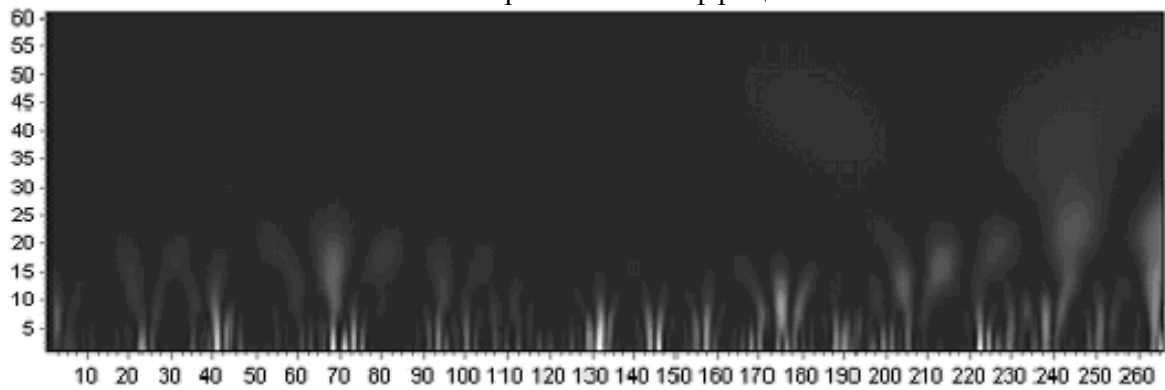


Рис. 1в Спектр плотности энергии

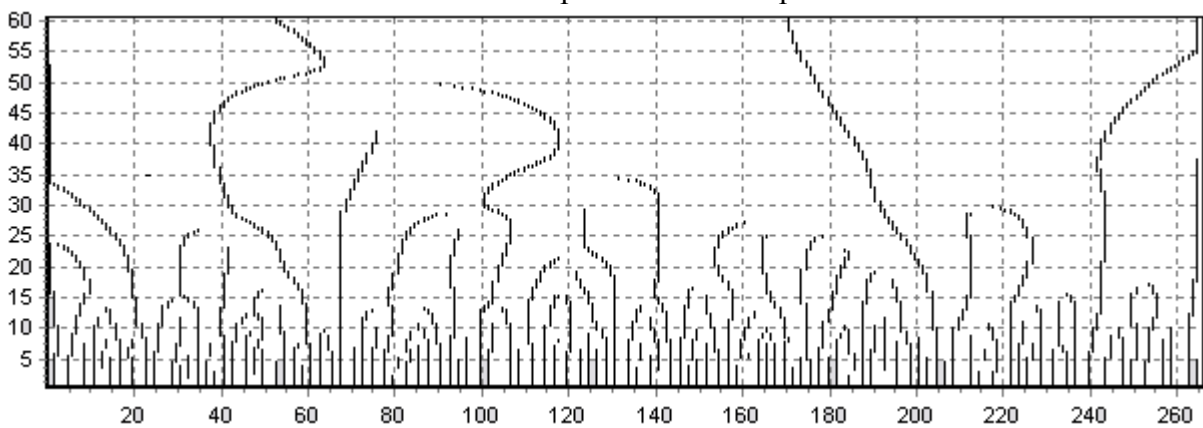


Рис. 1г Скелетон

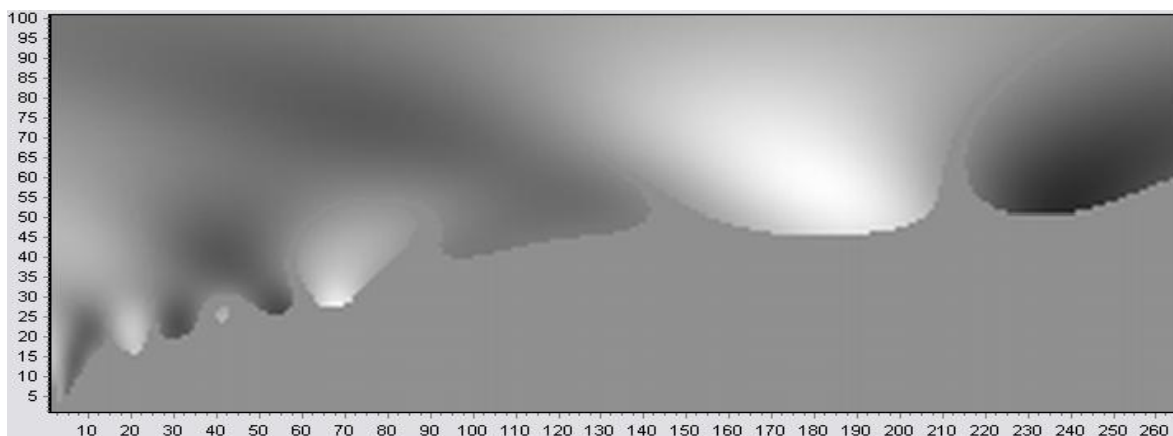


Рис.1д Спектр плотности энергии коэффициентов, выделенных из шума.

На рисунке 1б обращает на себя внимание тот факт, что масштаб около 23-25 недель разделяет картину коэффициентов на две заметно различающиеся области (зоны выделены линиями). В верхней части картины видны всего лишь две с небольшим крупномасштабные (с масштабом более 30 недель) детали. Совершенно отличная структура наблюдается в нижней части картины: практически вся временная динамика анализируемого процесса сосредоточена на масштабах до 25 недель. Несмотря на явную нестационарность процесса, вблизи некоторых масштабов видна похожая на периодическую структура.

Распределение энергии (рис. 1в) показывает области, в которых вейвлет-коэффициенты наиболее сильны, одинаково реагируя на уровень вне зависимости от знака, выделяя наиболее яркие периоды в 10, 20 и 60 недель. Причем, если локализовать всплески во времени, то можно установить время возникновения наиболее крупномасштабных деталей – 140-210, 211-260 недель.

Линии скелетона (рис. 1г), ориентированные вдоль оси масштабов указывают на наличие гармонических или квазигармонических компонентов в данных. Изогнутость и вытянутость линий вдоль оси времени указывает на наличие шумового компонента.

На рисунке 1д представлен результат очищения сигнала от шума. Как и предполагалось выше, периоды до 5 недель оказались шумовыми.

Таким образом, вейвлет-преобразование, одна из сильных сторон которого состоит в возможности анализа структуры неоднородных процессов, показало следующее. Существуют локальные периодичности глубины землетрясений с масштабами от 7 до 15 недель – здесь необходимо дополнительное изучение установления таких циклов. Масштабы меньше 5 недель вероятнее всего порождены шумовыми компонентами. Вейвлет-анализ не показывает устойчивости 60-недельного цикла, тем не менее, указывает на время возникновения всплесков.

Восстановление ряда осуществлялось с помощью вейвлета Морле; разработанный программный модуль интегрирован в программу «НЕВА».

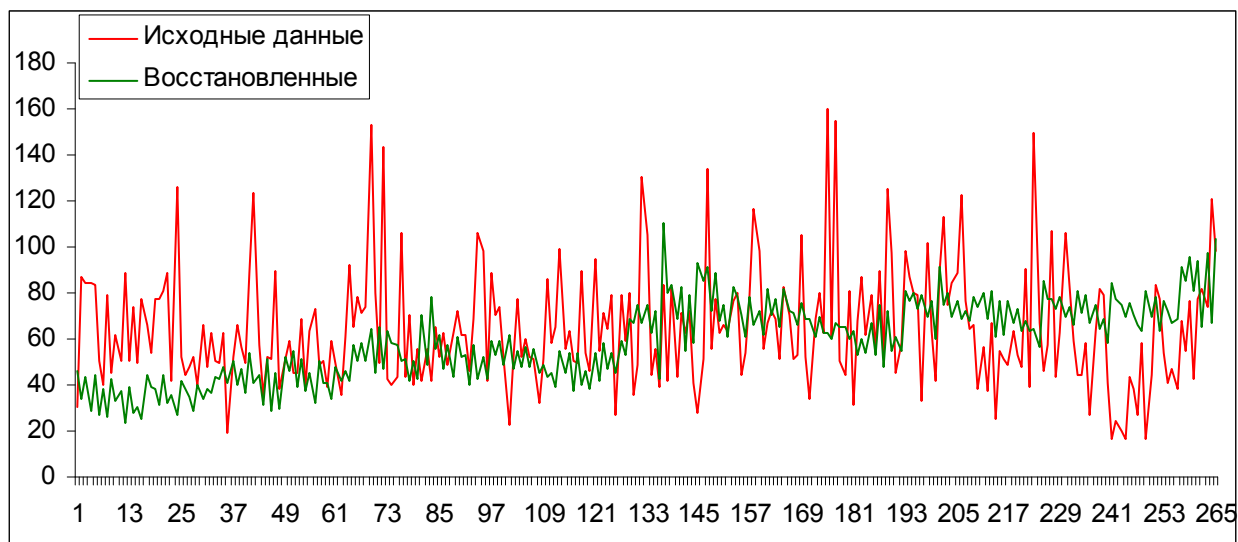


Рис. 2. Восстановление сигнала вейвлетом Морле.

Было произведено сравнение алгоритма восстановления ряда с помощью вейвлета Морле с алгоритмами восстановления, использующими вейвлеты Добеши и МНАТ в качестве базисных. Результаты сравнения представлены в таблице 1.

Таблица 1

Анализ восстановления

Вейвлет	Число отсчетов в сигнале	СКО
МНАТ	265	55,88307
Морле	265	29,11632
Добеши 3 порядка	265	22,82966
Добеши 6 порядка	265	22,43971

Можно сделать вывод, что наиболее эффективно работает дискретный вейвлет Добеши; причем эффективность восстановления повышается с увеличением его порядка. Это объясняется тем, что базисы на основе непрерывных вейвлетов, как правило, не являются строго ортонормированными, поскольку элементы базиса бесконечно дифференцируемы и экспоненциально спадают на бесконечности. У дискретных вейвлетов эти проблемы легко снимаются, что обеспечивает более точную реконструкцию сигналов.

**Заключение.** Анализ эффективности вейвлетов программного комплекса «НЕВА» показал предпочтительность использования для восстановления сигнала дискретного вейвлета Добеши. Представляется интересным проверить



этот результат при использовании ряда конкурирующих способов представления неравномерных временных рядов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Валеев С.Г., Сергеев Е.С. Методика, алгоритмы и программное обеспечение динамического регрессионного моделирования// Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 2003. № 5. С. 35-40.
2. Валеев С.Г. Регрессионное моделирование при обработке данных. Казань: ФЭН, 2001. 296 с.
3. Витязев В.В. Вейвлет-анализ временных рядов: Учебное пособие. – СПб.: Изд. С.-Петербург. унив-та, 2001. - 58 с.
4. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 464 с.
5. Киселев А. Приложения вейвлет-анализа.  
[http://www.basegroup.ru/filtration/wavelet\\_applications.htm](http://www.basegroup.ru/filtration/wavelet_applications.htm).



*Валеев Султан Галимзянович, доктор физико-математических наук, профессор, окончил физический факультет Казанского государственного технического университета, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики УлГТУ. Имеет статьи и 6 монографий в области астрометрии и небесной механики, математической статистики и разработки информационных технологий.*

*Г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32, тел. 439118, [sgv@ulstu.ru](mailto:sgv@ulstu.ru)*

*Антонова Юлия Геннадьевна, выпускница 2008 года экономико-математического факультета Ульяновского государственного технического университета.*

*Унянина Елена Александровна, студентка группы ПМд-51 экономико-математического факультета Ульяновского государственного технического университета*

## ВАРИАЦИИ СОСТАВЛЕНИЯ ЗАДАЧ НА ЭКСТРЕМУМ

С. Л. Вельмисова

Задачи на нахождение наибольшего или наименьшего значения переменной величины встречаются достаточно часто и в алгебре, и в геометрии. Конечно, старшеклассники, изучающие математический анализ, владеют навыками нахождения производной и исследования функции с ее помощью, но разнообразные методы нахождения экстремума без производной также вызывают интерес. При этом обогащается информационная база, развиваются логическое мышление и интуиция. Приведем несколько задач, при решении которых будем использовать различные приемы.

1. Квадратичная функция – одна из жемчужин школьной математики, свойства ее просты, понятны, хорошо демонстрируются на рисунках. Задачи на «мотивы» расположения вершины параболы формулируются в терминах наибольшего или наименьшего значений функции.

1) Найдите наименьшее значение функции  $y = \sqrt{12 - x^2 + 4x} - \sqrt{3 - x^2 + 2x}$ .

Решение:  $D(y): -1 \leq x \leq 3$ .  $y > 0$ , т.к.  $(12 - x^2 + 4x) - (3 - x^2 + 2x) = 9 + 2x > 0$ .

Рассмотрим

$$y^2 = (\sqrt{12 - x^2 + 4x} - \sqrt{3 - x^2 + 2x})^2 = -2x^2 + 6x + 15 - 2\sqrt{(12 - x^2 + 4x)(3 - x^2 + 2x)} = \\ -2x^2 + 6x + 15 - 2\sqrt{(6 - x)(x + 2)(x + 1)(3 - x)} = (\sqrt{(6 - x)(x + 1)} - \sqrt{(3 - x)(x + 2)})^2 + 3 \geq 3.$$

Очевидно, что минимальное значение функции равно  $\sqrt{3}$  при  $x = 0$ .

2) Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{3x^2 - 6x + 7}$ .

Решение: Пусть  $\frac{x^2 + 2x - 3}{3x^2 - 6x + 7} = a$ , тогда  $x^2(3a - 1) - 2(a + 1)x + 3 + 7a = 0$ .

Полученное квадратное уравнение имеет решение, если дискриминант неотрицателен:  $4((a + 1)^2 - (3a - 1)(3 + 7a)) \geq 0$ ,  $-20a^2 + 4 \geq 0$ ,  $|a| \leq \sqrt{5}$ . Таким образом,  $f_{\min} = -\sqrt{5}$ , а  $f_{\max} = \sqrt{5}$ . (Сравните решение с использованием производной с приведенным – результат будет явно не в пользу первого).

3) Прибыль предприятия определяется соотношением  $P = A\sqrt{x} - x$ , где  $x$  – расходы на производство,  $A = \text{const}$ . В 2006 году прибыль была положительна и составила 40% от расходов  $x$ . В 2007 году расходы выбраны так, чтобы прибыль была наибольшей. Найти отношение расходов в 2006 году к расходам 2007 года.

Решение: Прибыль в 2006 году  $P_{2006}(x) = A\sqrt{x} - x = 0,4x \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{5}{7}A$ .

Расходы же в 2006 году  $X_{2006} = \frac{25}{49}A^2$ . Наибольшее значение прибыли

определится, как максимальное значение квадратичной функции  $P(x) = -(\sqrt{x})^2 + A\sqrt{x}$  при  $\sqrt{x} = \frac{A}{2}$ , расходу  $X_{2007} = \frac{1}{4}A^2$  и  $\frac{X_{2006}}{X_{2007}} = \frac{100}{49}$ .

2. В задачах, тексты которых содержат тригонометрические функции, как правило, используются свойства монотонности, ограниченности, периодичности этих функций. В решениях таких задач нужны некоторые преобразования, которые не вызывают затруднений и надо попытаться обойтись без производной. Тригонометрические функции на приличных испытаниях обычно даются неэлементарные, а это значит, что возможны ошибки при дифференцировании сложной функции, да и находить затем критические точки не так просто. Итак:

1) Найти наибольшее значение функции  $y = \arctg(\sqrt{3} \cos 8x) + \operatorname{arcc}tg(\sin 3x)$ .

Решение: Используем свойство ограниченности функций косинуса и синуса  $|\cos 8x| \leq 1$  и  $|\sin 3x| \leq 1$ . Функция  $y = \arctg x$  монотонно возрастает, поэтому  $-\frac{\pi}{3} = -\arctg \sqrt{3} \leq \arctg(\sqrt{3} \cos 8x) \leq \arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ .

Функция  $y = \operatorname{arcc}tg x$  монотонно убывает, поэтому

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arcc}tg 1 \leq \operatorname{arcc}tg(\sin 3x) \leq \operatorname{arcc}tg(-1) = \frac{3\pi}{4}.$$

Отсюда получаем, что

$$-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}.$$

Проверка показывает, что найдутся такие значения аргумента, при которых достигается  $f(x) = \frac{13\pi}{12}$ .

На этом примере можно убедить учащихся, как важно хорошо знать и, главное, уметь использовать свойства функций при решении задач. Можно привести решение с использованием производной - оно займет гораздо больше времени, не говоря уже о возможных ошибках на каждом из этапов решения.

1) Найти значения  $a$ , при которых неравенство

$$|3 \sin^2 x + 2a \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x + a| \leq 3$$

выполняется для любых  $x$ .

Решение: После некоторых преобразований приведем данное неравенство к системе неравенств

$$\begin{aligned} & |3 \sin^2 x + 2a \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x + a| \leq 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & |1 + a + 1 + \cos 2x + a \sin 2x| \leq 3 \Leftrightarrow |\sqrt{a^2 + 1} \sin(2x + \varphi) + 2 + a| \leq 3 \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} \sqrt{a^2 + 1} \sin(2x + \varphi) + 2 + a \leq 3 \\ \sqrt{a^2 + 1} \sin(2x + \varphi) + 2 + a \geq -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Так как данное неравенство выполняется для любых значений переменной, максимизируем в первом неравенстве функцию  $\sin(2x + \varphi)$ , а во втором – минимизируем его:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + 1} + a - 1 \leq 0 \\ \sqrt{a^2 + 1} - a - 5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{12}{5} \leq a \leq 0.$$

3. В школьном курсе математики доказываются некоторые полезные неравенства, которые можно применять и в решениях задач на нахождение экстремума. К числу таких неравенств относятся неравенства о средних (их еще называют неравенства Коши):

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \text{ где } a > 0, b > 0.$$

Равенства в этих неравенствах достигаются тогда и только тогда, когда  $a = b$ .

Вот еще одно из неравенств Коши:  $\left|t + \frac{1}{t}\right| \geq 2$ , равенство достигается при  $|t| = 1$ .

Рассмотрим несколько задач.

1) Решить уравнение  $2^{2^{\sin^2 x}} + 2^{2^{\frac{\cos 2x}{2}}} = 2^{1+4\sqrt{2}}$

Решение: Применяя неравенство Коши, получим цепочку равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} 2^{2^{\sin^2 x}} + 2^{2^{\frac{\cos 2x}{2}}} &= 2^{2^{\sin^2 x}} + 2^{2^{\frac{1}{2}-\sin^2 x}}} \geq 2\sqrt{2^{2^{\sin^2 x}} \cdot 2^{2^{\frac{1}{2}-\sin^2 x}}} = \\ &2^{1+\frac{1}{2}(2^{\sin^2 x} + 2^{\frac{1}{2}-\sin^2 x})} \geq 2^{1+\sqrt{2^{\sin^2 x} \cdot 2^{\frac{1}{2}-\sin^2 x}}} = 2^{1+4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Для обращения обоих неравенств цепочки в равенства (что и требуется согласно исходному уравнению) необходимым и достаточным является условие

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \sin^2 x \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi \cdot n, n \in Z.$$

2) Найти наибольшее значение произведения двух переменных, сумма которых постоянна.

Решение: Пусть  $a$  и  $b$  – две переменные,  $a + b = M$ , где  $M$  – некоторая постоянная, тогда при  $a \neq b$   $ab < (M/2)^2$ , а при  $a = b$  получаем равенство  $ab = (M/2)^2$ .

3) Из гранита нужно вырубить постамент в форме прямоугольного параллелепипеда, высота которого должна быть равна диагонали основания, а площадь основания должна быть равна 4. При каких длинах сторон основания площадь поверхности будет наименьшей?

Решение: Пусть  $x$  и  $y$  – длины сторон прямоугольника, лежащего в основании постамента. Тогда высота  $z$  постамента равна  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , а площадь его поверхности  $S = 2(x + y)\sqrt{x^2 + y^2} + 8$ , при этом  $xy=4$ .  $S \geq 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{8} + 8 = 16\sqrt{2} + 8$ , причём равенство достигается при  $x=y$ , поскольку периметр основания ( $2(x+y)$ ) и высота  $\sqrt{x^2 + y^2}$  одновременно при  $x=y=2$  достигают наименьшего значения. Итак, наименьшая площадь поверхности будет у постамента, в основании которого лежит квадрат со стороной 2 м.

4) Нужно изготовить коробку в форме прямоугольного параллелепипеда с площадью основания равной. Сумма длин всех рёбер параллелепипеда должна быть равна 20. При каких размерах коробки площадь её поверхности будет наибольшей?

Решение: Пусть  $x$ ,  $y$  – длины сторон прямоугольника (в сантиметрах), лежащего в основании параллелепипеда, а  $z$  – его высота. Тогда по условию  $xy = 1$ ,  $4x + 4y + 4z = 20$ , откуда  $x + y + z = 5$ . Площадь поверхности коробки равна  $S = 2(x + y)z + 2$ . С учётом соотношения  $(x + y) + z = 5$  получим  $4(x + y) \leq [(x + y) + z]^2 = 25/4$ , причём это неравенство обращается в равенство лишь при  $x + y = z = 2,5$ . Таким образом, произведение  $(x + y)z$ , а вместе с ним и площадь поверхности коробки достигают наибольшего значения, если  $z = 2,5$  (см) и  $(x + y) = 2,5$ . Решая систему уравнений, находим размеры коробки:  $2 \times 0,5 \times 2,5$  (см).

5) Решите уравнение  $(16x^{200} + 1) \cdot (y^{200} + 1) = 16x^{100}y^{100}$ .

Решение: Наличие в уравнении двух неизвестных является явной подсказкой, используем в решении неравенство Коши.

$$(16x^{200} + 1) \cdot (y^{200} + 1) = 16x^{100}y^{100} \Leftrightarrow (16x^{100} + \frac{1}{x^{100}}) \cdot (y^{100} + \frac{1}{y^{100}}) \geq 8 \cdot 2.$$

Равенство возможно только при  $16x^{200} = 1$ ,  $y^{200} = 1$ . Отсюда получаем

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt[50]{2}}, \quad y = \pm 1.$$

Конечно, приведенные методы не исчерпывают все возможности для нахождения экстремума. Но они интересны и для составителя, и для исполнителя.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах. М: Наука, 1967.
2. Егоров А. О дискриминанте // Квант, 1992. №6.
3. Московский университет. Справочник. 1989.
4. Московский университет. Справочник. 2003.



***Вельмисова Светлана Львовна**, доцент каф. ТФ УлГУ, МОУ «Лицей физики, математики и информатики» № 40, e-mail: [velmisova@mail.ru](mailto:velmisova@mail.ru).*

## РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ, ПОДКРЕПЛЕННЫХ АРКАМИ

А. З. Камалов

Незамкнутые цилиндрические оболочки с подкрепляющими арками широко используются в строительстве как элементы покрытий, причем цилиндрическая оболочка может быть некруговой, может иметь переменную по криволинейной образующей толщину стенки. На контактных поверхностях покрытия и подкрепляющих арок могут быть реализованы различные условия, в том числе условия жесткого скрепления, свободного скольжения покрытия и арок по поверхностям контакта и могут появляться отрывы покрытия от подкрепляющих арок.

В данной работе в отличие от работы [1] рассматривается случай, когда цилиндрическое покрытие с подкрепляющими арками жестко скреплено. При этих допущениях исследуется напряженно-деформированное состояние незамкнутой цилиндрической оболочки радиуса  $R$ , толщины  $h$  и длины  $L = (N - 1)l$ , подкрепленной  $N$  равностоящими друг от друга одинаковыми поперечными арками. Подкрепляющие арки толщины  $h_i$ , ширины  $b_i$ , радиуса  $R_i$  имеют прямоугольные сечения и расположены на расстоянии  $l$  одна от другой ( $i = \overline{1, N}$ ).

Здесь предлагается подход, в котором арочное сооружение разбивается на  $(N - 1)$  оболочечные и  $N$  двухслойные арочные элементы. При формулировке задачи было указано, что слои «оболочка - арка» работает совместно без скольжения и в силу того, что гипотеза недеформируемых нормалей дана для слоя «оболочка - арка» в целом, условия контакта на контактных поверхностях покрытия и арок выполняются автоматически. При таких предположениях задача об изгибе арочного сооружения под действием приложенных внешних сил (собственный вес, ветровая нагрузка, снеговая нагрузка) сводится к решению задачи взаимодействия  $(N - 1)$  незамкнутых оболочечных элементов с  $N$  двухслойными подкрепляющими арками.

Рассмотрим в отдельности  $i$ -ую двухслойную арку и  $(i - 1)$ -ую и  $i$ -ую цилиндрические покрытия и приложим силы их взаимодействия.

Пусть в поперечном сечении при  $x = (i - 1)l - b_i / 2$  имеются поперечная  $Q_1^{(i-1)}$ , сдвигающая  $S^{(i-1)}$ , растягивающая  $T_1^{(i-1)}$  силы и изгибающий момент  $M_1^{(i-1)}$ . Точно такие же внутренние силы возникают и в сечении при  $x = (i - 1)l + b_i / 2$ . Тогда интенсивности нагрузок, приложенных на  $i$ -ую двухслойную арку, составляют:

$$q_{\tau, i} = q_{\tau} - 2S^{(i)} / b_i; q_{n, i} = q_n - 2Q_1^{(i)} / b_i, \quad (1)$$

так как  $S^{(i-1)} = S^{(i)}$  и  $Q_1^{(i-1)} = Q_1^{(i)}$  при  $x \approx (i-1)l$ , поскольку  $l \gg b_i$ ,  $q_{\tau,i}$ ,  $q_{n,i}$  – интенсивности внешней касательной и нормальной нагрузок на  $i$ -ую двухслойную арку.

Уравнение изгиба для  $i$ -ой двухслойной подкрепляющей арки [2] запишем в форме:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( 1 + \frac{d^2}{d\theta^2} \right)^2 v_i = - \left( q_{\tau,i} + \frac{dq_{n,i}}{d\theta} \right) \frac{R_i^4}{D_{22}^{(i)}}, \quad (2)$$

$v_i$  – окружное перемещение точки поверхности приведения арки.

Будем считать, что незамкнутая оболочка по всему контуру свободна оперта. При этом все нагрузки, перемещения и внутренние силы в оболочке и арках представим в виде

$$X_k^{(j)} = \sum_{m=0}^{\infty} X_{km}^{(j)} \cos \frac{\pi m}{\alpha} \theta, \quad Y_k^{(j)} = \sum_{m=1}^{\infty} Y_{km}^{(j)} \sin \frac{\pi m}{\alpha} \theta. \quad (3)$$

где  $\alpha$  – стягиваемый оболочку и двухслойную арку центробежный угол, под функциями  $X_k^{(j)}$  будем понимать функции  $(q_{\tau}, v, \gamma_{12}, \mathcal{G}_2, \chi_{12}, S, H, Q_2, q_{\pi}, v_i)$ , а под функциями  $Y_k^{(j)}$  – функции  $(q_n, u, w, \varepsilon_{12}, \varepsilon_2, \mathcal{G}_1, \chi_1, \chi_2, T_1, T_2, Q_1, M_1, M_2)$ .

Подставив принятые разложения (3) в дифференциальные уравнения (2), для  $m$ -го члена ряда получим:

$$V_m^{(i)} = V_{m_1}^i \left( -2S_m^{(i)} - 2m_* Q_{1m}^{(i)} + m_* b_i q_{nmi} + b_i q_{\tau mi} \right), \quad W_m^{(i)} = V_m^{(i)} m^*,$$

где  $V_{m_1}^{(i)} = R_i^5 / \left[ D_{22}^{(i)} (m_*^2 - 1)^2 b_i \right]$ ,  $m_* = \pi m / \alpha$  ( $i = \overline{1, N}$ ).

Переходим к расчету цилиндрического покрытия. Подставив принятые разложения (3) в дифференциальные уравнения равновесия оболочечного элемента в перемещениях  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , получим для  $m$ -го члена ряда систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$Lz_m = q_m, \quad (4)$$

где  $z_m = \begin{vmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \end{vmatrix}$ ;  $q_m = \frac{1-v^2}{Eh} R^2 \begin{vmatrix} 0 \\ -q_{\tau, m} \\ -q_{n, m} \end{vmatrix}$ ;  $L$  – матрица оператор (3x3), элементы

которой

$$L_{11} = L_2 - \frac{1-v}{2} m_*^2; \quad L_{12} = L_{21} = \frac{1+v}{2} m_* L_1; \quad L_{13} = L_{31} = v L_1; \quad L_1 = R \frac{d}{dx};$$

$$L_2 = R^2 \frac{d^2}{dx^2}; \quad L_{22} = \frac{1-v}{2} L_2 - m_*^2 + c \left[ 2(1-v) L_2 - m_*^2 \right];$$

$$L_{23} = L_{32} = m_*^2 - c \left[ (2-v) m_* L_2 - m_*^3 \right]; \quad L_{33} = 1 + c \left( L_2 - m_*^2 \right)^2; \quad c = h^2 / 12 R^2.$$

Решение уравнений (4) для каждого номера  $m$  может быть найдено обычным способом оно состоит из общего решения однородной системы и частного решения неоднородной.

Представим общее решение однородной системы (4) в виде

$$u_m = U_m e^{\lambda x}, v_m = U_m e^{\lambda x}, w_m = W_m e^{\lambda x}. \quad (5)$$

Подставив (5) в систему уравнений (4), получим алгебраическое уравнение относительно характеристического показателя  $\lambda$  в виде определителя. Раскрывая этот определитель и пренебрегая малой величиной  $c$  по сравнению с единицей, можно привести характеристическое уравнение к виду

$$\lambda^8 - 4m_*^2 \lambda^6 + [6m_*^4 - (8 - 2v^2)m_*^2 + (1 - v^2)/c] \lambda^4 - 4m_*^2 (m_*^2 - 1)^2 \lambda^2 + m_*^4 (m_*^2 - 1)^2 = 0. \quad (6)$$

Точное аналитическое определение корней уравнения (6) невозможно, поэтому попытаемся приближенно определить корни этого уравнения. Данное уравнение содержит большой множитель  $(1 - v^2)/c$  при  $\lambda^4$ . Учитывая эту особенность переходим к приближенному определению корней уравнения (6).

1. Пусть  $m_* = 0$  и  $m_* = 1$ , тогда уравнение (6) имеет четыре нулевых корня. При  $m_* = 0$  этим корням соответствует кручение цилиндрического покрытия, а также поворот вокруг оси симметрии. При этом ненулевые корни соответствуют осесимметричному краевому эффекту.

2. При  $m_* > 1$   $m_* \ll 1/c$  корни уравнения (6) делятся на две группы: большие и малые корни. Большие корни совпадают с характеристическими показателями осесимметричного краевого эффекта. Малые корни совпадают со значениями корней характеристического уравнения полубезмоментной теории.

3. Пусть  $m_*^2 \sim (1 - v^2)/c$  или  $m_*^2 > (1 - v^2)/c$ , то разделение корней на малые и большие не происходит.

Для приближенного определения корней при  $m_* \gg 1$ , представим уравнение (6) в виде:

$$(\lambda^2 - m_*^2)^4 + (1 - v^2) \lambda^4 / c = 0. \quad (7)$$

Это уравнение имеет восемь корней

$$\lambda_{nj} = (-1)^j \beta_{mn} + (-1)^j \gamma_{mn}; \quad n, j = 1, 2. \quad (8)$$

Тогда прогиб  $i$  - го цилиндрического покрытия будет иметь вид:



$$W_m^{(i)} = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^2 e^{-\beta_{nm} x_{ji}} \left( W_{n,j}^{(S,i)} \sin \gamma_{nm} x_{ij} + W_{n,j}^{(c,i)} \cos \gamma_{nm} x_{ji} \right), \quad (9)$$

где

$$x_{ij} = (-1)^j (li - x) + l(2 - j); \quad \beta_{mn} = \left( \sqrt{M_m^{(+)} - (-1)^n c_*} \right) / 2; \quad (10)$$

$$\gamma_{mn} = \left( c_* - (-1)^n \sqrt{M_m^{(-)}} \right) / 2; \quad M_m^{(\pm)} = \sqrt{4m_*^4 + c_*^4 \pm 2m_*^2}; \quad c_* = \sqrt[4]{(1 - \nu^2) / 4c}.$$

Анализ показывает, что формулы (9)-(10) дают близкие к точным результатам не только для больших значений  $m_*$ , но и для малых корней. Можно показать, что приближенное характеристическое уравнение (7) с корнями (8) получается из так называемой теории пологих оболочек.

Анализ характеристического уравнения (6) позволяет сделать некоторые выводы о применимости различных приближенных методов расчета. Отметим, что возможность применения тех или иных приближенных методов зависит от изменяемости напряженного и деформированного состояния в поперечном направлении, т.е. от числа волн  $m$ .

Осевое  $u_k$ , окружное  $v_k$  и нормальное  $w_k$ , перемещения точек срединной поверхности « $k$ »-го цилиндрического оболочечного элемента между двумя поддерживающими арками, а также окружное  $v_i$  и нормальное  $w_i$  перемещения точек приведения двухслойных арок будем определять по формулам:

$$u_k = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{E_1 h} \int \left( m_*^2 \psi_{mk} - \nu \psi_{mk}'' R^2 \right) dx \sin m_* \theta;$$

$$v_k = \sum_{m=0}^{\infty} \left( -W_{nk}^{(i)} / m_* + V_{mk}^{(0)} \right) \cos m_* \theta; \quad (11)$$

$$w_k = \sum_{m=1}^{\infty} \left( W_{mk}^{(i)} + W_{mk}^{(0)} \right) \sin m_* \theta; \quad k = \overline{1, N-1};$$

$$v_i = \sum_{m=0}^{\infty} V_{mi} \cos m_* \theta; \quad w_i = \sum_{m=1}^{\infty} V_{mi} m_* \sin m_* \theta.$$

В расчетных формулах (11) введены обозначения:

$$\psi_{mk} = \sum_{n=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left( \psi_{mnj}^{(s)} \sin \gamma_{mn} x_{ij} + \psi_{mnj}^{(c)} \cos \gamma_{mn} x_{ij} \right) e^{-\beta_{mn} x_{ij}}; \quad (12)$$

$$W_{mk} = \sum_{n=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left( W_{mnj}^{(s)} \sin \gamma_{mn} x_{ij} + W_{mnj}^{(c)} \cos \gamma_{mn} x_{ij} \right) e^{-\beta_{mn} x_{ij}} \text{ и т.д.}$$

Штрихами обозначено дифференцирование по  $x$ . Постоянные интегрирования  $W_{mnj}^{(c)}$  и  $W_{mnj}^{(s)}$  ( $n, j = 1, 2$ ) определяют в зависимости от граничных условий при  $x = 0, L$ ;  $\theta = 0, \alpha$  и условий упругой стыковки цилиндрических оболочечных элементов с двухслойными подкрепляющими арками.

Расчет показывает, что решение задачи весьма громоздко. Пригодные для практических приложений результаты могут быть получены лишь при введении упрощающих допущений. Для упрощения будем предполагать, что кроме первого и последнего оболочечного элемента, все остальные оболочечные элементы ( $i = 1, 2, 3, \dots, N - 2$ ) деформируются совершенно одинаково. Это возможно поскольку все оболочечные элементы находятся под действием одинаковых внешних нагрузок и все подкрепляющие арки по своим физическим и геометрическим характеристикам одинаковы, работают в одинаковых условиях. Из  $8(N - 1)$  неизвестных постоянных интегрирования останется всего 12 и неизвестные  $W_{n1}^{(c,1)}$ ,  $W_{n1}^{(s,1)}$ ,  $W_{n1}^{(c,2)}$ ,  $W_{n1}^{(s,2)}$ ,  $W_{n2}^{(c,1)}$ ,  $W_{n2}^{(s,1)}$  ( $n = 1, 2$ ) легко определяются из граничных условий при  $x = 0$  и условий упругой стыковки оболочечного элемента с двухслойным арочным элементом при  $x = l$ .

Теперь мы располагаем достаточными данными для того, чтобы из зависимостей (11) вычислить соответствующие перемещения как в оболочечных элементах, так и в подкрепляющих арках рассматриваемой конструкции.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Камалов А. З. К расчету элементов арочных конструкций. // Математические методы и модели в прикладных задачах науки и техники. Тр. международ. конф. «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке, технике, экономике». Т.5. – Ульяновск, 2003. – С. 54-56.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. – М., 1961. – 384с.



**Камалов Абрик Закирович**, к.ф.м.н., профессор кафедры теоретической механики Казанского государственного архитектурно-строительного университета (КГАСУ). 420043, Казань, ул. Зеленая д.1, КГАСУ. Тел. (8432) 510-47-29, 5-10-47-91.  
e-mail: shigabutdinov@ksaba.ru

## ВЛИЯНИЕ ОБРАБОТКИ ТКАНЕЙ ПОТОКОМ ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЫ НА ЕЕ ЖЕСТКОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Р. А. Каюмов, И. Ш. Абдуллин, В. В. Хамматова,  
И. З. Мухамедова, Е. В. Кумпан

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 08-01-00628-а)

С помощью плазменных технологий возможно получение требуемых технологических, эксплуатационных и гигиенических свойств текстильных материалов, а также целенаправленное улучшение механических, физических и физико-химических свойств тканей, что представляет научный интерес и имеет большое практическое значение.

В данной работе разработан метод идентификации механических характеристик при обработке экспериментальных данных. На основе этого метода определены нелинейные жесткостные характеристики необработанной и обработанной потоком холодной плазмы образцов тканей для различных типов материалов. Выявлено влияние этой обработки на механические характеристики тканей.

Для нелинейного случая в осях ортотропии примем упругий потенциал в следующем виде:

$$W = D_{110}\varepsilon_{11}^2/2 + D_{114}\varepsilon_{11}^6/6 + D_{120}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + D_{220}\varepsilon_{22}^2/2 + \\ + D_{224}\varepsilon_{22}^6/6 + D_{330}\gamma_{12}^2/2 + D_{334}\gamma_{12}^6/6. \quad (1)$$

Через упругий потенциал  $W$  погонные усилия можно записать соотношением  $N_{ij} = \partial W / \partial \varepsilon_{ij}$ .

Задача идентификации ставится следующим образом: считаются неизвестными данные испытаний конструкций с замером внешних воздействий, и считаются неизвестными математические модели поведения материала и конструкций. Рассматривается прямая задача расчета конструкций, результаты численного расчета сравниваются с экспериментальными данными и механические характеристики подбираются так, чтобы они были близки. Таким образом, формулируется задача о минимизации функционала – квадратичной невязки между расчетными и экспериментальными данными. В данной работе считаются неизвестными жесткостные характеристики

$$D_{110}, D_{114}, D_{220}, D_{224}, D_{120}, D_{330}, D_{334}.$$

Приведены результаты идентификации  $D_{ijk}$  для чистошерстяной ткани (Вшр-100) и полиэфирной (ВПЭ-100) тканей, обработанных потоком холодной плазмы. Для этого использовались данные испытаний одноосного растяжения образцов с различными углами  $\alpha$ .

Строится квадратичная невязка следующего вида:

$$\delta^2 = [(P)^{эксн} - (P)^{расч}]^2 \Big|_{P_1 \alpha_1} + [\Delta a^{эксн} - \Delta a^{расч}]^2 \Big|_{P_1 \alpha_1} +$$

$$+ [(P)^{эксн} - (P)^{расч}]^2 \Big|_{P_2 \alpha_2} + [\Delta a^{эксн} - \Delta a^{расч}]^2 \Big|_{P_2 \alpha_2} + \dots \dots \dots \quad (2)$$

$$\dots + [(P)^{эксн} - (P)^{расч}]^2 \Big|_{P_n \alpha_n} + [\Delta a^{эксн} - \Delta a^{расч}]^2 \Big|_{P_n \alpha_n},$$

$n$  – количество проведенных экспериментов. Для этой квадратичной невязки должно выполняться следующее ограничение:

$$D_{11} D_{22} - D_{12}^2 > 0. \quad (3)$$

Далее подбирались  $D_{ijk}$  из условия минимума  $\delta^2$  при ограничении (3). Разработанный программный комплекс позволил отыскать нелинейные жесткостные характеристики  $D_{110}, D_{114}, D_{220}, D_{224}, D_{120}, D_{330}, D_{334}$ .

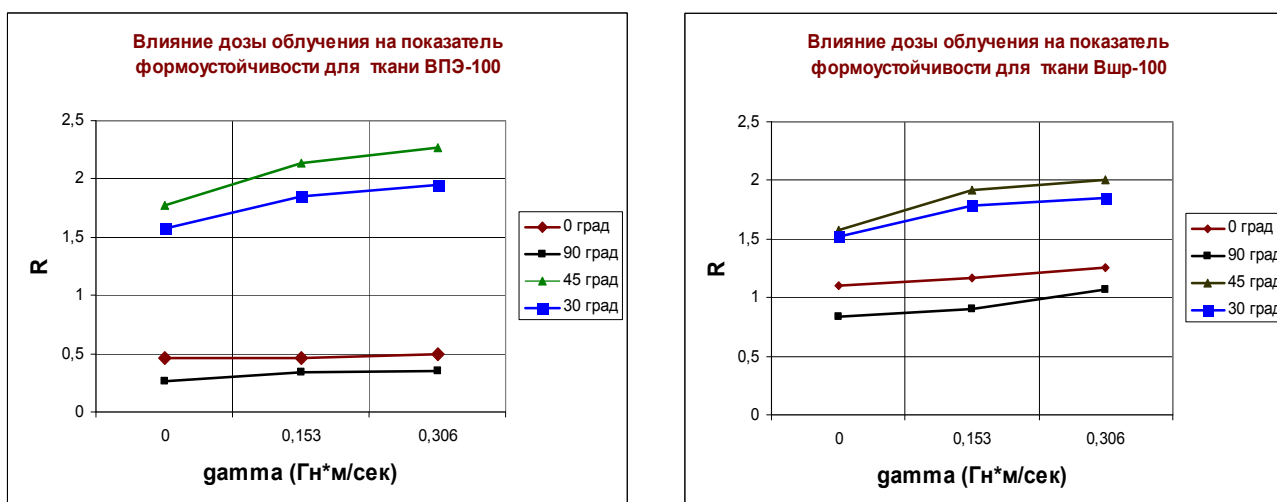


Рис.1 Графики зависимостей показателя формоустойчивости  $R$  от дозы облучения  $\gamma$  для чистошерстяной и полиэфирной тканей

На рис.1 изображены графики зависимости показателя формоустойчивости  $R$  от дозы облучения холодной плазмой  $\gamma$  чистошерстяной (Вшр-100) и полиэфирной (ВПЭ-100) тканей.

Численные эксперименты показали:

- 1) у обработанных холодной плазмой тканевых образцов жесткость на сдвиг, жесткость в направлении утка и основы падает.
- 2) формоустойчивость рассматриваемых образцов повышается при увеличении времени облучения холодной плазмой.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каюмов Р. А., Мухамедова И. З., Абдуллин И. Ш., Хамматова В. В., Серазутдинов И. Н. Построение математической модели деформирования тканых композитных материалов в потоке высокочастотной плазмы с учетом физической нелинейности // Материалы XIV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – Москва: Изд-во МАИ, 2008.– С.117-119.

2. Каюмов Р. А., Мухамедова И. З., Абдуллин И. Ш., Хамматова В. В., Серазутдинов И. Н. Моделирование процессов деформирования тканей и оценка их формоустойчивости // Сборник материалов Всероссийской Межвузовской НТК «Электромеханические и внутрикамерные процессы в энергетических условиях, струйная акустика и диагностика, приборы и методы контроля природной среды, веществ, материалов и изделий». – Казань, 2007. – С. 27-29.



*Каюмов Рашид Абдулхакович – д.ф.-м.н., профессор, зав.каф. «Сопротивление материалов и основ теории упругости» КазГАСУ*

*Абдуллин Ильдар Шаукатович – проректор по НИР, д.т.н, профессор КазГТУ им. Кирова,*

*Хамматова Венера Васильевна – д.т.н., профессор каф. «Дизайна» КазГТУ им. Кирова*

*Мухамедова Инзилия Заудатовна – к.ф.-м.н., доцент каф. «Сопротивление материалов и основ теории упругости» КазГАСУ,*

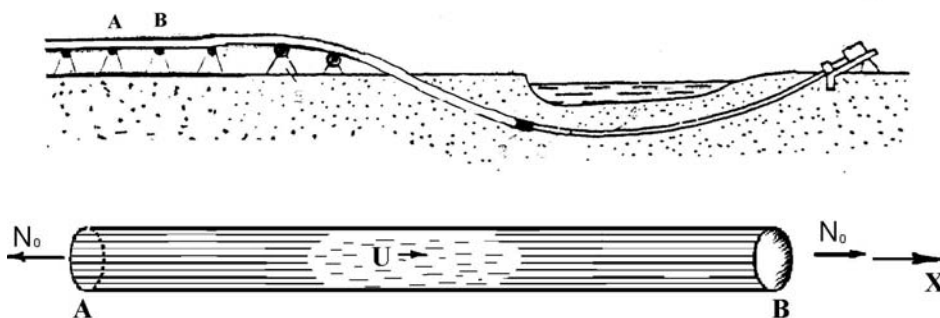
*Кумпан Елена Васильевна - к.т.н., доцент каф. «Дизайна» КазГТУ им. Кирова*

*Адрес для переписки: 420043, г.Казань, Зеленая, 1, КазГАСУ, кафедра Сопротивления материалов и основ теории упругости, тел(843)5104723, e-mail: Kayumov@rambler.ru*

## ДИВЕРГЕНЦИЯ ТРУБОПРОВОДА

С. В. Киреев

Исследуются нелинейные задачи о дивергенции трубопровода с протекающей по нему жидкостью. На рисунке представлен пример упругих элементов в виде трубопровода.



Математическая модель задачи об изгибных формах трубопровода с протекающей по нему жидкостью описывается нелинейным интегро-дифференциальным уравнением

$$Dw^{(4)} - \frac{3}{2}Dw^{(4)}w'^2 - 9Dw'w''w''' - 3Dw''^3 - \frac{3}{2}mU^2w''w'^2 +$$

$$+ Nw'' + f(w) - \theta w'' \int_0^{\ell} (w')^2 dx = 0, \quad N = N_0 + m_*U^2 \quad (1)$$

и граничными условиями

$$c_0w''(b) = g(w'(b)), \quad d_0w'''(b) = h(w(b)), \quad b = 0, \quad b = \ell,$$

$$g(w'(b)) = \sum_{k=1}^n c_k (w'(b))^{2k-1}, \quad h(w(b)) = \sum_{k=1}^m d_k (w(b))^{2k-1} \quad (2)$$

В (1)  $D$  – изгибная жесткость трубопровода;  $N_0 > 0$  – сжимающее ( $N_0 < 0$  – растягивающее) усилие;  $m_*$  – удельная масса жидкости;  $U$  – скорость движения жидкости;  $a_j (j = 1 \div \infty)$  – коэффициенты, характеризующие жесткость основания; интегральный член учитывает нелинейное воздействие продольного усилия;  $w(x)$  – прогиб трубопровода. Все коэффициенты, входящие в уравнение и граничные условия, постоянные.

Для решения данных задач также применимы как аналитические, так и численные методы. Решение некоторых задач приведено в работах [1] – [3].

**Пример решения задачи методом Ляпунова-Шмидта и Галеркина**

В качестве примера решения задачи (1) методом Ляпунова-Шмидта, рассмотрен случай шарнирного закрепления обоих концов трубопровода. В

этом случае получаем асимптотику разветвляющихся решений уравнения (1) в первом приближении вида

$$\bar{w}(x) = \pm \sqrt{-\frac{L_{11}\varepsilon}{L_{30}}} \varphi(x) + o(\sqrt{\varepsilon}), \text{ где } \text{sign } \varepsilon = -\text{sign}(L_{11} \cdot L_{30}) \quad (3)$$

с коэффициентами

$$L_{11} = -\int_0^1 \varphi'' \psi dx = \pi^2, \\ L_{30} = -\frac{a_3 \ell^6}{D} \int_0^1 \varphi^3 \psi dx + \frac{\theta \ell^3}{D} \int_0^1 \varphi'' \psi \int_0^1 (\varphi')^2 dx + \frac{3mU^2 \ell^2}{2D} \int_0^1 \varphi'' \varphi'^2 \psi dx + \frac{3}{2} \int_0^1 \varphi^{(4)} \varphi'^2 \psi dx + \\ + 9 \int_0^1 \varphi' \varphi'' \varphi''' \psi dx + 3 \int_0^1 \varphi''^3 \psi dx = -\frac{4\pi^4 \theta \ell^3 + 3mU^2 \ell^2 \pi^4 + 6a_3 \ell^6 - 3D\pi^6}{4D},$$

где  $\varphi \equiv \psi = \sqrt{2} \sin(sx)$ .

Дисперсионное соотношение, определяющее точки ветвления, имеет вид

$$\sin(s) = 0 \Rightarrow s = \pi n \quad (n = 0 \div \infty) \quad (4)$$

Таким образом, асимптотика (3) принимает вид

$$w(x) = \pm 2\sqrt{2}\pi \sqrt{\frac{mU^2 \ell^2 + N_0 \ell^2 - \pi^2 D}{3mU^2 \ell^2 \pi^4 + 6a_3 \ell^6 + 4\theta \pi^4 \ell^3 - 3D\pi^6}} \sin(\pi x). \quad (5)$$

При отыскании приближенных решений этой задачи методом Галеркина  $w(x)$  можно представить в виде

$$w(x) = \sum_{k=1}^{k_0} c_k \sin \lambda_k x, \lambda_k = \frac{k\pi}{l}. \quad (6)$$

Тогда в первом приближении ( $k_0 = 1$ ) получим

$$c_1 \left[ \left( D\lambda_1^4 \frac{\ell}{2} - mU^2 \lambda_1^2 \frac{\ell}{2} - N_0 \lambda_1^2 \frac{\ell}{2} \right) + c_1^2 \left( -\frac{3}{16} D \frac{\pi^6}{\ell^5} + \frac{3}{2} mU^2 \lambda_1^4 \frac{\ell}{8} + \frac{\theta \lambda_1^4 \ell^2}{4} + \frac{3a_3 \ell}{8} \right) \right] = 0. \quad (7)$$

Из (7) следует, что наряду с прямолинейным положением равновесия элемента ( $c_1 = 0, w \equiv 0$ ) существует криволинейная форма равновесия  $w(x) = c_1 \sin \lambda_1 x$ , где

$$c_1 = \pm 2\sqrt{2}\pi \ell \sqrt{\frac{mU^2 \ell^2 + N_0 \ell^2 - D\pi^2}{3mU^2 \pi^4 \ell^2 + 4\theta \pi^4 \ell^3 + 6a_3 \ell^6 - 3D\pi^6}}, \quad (8)$$

при условии  $N_0 > \frac{D\pi^2 - mU\ell^2}{\ell^2}$ .

Сравним прогибы трубопровода, полученные методом Ляпунова-Шмидта, методом Галеркина в первом приближении и численным методом для шарнирного закрепления концов, описываемые уравнением

$$Dw^{(4)} + Nw'' + a_3 w^3 - \theta w'' \int_0^{\ell} (w')^2 dx = 0,$$

$$D = EJ, \quad N = N_0 + m_* U^2, \quad \theta = \frac{EF}{2\ell}.$$

$\varepsilon = 0.01$

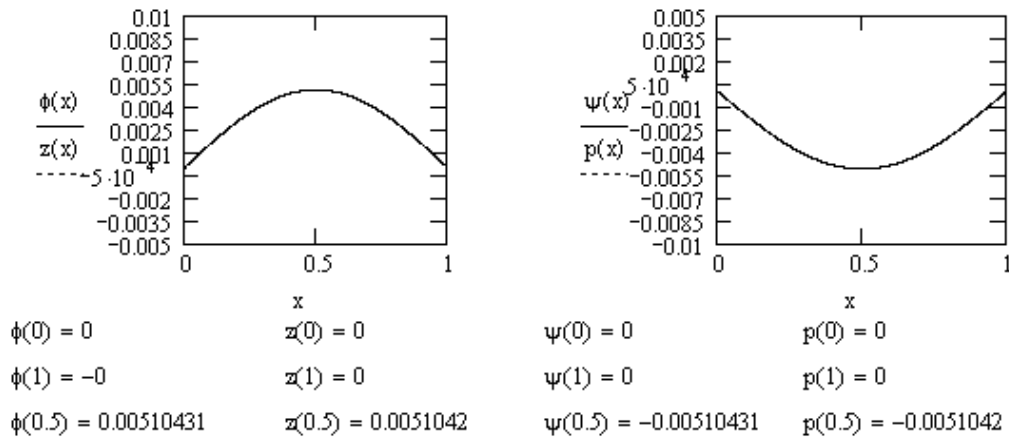


Рис.1

$\varepsilon = 0.01$

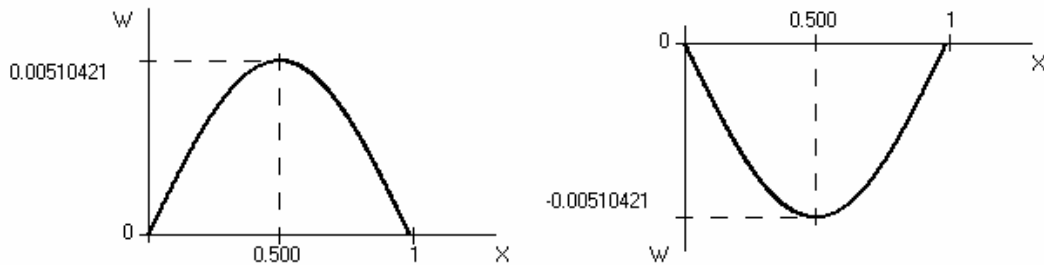


Рис.2

На рисунке 1:  $\phi(x)$  – положительный прогиб, полученный методом Ляпунова-Шмидта;  $z(x)$  – положительный прогиб, полученный методом Галеркина;  $\psi(x)$ ,  $p(x)$  – соответственно отрицательные прогибы. На рисунке 2 представлены прогибы трубопровода, полученные численно с помощью разработанной программы. Расчеты проведены при:  $E = 206 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$  (сталь),  $\ell = 1 \text{ м}$ ,  $\theta = 35 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$ ,  $N_0 = 1 \text{ Н}$ ,  $m_* = 10 \text{ кг/м}$ ,  $a_3 = 1 \text{ Н/м}^4$ ,  $D = 450 \text{ Нм}^2$ . В пределах выбранной точности расчетов графики совпадают. Погрешность  $\sigma$  составляет 5% ( $\sigma = |w_{\text{л.шмид}} - w_{\text{галер}}| \cdot 100\% / \min(w_{\text{л.шмид}}, w_{\text{галер}})$ ).

Рассмотрим задачу о дивергенции трубопровода, связанного с упругим основанием, нелинейная реакция которого определяется выражением

$$R = -\sum_{k=n}^r a_{2k+1}(x)w^{2k+1}, \quad n=1,2,3,\dots$$

**Теорема 1.** Пусть дано уравнение

$$Dw^{(4)} + Nw'' + \sum_{k=n}^r a_{2k+1}(x)w^{2k+1} = 0, \quad n=1,2,3,\dots \quad (9)$$

Если  $w_*(x)$  – решение линейной краевой задачи для уравнения

$$Dw_*^{(4)} + Nw_*'' = 0, \quad (10)$$



с некоторыми граничными условиями, то асимптотика разветвляющихся решений уравнения (9) будет иметь вид

$$w(x) = \pm \sqrt[2n]{-\frac{L_{11}\varepsilon}{L_{2n+1,0}} w_*(x) + o\left(|\varepsilon|^{\frac{1}{2n}}\right)}, \quad \text{sign } \varepsilon = -\text{sign}(L_{11} \cdot L_{2n+1,0}), \quad \varepsilon = \lambda - \lambda_0^3 \quad (11)$$

с коэффициентами

$$L_{11} = -\int_0^1 \varphi''(x) \psi(x) dx, \quad L_{2n+1,0} = -\frac{\ell^{2n+4}}{D} \int_0^1 a_{2n+1}(x) \varphi^{2n+1}(x) \psi(x) dx,$$

где  $n=1,2,3,\dots$ ;  $\varphi(x)$  – собственная функция прямой задачи ( $\varphi(x) = w_*(x)$ );  $\psi(x)$  – собственная функция сопряженной задачи;  $\lambda$  – собственные значения;  $\lambda_0$  – точка бифуркации (ветвления решения). Вид  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  зависит от граничных условий.

Пусть дано уравнение

$$Dw^{(4)} + Nw'' + \sum_{k=1}^n a_{2k-1}(x) w^{2k-1} - \theta w'' \int_0^\ell w'^2 dx = 0, \quad (12)$$

**Теорема 2.** Если  $w_*(x)$  – решение линейной краевой задачи для уравнения

$$Dw_*^{(4)} + Nw_*'' + a_1 w_* = 0, \quad (13)$$

с некоторыми граничными условиями, то асимптотика разветвляющихся решений уравнения (12) в первом приближении будет иметь вид

$$w(x) = \pm \sqrt[2]{-\frac{L_{11}\varepsilon}{L_{30}} w_*(x) + o\left(|\varepsilon|^{\frac{1}{2}}\right)}, \quad \text{sign } \varepsilon = -\text{sign}(L_{11} \cdot L_{30}), \quad \varepsilon = \lambda - \lambda_0 \quad (14)$$

с коэффициентами

$$L_{11} = -\int_0^\ell \varphi''(x) \psi(x) dx,$$

$$L_{30} = -\frac{1}{D} \int_0^\ell a_3(x) \varphi^3(x) \psi(x) dx + \frac{\theta}{D} \int_0^\ell \varphi''(x) \psi(x) dx \int_0^\ell \varphi'^2(x) dx,$$

где  $\varphi(x)$  – собственная функция прямой задачи (13) ( $\varphi(x) = w_*(x)$ );  $\psi(x)$  – собственная функция сопряженной задачи;  $\lambda$  – собственные значения;  $\lambda_0$  – точка бифуркации (ветвления решения). Вид  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  зависит от граничных условий при  $x=0$ ,  $x=\ell$ .

### Точные решения

Сформулируем некоторые теоремы, на основе которых можно построить точные решения уравнения

$$(D(x)w'')'' + Nw'' + \beta(x)w - \theta w'' \int_0^\ell w'^2 dx = 0, \quad N = N_0 + mU^2. \quad (15)$$

**Теорема 1.** Если  $w_*(x)$  – решение линейной краевой задачи для уравнения

$$(D(x)w_*'')'' + \beta(x)w_* = 0 \quad (16)$$



## АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ КОММЕРЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ

С. В. Киреев, А. В. Адрианова, Е. С. Шерстобитова

*Анализ устойчивости коммерческой деятельности предприятия связан с изучением степени влияния динамики изменения показателей условий среды на результаты коммерческой деятельности. Так, после того как получено оптимальное решение по исходным статистическим условиям задачи проводится анализ моделей на чувствительность изменения оптимального решения к возможным изменениям внешних условий, т. е. динамики реальной жизни.*

Анализ чувствительности заключается в количественной оценке степени влияния изменения на 1 % или на 1 ед. каждого из показателей нижнего уровня на показатели верхнего уровня. Таким образом, можно определить чувствительность изменения выручки от реализации в зависимости от изменения других включенных в модель показателей. Кроме того, можно определить зоны устойчивости работы предприятия, выявить диапазоны возможного изменения каждого показателя коммерческой деятельности. Запишем экономико-математическую модель задачи:

$$F(\bar{X}) = (2x_H + 3x_B) \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 0,5x_B + x_B \leq 3, & (1) \\ x_B + 0,5x_B \leq 4, & (2) \\ x_B - x_B \leq 1,5, & (3) \\ x_B \leq 2, & (4) \\ x_B \geq 0,25, & (5) \\ x_B \geq 0,5, & (6) \end{cases}$$

Геометрический метод позволил получить статистическую область допустимых решений, представленную на рис. 1.

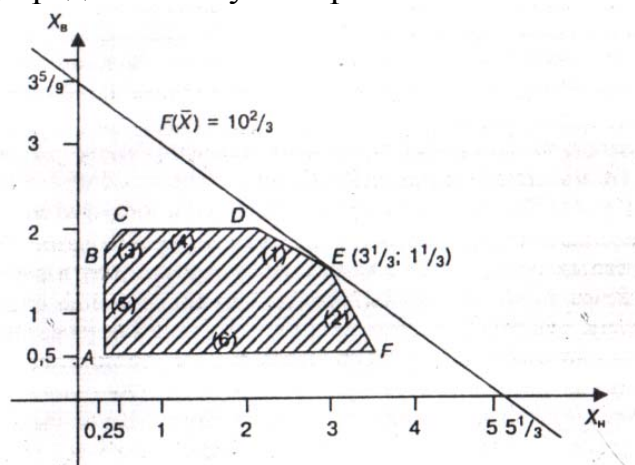


Рис. 1 Область допустимых значений

Рассмотрим, как влияет на оптимальное решение изменение запасов ресурсов А и В. Возможны два варианта постановки этой задачи:

а) насколько можно увеличить запас некоторого ресурса А и В для улучшения полученного оптимального значения дохода от продажи краски;

б) насколько можно уменьшить запас некоторого ресурса А и В при сохранении полученного оптимального значения дохода от продажи?

В рассматриваемой задаче используемые запасы сырья А и В являются дефицитными ресурсами, поэтому последовательно рассмотрим сначала увеличение запасов сырья (ресурса) А. На рис. 2 видно, что при увеличении запаса этого ресурса прямая (1) перемещается вверх параллельно самой себе,

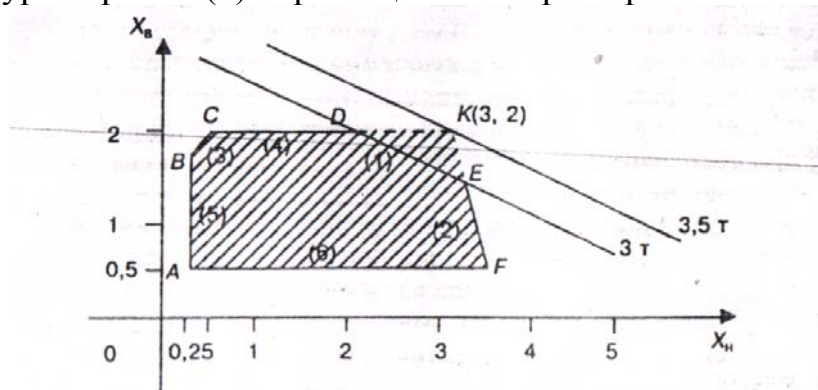


Рис. 2 Изменение области допустимых решений от величины запасов ресурса А

при этом треугольник DKE постепенно стягивается в точку К (3,2). В этом случае областью допустимых решений становится многоугольник AVCKF, а оптимальному решению соответствует точка К, а ограничения (2) и (4) становятся связующими. В точке К ограничение (1) становится избыточным, поскольку любое дальнейшее увеличение запаса ресурса А не влияет ни на область допустимых решений, ни на оптимальное решение. Именно в этом и состоит отличие недефицитности ресурса от его избыточности: исключение избыточного ограничения не изменяет ни области допустимых решений, ни самого оптимального решения, в то время как исключение исходного ограничения, соответствующего дефицитному ресурсу, всегда изменяет область допустимых решений, но не всегда – оптимальное решение. Таким образом, объем сырья А нет необходимости увеличивать сверх того предельного значения, при котором соответствующее ему ограничение (1) станет избыточным, где прямая (1) пройдет через точку К, что и указывает на новое оптимальное решение.

Этот предельный уровень можно найти следующим образом. Сначала определяются координаты точки К, являющейся точкой пересечения прямых (2) и (4), которая находится из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x_A + 0,5x_B = 4 \\ x_B = 2 \end{cases}$$

Затем путем подстановки координат точки К (3; 2) в левую часть ограничения (1) определяется максимально допустимый запас ресурса А:

$$0,5 x_H + x_B = 0,5 \cdot 3 + 2 = 3,5 \text{ (т)}$$

Следовательно, разумно увеличить запас сырья А на 0,5 т, при этом новое оптимальное значение целевой функции будет равно:

$$F_{\max}(K) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 \text{ (тыс. руб.)}$$

Аналогично решается задача о целесообразности увеличения запасов дефицитного ресурса (сырья) В в соответствующем ограничении (2) (рис. 3).

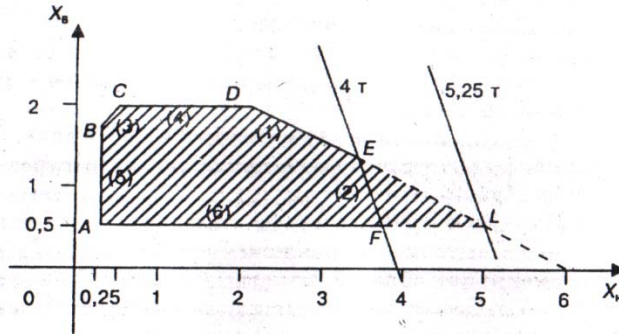


Рис.3 Изменение области допустимых решений от величины запасов ресурса В

Новым оптимальным решением становится точка L, где пересекаются прямые (1) и (6), т. е.  $0,5x_H + x_B = 3$  и  $x_B = 0,5$ . Очевидно, ее координаты  $x_H = 5$  и  $x_B = 0,5$ , причем запас сырья В можно увеличить до значения, равного  $x_H + 0,5x_B = 5 + 0,5 \cdot 0,5 = 5,25$  т, т. е. на 1,25 т, тогда новое оптимальное значение целевой функции будет равно:  $F_{\max}(L) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0,5 = 11,5$  (тыс. руб.).

Рассмотрим теперь решение задачи о возможности снижения запасов недефицитных ресурсов (т.е. об уменьшении правой части не связывающих ограничений).

Ограничение (4)  $x_B \leq 2$  задает уровень спроса на краску для внутренних работ. На рис. 4 видно, что прямую CD (4) можно опускать параллельно вниз до пересечения с точкой E ( $3 \frac{1}{3}; 1 \frac{1}{3}$ ), не изменяя оптимального решения. Таким образом, при уменьшении спроса на краску для внутренних работ до величины  $x_B = 1 \frac{1}{3}$ , т. е. на  $(2 - 1 \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ , оптимальность полученного ранее решения сохраняется.

Ограничение (3) -  $x_H + x_B \leq 1,5$  представляет соотношение между суточным спросом на краску для наружных работ. В этом случае

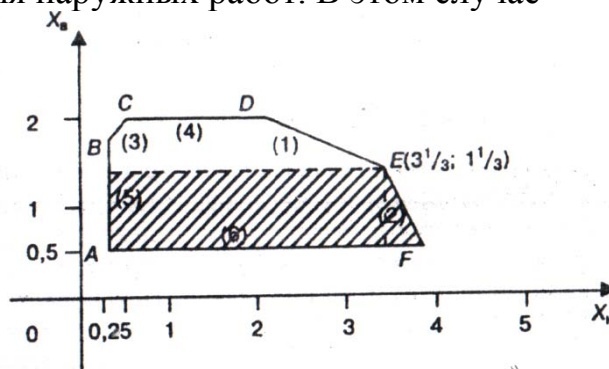


Рис. 4 Изменение области допустимых решений от объема спроса

Правую часть ограничения также можно уменьшать до тех пор, пока прямая BC (3) (рис. 5) не достигнет точки E.

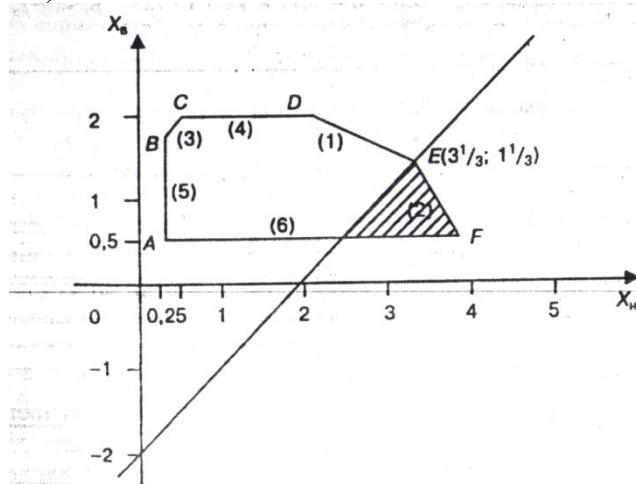


Рис. 5 Изменение области допустимых решений от изменения соотношения спроса на краску

При этом правая часть ограничения (3) станет равной  $-x_H + x_B = 3\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = -2$  т, а само решение (3) может быть записано в виде:

$$-x_H + x_B \leq -2 \text{ или } x_H - x_B \geq 2.$$

Полученный результат показывает, что если суточный спрос на краску для наружных работ будет превышать суточный спрос на краску для внутренних работ не менее чем на 2 т, ранее полученное оптимальное решение также не изменится. Полученные результаты можно обобщить и представить в виде табл.

Таблица 1

Ре сурс	Тип ресурса	Предельно допустимое изменение запаса ресурса $\Delta b_i$	Предельное приращение оптимального значения $\Delta F_i$ , тыс. руб.	Значение $p_i$ (показ. ценности), тыс./руб./т
$b_1$	Дефицитный	$\Delta b_1 = 3,5 - 3 = 0,5$	$\Delta F_1 = 12 - 10\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$	$p_1 = \frac{2}{3}$
$b_2$	Дефицитный	$\Delta b_2 = 5,25 - 4 = 1,25$	$\Delta F_2 = 11,5 - 10\frac{2}{3} = \frac{5}{6}$	$p_2 = \frac{2}{3}$
$b_3$	Недефицитный	$\Delta b_3 = -2 - 1,5 = -3,5$	$\Delta F_3 = 10\frac{2}{3} - 10\frac{2}{3} = 0$	$p_3 = 0$
$b_4$	Недефицитный	$\Delta b_4 = 1\frac{1}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$	$\Delta F_4 = 10\frac{2}{3} - 10\frac{2}{3} = 0$	$p_4 = 0$

На основе полученных данных можно сделать вывод о том, что дополнительные вложения (инвестиции) следует направить прежде всего на увеличение ресурса  $b_1$  (сырье А)  $p_1 = \frac{2}{3}$ . Как о предполагалось ранее, увеличивать объем недефицитных ресурсов не следует ( $p_3 = p_4 = 0$ ).

Рассмотрим теперь, в каких пределах возможно изменение цен на краски, при которых не происходит изменение оптимального решения. Цены на краски  $c_H$  и  $c_B$  определяют наклон линии целевой функции  $F(\bar{X}) = (c_H x_H + c_B x_B)$ .

Уменьшение  $c_H$  или увеличение  $c_B$  приводит к вращению линии целевой функции против часовой стрелки относительно точки E вплоть до совпадения с линией DE графика (1) (рис. 6). В этом случае доход от продажи изменяется, а вариантов плана получим множество на прямой DE. Такое же явление наблюдается при вращении линии целевой функции по часовой стрелке относительно точки E при изменении коэффициентов целевой функции в противоположную сторону, что и указано на рис. 7. В этом случае получим на линии EF множество альтернативных решений,  $x_H$  и  $x_B$  крайние из которых точки E и F указывают на получение оптимальной величины дохода.

Дальнейший анализ заключается в определении допустимого интервала изменения цены  $c_H$  при постоянной цене  $c_B = 3$ , при котором решение остается оптимальным. Находим максимальное значение  $c_H$ , увеличивая его до тех пор, пока наклон прямой целевой функции не совпадает с прямой EF(2), тогда это значение находится из равенства тангенсов углов наклона линий

$$c_H x_H + 3x_B = F(\bar{X}) \text{ и } x_H + 0,5x_B = 4: \quad \text{tg}\alpha = \frac{c_H}{c_B} = \frac{c_H}{3} = 0,5 \Rightarrow \max c_H = 6 \Rightarrow 6x_H + 3x_B = F(\bar{X})$$

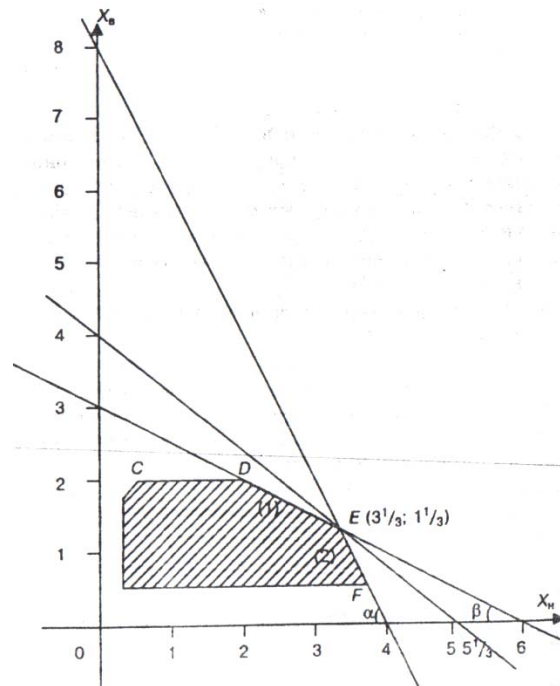


Рис. 6 Влияние изменения цен на доход от продажи

При этом доход от реализации увеличится и может составить  $6 \cdot 3 \frac{1}{3} + 3 \cdot 1 \frac{1}{3} = 24$  тыс. руб. Аналогично минимальное значение  $c_H$  находим, уменьшая его до тех пор, пока наклон прямой, соответствующей целевой функции, не совпадает с прямой DE(1), тогда это значение находится из равенства тангенсов углов наклона линий  $c_H x_H + 3x_B = F(X)$  и  $0,5x_H + x_B = 3$ :

$$\text{tg}\beta = \frac{c_H}{c_B} = \frac{c_H}{3} = 0,5 \Rightarrow \min c_H = 1,5 \rightarrow 1,5 \cdot x_H + 3 x_B = F(\bar{X})$$

При этом доход от реализации уменьшится и может составить  $1,5 \cdot 3 \frac{1}{3} + 3 \cdot 1 \frac{1}{3} = 9$  тыс. руб. Таким образом, допустимый интервал изменения цены  $c_H$ ,



в котором точка  $E$  остается единственной оптимальной, определяется неравенством  $1,5 \leq c_n \leq 6$ . При  $c_n = 1,5$  оптимальным решением является весь отрезок  $DE$ , его любая точка, включая точки  $E$  и  $D$ . Если  $c_n < 1,5$ , то оптимум смещается в точку  $D$ .

Аналогично, при  $c_n = 6$  оптимальное значение целевой функции достигается в любой точке отрезка  $EF$ , включая точки  $E$  и  $F$ . Если же  $c_n > 6$ , то в этом случае оптимум смещается в точку  $F$ .

Следует заметить, что при  $c_n < 1,5$  ресурс  $b_4$  становится дефицитным, а ресурс  $b_2$  – недефицитным, т. е. если выручка от продажи 1 т краски для наружных работ станет меньше 1,5 тыс. руб., то для фабрики наиболее выгодно выпускать максимально допустимое количество краски для внутренних работ,  $x_B = 2$  т в сутки. При этом общее потребление сырья  $B$  снизится, что обусловит недефицитность этого ресурса в ограничении (2).

Соответствующие выводы можно сделать и для случая  $c_n > 6$ , когда ресурс  $b_2$  становится дефицитным, а ресурс  $b_1$  – недефицитным. В этом случае доход от продажи одной тонны краски для наружных работ будет больше 6 тыс. руб., и наиболее выгодным становится выпуск только краски этого вида (точка  $F$ ) в объеме  $x_n = 4$  т в сутки. При этом общее потребление недефицитного сырья  $A$  снижается,  $b_1$  - в ограничении (1).

Аналогичные вычисления можно сделать и для цены на краску для внутренних работ  $c_B$ :

$$\begin{aligned} \text{tg}\alpha = c_s = c_n = 0,9 \Rightarrow \min c_B = 1 \Rightarrow 2x_n + 1,0x_B = F(\bar{X}), \quad F(\bar{X}) = 8 \text{ тыс. руб.} \\ \text{tg}\beta = c_s = c_n = 1 \Rightarrow \max c_B = 4 \Rightarrow 2x_n + 4x_B = F(\bar{X}), \quad F(\bar{X}) = 12 \text{ тыс. руб.} \end{aligned}$$

Таким образом, допустимый интервал изменения цены для нее состоит  $1,0 \leq c_B \leq 4$ , при этом единственным оптимальным решением остается точка  $E$  ( $3^{1/3}; 1^{1/3}$ ). Если цена  $c_B = 1$  тыс.руб., то оптимальной является любая точка отрезка  $EF$ . При дальнейшем уменьшении цены  $c_B$  краски для внутренних работ оптимум смещается в точку  $F$ , следовательно, выпуск фабрикой краски этого вида становится невыгодным. Если же цена  $c_B = 4$  тыс. руб., то оптимальное значение целевой функции достигается в любой точке отрезка  $DE$ , а дальнейшее увеличение цены  $c_B$  смещает оптимум в точку  $D$ .

Таким образом, можно проводить математическое моделирование вариантов коммерческой деятельности предприятия.

•••••

**Киреев Сергей Владимирович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры "Высшая математика" УлГТУ.

**Адрианова А.В., Шерстобитова С.Е.**, студентки группы Кд21 экономико-математического факультета Ульяновского государственного технического университета.



## РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

**С. В. Киреев, В. М. Валеева, М. А. Одинкина**

*В настоящее время оптимизация находит применение в науке, технике и в любой другой области человеческой деятельности. Оптимизация - целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях.*

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

В цехе имеется токарный станок и станок-автомат. Цех выпускает детали 1, 2 и 3 в комплекте: на каждую деталь 1 – по 2 детали 2 и 3. Часовая производительность станков по каждой из деталей приведена в таблице:

*Таб. 1. Часовая производительность станков.*

Станки	Детали		
	1	2	3
1. Токарный	5	5	10
2. Автомат	15	15	10

Составить программу работы станков, при которой в течение смены (8 часов) будет выпускаться максимальное количество комплектов деталей.

### 2. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Составим аналитическую модель задачи. Для этого сначала введем переменные, которые требуется определить:

$X_1$  – время, которое работал токарный станок над деталями типа 1 в течение рабочей смены;

$X_2$  – время, которое работал токарный станок над деталями типа 2 в течение рабочей смены;

$X_3$  – время, которое работал токарный станок над деталями типа 3 в течение рабочей смены;

$X_4$  – время, которое работал станок-автомат над деталями типа 1 в течение рабочей смены;

$X_5$  – время, которое работал станок-автомат над деталями типа 2 в течение рабочей смены;

$X_6$  – время, которое работал станок-автомат над деталями типа 3 в течение рабочей смены.

Система ограничений состоит из двух групп. Первая группа устанавливает, что каждый из станков может работать не более 8 часов в смену.

Ограничение времени работы токарного станка:  $X_1 + X_2 + X_3 \leq 8$ ;

Ограничение времени работы станка-автомата:  $X_4 + X_5 + X_6 \leq 8$ .

Вторая группа ограничений направлена на выполнение требования о комплектации деталей: на каждую деталь 1 должно приходиться по 2 детали 2 и 3. Но перед тем, как вводить это ограничение, определим, сколько деталей каждого типа у нас будет производиться за смену:

$5X_1 + 15X_4$  - будет произведено за смену деталей типа 1;

$5X_2 + 15X_5$  - будет произведено за смену деталей типа 2;

$10X_3 + 10X_6$  - будет произведено за смену деталей типа 3.

Теперь введем сами ограничения:

$$2(5X_1 + 15X_4) = 5X_2 + 15X_5; 2(5X_1 + 15X_4) = 10X_3 + 10X_6.$$

Очевидно, что все переменные в задаче неотрицательные (объем продукции не может быть отрицательным):  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$

Целевая функция в нашей задаче должна выражать количество комплектов деталей, выпускаемых за смену, поэтому сложим все выпускаемые детали и поделим на 5 (в комплект, как уже упоминалось, входят 1 деталь типа 1 и по 2 детали типа 2 и 3):

$$E = \frac{(5X_1 + 15X_4 + 5X_2 + 15X_5 + 10X_3 + 10X_6)}{5} \Rightarrow \max$$

или, если упростить это выражение, то получим:

$$E = X_1 + X_2 + 2X_3 + 3X_4 + 3X_5 + 2X_6 \Rightarrow \max$$

Целевую функцию надо максимизировать.

Таким образом, формальная постановка задачи оптимизации имеет следующий вид:

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 8; X_4 + X_5 + X_6 \leq 8; 2(5X_1 + 15X_4) = 5X_2 + 15X_5;$$

$$2(5X_1 + 15X_4) = 10X_3 + 10X_6; X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0.$$

$$E = X_1 + X_2 + 2X_3 + 3X_4 + 3X_5 + 2X_6 \Rightarrow \max$$

Решение задачи оптимизации проводится на основе симплекс-таблиц. Оптимальный план состоит в том, чтобы токарный станок работал над деталями типа 3 8 часов за смену, то есть всю рабочую смену, и не работал над деталями типа 1 и 2 вообще. Станок-автомат должен работать за смену 2,67 часа над деталями типа 1 и 5,33 часа над деталями типа 2 и не должен работать над деталями типа 3. При этом за смену будет выпускаться максимально возможное количество комплектов деталей, а именно 40 комплектов. Ни один из станков не будет простаивать.

## 2. АНАЛИЗ МОДЕЛИ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ

В окончательной симплекс-таблице, содержащей оптимальное решение, содержится не только само оптимальное решение, но и другая информация. На основе последней симплекс-таблицы решаются задачи анализа на чувствительность - определение влияния изменений в исходных данных задачи на оптимальное решение. Интерпретация симплекс-таблицы и анализ на чувствительность полностью зависят от содержательного смысла конкретной задачи. В нашем случае мы имеем дело с задачей о распределения

ресурсов, а именно ресурсов времени.

Статус ресурсов определяется по значениям остаточных переменных  $X_7$  и  $X_8$ , введенных в исходную систему ограничений для приведения ее к стандартной форме. Эти переменные означают остатки ресурсов при реализации оптимального плана. Ни одна из остаточных переменных не входит в оптимальное решение, т.е. их значения равны нулю. Это означает, что токарный станок и станок-автомат использовали все выделенное для их работы время, т.е. запасы времени работы станков являются дефицитными ресурсами. Увеличение запасов дефицитных ресурсов позволяет увеличить значение целевой функции, а снижение этих запасов приводит к уменьшению целевой функции.

Для анализа решения на чувствительность к изменению запасов времени работы станков (без изменения других исходных данных задачи) используются коэффициенты из столбцов остаточных переменных  $X_7$  и  $X_8$  (соответственно для токарного станка и станка-автомата) в последней симплекс-таблице.

Из-за уменьшения запаса времени работы токарного станка уменьшилось время работы этого станка над деталями типа 3, но вместе с тем увеличилось время работы станка-автомата над этими же деталями. Так как станок-автомат стал работать за смену 1 час над деталями третьего типа, то он уменьшил свое время работы над деталями типа 1 и 2 (ранее он отдавал все свое время на обработку только этих деталей). И, очевидно, что если время работы токарного станка уменьшилось, то уменьшится и количество комплектов деталей, производимых в сутки.

Таким образом, для исследования влияния изменения запаса ресурса на оптимальное решение нет необходимости решать задачу заново (с новым ограничением). Для нахождения оптимального решения достаточно по окончательной симплекс-таблице исходной задачи составить уравнения и подставить в них величину изменения запаса ресурса (значение  $d$ ).

Изменение запасов ресурсов (т.е. правых частей ограничений) может привести к недопустимости оптимального базиса, найденного для исходной задачи. Так как на все переменные, используемые в задаче, накладывается требование неотрицательности, допустимый диапазон изменения запаса ресурса (т. е. диапазон допустимых значений  $d$ ) находят из системы неравенств. Таким образом, допустимый диапазон изменения запаса времени работы токарного станка, при котором состав переменных в базисе оптимального решения не изменяется, находится из условия:

$$X_3 = 8 + 1 \cdot d > 0, X_6 = 0 - 0,5 \cdot d > 0, X_4 = 2,67 + 0,17 \cdot d > 0, X_5 = 5,33 + 0,33 \cdot d > 0$$

Решив данную систему неравенств, получим, что  $-8 < d < 0$ . Таким образом, базис оптимального решения будет состоять из переменных ( $X_3, X_6, X_4, X_5$ ), если запас времени работы токарного станка будет находиться

в диапазоне от 0 до 8 часов. Выход значения  $d$  за границы этого диапазона приведет к недопустимости найденного нами оптимального решения, так как минимум одна из базисных переменных окажется отрицательной, и для того, чтобы найти оптимальное решение, нам придется решать задачу заново.

Аналогично выполняется анализ на чувствительность к изменению запаса времени работы станка-автомата.

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Данная задача по своему содержанию является частично целочисленной. Переменные  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ , обозначающие время работы определенного станка над деталями определенного типа, должны принимать целые значения. В то же время, переменные  $X_7, X_8$ , обозначающие время простоя соответственно токарного станка и станка-автомата, могут принимать дробные значения. Для поиска оптимального целочисленного решения воспользуемся методом Гомори для частично целочисленных задач.

Ограничения составляются по финальной симплекс-таблице, в которой получено оптимальное нецелочисленное решение. При этом на первоначальную систему ограничений накладывается новое ограничение по следующей формуле:

$$L_1 \cdot W_1 + L_2 \cdot W_2 + \dots + L_n \cdot W_n \geq \{B_i\}, \text{ где}$$

$L_j =$	$A_{ij}$ ,	если $A_{ij} \geq 0$ и $W_j$ может быть дробной	(1)
	$\frac{\{B_i\} \cdot A_{ij}}{\{B_i\} - 1}$ ,	если $A_{ij} < 0$ и $W_j$ может быть дробной	(2)
	$\{A_{ij}\}$ ,	если $\{A_{ij}\} \leq \{B_i\}$ и $W_j$ должна быть целой	(3)
	$\frac{\{B_i\} \cdot (1 - \{A_{ij}\})}{1 - \{B_j\}}$ ,	если $\{A_{ij}\} > \{B_i\}$ и $W_j$ должна быть целой	(4)

$j=1, 2, \dots, n$

где  $W_n$  – небазисная переменная;  $B_i$  – базисная переменная, имеющая максимальную дробную часть (дробная часть числа – это разность между этим числом и максимальным целым числом, не превосходящим его);  $A_{ij}$  – коэффициент, стоящий на пересечении строки  $i$ -ой базисной переменной и столбца  $j$ -ой небазисной переменной;

Далее полученное ограничение приводится к стандартному виду:

$$-L_1 \cdot W_1 - L_2 \cdot W_2 - \dots - L_n \cdot W_n + S_r = -\{B_i\}$$

где  $r$  – номер итерации алгоритма.

Здесь  $S_r$  – неотрицательная остаточная переменная, не имеющая никакого содержательного смысла; в оптимальном целочисленном решении эта переменная оказывается равной нулю.

В нашем случае переменная, имеющая максимальную дробную часть – это  $X_4$  ( $\{2,67\}=0,67$ ), она должна быть целой, переменные  $X_7$  и  $X_8$  могут быть дробными, переменные  $X_1$  и  $X_2$  должны быть целыми, поэтому, согласно



# ОБНАРУЖЕНИЕ НАРУШЕНИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНТРОЛЬНЫХ КАРТ КУМУЛЯТИВНЫХ СУММ

В. Н. Клячкин, А. Ю. Михеев

Предположим, что при контроле показателя качества  $X$ , имеющего нормальное распределение со средним значением  $\mu$  и стандартным отклонением  $\sigma$ , требуется выявить наличие малого постоянного смещения (сдвига) процесса на некоторую величину  $\Delta = \delta\sigma$  (в долях от стандартного отклонения  $\sigma$ ).

Одним из эффективных инструментов для контроля процесса в этой ситуации является карта кумулятивных (накопленных) сумм [1]. В качестве контролируемой статистики используется сумма отклонений среднего значения от целевого среднего  $\mu$ :

$$C_t = \sum_{i=1}^t (\bar{X}_i - \mu); \quad t = 1, \dots, m,$$

где  $m$  – количество мгновенных выборок. При этом учитывается не только результат текущих наблюдений, но и все данные от начала контроля («история» процесса).

Один из способов интерпретации карты кумулятивных сумм – использование V-маски (схема Барнарда). На карту накладывается шаблон в виде повернутой буквы V: от последней из нанесенных на карту точек откладывается величина  $d$ , угол раствора маски  $2\theta$ . Если точка на карте оказывается вне раствора маски, процесс считается статистически неуправляемым: наклон слишком велик. Для расчета параметров маски (величин  $d$  и  $\theta$ ) используются методы последовательного анализа [2]:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{\delta\sigma}{2} = \frac{\Delta}{2}; \\ d &= \frac{b}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{2}{n\delta^2} \ln \frac{1-\beta}{\alpha/2}, \end{aligned}$$

здесь  $n$  – объем мгновенной выборки,  $\alpha$  и  $\beta$  – вероятности ошибок первого и второго рода.

Упрощенный вариант принятия решения при управлении процессом с использованием контрольных карт кумулятивных сумм предложен в стандарте [3]. Применяется усеченная V-маска длиной 10 выборочных интервалов в виде равнобокой трапеции с левым основанием, равным  $20\sigma$ , и правым  $10\sigma$ .

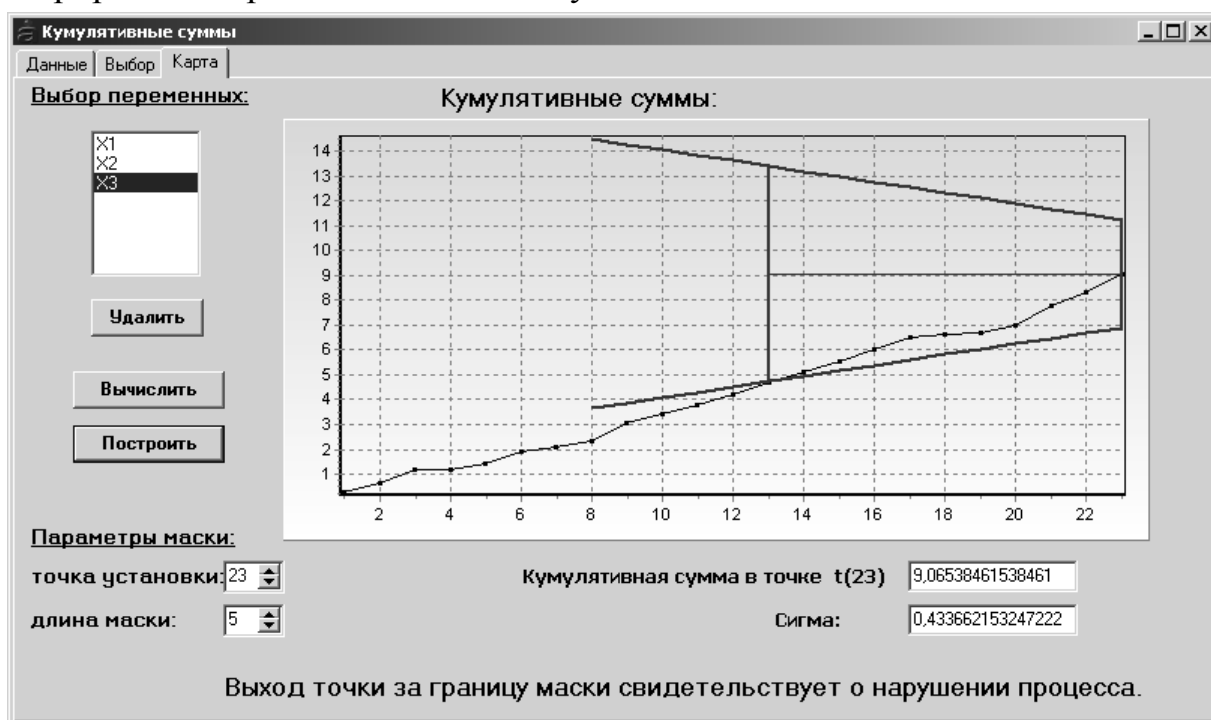
Такой подход был использован при разработке системы статистического контроля многопараметрического технологического процесса. Для мониторинга коррелированных показателей используются многомерные карты Хотеллинга и экспоненциально взвешенных скользящих средних, а для

контроля и диагностики процесса по группе некоррелированных показателей – карты Шухарта и кумулятивных сумм.

На этапе анализа вводятся результаты наблюдений за отлаженным процессом, при этом проверяется его стабильность, оценивается воспроизводимость и определяются основные характеристики. При мониторинге процесса для обнаружения нарушений могут быть использованы как карты Шухарта, так и карты кумулятивных сумм.

Программа обеспечивает выбор показателя для контроля, точку установки маски и – при необходимости – корректировку ее длины.

На рисунке в качестве примера показан статистический контроль процесса изготовления вала: построена карта кумулятивных сумм для показателя X3 (диаметр одной из ступеней вала) и представлена интерпретация процесса с помощью усеченной V-маски.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миттаг Х., Ринне Х. Статистические методы обеспечения качества / Пер. с нем.; Под ред. Б.Н. Маркова. – М.: Машиностроение, 1995. – 616 с.
2. Клячкин В.Н. Многомерный статистический контроль технологического процесса. - М.: Финансы и статистика, 2003. – 192 с.
3. ГОСТ Р 50779.45 – 2002. Статистические методы. Контрольные карты кумулятивных сумм. Основные положения.

••••••••••••••••••••

*Клячкин Владимир Николаевич, д.т.н., профессор кафедры «Прикладная математика и информатика» УлГТУ, тел. (8422) 327045, e-mail: kl@ulstu.ru*

*Михеев Андрей Юрьевич, студент группы ПМд-51 экономико-математического факультета УлГТУ.*

# ВЛИЯНИЕ СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ КОНТРОЛЬНЫХ КАРТ К НАРУШЕНИЯМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

В. Н. Клячкин, В. А. Сафин

Для статистического управления процессами используются контрольные карты: процесс считается статистически управляемым, если контролируемый показатель лежит внутри границ. При этом, как правило, предполагается, что погрешности измерения показателя отсутствуют. Влияние погрешностей на чувствительность контрольных карт Шухарта исследовал Х. Миттаг [1]. Для оценки чувствительности контрольной карты к возможным нарушениям процесса используется специальная характеристика – средняя длина серий, определяемая как среднее число наблюдений от момента нарушения процесса до момента обнаружения этого нарушения.

Систематическая погрешность характеризуется тем, что результат измерения является детерминированной функцией измеряемой величины. В наиболее важном для практики случае систематическая погрешность постоянна и учитывается аддитивно, то есть результат измерений является суммой действительного значения показателя и систематической погрешности, которая является мерой смещения нуля средства измерения. Если эта погрешность известна заранее, то она может быть учтена при калибровке контрольных карт: положение контрольных границ определяется с учетом систематической ошибки. При этом средняя длина серий и вероятность ложной тревоги не меняются, однако контроль проводится за соблюдением искаженного значения параметра.

Если же постоянная погрешность возникает в процессе производства после калибровки контрольных карт, то погрешность приводит к смещению графика средней длины серий вдоль горизонтальной оси. В этом случае возможна ситуация, когда контрольная карта покажет наличие нарушения, хотя на самом деле его нет: достижение контрольной границы вызвано внезапным появлением систематической погрешности.

Пусть, например, при построении карт средних значений появляется постоянная погрешность измерения  $c$ , то есть  $X^e = X + c$ , тогда распределение

$$X^e = N(\mu + c, \sigma/\sqrt{n}).$$

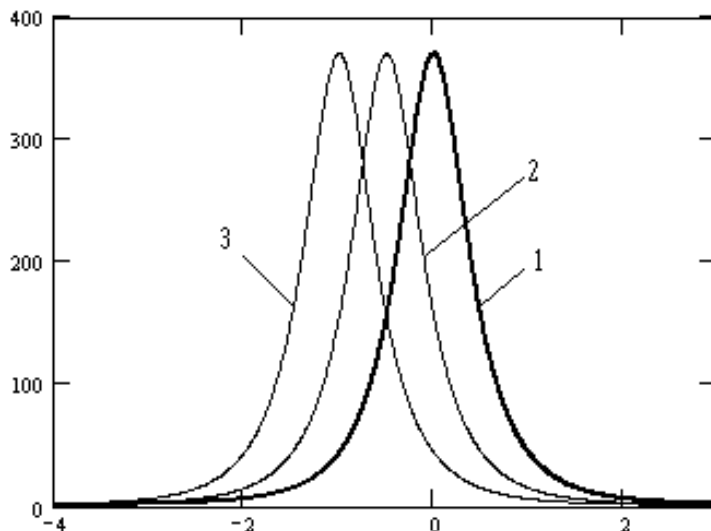
Введем относительную погрешность  $a = c/\sigma$ . Формула для расчета средней длины серий, приведенная в [2], примет вид:

$$L(\delta) = ( \Phi[(\delta + a)\sqrt{n} - u_{1-\alpha/2}] - \Phi[-(\delta + a)\sqrt{n} - u_{1-\alpha/2}] )^{-1},$$

где  $\Phi(x)$  – функция стандартного нормального распределения,  $u_{1-\alpha/2}$  – квантиль нормального распределения,  $\alpha$  – уровень значимости.



На рисунке показаны графики зависимости средней длины серий на уровне значимости  $\alpha = 0,0027$  при относительных погрешностях  $a = 0$  (кривая 1),  $a = 0,5$  (кривая 2) и  $a = 1$  (кривая 3).



При проведении статистического контроля многопараметрического процесса, если показатели независимы, могут быть использованы несколько карт Шухарта одновременно. Если же контролируемые показатели коррелированы, то используются специальные многомерные карты. Это карты Хотеллинга, карты многомерных экспоненциально взвешенных скользящих средних и другие. Влияние погрешностей измерений на чувствительность таких карт не изучено, хотя очевидно, что по аналогии с картами Шухарта, систематические, как и случайные погрешности могут существенно исказить результаты контроля технологического процесса.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 08-08-97004.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миттаг Х., Ринне Х. Статистические методы обеспечения качества / Пер. с нем.; Под ред. Б.Н. Маркова. – М.: Машиностроение, 1995. – 616 с.
2. Клячкин В.Н. Многомерный статистический контроль технологического процесса. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 192 с.

•••••

*Клячкин Владимир Николаевич, д.т.н., профессор кафедры «Прикладная математика и информатика» УлГТУ, тел. (8422) 327045, e-mail: [kl@ulstu.ru](mailto:kl@ulstu.ru)*

*Сафин Вадим Алиевич, аспирант кафедры «Прикладная математика и информатика» УлГТУ*

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОНТРОЛЯ РАССЕЙЯНИЯ В МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ

В. Н. Клячкин, А. В. Узинский

При многомерном статистическом контроле технологического процесса в основном используются карты для среднего уровня многопараметрического процесса. Это карты Хотеллинга и многомерных экспоненциально взвешенных скользящих средних [1]. Проверка гипотезы о равенстве вектора средних значений  $\mu$  некоторому целевому вектору  $\mu_0$  (именно эта гипотеза проверяется с использованием карты Хотеллинга) с геометрической точки зрения эквивалентна проверке отсутствия смещения (или незначимости такого смещения) центра эллипсоида, соответствующего распределению контролируемых показателей. Обнаружение изменения рассеивания процесса – это проверки отсутствия изменения размеров этого эллипсоида.

Основной характеристикой рассеяния одномерной случайной величины является дисперсия  $\sigma^2$ . Ее многомерный аналог – ковариационная матрица  $\Sigma$ . Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_p$  – выборка объема  $n$  независимых одинаково распределенных случайных векторов из наблюдений над  $p$ -мерной нормально распределенной генеральной совокупностью  $X \sim N(\mu_0, \Sigma)$ . Тогда выборочная оценка ковариационной матрицы  $S$  имеет распределение Уишарта  $W\left(\frac{1}{n-1}\Sigma, n-1\right)$  с ковариационной матрицей  $\Sigma/(n-1)$  и  $(n-1)$  степенью свободы. Распределение Уишарта – это обобщение  $\chi^2$ -распределения для оценки дисперсии генеральной совокупности.

Проведение мониторинга технологического рассеяния процесса возможно с использованием карты Хотеллинга для стандартных отклонений: для каждой  $t$ -ой мгновенной выборки ( $t = 1, \dots, m$ ) рассчитывается статистика Хотеллинга:

$$T_{St}^2 = (S_t - \bar{s})^T \Sigma_S^{-1} (S_t - \bar{s}).$$

При нормальном ходе процесса (с точки зрения изменения рассеивания) должно выполняться условие

$$T_{St}^2 < T_{kp}^2,$$

где  $T_{kp}^2$  – граница критической области.

Может быть использована и карта многомерных экспоненциально взвешенных скользящих средних для стандартных отклонений.

Кроме ковариационной матрицы, в качестве аналога дисперсии одномерного процесса  $\sigma^2$  используют обобщенную дисперсию  $|\Sigma|$  – определитель ковариационной матрицы.



## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕДУПРЕЖДАЮЩИХ ГРАНИЦ В КОНТРОЛЬНЫХ КАРТАХ РЕГРЕССИОННЫХ ОСТАТКОВ

В. Н. Клячкин

Статистический контроль многопараметрического технологического процесса по регрессионным остаткам используется в случае, когда управляющее воздействие в процессе может быть оказано не только на всю совокупность контролируемых показателей, но и на некоторое подмножество этих показателей. При этом в условиях отлаженного технологического процесса строятся регрессионные зависимости между показателями этого подмножества, как откликами, и остальными независимыми показателями (этап предварительного анализа процесса). Если эти зависимости оказываются значимыми, то регрессионные остатки – разности между прогнозируемыми и наблюдаемыми значениями, обладают рядом свойств, позволяющих в дальнейшем проводить мониторинг процесса по контрольным картам регрессионных остатков: диагностика процесса проводится по наличию нарушений на карте.

Предположим, что регрессионные модели найдены в виде

$$Y_j = X_j \beta_j,$$

где  $Y_j$  – расчетные векторы откликов по результатам  $m$  наблюдений, полученных в обучающей выборке,  $j = 1, \dots, p_0$ ,  $p_0$  – количество независимо управляемых показателей,  $X_j$  – регрессионные матрицы размерности  $m \times (p - p_0 + 1)$ ,  $p$  – количество контролируемых показателей в процессе,  $\beta_j$  – векторы оцененных параметров. Для рассчитанных с использованием этих соотношений регрессионных остатков

$$e_j = Y_j - Y'_j$$

( $Y'_j$  – вектор опытных значений откликов) строится оценка ковариационной матрицы  $S_e$ .

Для проведения статистического контроля процесса в случае, когда  $p_0 = 1$ , Хаукинсом [1] предложено использование контрольной карты Шухарта на регрессионных остатках. При  $p_0 > 1$  могут быть использованы карты Хотеллинга или многомерных экспоненциально взвешенных скользящих средних [2].

При мониторинге процесса в  $t$ -ом наблюдении на карте Хотеллинга откладываются значения статистики

$$T^2_t = e_t^T S_e^{-1} e_t,$$

а положение контрольной границы определяется по формуле

$$T^2_{кр} = p_0(m + 1)F_{1-\alpha}^{(p_0, m - p_0)} / (m - p_0),$$

где  $F_{1-\alpha}^{(k_1, k_2)}$  – квантиль распределения Фишера порядка  $1 - \alpha$ .

Эффективность карты Хотеллинга может быть повышена путем применения предупреждающей границы: в этом случае о нарушении процесса

свидетельствует не только выход контролируемой статистики за контрольную границу  $T^2_{кр}$ , но и попадание двух точек подряд между контрольной и предупреждающей  $T^2_w$  границами. Расчет положения предупреждающей границы  $T^2_w$  для обычной карты Хотеллинга на основе теории марковских цепей приведен в [2]; полученные результаты справедливы и для карты Хотеллинга на регрессионных остатках.

Если для диагностики процесса используется карта многомерных экспоненциально взвешенных скользящих средних, построенная на базе регрессионных остатков, то значения, откладываемые на карте, рассчитываются по формулам:

$$ME_t = Z_t^T S_Z^{-1} Z_t,$$

где

$$Z_t = (1 - k)Z_{t-1} + ke_t;$$
$$S_Z = k[1 - (1 - k)^{2t}]S_e/(2 - k),$$

$k$  – параметр экспоненциального сглаживания.

Положение контрольной границы на карте  $ME_{кр}$  определяется по результатам статистических испытаний или на основе эмпирических зависимостей, построенных по результатам испытаний. По аналогии с картой Хотеллинга для повышения эффективности карты экспоненциально взвешенных скользящих средних также может быть введена предупреждающая граница  $ME_w = \gamma ME_{кр}$ , где коэффициент  $\gamma$  может быть найден по результатам испытаний.

Отметим, что диагностика нарушений процесса при использовании карт с предупреждающими границами, сводится к обнаружению следующих ситуаций:

- выход контролируемой статистики за одну из контрольных границ,
- попадание двух точек подряд между предупреждающей и контрольной границами,
- наличие на карте неслучайной структуры (тренд, цикличность, серии специального вида и т.п.), вероятность появления которой соизмерима с вероятностью ложной тревоги

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 08-08-97004.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hawkins D. Multivariate quality control based on regression – adjusted variables // *Technometrics*. – 1991. – V. 33. – P. 61 – 75.
2. Клячкин В.Н. Многомерный статистический контроль технологического процесса. - М.: Финансы и статистика, 2003. – 192 с.

•••••

*Клячкин Владимир Николаевич, д.т.н., профессор кафедры «Прикладная математика и информатика» УлГТУ, тел. (8422) 327045, e-mail: kl@ulstu.ru*

## АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ВНУТРЕННИМ ПОЛЮСОМ

**И. В. Коноплева, А. В. Бойко**

*Рассмотрена спектральная задача Штурма-Лиувилля, в которой и дифференциальное уравнение и собственные функции имеют особенность внутри интервала. Получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма-Лиувилля с внутренним полюсом с функциями спектрального параметра  $\mathfrak{G}_1(\lambda)$  и  $\mathfrak{G}_2(\lambda)$  в краевых условиях.*

Рассмотрена спектральная задача Штурма–Лиувилля, в которой и дифференциальное уравнение и собственные функции имеют полюс внутри интервала, а краевые условия зависят от функций спектрального параметра:

$$u'' + \left( \frac{r(x)}{x - i\varepsilon} + p(x) - \lambda \right) u = 0, \quad (1)$$

$$u'(a) - h \mathfrak{G}_1(\lambda) u(a) = 0, \quad (2)$$

$$u'(b) + H \mathfrak{G}_2(\lambda) u(b) = 0. \quad (3)$$

Здесь  $a < 0$ ,  $b > 0$ ,  $h \leq 0$ ,  $H \geq 0$ ,  $p(x)$  и  $r(x)$  – действительные функции, непрерывные на  $[a, b]$ ,  $\lambda$  – собственное значение,  $\varepsilon > 0$  – вещественная

постоянная,  $\mathfrak{G}_i(\lambda) = \alpha_i + \sum_{k=0}^{n_i} \frac{1 + \lambda_k^{(i)} \lambda}{\lambda_k^{(i)} - \lambda} \rho_k^{(i)}$ ;  $\lambda_k^{(i)}, \alpha_i, \rho_k^{(i)} \in \mathbb{R}$ ,  $\rho_k^{(i)} > 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Замечание 1. Если  $\mathfrak{G}_1(\lambda) = \infty$ , то краевое условие (2) имеет вид  $u(a) = 0$ . Аналогично, при  $\mathfrak{G}_2(\lambda) = \infty$ ,  $u(b) = 0$ .

Доказаны следующие утверждения

**Теорема 1.** *Собственные функции задачи (1)–(3) ортогональны, т.е.*

$$\int_a^b u_m u_n dx = 0, \text{ при } \lambda_m \neq \lambda_n.$$

**Теорема 2.** *Если  $r(x) > 0$  на  $[a, b]$ , то все собственные значения задачи (1) – (3) расположены в верхней полуплоскости, т. е.  $\text{Im}(\lambda_n) > 0$  для всех  $n$ .*

Получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций частного случая общей задачи, т.е. для уравнения вида:

$$u'' + \left( \frac{1}{x} - \lambda \right) u = 0, \quad (4)$$

с начальными условиями (2) и (3). Уравнение (4) – специальная форма уравнения Уиттекера. Обозначим  $k = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$ , тогда линейно независимые

решения (4) имеют вид:

$$u_1(x_1\lambda) = M_{-k, \frac{1}{2}}\left(-\frac{x}{k}\right), u_2(x_1\lambda) = \Gamma(1+k)W_{-k, \frac{1}{2}}\left(-\frac{x}{k}\right),$$

где  $\Gamma(1+k)$  – гамма функция,  $W_{-k, \frac{1}{2}}\left(-\frac{x}{k}\right)$  – функция Уиттекера,  $M_{-k, \frac{1}{2}}$  – вырожденная гипергеометрическая функция (см. [2]).

Используя методы [1], получим что при  $\arg\left(-\frac{x}{k}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\lambda \rightarrow \infty, k \rightarrow 0$  вдоль отрицательной части мнимой оси функции  $M_{-k, \frac{1}{2}}\left(-\frac{x}{k}\right), \Gamma(1+k)W_{-k, \frac{1}{2}}\left(-\frac{x}{k}\right)$  и их производные по  $x$  имеют асимптотические приближения:

$$\begin{aligned} u_1(x, \lambda) &= M_{-k, \frac{1}{2}}\left(-\frac{x}{k}\right) \approx -2i \sin(\sqrt{|\lambda|x}), \\ u_2(x, \lambda) &= \Gamma(1+k)W_{-k, \frac{1}{2}}\left(-\frac{x}{k}\right) \approx e^{i\sqrt{|\lambda|x}}, \\ u'_1(x, \lambda) &= \left( M_{-k, \frac{1}{2}}\left(-\frac{x}{k}\right) \right)'_x \approx -2i\sqrt{|\lambda|} \cos(\sqrt{|\lambda|x}), \\ u'_2(x, \lambda) &= \left( \Gamma(1+k)W_{-k, \frac{1}{2}}\left(-\frac{x}{k}\right) \right)'_x \approx i\sqrt{|\lambda|} e^{i\sqrt{|\lambda|x}}, \end{aligned}$$

Можно получить следующие оценки для  $\mathcal{G}_i(\lambda), (i=1,2)$  при больших  $|\lambda|$ :

$$\mathcal{G}_i(\lambda) = \alpha_i - \sum_{k=0}^{n_i} \lambda_k^{(i)} \rho_k^{(i)} + 0\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad i=1,2. \quad \text{Тогда при } \lambda \rightarrow \infty \text{ вдоль отрицательной}$$

части мнимой оси функции имеют место асимптотические формулы:

$$u_1(x, \lambda) \approx -2i \sin(\sqrt{|\lambda|x}), \quad u_2(x, \lambda) \approx e^{i\sqrt{|\lambda|x}}, \quad \mathcal{G}_i(\lambda) = A_i + 0(1/|\lambda|).$$

Краевые условия (2), (3) могут быть записаны в виде матричного уравнения, определитель которого имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= (u'_1(a) - h\mathcal{G}_1 u_1(a))(u'_2(b) + H\mathcal{G}_2(\lambda)u_2(b) - \\ &- (u'_1(b) + H\mathcal{G}_2(\lambda)u_1(b))(u'_2(a) - h\mathcal{G}_1(\lambda)u_2(a)). \end{aligned}$$

Собственные значения краевой задачи являются корнями уравнения  $\Delta(\lambda) = 0$ , подставляя в него вместо  $u_1, u_2, u'_1, u'_2$  и  $\mathcal{G}_i(\lambda)$  асимптотические приближения, получим уравнение для собственных значений:

$$\operatorname{tg}(\sqrt{|\lambda_n|}(b-a)) = \frac{2i\sqrt{|\lambda_n|} \cdot (HA_2 + hA_1)}{2i|\lambda_n| - hHA_1A_2},$$

т. к. при  $\lambda \rightarrow \infty$  его правая часть равенства стремится к 0, то

$$|\lambda_n| \approx \frac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2}, \quad n \rightarrow \infty, \quad \lambda_n \approx -\frac{\pi^2 m^2}{(b-a)^2}, \quad n \rightarrow \infty,$$

следовательно, собственные функции задачи (4), (2), (3) имеют вид:

$$u_n(x) \approx \sin\left(\frac{\pi n x}{(b-a)}\right). \quad (5)$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Boyod, J. P. Sturm–Liouville eigenproblem with an interior pole //J. Math. Phys. – 22(8), 1979. – P. 1575–1590.

2. Олвер, Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. – М.: Мир, 1978.

•••••

**Коноплева И.В.** – кандидат ф.-м. наук, доцент каф. «Высшая математика» Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, [i.konopleva@ulstu.ru](mailto:i.konopleva@ulstu.ru)

**Бойко А.В.** – студент гр. АХд-21 УлГТУ



# ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ СТАТИСТИЧЕСКОГО КОНТРОЛЯ В УСЛОВИЯХ НАРУШЕНИЯ НОРМАЛЬНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Е. И. Константинова

При проведении статистического контроля технологического процесса распределение контролируемого показателя, как правило, предполагается нормальным. Если же действительное распределение показателя отличается от нормального, в стандартах по контрольным картам Шухарта рекомендуется увеличить объем мгновенной выборки, что, в соответствии с центральной предельной теоремой, приводит к приближенной нормальности средних значений.

Для многопараметрического процесса основными инструментами статистического контроля являются карты Хотеллинга и многомерных экспоненциально взвешенных скользящих средних [1], основные соотношения для которых получены также на базе многомерного нормального распределения. Увеличение объема выборки часто бывает нецелесообразно из экономических соображений. Для обеспечения нормальности проводятся нормализующие преобразования (например, на базе распределений Джонсона) или делается переход к главным компонентам [2]. При этом представляет интерес оценить, насколько существенно влияет замена действительного распределения показателя нормальным на эффективность статистического контроля.

Предположим, что контролируемый параметр имеет распределение Рэля (кривая 2 на рис.1), а контрольная карта строится в предположении его нормальности (кривая 1). Параметры нормального распределения оцениваются по опытным данным.

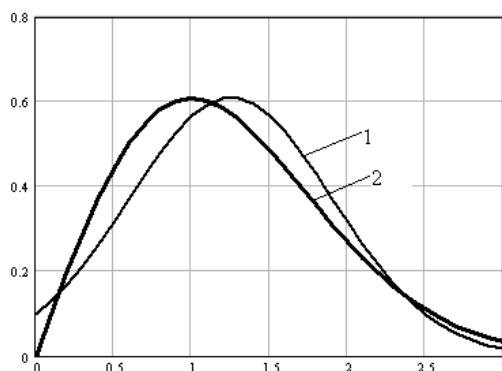


Рис.1

Основная характеристика эффективности контроля – средняя длина серий: количество наблюдений от момента нарушения процесса до момента обнаружения этого нарушения. Зависимость этой характеристики от смещения среднего уровня процесса  $L(\delta)$  при нормальном распределении имеет вид [2]:

$$L(\delta) = [\Phi(\delta - u_{1-\alpha/2}) - \Phi(-\delta - u_{1-\alpha/2})]^{-1},$$

где  $\Phi(x)$  – функция стандартного нормального распределения,  $u_{1-\alpha/2}$  – квантиль нормального распределения порядка  $1 - \alpha/2$ ,  $\alpha$  – уровень значимости.

Для распределения Рэлея, функция которого

$$F(x) = 1 - \exp(-x^2/2a^2),$$

где  $a$  – параметр распределения, оцениваемый по выборочным данным, получена зависимость для расчета средней длины серий:

$$L(\delta) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\ln a}{1 + \delta(\sqrt{-2 \ln a} - \sqrt{2 \ln 2})/3}\right)}.$$

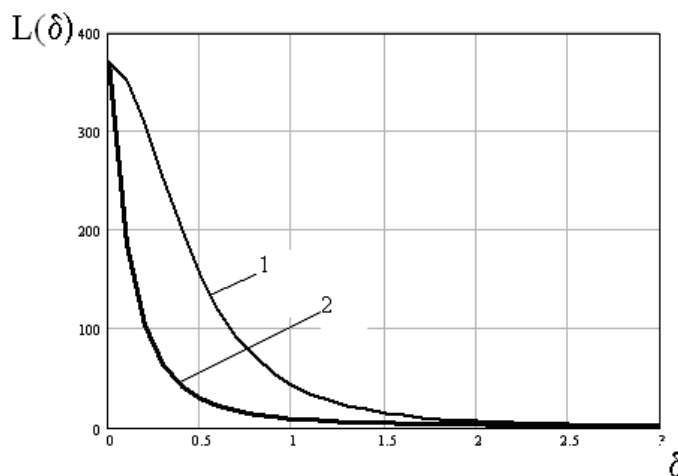


Рис.2

На рис.2 показаны соответствующие графики для контрольной карты на главных компонентах при нормальном распределении (кривая 1) и распределении Рэлея (2) в зависимости от характеристики смещения среднего уровня процесса  $\delta$ . Видно, что например при  $\delta = 1$   $L_1(1) = 44$ ;  $L_2(1) = 9$ : при замене распределения Рэлея на нормальное для обнаружения нарушения требуется почти в 5 раз больше выборок.

Аналогичные соотношения могут быть получены и для других типов распределений.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клячкин В.Н. Многомерный статистический контроль технологического процесса. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 192 с.
2. Клячкин В.Н., Константинова Е.И. Диагностика многопараметрического технологического процесса с использованием контрольных карт на главных компонентах // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2007, №3. – С. 59 – 61.

•••••  
**Константинова Евгения Игоревна, аспирант кафедры «Прикладная математика и информатика» УлГТУ.**

# АППРОКСИМИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ НА ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ

**А. В. Кочулимов, В. Л. Леонтьев**

В [1] предложены новые ортогональные финитные функции второй степени, связанные с треугольными сетками и с модификацией [2] классических финитных функций второй степени [3]. Найдены действительные значения параметров, которые входят в аналитические выражения этих функций и определяют свойство их взаимной ортогональности на каждой конкретной сетке треугольных элементов. Здесь исследуются аппроксимирующие свойства последовательностей наборов функций, связанных с последовательностью сгущающихся треугольных сеток. Последовательности наборов функций [1] образуют базис в пространствах Соболева и являются основой для геометрического моделирования и для построения алгоритмов численных методов исследования математических моделей.

$W_2^{2,h}$  – подпространство функций  $\varphi_i(x, y)$  [1]:  $W_2^{2,h} \subset C(\bar{\Omega}) \cap W_2^2(\Omega)$ . Его элементы имеют вид:

$$u^h(x, y) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x, y) \quad (u_i = \text{const}). \quad (1)$$

Здесь  $C(\bar{\Omega})$  – пространство непрерывных на  $\bar{\Omega}$  функций с нормой  $\|u\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$ ;  $C^{(k)}(\bar{\Omega})$  – банахово пространство функций, имеющих непрерывные в  $\bar{\Omega}$  производные до порядка  $k$  включительно;  $W_2^k(\Omega)$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) – гильбертовы пространства с нормами

$$\|u\|_{W_2^k(\Omega)} = \left( \sum_{v \leq k} \int_{\Omega} |D^v u|^2 d\Omega \right)^{1/2},$$

где  $D^v = (\partial/\partial x)^m (\partial/\partial y)^n$ ;  $v = (m, n)$ ;  $m, n = 0, 1, 2$ ;  $|v| = m + n$ ; в качестве функций  $\varphi_i(x, y)$  берутся сеточные ортогональные финитные функции [1], связанные с  $N$  узлами  $P_s$  треугольной части  $T_m$  их конечных носителей ( $s=1, 2, \dots, 6$ ; далее значениям 1, 3, 5 индекса  $s$  соответствуют индексы  $i, j, k$ , а значениям 2, 4, 6 соответствуют наборы индексов  $ij, jk, ki$ ).

**Теорема.**  $\forall u(x, y) \in W_2^2(\Omega) \cap C^{(1)}(\bar{\Omega}) \quad \exists u^h \in W_2^{2,h} :$

$$\|u - u^h\|_{W_2^0(\Omega)} \leq Ch^3 \|u\|_{C^{(3)}(\Omega)} + \frac{A^{1/2} S^{1/2} h}{\sqrt{20} \sin \Theta_0} \sum_{|k|=1} \|D^k u\|_{C(\bar{\Omega})},$$

где  $\Theta_0$  – минимальный из углов всех треугольников сетки,  $S$  – площадь области  $\Omega$ ,

$$A = \frac{8451 + 400\sqrt{21} - 264\sqrt{105} + 5\sqrt{-21887 + 2256\sqrt{105}}}{1080}.$$

Постоянная  $C$  не зависит от параметров сетки и от функции  $u$ .

**Доказательство.** В (1) выбираются  $u_i = u(P_i)$ , где  $P_i$  – узел сетки. Вводится функция

$$u_C(x, y) = \sum_{i=1}^N u(P_i)\psi_i(x, y), \quad (2)$$

в которой  $\psi_i(x, y)$  – классические финитные функции второй степени [3] с треугольными конечными носителями. Из неравенства треугольника следует, что

$$\|u - u^h\|_{W_2^0(\Omega)} \leq \|u - u_C\|_{W_2^0(\Omega)} + \|u_C - u^h\|_{W_2^0(\Omega)}. \quad (3)$$

Согласно следствию теоремы [3, с. 129]

$$\|u - u_C\|_{W_2^0(\Omega)} \leq Ch^3 \|u\|_{C^{(3)}(\Omega)}. \quad (4)$$

Второе слагаемое правой части (3) имеет вид

$$\begin{aligned} \|u_C - u^h\|_{W_2^0(\Omega)}^2 &= \sum_{m=1}^M \|u_C - u^h\|_{W_2^0(T_m)}^2 = \sum_{m=1}^M \int_{T_m} (u_C - u^h)^2 d\Omega = \\ &= \sum_{m=1}^M \left( \sum_{n=1}^{12} \int_{T_{mn}} (u_C - u^h)^2 d\Omega \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $T_{mn}$  – одна из 12 подобластей [1] треугольника  $T_m$ ,  $M$  – число треугольников  $T_m$  сетки. Разность  $u_C - u^h$  на треугольнике  $T_m$ , содержащем узлы  $P_i, P_j, P_k$  в вершинах, а также узлы  $P_{ij}, P_{jk}, P_{ki}$  на сторонах, имеет следующий вид

$$\begin{aligned} u_C - u^h &= u_i(\psi_i - \phi_i) + u_{ij}(\psi_{ij} - \phi_{ij}) + u_j(\psi_j - \phi_j) + \\ &+ u_{jk}(\psi_{jk} - \phi_{jk}) + u_k(\psi_k - \phi_k) + u_{ki}(\psi_{ki} - \phi_{ki}). \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом (6) и обозначений [1] имеем

$$\begin{aligned} \int_{T_m} (u_C - u^h)^2 d\Omega &= \sum_{n=1}^{12} \int_{T_{mn}} (u_C - u^h)^2 d\Omega = \\ &= \left( \int_{T_{m1}} f_1^2 d\Omega + \int_{T_{m2}} f_2^2 d\Omega + \int_{T_{m3}} f_3^2 d\Omega \right) (I_1 u_i + J_4 u_{ij} + I_3 u_j + J_1 u_{jk} + I_4 u_k + J_3 u_{ki})^2 + \\ &+ \left( \int_{T_{m4}} f_4^2 d\Omega + \int_{T_{m5}} f_5^2 d\Omega + \int_{T_{m6}} f_6^2 d\Omega \right) (I_2 u_i + J_2 u_{ij} + I_2 u_j + J_2 u_{jk} + I_2 u_k + J_2 u_{ki})^2 + \\ &+ \left( \int_{T_{m7}} f_7^2 d\Omega + \int_{T_{m8}} f_8^2 d\Omega + \int_{T_{m9}} f_9^2 d\Omega \right) (I_3 u_i + J_1 u_{ij} + I_4 u_j + J_3 u_{jk} + I_1 u_k + J_4 u_{ki})^2 + \\ &+ \left( \int_{T_{m10}} f_{10}^2 d\Omega + \int_{T_{m11}} f_{11}^2 d\Omega + \int_{T_{m12}} f_{12}^2 d\Omega \right) (I_4 u_i + J_3 u_{ij} + I_1 u_j + J_4 u_{jk} + I_3 u_k + J_1 u_{ki})^2, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $f_i$  – вспомогательные функции [1], определенные на подобластях  $T_{mi}$ .  
Поскольку

$$\int_{T_{mn}} f_n^2 d\Omega = \frac{1}{360} J_{ijk}, \quad (8)$$

где  $J_{ijk} = |x_i(y_j - y_k) + x_j(y_k - y_i) + x_k(y_i - y_j)|$  – модуль якобиана, а также, поскольку для коэффициентов  $I_i, J_i$  выполняются условия [1]:

$$I_1 + I_3 + I_4 + J_1 + J_3 + J_4 = 0, \quad I_2 + J_2 = 0, \quad (9)$$

то интеграл выражается через разности шести узловых значений функции на  $T_m$

$$\begin{aligned} \int_{T_m} (u_C - u^h)^2 d\Omega = & \frac{1}{120} J_{ijk} \{a_1[(u_i - u_{jk})^2 + (u_{ij} - u_k)^2 + (u_j - u_{ki})^2] + \\ & + a_2[(u_i - u_{ij})^2 + (u_j - u_{jk})^2 + (u_k - u_{ki})^2] + a_3[(u_i - u_{ki})^2 + (u_{ij} - u_j)^2 + (u_k - u_{jk})^2] + \\ & + a_4[(u_i - u_j)^2 + (u_i - u_k)^2 + (u_j - u_k)^2] + a_5[(u_{ij} - u_{jk})^2 + (u_{ij} - u_{ki})^2 + (u_{jk} - u_{ki})^2]\} \end{aligned} \quad (10)$$

Коэффициенты  $a_i$  имеют вид:

$$\begin{aligned} a_1 = & -(I_1 J_1 + I_2 J_2 + I_3 J_3 + I_4 J_4), \quad a_2 = -(I_3 J_1 + I_2 J_2 + I_4 J_3 + I_1 J_4), \\ a_3 = & -(I_4 J_1 + I_2 J_2 + I_1 J_3 + I_3 J_4), \quad a_4 = -(I_2^2 + I_1 I_3 + I_1 I_4 + I_3 I_4), \\ a_5 = & -(J_2^2 + J_1 J_3 + J_1 J_4 + J_3 J_4). \end{aligned}$$

Выражения в квадратных скобках суммы (10) записываются с помощью криволинейных интегралов. Например,

$$(u_i - u_j)^2 + (u_i - u_k)^2 + (u_j - u_k)^2 = \left( \int_{P_i P_j} \frac{\partial u}{\partial l} dl \right)^2 + \left( \int_{P_i P_k} \frac{\partial u}{\partial l} dl \right)^2 + \left( \int_{P_j P_k} \frac{\partial u}{\partial l} dl \right)^2.$$

По теореме о среднем

$$\left| \int_{P_i P_j} \frac{\partial u}{\partial l} dl \right| \leq h_{ij} \sum_{|k|=1} \|D^k u\|_{C(\bar{T}_m)},$$

следовательно

$$(u_i - u_j)^2 + (u_i - u_k)^2 + (u_j - u_k)^2 \leq \left( \sum_{|k|=1} \|D^k u\|_{C(\bar{T}_m)} \right)^2 [h_{ij}^2 + h_{ik}^2 + h_{jk}^2].$$

Аналогично оцениваются остальные члены суммы (10) и поэтому

$$\begin{aligned} \|u_C - u^h\|_{W_2^0(\Omega)}^2 &= \sum_{m=1}^M \int_{T_m} (u_C - u^h)^2 d\Omega \leq \\ &\leq \frac{A}{60} \sum_{m=1}^M \{S_{ijk} [h_{ij}^2 + h_{ik}^2 + h_{jk}^2] (\sum_{|k|=1} \|D^k u\|_{C(\bar{T}_m)})^2\}_m \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{A}{60} \left( \sum_{|k|=1} \|D^k u\|_{C(\bar{\Omega})} \right)^2 \sum_{m=1}^M \{S_{ijk} (h_{ij}^2) [1 + 2(1/\sin \Theta_0)^2]\}_m \leq$$

$$\leq \frac{A Sh^2}{20 \sin^2 \Theta_0} \left( \sum_{|k|=1} \|D^k u\|_{C(\bar{\Omega})} \right)^2, \quad (11)$$

где  $S_{ijk} = \frac{1}{2} J_{ijk}$  – площадь треугольника  $T_m$ , значение  $A$  указано в формулировке теоремы.

Неравенства (3), (4), (11) дают оценку точности аппроксимации, указанную в теореме.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтьев В.Л., Кочулимов А.В. Действительные ортогональные финитные функции второй степени на треугольных сетках // Математические методы и модели в науке, технике, естествознании и экономике. Труды международной «Конференции по логике, информатике, науковедению – КЛИН-2007». (г. Ульяновск, 17-18 мая 2007 г.) – Ульяновск: УлГТУ, 2007. Том 4. С. 163-168.

2. Леонтьев В.Л. Об ортогональных финитных функциях и о численных методах, связанных с их применением // Обозрение прикладной и промышленной математики. Том 9, выпуск 3, 2002. С. 497-504.

3. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва “Наука”, 1981.

•••••

*Леонтьев Виктор Леонтьевич, доктор физико-математических наук, профессор.*

*Кочулимов А. В., аспирант УлГУ.*

## ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

**Б. В. Круглов**

Рассматривается численный метод решения задач об изгибе линейно упругих пластин методом конечных элементов. В качестве примера решалась задача изгиба равносторонней треугольной пластины (высота треугольника  $d = 0,9$ ), равномерно нагруженной весом 2000 Н и жестко защемленной по краям. Толщина пластины  $h = 0,01$ , модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^{10}$  Н, модуль

сдвига  $G = 8 \cdot 10^9$  Н, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . Требуется определить в каждом узле сетки конечных элементов значения моментов  $M_{(1)i}$ ,  $M_{(2)i}$ ,  $M_i$ , перерезывающих сил  $Q_{(1)i}$ ,  $Q_{(2)i}$ , углов поворота нормали  $\beta_{(1)i}$ ,  $\beta_{(2)i}$  и прогиба  $W_i$ . В качестве аппроксимирующих функций используются параметризованные ортогональные финитные функции на треугольных сетках [1, с. 49].

Из вариационного принципа Рейсснера следует система сеточных уравнений. Их запись в матричной форме для  $i$ -го узла сетки имеет вид:

$$\left[ L_i(i) + \frac{1}{3} M_{ij} \right] X_i + \left[ L_i(j) + \frac{1}{6} M_{ij} \right] X_j + L_i(k) X_k = F_{ijk} \quad (1)$$

где  $X_i = (Q_{(1)i}, Q_{(2)i}, M_{(1)i}, M_{(2)i}, M_i, \beta_{(1)i}, \beta_{(2)i}, W_i)$  – вектор неизвестных; структуры матриц  $M_{ij}$ ,  $L_i(j)$  и вектора  $F_{ijk}$  приведены в [1, с. 128, 129] и [2, с. 114].

Элементы глобальной матрицы системы линейных алгебраических уравнений являются суммами элементов матриц  $M_{ij}$  и  $L_i(j)$ , относящихся к треугольной части  $(i, j, k)$  конечного носителя ортогональной функции для  $i$ -го узла сетки конечных элементов, покрывающих пластину.

В функционале Рейсснера [2]

$$\begin{aligned} & R_1(w, \beta_1, \beta_2, Q_1, Q_2, M_1, M_2, M) = \\ & = \frac{1}{2} \int_S \left[ Q_1 \left( \beta_1 + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{6Q_1}{5Gh} \right) + Q_2 \left( \beta_2 + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{6Q_2}{5Gh} \right) + M_1 \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial x} - \frac{12}{Eh^3} (M_1 - \nu M_2) \right) + \right. \\ & \quad \left. + M_2 \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial x} - \frac{12}{Eh^3} (M_2 - \nu M_1) \right) + M \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial y} + \frac{\partial \beta_2}{\partial x} - \frac{24(1+\nu)}{Eh^3} M \right) - \right. \\ & \quad \left. - \left( \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} - Q_1 \right) \beta_1 - \left( \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - Q_2 \right) \beta_2 - \left( \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + 2p \right) w \right] dS + \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (M_n - 2\tilde{M}_n) \beta_n d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_2} (M_\tau - 2\tilde{M}_\tau) \beta_\tau d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_3} (Q_n - 2\tilde{Q}_n) w d\Gamma - \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_{\bar{\Gamma}_1} (\beta_n - 2\tilde{\beta}_n) M_n d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\bar{\Gamma}_2} (\beta_\tau - 2\tilde{\beta}_\tau) M_\tau d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\bar{\Gamma}_3} (w - 2\tilde{w}) Q_n d\Gamma \end{aligned}$$

углы  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и прогиб  $W$  умножаются на их частные производные по  $x$  и по  $y$ , поэтому ортогональность аппроксимирующих функций «не срабатывает», и в каждом соответствующем сеточном уравнении перед неизвестными  $\beta_{(1)i}$ ,  $\beta_{(2)i}$  и  $W_i$  образуется несколько ненулевых коэффициентов.

Глобальную матрицу системы линейных уравнений можно представить состоящей из блоков размера  $8 \times 8$  (таблица 1). Звездочками отмечены элементы, которые могут отличаться от нуля (в зависимости от конкретных условий задачи).

Таблица 1

	$Q_{(1)i}$	$Q_{(2)i}$	$M_{(1)i}$	$M_{(2)i}$	$M_i$	$\beta_{(1)i}$	$\beta_{(2)i}$	$w_i$
$Q_{(1)i}$	*	0	0	0	0	*	*	*
$Q_{(2)i}$	0	*	*	0	0	*	*	*
$M_{(1)i}$	0	*	*	0	0	*	*	*
$M_{(2)i}$	0	0	0	*	0	*	*	*
$M_i$	0	0	0	0	*	*	*	*
$\beta_{(1)i}$	*	*	*	*	*	*	*	*
$\beta_{(2)i}$	*	*	*	*	*	*	*	*
$w_i$	*	*	*	*	*	*	*	*

На рис. 1 показан портрет матрицы для задачи об изгибе треугольной пластины, покрытой сеткой из 21 узла. Блоки 5x5, выделенные белым цветом и находящиеся на диагонали, являются диагональными. Их ненулевые элементы расположены вдоль диагонали, а вне диагонали стоят нули.

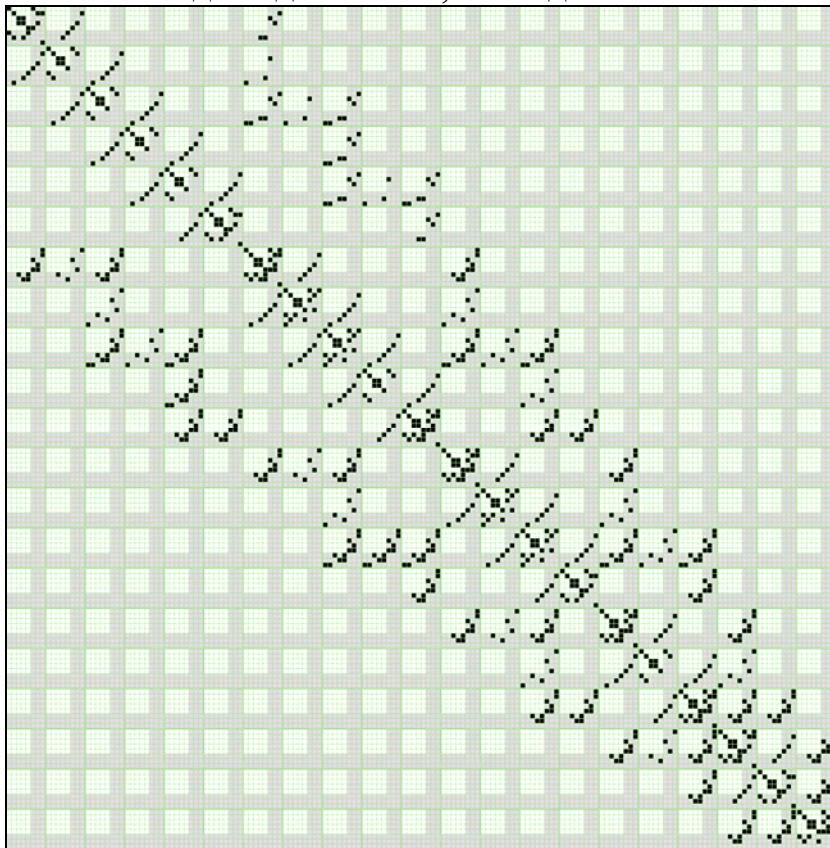


Рис. 1

Это свойство матрицы возникает вследствие ортогональности аппроксимирующих функций и дает возможность в каждом узле выразить группу силовых неизвестных через перемещения независимо от силовых неизвестных в остальных узлах, т. е. в параллельном режиме.



Параллельный алгоритм решения системы линейных уравнений, с учетом структуры глобальной матрицы, состоит в следующем. Предполагается, что число запущенных процессов  $P$  таково, что уравнения можно поделить между ними поровну. Каждый процессор, получив данные о геометрии пластины, формирует свою порцию из  $8N/P$  сеточных уравнений. Сначала исключаются силовые неизвестные  $Q_{(1)i}, Q_{(2)i}, M_{(1)i}, M_{(2)i}, M_i$ , и из глобальной матрицы удаляются соответствующие строки и столбцы (с 1 по 5 в каждом блоке из 8 уравнений). В результате получается система уравнений относительно перемещений с плотно заполненной ленточной матрицей (рис. 2). Ненулевые коэффициенты в уравнениях, выражающие силовые неизвестные через перемещения, временно сохраняются в промежуточный файл, чтобы освободить оперативную память. Размеры файла в случае решения на одной ЭВМ приведены в таблице 2.

Таблица 2

Число узлов	Число уравнений	Размер временного файла [байт]
210	1680	269 230
820	6560	1 143 689
3240	2590	4 696 640
5050	40400	7 400 290

Если обозначить за  $N$  число узлов сетки конечных элементов, то исходная матрица имеет размерность  $(8N \times 8N)$ , а уплотненная матрица – размерность  $(3N \times 3N)$ . Таким образом, на втором этапе решается система с матрицей в  $64/9 \approx 7$  раз меньшего размера, чем исходная, что снижает нагрузку на оперативную память ЭВМ, особенно если размер решаемой задачи настолько велик, что используется виртуальная память (swar). На заключительном этапе силовые неизвестные выражаются через перемещения. Коэффициенты этих соотношений считываются из временного файла.

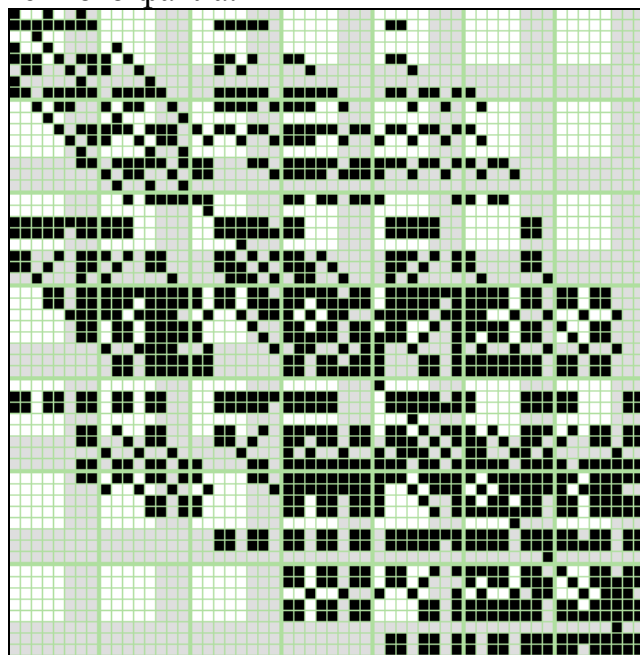


Рис. 2

Рассмотренный алгоритм был реализован в операционной среде Windows с применением библиотеки интерфейсов передачи сообщений MPICH [3]. Результаты расчетов с использованием двух компьютеров (800 МГц, 1 ГБ) приведены в таблице 3.

**Таблица 3**

Число узлов в сетке	Максимальный прогиб пластины, [м]	Время счета на 1 ЭВМ (2 ЭВМ), [с]
210	$2,04 \cdot 10^{-4}$	4,97 (42,73)
820	$8,93 \cdot 10^{-5}$	52,68 (238,82)
3240	$3,45 \cdot 10^{-5}$	758,51 (983,51)
5050	$6,61 \cdot 10^{-5}$	2853,59 (2156,51)

Вид исходной и деформированной пластины показан на рисунках 3 и 4.

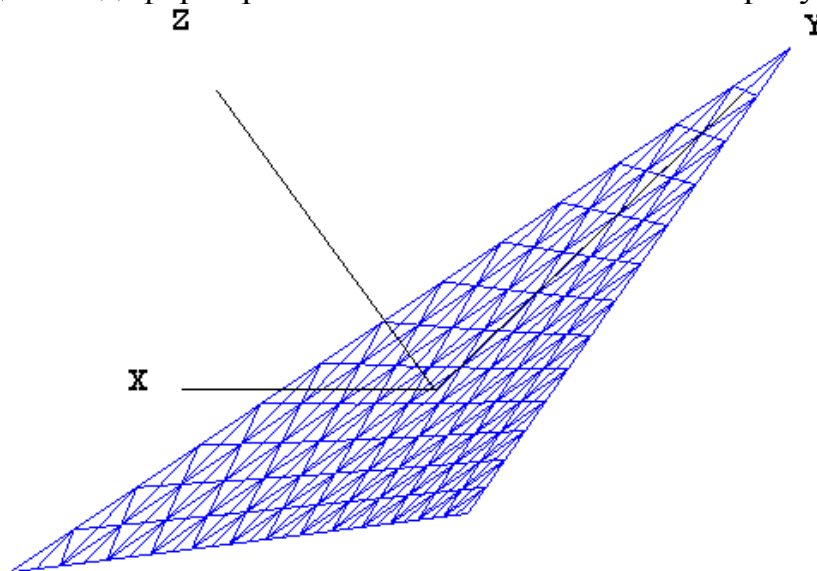


Рис. 3

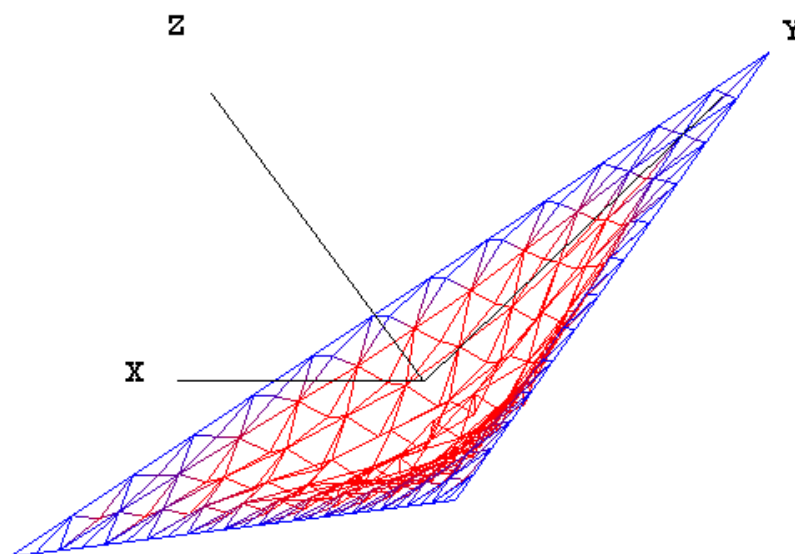


Рис. 4

Это решение оказалось близким к решению, полученному с помощью пакета программ ANSYS (рис.5).

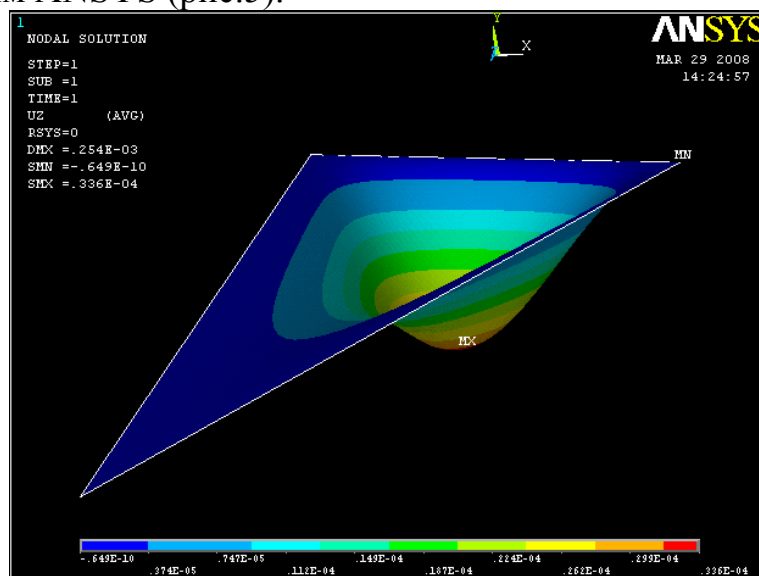


Рис. 5

Недостатком алгоритма является необходимость пересылок больших объемов данных между процессорами в процессе решения уплотненной системы. На этом этапе решения используется модификация метода Гаусса для параллельной работы ЭВМ: на каждом шаге исключения неизвестных ведущая строка рассылается всем процессорам сразу, чтобы те сразу приступили к обработке своей части матрицы. Из-за высокой латентности сети Ethernet ускорение всего хода решения в 1,3 раза удалось получить только на густой сетке, что говорит о необходимости более быстрых средств коммуникации между процессорами для эффективной работы данного алгоритма.

В таблице 4 приведены замеры времени для некоторых этапов решения. Кроме указанных временных затрат в общее время решения входит время чтения информации о параметрах пластины и сборки вектора неизвестных в корневом процессе.

Таблица 4

Число уравнений	Число ЭВМ	Формирование глобальной матрицы	Обработка строк	Исключение силовых факторов	Общее время решения
1680	1	0,06	0,04	1,49	4,97
1680	2	0,05	0,02	10,55	42,73
6560	1	0,34	0,27	20	52,68
6560	2	0,31	0,13	43,98	238,82
25920	1	2,46	2,06	328,49	758,51
25920	2	2,17	0,99	250,17	983,51
40400	1	138,47	84,64	748,08	2853,59
40400	2	1,02	1,44	480,08	2156,51





вычислительные ресурсы для исследования таких моделей. Модели других типов дают количественные результаты невысокой точности, для различных моделей существенно отличающиеся друг от друга. Здесь рассматривается пример моделирования нанотрубки с заданными геометрическими параметрами методом молекулярной динамики с помощью известной программы Tinker [1] проектирования и расчета нанобъектов. Это ограниченное исследование было выполнено только с целью определения возможностей Tinker и метода молекулярной динамики в моделировании нанобъектов. В результате изучения динамики нанотрубки установлено, что она сохраняет свою структуру, т.е. является устойчивой к воздействию собственных колебаний атомов при температурах от 200 до 600 К. Но полученные результаты имеют преимущественно качественный характер, так как количественные результаты расчетов, выполненных на основе модели молекулярной динамики и на основе моделей других типов, заметно отличаются друг от друга. Поэтому актуальной задачей является разработка новых методов моделирования нанобъектов, позволяющих получать адекватное количественное описание состояния нанобъектов. Один из развивающихся подходов к моделированию нанотрубок основан на механике сплошных сред [см. например, 2, 3]. В этом случае поверхность нанотрубки, составленная из атомов углерода, заменяется сплошной оболочкой или полым стержнем, механические характеристики которых задаются на основании результатов измерений и дополнительных расчетов.

В рамках предположения о наличии большого числа атомов в составе отдельной нанотрубки или другого нанобъекта предлагается проведение математического моделирования многослойных нанобъектов на основе теории многослойных анизотропных оболочек [4].

Уравнения равновесия [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial(BT_1)}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}T_2 + \frac{\partial(AS_{21})}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta}S_{12} + ABk_1N_1 &= -ABX, \\ \frac{\partial(AT_2)}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta}T_1 + \frac{\partial(BS_{12})}{\partial\alpha} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}S_{21} + ABk_2N_2 &= -ABY, \\ -(k_1T_1 + k_2T_2) + \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial(BN_1)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AN_2)}{\partial\beta} \right) &= -Z, \\ \frac{\partial(BM_1)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AM_{21})}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta}M_{12} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}M_2 &= ABN_1, \\ \frac{\partial(AM_2)}{\partial\beta} + \frac{\partial(BM_{12})}{\partial\alpha} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}M_{21} - \frac{\partial A}{\partial\beta}M_1 &= ABN_2, \\ S_{12} - S_{21} + M_{12}/R_1 - M_{21}/R_2 &= 0 \end{aligned}$$

и соотношения упругости [4]

$$T_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + K_{11}\chi_1 + K_{12}\chi_2,$$



## ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕННОМ РАЗВОРОТЕ САМОЛЁТА

*В. Г. Малинов*

Актуальны задачи оптимального управления движением дозвуковых и сверхзвуковых самолетов с воздушно-реактивными двигателями (т.е. аппаратов, скорость которых намного меньше круговой скорости) в пространстве и в горизонтальной плоскости. При их решении имеются трудности: удовлетворения заданным конечным условиям; учёта ограничений на фазовые координаты и управляющие функции; "овражности" и многоэкстремальности получаемой для минимизации вспомогательной функции. Известно, что решить задачу оптимального управления (ЗОУ) численным методом на порядок труднее, чем обычную задачу оптимизации. В работах [1], [2] для решения таких трудных задач минимизации были предложены проекционные двухшаговые методы. Целью данной работы является апробация их модификаций на задачах оптимального управления.

1. Здесь для решения ЗОУ реализованы модификации: метода из [1], – проекционный обобщённый двухшаговый двухэтапный четырехпараметрический метод, 1 этап.  $\mathbf{z}^k = P_Q [\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k]$ ,

$$2 \text{ этап. } \mathbf{x}^{k+1} = P_Q \left[ \mathbf{z}^k + \beta_k \left( \gamma_{1k} \mathbf{y}^k - \gamma_{2k} \nabla f(\mathbf{z}^k) / \|\nabla f(\mathbf{z}^k)\| \right) \right], \quad k \geq 0; \quad (1)$$

метода из [2], – обобщённый двухшаговый двухэтапный метод переменной метрики, 1 этап.  $\mathbf{z}^k = P_Q [\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k]$ ;

$$2 \text{ этап. } \mathbf{x}^{k+1} = P_Q \left[ \mathbf{z}^k - \gamma_k \mathbf{B}(\mathbf{z}^k) \nabla f(\mathbf{z}^k) / \|\nabla f(\mathbf{z}^k)\| \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где  $\mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^0 \in E^n$ ;  $P_Q[\mathbf{v}]$  – проекция точки  $\mathbf{v}$  на множество  $Q \subset E^n$ ;  $\alpha_k$ ,

$\beta_k, \gamma_k, \gamma_{1k}, \gamma_{2k}$  – параметры методов;  $\mathbf{B}(\mathbf{z}^k) = \mathbf{B}_k$  – последовательность положительно определённых диагональных матриц;  $\mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}$ ; как в [2] указано,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}): E^n \rightarrow E^n$  при каждом фиксированном  $\mathbf{x} \in E^n$  есть положительно определённый самосопряжённый линейный оператор, изменяющий метрику пространства. Имеются реализации метода с одномерной минимизацией

$\beta_k = \arg \min_{\beta > 0} f \left[ \mathbf{z}^k + \beta \left( \gamma_{1k} \mathbf{y}^k - \gamma_{2k} \nabla f(\mathbf{z}^k) / \|\nabla f(\mathbf{z}^k)\| \right) \right]$  для

поиска только одного параметра  $\beta_k$ , при остальных параметрах – выбираемых константах, а также версия с одномерной минимизацией для вычисления еще одного параметра,  $\gamma_{2k} = \arg \min_{\gamma_2 > 0} f \left[ \mathbf{z}^k - \gamma_2 \nabla f(\mathbf{z}^k) / \|\nabla f(\mathbf{z}^k)\| \right]$ .



**2. Постановка задачи оптимального управления пространственным движением самолёта** и числовые данные примера использованы из работы [4], (с. 353-355), для краткости здесь их опускаем и приводим в докладе. Аналогичные задачи решались и исследовались в работе [5] и других.

Решается задача оптимального быстрогодействия:

Найти вектор  $\mathbf{u}(t)$  управлений, удовлетворяющий ограничениям задачи и переводящий самолёт из горизонтального полёта на высоте 5000 м в горизонтальный полёт на высоте 7000 м с разворотом вектора скорости на  $180^\circ$  за наименьшее время при заданных условиях.

**3. Численное решение задачи.** Для этого использована методика из [3], [4] и схема метода штрафных функций (МШФ).

Отрезок  $[0; T]$  разбит на  $q-1$  частей точками  $0 = t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_q = T$ .

Частичные интервалы интегрирования  $[t_i; t_{i+1}]$  имеют длину  $h_i = [t_{i+1} - t_i]$  и

$$t_i = \sum_{s=1}^{s=i-1} h_s; \quad t_q = \sum_{s=1}^{s=q-1} h_s = T; \quad x_{ji} = x_j(t_i); \quad u_{ji} = u_j(t_i); \quad z_q = (x_q, u_q);$$

$f(z_{ji}) = f(x_{ji}, u_{ji})$ . Проведена замена переменной  $t$  и численное интегрирование системы (1) проведено на отрезке  $[0; 1]$  по схеме Эйлера

$$x_{i+1} = x_i + h_i f(z_i), \quad z_i = (x_i, u_i), \quad (7)$$

с постоянным шагом  $h=0.04$ , ( $q=25$ ) и с шагом  $h=0.02$ , ( $q=51$ ) (соответственно размерности векторов аргументов минимизируемых функций 101 и 201). Составлена функция Гамильтона-Понтрягина и вспомогательная функция для МШФ, в которой реализованы ограничения задачи и краевые условия. Фазовый вектор  $\mathbf{x} \in E^7$ , вектор управлений  $\mathbf{u} \in E^4$ .

Результаты численного решения задачи приведены в таблицах 1 и 2. В них приняты следующие обозначения:  $h$  – высота самолёта в момент времени из  $[0; T]$ ;  $V$  – скорость самолёта;  $\eta^\circ$  – угол курса в градусах;  $Z$  – боковая дальность;  $D$  – продольная дальность;  $c_y$  – коэффициент аэродинамической подъёмной силы;  $t$  – текущее время манёвра самолёта;  $u_1(t)$  – относительная величина тяги двигателей;  $u_2(t)$  – относительная величина перегрузки;  $u_3(t)$  – относительная величина тормозящей силы;  $\gamma(t)=u_4(t)$  – угол крена в радианах;  $x_7(t)$  – вес самолёта в моменты времени  $t$ .

Таблица 1.

$t$	$h$	$V$	$\eta^\circ$	$D$	$Z$
0	5000.0	300.0	0.0	0.0	0.0
0.6785	5000.001	302.001	-0.0001	203.538	0.00001
1.3569	5002.581	302.200	-2.71720	408.419	0.00002
2.0354	5017.697	300.555	-8.75060	612.724	9.69600
3.3923	5084.738	291.231	-24.4569	1001.268	96.3340
4.7492	5208.357	279.134	-41.4468	1326.466	272.824
6.1061	5380.187	263.954	-61.4587	1555.784	510.937
7.4631	5582.791	248.492	-83.2738	1669.674	774.861
8.8200	5797.313	234.051	-105.3813	1675.311	1027.095
10.1769	6012.823	222.002	-125.0353	1596.551	1239.439
11.5338	6225.004	211.973	-141.7777	1464.620	1400.489
12.8907	6431.237	203.424	-155.6197	1303.540	1511.736
14.9261	6725.781	192.572	-171.2454	1039.308	1601.634
15.6046	6819.376	189.281	-175.4166	949.210	1615.509
16.2830	6910.478	186.107	-178.7910	858.990	1622.742
16.961	7000.009	183.131	-180.0565	769.974	1624.620

Таблица 2. Оптимальные значения управляющих переменных.

$t$	$u_1(t)$	$u_2(t)$	$u_3(t)$	$u_4(t)$	$x_7(t)$
0	0.61287	0.20905	0.0240	.0000	20000.0
0.6785	0.62729	0.57936	0.0240	.00001	19998.199
1.3569	0.63448	0.78795	0.0240	0.5180	19996.316
2.0354	0.64384	1.00000	0.0240	0.9390	19994.391
3.3923	0.64745	1.00000	0.0240	0.9390	19990.467
4.7492	0.64594	1.00000	0.0240	0.9530	19986.519
6.1061	0.63906	1.00000	0.0240	1.05568	19982.628
7.4631	0.61830	0.97843	0.0240	1.16583	19978.865
8.8200	0.59744	0.87436	0.0240	1.23930	19975.357
10.1769	0.57667	0.78854	0.0240	1.25917	19972.120
11.5338	0.55655	0.66260	0.0240	1.27404	19969.129
12.8907	0.53712	0.55772	0.0240	1.28504	19966.357
14.9261	0.51833	0.47989	0.0240	1.29300	19962.563
15.6046	0.50930	0.4500	0.0240	1.29800	19961.383
16.2830	0.5000	0.3550	0.0250	0.43549	19960.244
16.961	0.5000	0.1880	0.0250	0.00001	19959.143

При выполнении манёвра расход горючего составляет 40.857 кг (начальный вес самолёта 20000кг), точность выполнения ограничения по конечному значению перегрузки  $10^{-4}$ , минимальное время манёвра  $T=16.961$  секунд. Отметим, что кроме двухшаговых, другие методы первого порядка не решили данную задачу, а методы второго порядка не применялись ввиду большой размерности задачи. Градиенты вспомогательной функции вычислялись по конечно-разностным формулам. Время счёта на РС AMD Athlon XP 1900+ составило 11 секунд.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малинов В. Г. Четырёхпараметрические двухшаговые проекционные методы минимизации первого порядка // Журнал вычислит. математ. и матем. Физики, 1996. – Т. 36. – № 12. – С. 48-56.
2. Малинов В. Г. Проекционный двухшаговый обобщенный двухпараметрический метод минимизации первого порядка с переменной метрикой // Учёные записки УлГУ. Серия "Фундаментальные проблемы математики и механики". Вып.1(13). – Ульяновск: УлГУ, 2003. – С. 127-138.
3. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1971. – 424 с.
4. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982. – 432 с.
5. Дикусар В. В., Милютин А. А. Качественные и численные методы в принципе максимума. – М.: Наука, 1989. – 141 с.



*Малинов Валериан Григорьевич, к. ф.-м. н., доцент кафедры ММиИТ Ульяновского государственного университета; vgmalinov@mail.ru.*

# ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА

*А. Р. Мангушева*

**Введение.** Приведена методика решения задачи о пластическом двухосном растяжении ячейки пленочно-тканевого композиционного материала (ПТКМ). Результаты представлены в виде графиков.

**Пределный анализ.** Рассматривается ячейка пленочно-тканевого композиционного материала (ПТКМ), которая представляет собой ткань из высокопрочных синтетических тканей и пленочного покрытия (матрицы) из эластомеров или термопластов. Последние служат для защиты армирующей основы от воздействия атмосферных факторов и придания воздухонепроницаемости материалу. Для анализа ПТКМ можно рассмотреть его представительный элемент, изображенный на рисунке 1.

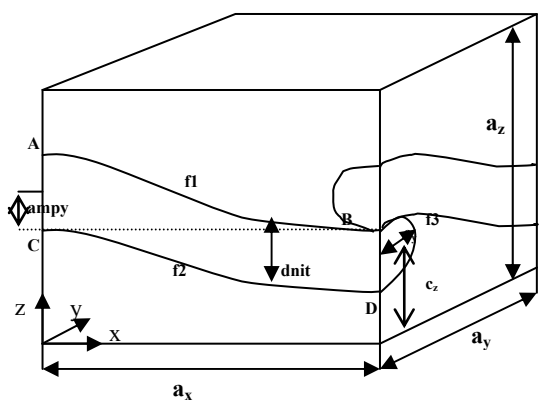


Рис. 1. Элементарная ячейка пленочно-тканевого композита



Рис. 2. Зависимость силы  $P_{stat}$  от числа итераций

Рассмотрим задачу построения предельных кривых в пространстве усилий растяжения  $P_x$  и  $P_y$ . Подобные задачи рассматривались в работах Терегулова И.Г., Сибгатуллина Э.С. для более простых случаев слоистых элементов оболочек, подобных нашей ячейке ПТКМ [1]. Ввиду простоты строения ячейки в этом случае авторам удалось получить систему параметрических уравнений предельной поверхности. При этом в большинстве частных случаев между этими параметрами имеется нелинейная связь.

Рассмотрим условие текучести, являющееся обобщением критерия Мизеса на случай ортотропного материала, который можно представить в виде:

$$f(\sigma) = \sigma^T A \sigma^T \quad (1)$$

Здесь  $A$  – симметрическая положительно определенная матрица.

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 08-01-00628

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{vmatrix}$$

При рассмотрении соотношений закона пластического течения в форме:

$$\sigma = \frac{A^{-1}\xi}{\sqrt{\xi^T A \xi}} \quad (2)$$

можно увидеть аналогию между нелинейно-упругой и жесткопластической задачами. Для этого под  $\xi$  нужно понимать деформацию, а под матрицей упругих характеристик – матрицу

$$E = \frac{A^{-1}}{\sqrt{\xi^T A \xi}} \quad (3)$$

Этот подход в 1990г был предложен в [3]. Он в дальнейшем был развит на более общие условия текучести. Для изотропных тел и условия Мизеса аналогичная методика была рассмотрена и в работе [2]. Для дискретизации области по пространственным координатам используется метод конечных элементов. Для вычисления параметра предельной нагрузки применяется метод вариации упругих характеристик [3], который основан на законе пластического течения, выражающий зависимость напряжений через скорости пластических деформаций.

На основе вышеизложенного, разработана методика решения полученной задачи методом итерационного уточнения матрицы  $E$  на каждом шаге по перемещениям. Картина сходимости решения приведена на рисунке 2. Видно, что сходимость метода очень быстрая.

На рисунке 3 приведены предельные кривые в пространстве усилий растяжения. Исследуются закономерности изменения этих кривых в зависимости от геометрических и механических характеристик ПТКМ. Поскольку за счет модифицирующих добавок можно варьировать механические свойства матрицы и нитей, то были проведены численные эксперименты и получены зависимости силы  $P_{stat}$  от предела текучести фаз ПТКМ.



# ОБ ОДНОМ ВОЗМУЩЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

*П. К. Маценко*

Пусть  $Y$  – множество  $m$  раз непрерывно дифференцируемых на  $[-\pi, \pi]$  функций, удовлетворяющих условию

$$U_{m+1}[y] \equiv \int_{-\pi}^{\pi} y(x) du_{m+1}(x) = 0,$$

причем  $Var(u_{m+1}) < +\infty$ . На множестве  $Y$  определим оператор  $A$  по формуле

$$Ay(x) = Dy(x) + \sum_{k=0}^m U_k[D^k y] \varphi_k(x),$$

где  $D = -i \frac{d}{dx}$  – оператор дифференцирования,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\varphi_k(x) \in C[-\pi, \pi]$ , а

функционалы  $U_k[\ ]$  ( $k = \overline{0, m}$ ) имеют вид:  $U_k[y] = \int_{-\pi}^{\pi} y(x) du_k(x)$ , причем

$Var(u_k) < +\infty$ . Кроме того, предполагаем, что  $u_m(x) = u_{m1}(x) + \int_{-\pi}^x u_{m0}(t) dt$ ,

причем  $u'_{m0}(t) \in L(-\pi, \pi)$ ;  $u_{m1}(t) \equiv 0$  для  $t \in (-\pi, \pi)$ ,  $u_{m1}(-\pi) = -h_1$ ,  $u_{m1}(\pi) = h_2$ , где  $h_1, h_2$  – ненулевые константы. На функции  $\varphi_k(x)$  ( $k = \overline{0, m}$ ) наложим дополнительные условия:

- $\varphi_k(x)$  ( $k = \overline{0, m}$ ) линейно независимы на  $[-\pi, \pi]$ ;
- $\varphi_k^{(m+1)}(x)$  – ограничены на  $[-\pi, \pi]$ ;
- $U_{m+1}[\varphi_m] \neq 0$ .

Пусть  $M_\lambda$  – оператор вида:  $M_\lambda f = \int_{-\pi}^x i e^{i\lambda(x-t)} f(t) dt$ , если  $\text{Im } \lambda \geq 0$  и  $M_\lambda f = -\int_x^\pi i e^{i\lambda(x-t)} f(t) dt$ , если  $\text{Im } \lambda < 0$ . Доказывается, что  $DM_\lambda f(x) = f(x) + \lambda M_\lambda f(x)$ .

Введем в рассмотрение блочную матрицу

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} [\delta_{sk} + U_s[D^s M_\lambda \varphi_k]]_{s,k=0}^m & [\lambda^s U_s[e^{i\lambda x}]]_{s=0}^m \\ [U_{m+1}[M_\lambda \varphi_k]]_{k=0}^m & U_{m+1}[e^{i\lambda x}] \end{bmatrix},$$

в которой  $\delta_{sk}$  – символ Кронекера. Можно доказать следующие вспомогательные утверждения.

*Лемма 1.* Собственные значения оператора  $A$  и только они являются корнями уравнения  $\det B(\lambda) = 0$ .

*Лемма 2.* Если  $\lambda$  не является собственным значением оператора  $A$ , то для любой непрерывной на  $[-\pi, \pi]$  функции  $f(x)$  краевая задача

$$Dy(x) + \sum_{k=0}^m U_k [D^k y] \cdot \varphi_k(x) - \lambda y(x) = f(x), \quad U_{m+1}[y] = 0$$

имеет единственное решение. Это решение представимо в виде

$$y(x) \equiv R_\lambda f(x) = \frac{1}{\det B(\lambda)} \cdot \det H_\lambda f(x), \quad (1)$$

где  $H_\lambda f(x)$  – блочная матрица вида:

$$H_\lambda f(x) = \begin{bmatrix} [\delta_{sk} + U_s [D^s M_\lambda \varphi_k]]_{s,k=0}^m & [\lambda^s U_s [e^{i\lambda x}]]_{s=0}^m & [U_s [D^s M_\lambda f]]_{s=0}^m \\ [U_{m+1} [M_\lambda \varphi_k]]_{k=0}^m & U_{m+1} [e^{i\lambda x}] & U_{m+1} [M_\lambda f] \\ [M_\lambda \varphi_k(x)]_{k=0}^m & e^{i\lambda x} & M_\lambda f(x) \end{bmatrix}.$$

*Лемма 3.* Если функция  $f(x)$  абсолютно непрерывна на  $[-\pi, \pi]$ , то справедлива формула

$$DM_\lambda f(x) = M_\lambda Df(x) + \theta(\lambda, f)e^{i\lambda x},$$

в которой  $\theta(\lambda, f) = f(-\pi)e^{i\pi\lambda}$  для  $\text{Im } \lambda \geq 0$  и  $\theta(\lambda, f) = f(\pi)e^{-i\pi\lambda}$  для  $\text{Im } \lambda < 0$ .

*Лемма 4.* Справедливы формулы:

$$M_\lambda \varphi_k(x) = \tilde{\varphi}_k(x, \lambda) + \beta_k(\lambda)e^{i\lambda x}, \quad k = \overline{0, m}, \quad (2)$$

$$U_s [D^s M_\lambda \varphi_k] = \lambda^s \alpha_{ks}(\lambda) + \lambda^s \beta_k(\lambda) U_s [e^{i\lambda x}], \quad s, k = \overline{0, m}, \quad (3)$$

в которых  $\beta_k(\lambda) = \sum_{p=0}^m \lambda^{-p-1} \theta(\lambda, D^p \varphi_k)$ ,

$$\tilde{\varphi}_k(x, \lambda) = - \sum_{p=0}^m \lambda^{-p-1} D^p \varphi_k(x) + O(|\lambda|^{-m-1}), \quad |\lambda| \rightarrow +\infty,$$

$$\alpha_{ks}(\lambda) = - \sum_{p=s}^m \lambda^{-p-1} U_s [D^p \varphi_k] + O(|\lambda|^{-m-1}), \quad |\lambda| \rightarrow +\infty.$$

При этом оценки  $O(\cdot)$  равномерны по  $x \in [-\pi, \pi]$ .

*Лемма 5.* Если функция  $f^{(m+1)}(x) \in L(-\pi, \pi)$ , то справедливы формулы

$$M_\lambda f = \tilde{f}(x, \lambda) + \beta_f(\lambda)e^{i\lambda x}, \quad (4)$$

$$U_s [D^s M_\lambda f] = \lambda^s \alpha_{fs}(\lambda) + \lambda^s \beta_f(\lambda) U_s [e^{i\lambda x}], \quad s = \overline{0, m}, \quad (5)$$

в которых  $\beta_f(\lambda) = \sum_{p=0}^m \lambda^{-p-1} \theta(\lambda, D^p f)$ , а функции  $\tilde{f}(x, \lambda)$ ,  $\alpha_{fs}(\lambda)$  имеют при

$|\lambda| \rightarrow +\infty$  равномерные по  $x \in [-\pi, \pi]$  оценки

$$\tilde{f}(x, \lambda) = O(|\lambda|^{-1}) \cdot \sigma(f), \quad \alpha_{fs}(\lambda) = O(|\lambda|^{-s-1}) \cdot \sigma(f), \quad (6)$$

в которых  $\sigma(f) = \sum_{p=0}^m \|D^p f\| + \|f^{(m+1)}\|_1$ ,  $\|\cdot\|$  и  $\|\cdot\|_1$  – нормы элемента

соответственно в пространствах  $C[-\pi, \pi]$  и  $L(-\pi, \pi)$ .



*Теорема 1.* Спектр оператора  $A$  состоит только из собственных значений. Собственные значения  $\lambda_k$  образуют счетную последовательность с асимптотикой

$$\lambda_k = k + \frac{1}{2i\pi} \ln\left(-\frac{h_1}{h_2}\right) + \nu_k, \text{ в которой } |\nu_k| \leq \delta, \quad k = \pm k_\delta, \pm(k_\delta + 1), \dots,$$

причем  $\delta > 0$  – любая наперед заданная малая константа,  $k_\delta$  – некоторое натуральное число, величина которого зависит от  $\delta$ .

*Доказательство.* Из лемм 1, 2 следует, что спектр оператора  $A$  состоит только из собственных значений, причем они являются корнями функции  $\det B(\lambda)$ . Элементы первых  $m+1$  столбцов определителя  $\det B(\lambda)$  представим по формулам (3). Затем последний столбец определителя умножим на  $-\beta_k(\lambda)$  и прибавим к  $k$ -му столбцу ( $k = \overline{0, m}$ ). Получим

$$\det B(\lambda) = \begin{vmatrix} [\delta_{sk} + \lambda^s \alpha_{sk}(\lambda)]_{s,k=0}^m & [\lambda^s U_s[e^{i\lambda x}]]_{s=0}^m \\ [U_{m+1}[\tilde{\varphi}_k]]_{k=0}^m & U_{m+1}[e^{i\lambda x}] \end{vmatrix}.$$

Определитель  $\det B(\lambda)$  разложим сначала по элементам последней строки, затем каждый новый определитель – по элементам последнего столбца. В итоге получим

$$\det B(\lambda) = - \sum_{k=0}^m \sum_{s=0}^m U_{m+1}[\tilde{\varphi}_k] \cdot \lambda^s U_s[e^{i\lambda x}] \Omega_{sk}(\lambda) + \Omega(\lambda) U_{m+1}[e^{i\lambda x}], \quad (7)$$

где  $\Omega(\lambda) = \det[\delta_{sk} + \lambda^s \alpha_{sk}(\lambda)]_{s,k=0}^m$ ,  $\Omega_{sk}(\lambda)$  – алгебраические дополнения элементов определителя  $\Omega(\lambda)$ . Несложно доказать, что при  $|\lambda| \rightarrow +\infty$

$$\Omega(\lambda) = 1 + O(|\lambda|^{-1}), \quad \Omega_{sk}(\lambda) = \delta_{sk} + O(|\lambda|^{-1}), \quad s, k = \overline{0, m}. \quad (8)$$

$$U_{m+1}[\tilde{\varphi}_k] = -\lambda^{-1} U_{m+1}[\varphi_k] + O(|\lambda|^{-2}), \quad U_s[e^{i\lambda x}] = O(1) e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|}. \quad (9)$$

С учетом вида функционала  $U_m[\cdot]$  и формул (8), (9) формула (7) примет вид

$$\det B(\lambda) = -\lambda^{m-1} U_{m+1}[\varphi_m] \cdot (h_1 e^{-i\lambda\pi} + h_2 e^{i\lambda\pi}) + O(|\lambda|^{m-2}) \cdot e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|}. \quad (10)$$

Введем в рассмотрение функцию  $F_0(\lambda) = h_1 e^{-i\lambda\pi} + h_2 e^{i\lambda\pi}$ . Легко видеть, что нули функции  $F_0(\lambda)$  распределены по формуле

$$\lambda_k^{(0)} = k + \frac{1}{2i\pi} \ln\left(-\frac{h_1}{h_2}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

причем вне  $\delta$ -окрестностей точек  $\lambda_k^{(0)}$  верна оценка (см., например, [1, с. 78])

$|F_0(\lambda)| \geq C_{0\delta} \cdot e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|}$ , где  $C_{0\delta} > 0$  – константа, величина которой зависит только от  $\delta$ . Из формулы (10) с учетом теоремы Руше следует утверждение теоремы и оценка

$$|\det B(\lambda)| \geq C_{1\delta} |\lambda|^{m-1} \cdot e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|}, \quad (11)$$

справедливая для всех  $\lambda \in \Lambda_\delta$ ,  $|\lambda| \gg 1$ , где  $\Lambda_\delta$  комплексная  $\lambda$ -плоскость, из

которой выброшены  $\delta$ -окрестности собственных значений оператора  $A$ . При этом  $C_{1\delta} > 0$  – новая константа, величина которой зависит только от  $\delta$ .

Пусть  $\{\gamma_k\}$  – последовательность достаточно малых круговых контуров, центрами которых являются собственные значения оператора  $A$ .

*Теорема 2.* Пусть функция  $f(x) \in Y$ , причем  $f^{(m+1)}(x) \in L(-\pi, \pi)$ . Тогда существует последовательность натуральных чисел  $\{s_n\}$  ( $s_n \uparrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ ) такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{-\pi \leq x \leq \pi} \left| f(x) + \sum_{k=1}^{s_n} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_k} R_\lambda f(x) d\lambda \right| = 0,$$

*Доказательство.* Воспользуемся формулой (1). В определителе  $\det H_\lambda f$  элементы  $0, 1, \dots, m$ -го столбцов представим по формулам (2), (3), элементы последнего столбца – по формулам (4), (5). В итоге определитель  $\det H_\lambda f$  примет вид

$$H_\lambda f(x) = \begin{bmatrix} [\delta_{sk} + \lambda^s \alpha_{sk}(\lambda)]_{s,k=0}^m & [\lambda^s U_s[e^{i\lambda x}]]_{s=0}^m & [\lambda^s \alpha_{fs}(\lambda)]_{s=0}^m \\ [U_{m+1}[\tilde{\varphi}_k]]_{k=0}^m & U_{m+1}[e^{i\lambda x}] & U_{m+1}[\tilde{f}] \\ [\tilde{\varphi}_k(x, \lambda)]_{k=0}^m & e^{i\lambda x} & \tilde{f}(x, \lambda) \end{bmatrix}.$$

Разложив определитель по элементам последнего столбца и используя формулы (6), (8), (9), легко получить равномерную по  $x \in [-\pi, \pi]$  оценку

$$\det H_\lambda f = O(|\lambda|^{m-2}) e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|} \sigma(f). \quad (12)$$

Из формулы (1) и оценок (11), (12) следует оценка

$$\|R_\lambda f\| \leq C_{2\delta} |\lambda|^{-1}, \quad \lambda \in \Lambda_\delta, \quad (13)$$

где  $C_{2\delta} > 0$  – некоторая новая константа, величина которой зависит от  $\delta$ .

В области  $\Lambda_\delta$  выберем систему окружностей  $\Gamma_n = \{\lambda : |\lambda| = r_n\}$ , причем все  $r_n \gg 1$  и  $r_n \uparrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поскольку  $f \in Y$ , то  $f(x) = R_\lambda Af(x) - \lambda R_\lambda f(x)$ . Поэтому

$$f(x) + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_n} R_\lambda f(x) d\lambda = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_n} \frac{1}{\lambda} R_\lambda Af(x) d\lambda.$$

Отсюда, используя теорему о вычетах и оценку (13), получим при достаточно больших  $n$

$$\left| f(x) + \sum_{k=1}^{s_n} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_k} R_\lambda f(x) d\lambda \right| = O(1) \cdot \sigma(Af) \int_{\Gamma_n} \frac{1}{|\lambda|^2} |d\lambda| = O(r_n^{-1}) \cdot \sigma(f).$$

Из этой оценки легко получаем доказательство теоремы.

Заметим, что входящая в теорему 2 величина  $s_n$  – это количество собственных значений оператора  $A$ , попавших внутрь контура  $\Gamma_n$ . Заметим



$$F(x, t, u, u_t, u_x, u_{xx}) = 0 \quad \text{для } (x, t) \in G, \quad (4)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{при } 0 \leq x \leq a, \quad (5)$$

$$\alpha_1 u(0, t) + \alpha_2 u_x(0, t) = 0, \quad \alpha_1 u(a, t) + \alpha_2 u_x(a, t) = 0, \quad (6)$$

в которой  $F(x, t, u, u_t, u_x, u_{xx}) = f(x + \xi(t), t, u, u_t - \xi'(t)u_x, u_x, u_{xx})$ ,  $G$  – прямоугольник:  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,

Пусть  $\{\omega_{kp}(x, t)\}_{k,p=0}^{\infty}$  – полная в пространстве  $L_2(G)$  система функций, у

которой  $\frac{\partial \omega_{kp}}{\partial t}, \frac{\partial \omega_{kp}}{\partial x}, \frac{\partial^2 \omega_{kp}}{\partial x^2} \in L_2(G)$ . Решение задачи (4)-(6) ищем в виде

$$u \equiv u(x, t, \bar{\beta}) = \sum_{k=0}^{m_x} \sum_{p=0}^{m_t} \beta_{kp} \omega_{kp}(x, t), \quad (7)$$

где  $m_x, m_t$  – заданные натуральные константы,  $\bar{\beta} = \{\beta_{kp}\}$  – массив неизвестных пока коэффициентов, которые будем искать методом наименьших квадратов.

В прямоугольнике  $G$  строим координатную сетку с узлами в точках  $(x_i, t_j)$ , где  $x_i = ih_x$  ( $i = \overline{0, n_x}$ ),  $t_j = jh_t$  ( $j = \overline{0, n_t}$ ),  $n_x, n_t$  – некоторые натуральные константы,  $h_x = a/n_x$ ,  $h_t = T/n_t$ . В каждом узле вычислим на основании формулы (7) величины:  $B_{ij}^{[1]}(\bar{\beta}) = u(x_i, t_j, \bar{\beta})$ ,  $B_{ij}^{[2]}(\bar{\beta}) = u_t(x_i, t_j, \bar{\beta})$ ,  $B_{ij}^{[3]}(\bar{\beta}) = u_x(x_i, t_j, \bar{\beta})$ ,  $B_{ij}^{[4]}(\bar{\beta}) = u_{xx}(x_i, t_j, \bar{\beta})$  и составим целевую функцию

$$W(\bar{\beta}) = W_1(\bar{\beta}) + W_2(\bar{\beta}) + W_3(\bar{\beta}), \quad (8)$$

в которой  $W_1(\bar{\beta}) = \frac{1}{m_x} \sum_{i=0}^{m_x} (B_{i0}^{[1]}(\bar{\beta}) - \varphi(x_i))^2$ ,

$$W_2(\bar{\beta}) = \frac{1}{m_t} \sum_{j=0}^{m_t} (\alpha_1 B_{0j}^{[1]}(\bar{\beta}) + \alpha_2 B_{0j}^{[3]}(\bar{\beta}))^2 + \frac{1}{m_t} \sum_{j=0}^{m_t} (\alpha_1 B_{m_x, j}^{[1]}(\bar{\beta}) + \alpha_2 B_{m_x, j}^{[3]}(\bar{\beta}))^2,$$

$$W_3(\bar{\beta}) = \frac{1}{m_x m_t} \sum_{i=0}^{m_x} \sum_{j=0}^{m_t} \mu(x_i, t_j) F^2(x_i, t_j, B_{ij}^{[1]}(\bar{\beta}), B_{ij}^{[2]}(\bar{\beta}), B_{ij}^{[3]}(\bar{\beta}), B_{ij}^{[4]}(\bar{\beta})), \quad (9)$$

где  $\mu(x, t) > 0$  – некоторая весовая функция. Точка  $\bar{\beta}_{\min}$  минимума функции (8) дает оптимальные значения параметров  $\beta_{kp}$ , при которых функция (7) наименее уклоняется от точного решения задачи (4)-(6). Тем самым будет найдено приближенное решение  $u = u(z - \xi(t), t, \bar{\beta}_{\min})$  исходной задачи (1)-(3).

Возможность построения приближенного решения задачи (4)-(6) по формуле (7) во многом зависит от удачного выбора базовых функций  $\omega_{kp}(x, t)$ . Согласно обобщенной теореме Вейерштрасса [1, с.295] в качестве таких функций можно выбрать полиномы  $\omega_{kp}(x, t) = x^k t^p$ ,  $k, p = \overline{0, \infty}$ . В отдельных случаях удачный выбор базовых функций значительно упрощает вычисление значений функции  $W(\bar{\beta})$ . Так, если в граничных условиях (3)  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $\alpha_2 = 0$ , то

выбор базовых функций по формуле:  $\omega_{kp}(x,t) = x^{k+1}t^p(a-x)$ ,  $k, p = \overline{0, \infty}$  [1, с.296] обеспечивает для приближенного решения (7) автоматическое выполнение граничных условий (6). Тем самым в формуле (8)  $W_2(\vec{\beta}) \equiv 0$ , что значительно ускоряет процесс минимизации функции (8). Отметим, что в качестве базовых можно использовать и тригонометрические функции (см. [2]).

Мы предлагаем использовать в качестве базовых функции вида:  $\omega_{kp}(x,t) = t^p y_k(x)$ ,  $k, p = \overline{0, \infty}$ , где  $y_k(x) = \sin(\pi kx/a + \theta_k)$ ,  $\theta_k$  – наименьший неотрицательный корень уравнения:  $\alpha_1 \sin \theta_k + \alpha_2 \pi k/a \cdot \cos \theta_k = 0$ . Легко видеть, что функции  $y_k(x)$ ,  $k = \overline{0, \infty}$  удовлетворяют граничным условиям:  $\alpha_1 y_k(0) + \alpha_2 y_k'(0) = 0$ ,  $\alpha_1 y_k(a) + \alpha_2 y_k'(a) = 0$ , поэтому приближенное решение (7) будет удовлетворять граничным условиям (6) при любом подборе коэффициентов  $\beta_{kp}$ . Значит, в этом случае  $W_2(\vec{\beta}) \equiv 0$ , и целевая функция (8) примет вид:  $W(\vec{\beta}) = W_1(\vec{\beta}) + W_3(\vec{\beta})$ .

Функция  $W(\vec{\beta})$  является полимодалной. Расчеты на компьютере показывают, что найденное значение  $\vec{\beta}_{\min}$  существенным образом зависит от выбора начального приближения  $\vec{\beta}$ . Предлагается такой алгоритм поиска  $\vec{\beta}_{\min}$ . Сначала в формуле (7) полагаем  $m_t = 0$  и приближенное решение задачи (4)-(6) ищем в виде:  $u = \sum_{k=0}^{m_x} \beta_{k0} y_k(x)$ . Минимизируем функцию  $W(\vec{\beta})$  и находим  $\vec{\beta}_{opt} = \{\beta_{k0,opt}\}$ . Затем в формуле (7) полагаем  $m_t = 1$  и в качестве начального приближения выберем  $\beta_{k0,нач} = \beta_{k0,opt}$ ,  $\beta_{k1,нач} = 0$ , поскольку  $\sum_{p=0}^{m_t} \beta_{kp} t^p \sim \beta_{k0}$  при  $t \rightarrow 0$ . Снова минимизируем функцию  $W(\vec{\beta})$  и находим  $\vec{\beta}_{\min}$ . И так далее... Увеличивая каждый раз на 1 порядок многочлена по  $t$  в формуле (7) и минимизируя функцию  $W(\vec{\beta})$ , будем получать все более и более точную аппроксимацию решения задачи (4)-(6). Эту процедуру повторяем до момента выполнения неравенства  $|\tilde{W}_{opt} - W_{opt}| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заданная точность решения,  $W_{opt}$  и  $\tilde{W}_{opt}$  – минимальные значения  $W(\vec{\beta})$  на последующем и предыдущем шагах соответственно.

Предлагаемый метод был протестирован на задаче:

$$u_t u_{zz} - u u_z + \frac{u \cos(z-t)}{t+e} = 0, \quad 0 \leq z-t \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq 10,$$

$$u|_{t=0} = \cos t, \quad u_{z|z-t=0} = u_{z|z-t=\pi} = 0,$$

точное решение которой имеет вид:  $u = \ln(t+e) \cos(x-t)$ . Сделав замену

$z - t = x$ , переходим к эквивалентной задаче:

$$(u_t - u_x)u_{xx} - uu_x + \frac{u \cos x}{t + e} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq 10,$$

$$u_{|t=0} = \cos t, \quad u_{x|x=0} = u_{x|x=\pi} = 0.$$

Ее приближенное решение ищем в виде:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^2 (\beta_{k0} + \beta_{k1}t + \beta_{k2}t^2 + \beta_{k3}t^3) \cos kx$$

на 6 слоях, содержащих 66 узлов. В формуле (9) в качестве весовой взята функция  $\mu(x, t) = 1/(t^2 + 1)$ . Расчеты на компьютере дали следующие значения коэффициентов:  $\beta_{10} = 0.999$ ;  $\beta_{11} = 0.300$ ;  $\beta_{12} = -0.024$ ;  $\beta_{kp} = 0, k = 0, 2, p = 0, 1, 2$ . Невязка  $W(\bar{\beta}_{opt})$  составила 0.017, абсолютная погрешность решения – 0.05.

*Замечание.* Решение задачи (1)-(3) сильно упрощается, если уравнение (1) разрешено относительно частной производной  $u_t$ , т. е. имеет вид:  $u_t = f(z, t, u, u_z, u_{zz}) = 0$ . Сделав в этом уравнении замену:  $z - \xi(t) = x$  и проинтегрировав по  $t$ , получим вместо (4) уравнение  $F(x, t, u, u_x, u_{xx}) = 0$ , не содержащее частной производной по  $u_t$ . Тогда базовые функции в приближенном решении (7) можно выбрать в виде [3, с. 565]:  $\omega_{kp}(x, t) = \chi_p(t)y_k(x)$ , где  $\chi_p(t) = 0$  при  $t \notin [t_{p-1}, t_{p+1}] \cap [0, T]$  и  $\chi_p(t) = 1 - |t - t_p|/h_t$  при  $t \in [t_{p-1}, t_{p+1}] \cap [0, T]$ ,  $p \in \overline{0, n_t}$ . Заметим, что в данном случае выбор системы функций  $\chi_p(t)$  жестко привязан к координатной сетке, поэтому  $m_t = n_t$ . Достоинством этой системы функций является тот факт, что в узлах сетки  $\chi_p(t_j) = \delta_{pj}$ , где  $\delta_{pj}$  – символ Кронекера; это позволяет значительно сократить объем вычислений.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. - М.-Л.: ГИФМЛ, 1962.
2. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. – М.: Наука, 1966.
3. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. – М: изд-во МЭИ, 2003.



*Маценко П.К., к.ф.-м.н., доцент каф. «Высшая математика» Ульяновского гос. технического университета.*

*Маценко Т.Н., старший преподаватель каф. «Вычислительная техника» Ульяновского гос. технического университета.*

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ СОКРАЩЕННОЙ ДНФ И ЕГО ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

*Е. А. Михеева, Т. В. Шумейко*

Существует целый ряд способов для построения сокращенной ДНФ (дизъюнктивной нормальной формы) (см. [1], [2]). Остановимся на геометрическом методе построения.

Пусть нам дана некоторая булева функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Введем необходимые обозначения.

$$x^\sigma = \begin{cases} \bar{x} & \text{при } \sigma = 0, \\ x & \text{при } \sigma = 1 \end{cases}$$

**Определение 1.** Формула  $K = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \dots x_{i_r}^{\sigma_r}$ , в которую каждая из переменных  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$  входит только один раз, называется элементарной конъюнкцией. Число  $r$  называется рангом элементарной конъюнкции.

**Определение 2.** Формула  $\bigvee_{i=1}^s K_i = K_1 \vee K_2 \dots K_s$ , где  $K_1, K_2 \dots K_s$  – элементарные конъюнкции, называется дизъюнктивной нормальной формой или (кратко) ДНФ.

**Определение 3.** Импликантой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется такая элементарная конъюнкция  $K = x_{i_1}^{\sigma_1} \dots x_{i_r}^{\sigma_r}$  над множеством переменных  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , что  $K \vee f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**Определение 4.** Импликанта функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется простой, если при удалении из неё любого входящего в неё множителя  $x_{i_j}^{\sigma_j}$  получается конъюнкция, не являющаяся импликантой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**Определение 5.** Дизъюнкция всех простых импликант функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется её сокращенной ДНФ. ( $D_c$ )

Пусть  $E_2 = \{0,1\}$ , тогда  $E_2^n = \{\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid \alpha_i \in E_2, i = \overline{1, n}\}$ . Множество наборов из  $E_2^n$ , на каждом из которых функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  принимает значение 1, обозначим через  $N_f$ . Через  $B^n$  обозначим  $n$ -мерный единичный куб.

**Определение 6.** Множество  $N_K$  называется интервалом ранга  $r$ . В геометрической интерпретации интервал ранга  $r$  представляет собой  $(n-r)$ -мерную грань  $B^n$ .

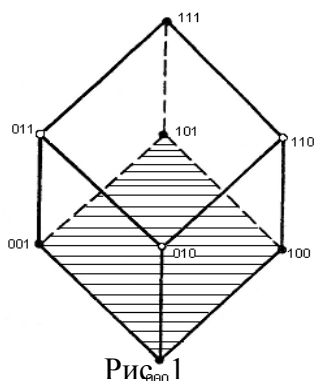
**Определение 7.** Интервал  $N_i$  является максимальным для функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , если  $N_i \subseteq N_f$  и не существует интервала  $N_j$  с условием  $N_i \subset N_j \subseteq N_f$ .

**Утверждение.** Интервал  $N_i$  является максимальным для функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  тогда и только тогда, когда соответствующая ему конъюнкция  $K_i$  есть простая импликанта данной функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

На данном утверждении и основан геометрический метод построения сокращенной ДНФ функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , состоящий в построении покрытия множества  $N_f$  максимальными интервалами и выписывании соответствующих им конъюнкций.

**Пример.** Построить сокращенную ДНФ функции  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \& (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \& (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$ .

**Решение.** Отметим на 3-мерном единичном кубе вершины, входящие в  $N_f$ , зачерненными кружочками. Вершины 000, 001, 101, 100 покрываются нижней гранью куба (Рис.1). Этот интервал является максимальным, так как имеет ранг 2, а  $f \neq 1$ . Осталась непокрытой вершина 111.



Она может быть покрыта тремя пересекающимися в ней двумерными гранями куба, однако каждая из граней содержит вершины, не входящие в  $N_f$  и поэтому не является интервалом для  $f$ . Вершина 111 может быть также покрыта тремя инцидентными ей ребрами, из которых только ребро, соединяющее вершины 101 и 111, содержится в  $N_f$ . Оно является максимальным интервалом для  $f$ , так как соержащие его

двумерные грани не содержатся в  $N_f$ . Таким образом, имеем два максимальных интервала, покрывающих  $N_f$ .

Грани соответствует конъюнкция  $\bar{x}_2$ , ребру  $x_1x_3$ . А  $D_c = \bar{x}_2 \vee x_1x_3$ .

**Ответ:**  $D_c = \bar{x}_2 \vee x_1x_3$

Программа, реализующая геометрический метод построения сокращенной ДНФ, написана на языке Object Pascal в интегрированной среде разработки Delphi 7. Целями разработки данного приложения являются: реализация алгоритма вычисления значения булевой функции, наглядное представление  $n$ -мерного единичного куба ( $n \leq 5$ ), реализация геометрического метода построения сокращенной ДНФ и его демонстрация.

Исходя из этого, выполнение программы проходит в несколько этапов:

1. Вычисление значения функции и построение таблицы значений.
  - а) Функция задается пользователем в аналитическом виде.
  - б) Вычисляется значение функции путем подстановки всех возможных наборов переменных.
  - в) Строится таблица значений функции на всех наборах переменных
2. Построение  $n$ -мерного единичного куба ( $n \leq 5$ ).



а) Изображения единичных кубов для равных размерностей отличаются лишь цветом вершин (черная – значение функции равно 1, белая – значение равно 0). Исходя из этого, используются заранее подготовленные шаблоны изображений.

б) На данном этапе происходит расстановка вершин определенного цвета в соответствие со значением функции на данном наборе.

3. Реализация геометрического метода построения сокращенной ДНФ.

а) На протяжении всех вычислений получаемые результаты заносятся в файл данных. Эти данные используются при реализации метода построения сокращенной ДНФ.

б) По полученным ранее данным выбираются все максимальные интервалы.

в) Полученные интервалы представляются в виде простых импликант.

г) Все полученные простые импликанты объединяются в дизъюнкцию, которая и будет сокращенной ДНФ. Вывод результата в аналитическом виде.

Недостатки программы:

-наглядное представление единичного куба возможно при размерности  $n \leq 5$ . При больших размерностях очень сложно представить вид куба.

-низкая скорость выполнения программы при размерности  $n \geq 10$ . Это связано с тем, что даже при небольших  $n$  выполняется большое число операций.

Достоинства программы:

-наглядное представление единичного куба и геометрического метода

-возможность вводить несколько функций и проводить сравнительный анализ по их геометрическому представлению, переключаясь между этими функциями.

-достаточно высокая скорость выполнения вычислений при  $n$  не превосходящих 10.

-простой интерфейс и простота использования этого приложения при вычислениях.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Избранные труды С.В. Яблонского/Отв. ред. В.Б.Алексеев, В.И.Дмитриев.-М.:МАКС Пресс, 2004.-584с.

[2] Е.А.Михеева. Индивидуальные задания для математического практикума на ЭВМ по дискретной математике: Методические указания. –Ульяновск: Филиал МГУ, 1995.-49 с.

.....

*Михеева Елизавета Алексеевна, кандидат физ-мат наук, доцент; почетный работник высшего образования РФ; кафедра ПМ, фМиИТ, УлГУ. Адрес для переписки: MikheevaEA@ulsu.ru*

*Шумейко Татьяна Викторовна, студентка 4-го курса факультета математики и информационных технологий Ульяновского Государственного Университета по специальности «прикладная математика и информатика», кафедра «прикладной математики», Ульяновский Государственный Университет. Адрес для переписки: Shumeiko\_TV@mail.ru*

# ПОСТРОЕНИЕ СОКРАЩЕННОЙ ДНФ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ МЕТОДОМ КВАЙНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕКТОРНОЙ ЗАПИСИ ИЗ МЕТОДА КВАЙНА-МАК-КЛАСКИ

*Е. А. Михеева, А. Г. Янина*

Существует целый ряд способов для построения сокращенной ДНФ (дизъюнктивной нормальной формы) (см [1]).

Пусть нам дана некоторая булева функция  $f(x_1, \dots, x_n)$ . В данной работе рассмотрим построение сокращенной ДНФ  $f(x_1, \dots, x_n)$  методом Квайна с использованием векторной записи из метода Квайна-Мак-Класки. Все необходимые определения и обозначения для этого берем из [2].

Программа, реализующая построение сокращенной ДНФ  $f(x_1, \dots, x_n)$ , написана на языке C++ в интегрированной среде разработки Borland C++ Builder 6.

Функцию  $f(x_1, \dots, x_n)$  можно ввести в программе тремя способами:

- 1) в виде СДНФ;
- 2) с помощью ее аналитического представления;
- 3) с помощью ее векторного представления.

При выборе первого способа осуществляется проверка на правильность записи, второго и третьего – строится СДНФ данной функции (рис. 1).

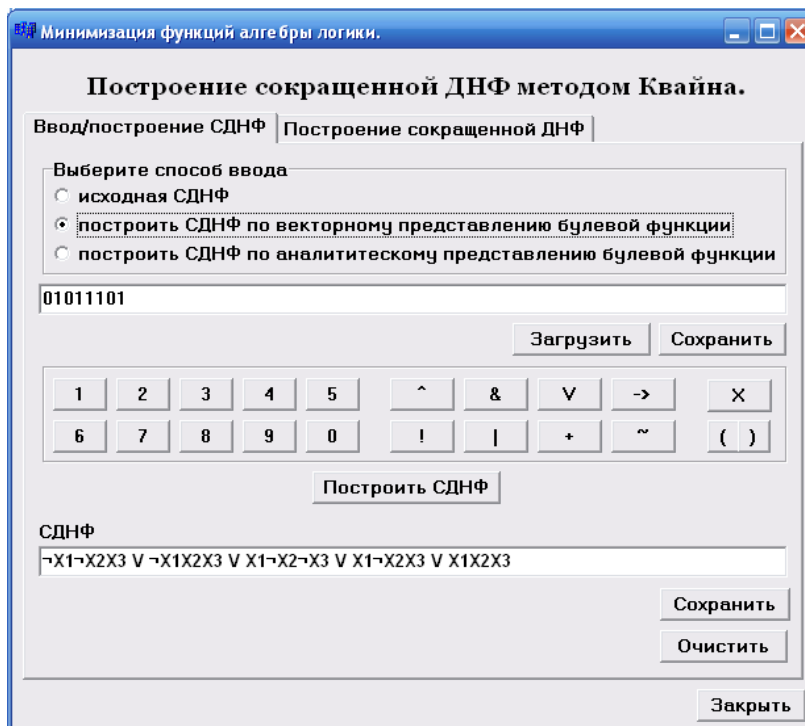


Рис. 1. Ввод данных и получение СДНФ.

После ввода исходных данных строится сокращенная ДНФ булевой функции по методу Квайна с некоторыми изменениями:

1. ДНФ хранится в динамической памяти в виде стека, элементами которого являются векторные записи интервалов и конъюнкций по методу Квайна-Мак-Класки с заданным рангом  $r$  и длиной  $n$ .

2. Ранг  $r$  интервала равен числу единиц и нулей в его векторной записи.

3. Операция неполного склеивания для интервалов: если ранги двух интервалов равны ( $r_1 = r_2 = r$ ) и их векторные записи различаются ровно на один символ на некотором  $j$ -ом месте, то в начало стека добавляется новый элемент, ранг которого равен  $r-1$  и на  $j$ -ой позиции стоит символ «×».

4. Операция элементарного поглощения двух интервалов: если ранг одного интервала меньше ранга другого на единицу ( $r_1 = r_2 - 1$ ) и их векторные записи различаются ровно на один символ, то интервал большего ранга удаляется из стека.

5. Если после операций неполного склеивания и элементарного поглощения на  $i$ -ой итерации в начало стека не добавляется новый элемент, то работа алгоритма завершается, иначе – выполняется следующая  $(i+1)$ -ая итерация.

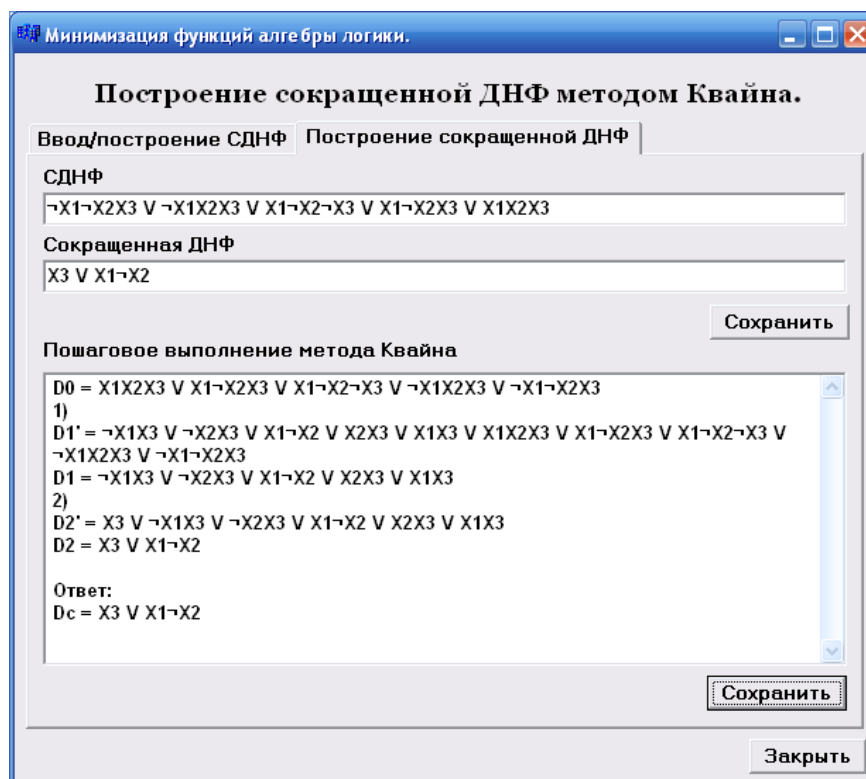


Рис. 2. Построение сокращенной ДНФ булевой функции.

В результате преобразования СДНФ булевой функции методом Квайна с описанными выше изменениями получается сокращенная ДНФ, хранящаяся в виде стека, состоящего из интервалов, над которыми больше нельзя

выполнить операции неполного склеивания и элементарного поглощения. Для наглядного представления в программе стек преобразуется в строку, которая отображает ДНФ булевой функции не в виде интервалов, а аналитически.

Кроме конечного результата (сокращенной ДНФ) программа выводит на экран поэтапное выполнение алгоритма метода Квайна (рис. 2).

Достоинства программы:

1. Отображается поэтапное выполнение алгоритма данного метода.
2. Программа работает для функций  $f(x_1, \dots, x_n)$  при  $n \leq 10$ , но при изменении в тексте программы двух констант, соответствующих  $n$  и  $2^n$ , и при  $n > 10$ .
3. Интервалы хранятся в динамической памяти, благодаря чему не надо знать, сколько памяти нужно выделить на их хранение, и экономится память ЭВМ.
4. Благодаря хранению информации в стеке новые элементы, которые будут использоваться на следующей итерации, хранятся в его начале.
5. Вводить СДНФ булевой функции довольно сложно и неудобно, поэтому в программе предусмотрено ее построение по аналитическому или векторному представлению.
6. Программу можно использовать для построения только СДНФ булевой функции, не находя ее сокращенной ДНФ.

Недостатки программы:

1. Для работы с булевой функцией, число переменных которой больше десяти, необходимо изменить две константы в тексте программы.
2. Из-за хранения информации в стеке переход к элементу большего ранга требует просмотра всех предыдущих элементов меньшего ранга.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Избранные труды С.В. Яблонского / Отв. ред. В.Б. Алексеев, В.И. Дмитриев. – М: МАКС Пресс, 2004. – 584с.
- [2] Е.А. Михеева. Индивидуальные задания для математического практикума на ЭВМ по дискретной математике: Методические указания. – Ульяновск: Филиал МГУ, 1995. – 49с.

.....

*Михеева Елизавета Алексеевна, канд. физ.-мат. наук, доцент; почетный работник высшего образования РФ; кафедра прикладной математики, фМиИТ, УлГУ. E-mail: MikheevaEA@ulsu.ru.*

*Янина Анастасия Геннадьевна, студентка 4-го курса факультета математики и информационных технологий по специальности «прикладная математика и информатика», кафедра прикладной математики, УлГУ. E-mail: yanina-anastasiya@rambler.ru.*

## МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ СОКРАЩЕННОЙ ДНФ ПО КАРТЕ КАРНО, ЕГО ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

*Е. А. Михеева, А. К. Вахтина*

В настоящее время существует целый ряд способов для построения сокращённых и минимальных дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) (см. [1], [2]). Остановимся на методе по карте Карно. Заметим, карты Карно часто называют диаграммами Вейга или минимизирующими картами.

При использовании любого метода существенную роль играет способ задания исходной функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ . В данном случае функция задаётся прямоугольной таблицей, в которой наборы значений переменных на каждой из сторон прямоугольника расположены в коде Грея. **Кодом Грея**  $\Gamma_n$  называется последовательность вершин  $n$ -мерного единичного куба  $E_2^n$ , расположенных в порядке их прохождения гамильтоновым циклом в графе  $E_2^n$ , где  $E_2 = \{0, 1\}$ . Другими словами, код  $\Gamma_n$  – это последовательность наборов из  $E_2^n$ , расположенных так, что любые два стоящие рядом набора отличаются только одной координатой. Нахождение простых импликант сводится к выделению максимальных по включению прямоугольников, состоящих из единиц. Считается, что каждая клетка таблицы, примыкающая к одной из сторон, является соседней к клетке, примыкающей к противоположной стороне и расположенной на той же горизонтали или вертикали.

Все необходимые обозначения, понятия, определения взяты из [2].

**Пример.** Построить сокращённую ДНФ ( $D_C$ ) функции, представленной следующей картой Карно:

$x_{1,2,3,4}$	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	1	1	0	0
11	1	1	0	1
10	0	1	0	1

**Решение:** Выделим максимальные интервалы  $N_1 = \{0001, 0101, 1101, 1001\} = \times \times 01$ ,  $N_2 = \{0100, 0101, 1100, 1101\} = \times 10 \times$ ,  $N_3 = \{1110, 1010\} = 1 \times 10$ ,  $N_4 = \{0010, 1010\} = \times 010$ ,  $N_5 = \{1100, 1110\} = 11 \times 0$ .

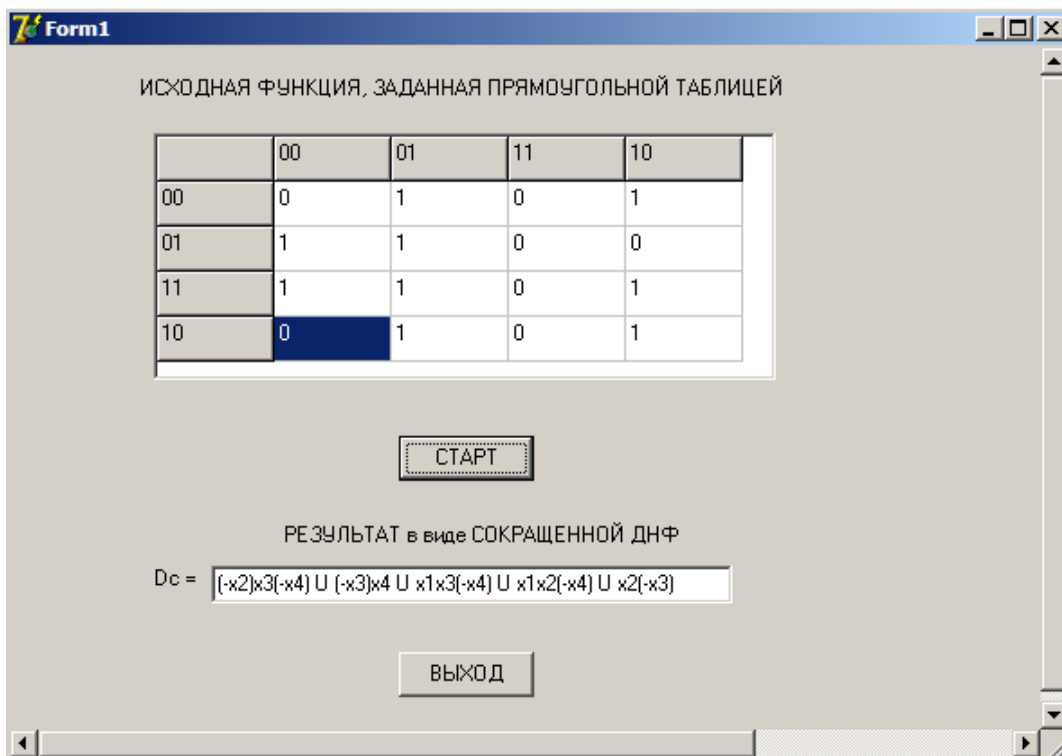
Выписывая соответствующие данным интервалам простые импликанты, получаем

$$D_C = \bar{x}_3 x_4 \cup x_2 \bar{x}_3 \cup x_1 x_3 \bar{x}_4 \cup \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \cup x_1 x_2 \bar{x}_4.$$

Программа, реализующая построение сокращённой ДНФ по карте Карно, написана на языке Delphi (в основе которого лежит Object Pascal).

**Работа программы.** Программа по заданной изначально прямоугольной таблице ищет максимальные по включению прямоугольники, состоящие из единиц (см. выше).

В дальнейшем выписывает соответствующие этим единицам наборы значений, которые заданы в виде кода Грея, взяв при этом сначала значение из нулевого столбца и соединив с соответствующим значением из нулевой строки. Получив набор значений в виде строки, специальная функция выписывает из каждого полученного максимального интервала простые импликанты. Т. е. на выходе получается  $D_c$ ,



Преимущество программы – быстрая скорость вычислений в отличие от расчетов вручную.

Недостатком же является то, что программа предназначена лишь для работы с функциями до четырёх переменных.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Избранные труды С.В. Яблонского/ Отв. ред. В.Б. Алексеев, В.И. Дмитриев. – М.: МАКС Пресс, 2004. – 584 с.
2. Е.А. Михеева. Индивидуальные задания для математического практикума на ЭВМ по дискретной математике: Методические указания. – Ульяновск: филиал МГУ, 1995. – 49 с.

.....

*Михеева Елизавета Алексеевна; канд. физ. -мат. наук, доцент; почетный работник высшего образования РФ; кафедра: математической*

кибернетики и информатики; Ульяновский Государственный Университет.  
 Адрес для переписки: 432071 г. Ульяновск, ул. Ср. Венец 9-27;  
 MikheevaEA@ulsu.ru

**Вахтина Анна Константиновна** – студентка 4-го курса ФМиИТ УлГУ по специальности «прикладная математика и информатика», кафедра прикладной математики, Ульяновский Государственный Университет.

Адрес для переписки: 432072 г. Ульяновск, пр. Созидателей 24-44;  
 anuavahtina@rambler.ru

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФАЛ НОРМАЛЬНЫМИ ФОРМАМИ

*Е. А. Михеева*

Известно ([1]), что всякая функция алгебры логики (ФАЛ)  $f(x_1, \dots, x_n)$  может быть представлена в совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{(\delta_1, \dots, \delta_n)} x_1^{\delta_1} \& x_2^{\delta_2} \& \dots \& x_n^{\delta_n},$$

$$f(\delta_1, \dots, \delta_n) = 1$$

а также в совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ)

$$f(x_1, \dots, x_n) = \big\&_{(\delta_1, \dots, \delta_n)} (x_1^{\delta_1} \vee x_1^{\bar{\delta}_1} \vee \dots \vee x_n^{\delta_n}),$$

$$f(\delta_1, \dots, \delta_n) = 0$$

Однако, очень часто СДНФ или СКНФ допускают упрощения, при которых получаются эквивалентные выражения, но содержащие меньшее число букв. Такой эффект можно, например, получить при употреблении следующих преобразований:

$F_1$	$x \& K_1 \vee \bar{x} \& K_1 = (x \vee K_1) (\bar{x} \vee K_1) = K_1$	(склеивание)
$F_2$	$x \vee x \& K_1 = x \& (x \vee K_1) = x$	(поглощение)
$F_3$	$x \& K_1 \vee \bar{x} \& K_2 = x \& K_1 \vee \bar{x} \& K_2 \vee K_1 \& K_2$	(обобщённое склеивание)
	$(x \vee K_1) \& (\bar{x} \vee K_2) = (x \vee K_1) \& (\bar{x} \vee K_2) \& (K_1 \vee K_2)$	

где  $K_1, K_2$  – любые выражения. В дальнейшем нас будет интересовать определённый класс преобразований, связанный с так называемыми нормальными формами. Для уточнения постановки задачи дадим определения.

**Определение 1.** Конъюнкция  $K$  называется **элементарной**, если она представляет собой логическое произведение переменных в некоторых степенях, причем каждая переменная в произведении встречается не более одного раза, то есть

$$K(x_1, \dots, x_n) = x_{i_1}^{\delta_1} \& x_{i_2}^{\delta_2} \& \dots \& x_{i_r}^{\delta_r} \quad (i_p \neq i_q \text{ при } p \neq q). \quad (1)$$

Число сомножителей в этом произведении называется **рангом конъюнкции**.  $K(x_1, \dots, x_n) \equiv 1$  считается элементарной конъюнкцией 0-го ранга.

**Определение 2.** Дизъюнкция  $D$  элементарных конъюнкций  $K_i$

$$D = K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_m$$

называется **дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)**.

Двойственным образом определяются понятия элементарной дизъюнкции и конъюнктивной нормальной формы (КНФ).

Мы будем рассматривать лишь те преобразования  $F$ , которые преобразуют нормальную форму  $D$  в эквивалентную нормальную форму  $D'$ , то есть  $FD = D'$ . Следовательно, мы будем касаться только тех упрощений, которые не выводят формулы из классов ДНФ и КНФ.

Главной задачей данной работы является выяснение вопроса о том, каким образом для произвольной ФАЛ построить минимальную ДНФ (или КНФ).

**Определение 3.** ДНФ (соответственно КНФ) называется **минимальной**, если она содержит наименьшее число букв по сравнению со всеми другими эквивалентными ДНФ (КНФ).

Поскольку КНФ двойственна ДНФ, то задачу достаточно решать для случая ДНФ.

Поставленная задача может быть решена тривиально. Для этого достаточно перебрать все ДНФ с числом букв, не превосходящим число букв  $\mu$  СКНФ, то есть  $\mu \leq n \cdot 2^n$ , и выбрать среди них ту нормальную форму, которая задаёт исходную функцию и содержит минимальное число букв. Однако, этот путь не эффективен, требует слишком большого числа перебора. Будем искать более эффективные способы решения.

Для лучшего понимания сначала дадим геометрическое решение.

Пусть каждой ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$  поставлено в соответствие подмножество  $N_f$  всех таких вершин  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  единичного  $n$ -мерного куба, что  $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1$ .

**Пример 1.** Функции  $f(x, y, z)$ , заданной табл. 1, отвечает подмножество  $N_f$  вершин трехмерного единичного куба (рис. 1).

Таблица 1

x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

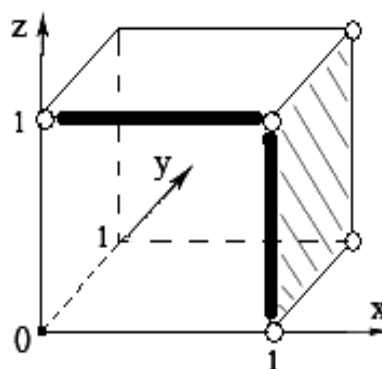


Рис. 1

где  $N_f = \{(0,0,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$ .



**Определение 4.** Подмножество вершин единичного  $n$ -мерного куба называется **интервалом  $r$ -го ранга**, если оно совпадает с подмножеством  $N_K$ , соответствующим некоторой элементарной конъюнкции  $r$ -го ранга (1).

Очевидно, что вершины куба являются интервалами  $n$ -го ранга, а множество всех вершин куба - интервалом 0-го ранга. Легко видеть, что интервал  $r$ -го ранга геометрически представляет подмножество вершин куба, лежащих в его  $(n-r)$ -мерной грани.

В примере 1 ребра  $N_1 = \{(0,0,1), (1,0,1)\}$ ,  $N_2 = \{(1,0,0), (1,0,1)\}$  и грань  $N_3 = \{(1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$  являются соответственно интервалами 2-го и 1-го рангов. В самом деле

$$N_1 = N_{K_1}, \quad N_2 = N_{K_2}, \quad N_3 = N_{K_3}, \quad \text{где } K_1(x,y,z) = \bar{y}z, \quad K_2(x,y,z) = x\bar{y}, \quad K_3(x,y,z) = x$$

Легко видеть, что с каждой ДНФ функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  именно :  $f(x_1, \dots, x_n) = K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_m$ , связано покрытие подмножества  $N_f$  интервалами  $N_{K_j}$ , причем каждый интервал целиком содержится в  $N_f$ , то есть  $N_{K_j} \subset N_f$ . Мы имеем

$$N_f = \bigcup_{j=1}^m N_{K_j}$$

В примере 1 ДНФ функции  $f(x,y,z) = \bar{y}z \vee x$  отвечает покрытие множества  $N_f$  интервалами  $N_1$  и  $N_3$ , то есть  $N_f = N_1 \cup N_3$ .

Справедливо также и обратное положение: каждому покрытию подмножества  $N_f$  интервалами  $N_{K_j}$  отвечает некоторая ДНФ функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

Обозначим через  $r_j$  ранг интервала  $N_{K_j}$  ( $j=1,2,\dots,m$ ). Тогда

$$r = \sum_{j=1}^m r_j$$

является числом букв в исходной ДНФ. Таким образом, поставленная задача сводится к отысканию такой ДНФ или такого покрытия подмножества  $N_f$  интервалами  $N_{K_j} \subset N_f$ , чтобы выражение

$$r = \sum_{j=1}^m r_j \quad \text{было минимальным.}$$

**Определение 5.** Интервал  $N_B \subset N_f$  называется **максимальным**, если не существует интервала  $N_K$ , имеющего ранг меньший, чем ранг  $N_B$ , и такого, что  $N_B \subset N_K \subset N_f$ .

В примере 1 максимальными интервалами являются интервалы  $N_1$  и  $N_3$ , интервал  $N_2$  не является максимальным, поскольку  $N_2 \subset N_3 \subset N_f$ .

Совокупность  $\{N_{B_j}\}$  всех максимальных интервалов из подмножества  $N_f$  определяет покрытие множества  $N_f$ , то есть

$$N_f = \bigcup_{j=1}^{m_0} N_{B_j}$$

**Определение 6.** ДНФ функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , отвечающая покрытию подмножества  $N_f$  всеми его максимальными интервалами, называется **сокращённой ДНФ**.

Согласно определению, сокращённая ДНФ определяется по функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  однозначно.

**Замечание 1.** В сокращённой ДНФ отсутствуют элементарные поглощения, так как максимальные интервалы из  $N_f$  не могут содержаться один в другом.

**Замечание 2.** Сокращённая ДНФ, в принципе, не является минимальной.

Связь между сокращённой и минимальной ДНФ вытекает из следующего утверждения.

**Теорема 1 [2].** Минимальная ДНФ функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  получается из сокращённой ДНФ для той же функции путём опускания некоторых дизъюнктивных членов.

Из теоремы следует, что сокращённая форма ДНФ представляет промежуточный результат на пути получения минимальной ДНФ. Заметим, если сокращённая ДНФ получается однозначно, а минимальная ДНФ находится не однозначно.

**Теорема 2 [2].** Если  $f(x_1, \dots, x_n) \neq \text{const}$  является монотонной функцией, то её сокращённая ДНФ является минимальной.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 2001, 384с.
2. Яблонский С.В. Функциональные построения в  $k$ -значной логике. – В кн.: Труды МИАН СССР. Т.51 – М.:Изд-во АН СССР, 1958, с.5-142

.....

*Михеева Елизавета Алексеевна, канд. физ.-мат наук; почётный работник высшего образования РФ; доцент кафедры прикладной математики факультета математики и информационных технологий Ульяновского Государственного Университета.*

*Адрес для переписки: MikheevaEA@ulsu.ru*

## ПОСТРОЕНИЕ СОКРАЩЕННОЙ ДНФ МЕТОДОМ БЛЕЙКА И ЕГО ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

*Е. А. Михеева, Т. Е. Киреева*

В настоящее время существует целый ряд способов для построения сокращенной ДНФ (дизъюнктивной нормальной формы) заданной булевой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (см. [1], [2]). При использовании любого метода существенную роль играет способ задания исходной функции. В методе Блейка функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  задается произвольной ДНФ ( $\mathcal{D}$ ), реализующей данную функцию, и используются следующие преобразования:

1) обобщенное склеивание

$$x \& K_1 \vee \bar{x} \& K_2 = x \& K_1 \vee \bar{x} \& K_2 \vee K_1 \& K_2, \quad (1)$$

2) поглощение

$$K_1 \vee K_1 \& K_2 = K_1, \quad (2)$$

где  $K_1$  и  $K_2$  – любые выражения.

Программа, реализующая построение сокращенной ДНФ данной функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  методом Блейка, выполняется в среде быстрой разработки Delphi 7, в которой в качестве языка программирования используется язык Delphi (основанный на языке Object Pascal) и работает по следующему алгоритму:

Шаг 1.  $i = 0$ ,  $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$ .

Шаг 2. Конструируем ДНФ  $\mathcal{D}_i'$ , руководствуясь правилом: над всеми парами входящих в  $\mathcal{D}_i$  элементарных конъюнкций выполняем всевозможные преобразования (1).

Шаг 3. Конструируем ДНФ  $\mathcal{D}_{i+1}$ , руководствуясь правилом: над всеми парами входящих в  $\mathcal{D}_i'$  элементарных конъюнкций выполняем всевозможные преобразования (2).

Шаг 4. Если  $\mathcal{D}_{i+1}$  и  $\mathcal{D}_i$  состоят из одних и тех же элементарных конъюнкций, то переход к шагу 6, иначе переход к шагу 5.

Шаг 5.  $i = i + 1$  и переход к шагу 2.

Шаг 6.  $\mathcal{D}_c = \mathcal{D}_i$  и конец.

Все необходимые обозначения, понятия, определения взяты из [2].

**Пример.** Построить сокращенную ДНФ  $\mathcal{D}_c$  по ДНФ  $\mathcal{D}$  функции  $f(x_1, x_2, x_3)$ , где  $\mathcal{D} = x_1 \& x_2 \vee \bar{x}_1 \& x_3 \vee \bar{x}_2 \& x_3$ .

**Решение.** Функция  $f(x_1, x_2, x_3)$  задана в виде ДНФ, применяем метод Блейка.

После первого этапа получаем

$$\mathcal{D}_1 = x_1 \& x_2 \vee \bar{x}_1 \& x_3 \vee \bar{x}_2 \& x_3 \vee x_2 \& x_3 \vee x_1 \& x_3 \vee x_3.$$

После второго этапа получаем  $\mathcal{D}_c$ , где

$$\mathcal{D}_c = \mathcal{D}_2 = x_1 \& x_2 \vee x_3.$$

Выполнение задания из этого примера программой показано на рисунке 1.

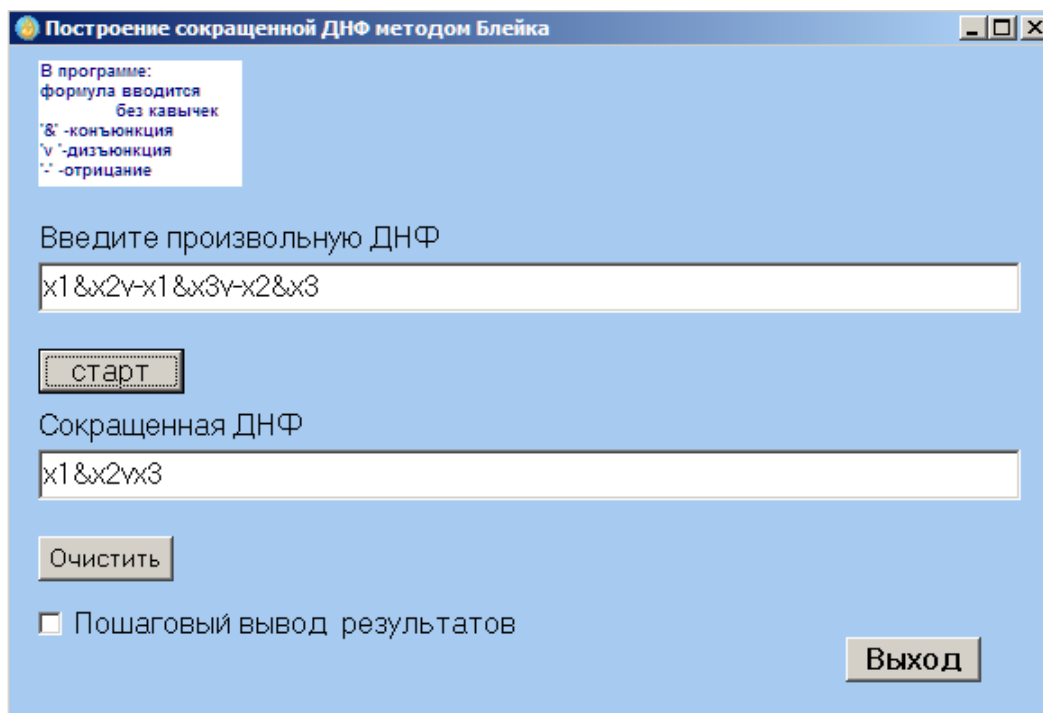


Рис. 1

Преимущества программы:

- 1) Программа позволяет избежать трудоемкости выполнения данного задания вручную.
- 2) Высокая скорость работы.
- 3) Пошаговый вывод результатов наглядно показывает действие алгоритма.

Недостаток программы:

- 1) Максимальное количество переменных 20.
- 2) Число элементарных конъюнкций в ДНФ ограничено 10.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Избранные труды С.В. Яблонского / Отв. ред. В.Б. Алексеев, В.И. Дмитриев. – М.: МАКС Пресс, 2004. – 584 с.
2. Е.А. Михеева. Индивидуальные задания для математического практикума на ЭВМ по дискретной математике: Методические указания. – Ульяновск: Филиал МГУ, 1995. – 49 с.

•••••

*Михеева Елизавета Алексеевна* – канд. физ.–мат. наук, доцент; почетный работник высшего образования РФ; кафедра ПМ, фМиИТ, УлГУ. Адрес для переписки: [MikeevaEA@ulsu.ru](mailto:MikeevaEA@ulsu.ru)

*Киреева Татьяна Евгеньевна* – студентка 4–го курса фМиИТ УлГУ по специальности «прикладная математика и информатика», кафедра прикладной математики, Ульяновский Государственный университет. Адрес для переписки: [Kireevy57@mail.ru](mailto:Kireevy57@mail.ru)

# ПОСТРОЕНИЕ СОКРАЩЕННОЙ ДНФ МЕТОДОМ НЕЛЬСОНА И ЕГО ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

*Е. А. Михеева, В. С. Еремина*

Существует целый ряд способов для построения сокращенной ДНФ (дизъюнктивной нормальной формы) (см.[1]). Остановимся на методе Нельсона. Все необходимые обозначения, понятия и определения взяты из [2].

Исходные данные: произвольная КНФ (конъюнктивная нормальная форма), реализующая заданную булеву функцию  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

Применяемые преобразования:

1) дистрибутивный закон

$$a \cdot (b \vee c) = a \cdot b \vee a \cdot c,$$

2) тождество

$$x \cdot \bar{x} = 0, \quad (1)$$

3) поглощение, т.е.

$$K' \vee K' \cdot K'' = K'. \quad (2)$$

**Алгоритм:**

Последовательно раскрываем в КНФ заданной функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  скобки в соответствии с дистрибутивным законом, выполняя после каждого раскрытия скобок упрощение в соответствии с (1) и (2).

**Пример.** Построить сокращенную ДНФ ( $D_c$ ) по заданной КНФ

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

**Решение:** После раскрытия скобок имеем

$$D_1 = x_1 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_1 \vee x_2 x_2 \vee x_2 x_3.$$

После упрощения в соответствии с правилами (1) и (2) получаем

$$D_c = D_2 = x_1 x_3 \vee x_2.$$

Программа, реализующая построение сокращенной ДНФ заданной булевой функции методом Нельсона, написана на языке программирования Delphi и работает по вышеописанному алгоритму.

Достоинства программы:

- 1) высокая скорость вычислений;
- 2) уменьшение трудозатрат пользователя;
- 3) наглядность и простота интерфейса;
- 4) возможность введения произвольных данных (КНФ).

Недостаток программы: ограниченное количество переменных (не более 10).

Выполнение задания из приведенного примера данной программой показано на следующем рисунке:



# ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ ФАЛ

*Е. А. Михеева, Д. Д. Шамочкин*

Рассмотрим двухэлементное множество  $E_2 = \{0,1\}$ , далее  $n$ -ю декартову степень этого множества  $E_2^{(n)} = \underbrace{E_2 \times \dots \times E_2}_n$ , элементами которого являются

наборы:  $E_2^{(n)} = \{\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in E_2, i = 1, 2, \dots, n\}$ .

**Определение 1.** Функцией алгебры логики (ФАЛ) называется функция, у которой как переменные, так и сама функция принимают значения из  $E_2$ .

Если мы имеем функцию  $f(x_1, \dots, x_n)$ , то она отображает  $E_2^{(n)} \rightarrow E_2$ .

Через  $P_2$  обозначим множество всех ФАЛ. Пусть имеется некоторое подмножество  $F \subseteq P_2$ .

**Определение 2.** Формулой над множеством  $F$  называется выражение вида:

- 1)  $f(x_1, \dots, x_n)$ , если  $f \in F$ ;
- 2)  $f(A_1, \dots, A_m)$ , если  $f \in F$ , а  $A_i$  – либо формула над  $F$ , либо переменная  $x_{j_i}$  из заданного алфавита, где  $1 \leq i \leq m$ .

При этом никаких других формул над  $F$  нет.

**Определение 3.** Система функций  $(f_1, \dots, f_n)$  из  $P_2$  называется **полной** в  $P_2$ , если любая ФАЛ может быть записана в виде формулы через функции этой системы.

**Замечание.** В терминах замыкания и замкнутого класса (см. [1]) можно дать другое определение полноты:  $F$  – полная система, если  $[F] = P_2$  ( $[F]$  – замыкание системы  $F$ ).

**Определение 4.** Замкнутый класс  $K \subset P_2$  называется **предполным** в  $P_2$ , если для любой ФАЛ  $f$ , не входящей в  $K$ , система  $K \cup \{f\}$  полна, т. е.  $[K \cup \{f\}] = P_2$ .

**Определение 5.**  $T_0$  – класс всех ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$ , сохраняющих константу 0, т. е. функций, для которых выполнено  $f(0, \dots, 0) = 0$ .

**Определение 6.**  $T_1$  – класс всех ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$ , сохраняющих константу 1, т. е. функций, для которых выполнено  $f(1, \dots, 1) = 1$ .

**Определение 7.** ФАЛ вида  $f(x_1, \dots, x_n) = c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \pmod{2}$ , где  $c_i = 0, 1$  ( $i = 0, \dots, n$ ), называется **линейной**.  $L$  – класс всех линейных ФАЛ.

**Определение 8.** ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$ , для которой выполняется равенство  $f(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ , называется **самодвойственной**.  $S$  – класс всех самодвойственных ФАЛ.

**Определение 9.** Для двух наборов  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  и  $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  выполнено отношение предшествования  $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ , если  $\alpha_1 \leq \beta_1, \dots, \alpha_n \leq \beta_n$ .

**Определение 10.** ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется **монотонной**, если для любых двух наборов  $\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{\beta}$  таких, что  $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ , имеет место неравенство  $f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta})$ . М – класс всех монотонных ФАЛ.

Подробное описание выше перечисленных классов можно найти в [1] и [2].

**Утверждение.** В  $P_2$   $\exists$  только 5 предполных классов, а именно  $T_0, T_1, L, S, M$ .

**Критерий полноты в  $P_2$  :** Система ФАЛ F полна тогда и только тогда, когда она полностью не содержится ни в одном из предполных классов  $T_0, T_1, L, S, M$ .

Программа, определяющая полноту заданной системы ФАЛ, написана на языке Delphi.

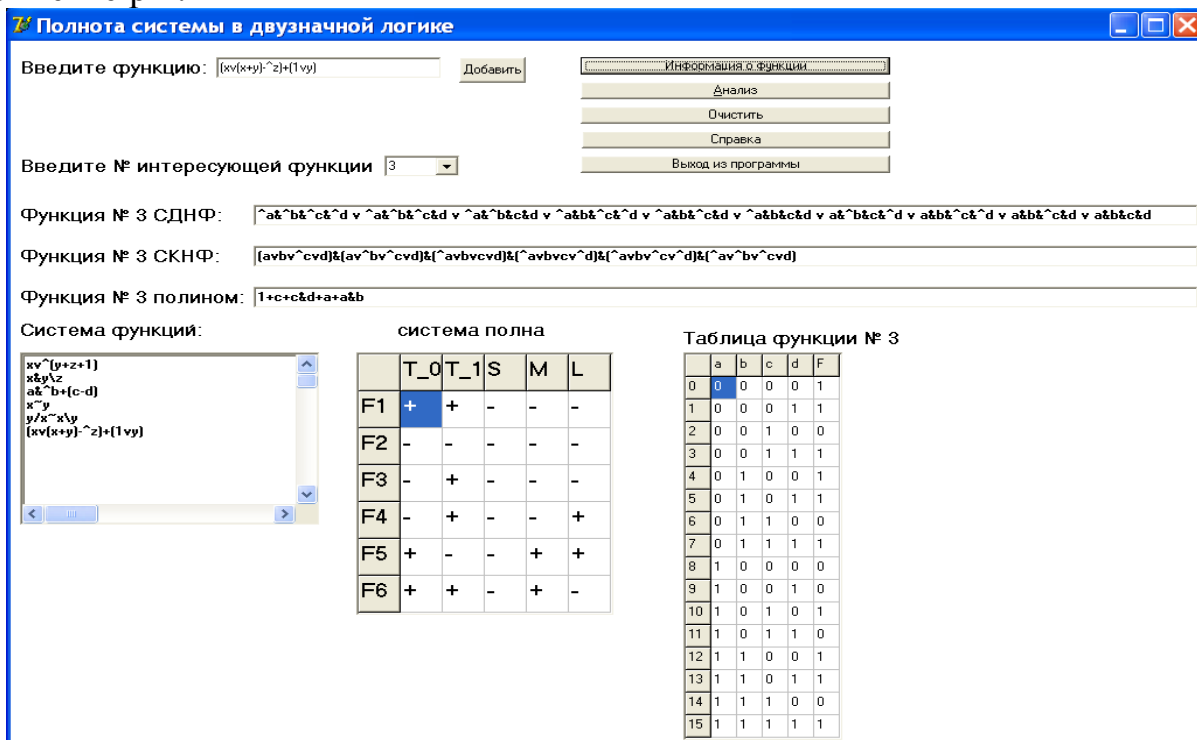


Рис. 1.

Она работает согласно критерию полноты по следующему алгоритму:

Из функции вычленяются переменные, от которых она существенно зависит. В зависимости от их количества строится таблица значений функции. Пользователь всегда может посмотреть таблицу значений интересующей его функции. Затем программа по заданной таблице определяет принадлежность каждой функции к классу  $T_0, T_1$ , а также самодвойственность путём сравнения её значений на противоположных наборах. Монотонность определяется путём сравнения значений функции на всех наборах, для которых выполняется





## МЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

*А. А. Молгачев, Т. И. Красько*

*В данной статье рассматривается аналогия между аэрогидродинамической турбулентностью среды и механической устойчивостью по собственным значениям.*

*Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК №П1122, а также поддержана грантом РФФИ № 09-01-97005-р\_поволжье\_a.*

Рассматривается одномерное уравнение Навье-Стокса

$$\rho(u_t + uu_x) = -p_x + \mu u_{xx}. \quad (1)$$

Введем безразмерные переменные:  $\bar{u} = \frac{u}{V}$ ,  $\bar{x} = \frac{x}{\ell}$ ,  $\bar{t} = \frac{Vt}{\ell}$ ,  $\bar{p} = \frac{p}{\rho V^2}$ , где

$\ell$  – характерный размер,  $V$  – характерная скорость, тогда получим модельное уравнение в безразмерных переменных

$$\bar{u}_{\bar{t}} + \bar{u}\bar{u}_{\bar{x}} = -\bar{p}_{\bar{x}} + \frac{1}{\text{Re}}\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}, \quad (2)$$

где  $\text{Re} = \rho V \ell / \mu$  – безразмерное число Рейнольдса. В дальнейшем черточки над безразмерными переменными будем опускать.

Рассмотрим взаимосвязь между уравнением Навье–Стокса, описывающим турбулентное течение среды, и обыкновенным дифференциальным уравнение второго порядка, описывающим механические колебания физического объекта (3)

$$\ddot{x} + n\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (3)$$

где точкой обозначается производная по времени  $t$ .

Уравнение (3) имеет общее решение в виде

$$x(t) = Ae^{x_1 t} + Be^{x_2 t}, \quad (4)$$

где  $x_{1,2} = -\frac{n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \omega^2}$ .

Будем рассматривать уравнение (3) как уравнение пространственных колебаний объекта, т.е. переменная  $x$  представляет собой цилиндрический радиус, где длиной цилиндра является переменная времени  $t$ . В зависимости от соотношения параметров  $n$  и  $\omega$  решение уравнения (3) имеет характерную структуру:

$$A) n > 0, \quad (n/2)^2 > \omega^2 \Rightarrow n > 2\omega.$$

Устойчивое положение равновесия, соответствующее сильному трению. Пространственное решение будет представлять собой во временной трубе затухающую пространственную осесимметричную экспоненту, что в гидромеханике соответствует слоистому осесимметричному ламинарному потоку среды.

$$B) n > 0, \quad (n/2)^2 < \omega^2 \Rightarrow 0 < n < 2\omega.$$

Устойчивое положение равновесия, соответствующее слабому трению. Пространственное решение будет представлять собой винтовую кривую затухающую экспоненциально, что соответствует слабой турбулентности.

C)  $n = 0$  – Гармонические колебания с частотой  $\omega > 0$ . Пространственное решение может представлять гармоническую функцию на временном цилиндре.

$$D) n < 0, \quad (n/2)^2 < \omega^2 \Rightarrow -2\omega < n < 0.$$

Неустойчивое положение равновесия, соответствующее колебательному движению. Пространственное решение представляет развивающуюся винтовую кривую возрастающую по экспоненте.

$$E) n < 0, \quad (n/2)^2 > \omega^2 \Rightarrow n < -2\omega.$$

Неустойчивое положение равновесия, соответствующее поступательному движению. Пространственное решение имеет вид поверхности образованной вращением возрастающей экспоненты вокруг оси времени. В гидромеханике аналогом этой поверхности является конус Маха.

Условие А соответствует ламинарному течению среды, Б–Е – турбулентному течению (слабое, умеренное и сильное).

Представим безразмерную скорость в виде  $u(x,t) = \xi(x)\dot{\varphi}(t)$ , тогда уравнение (2) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \xi\ddot{\varphi} + \left\{ -\frac{1}{\text{Re}} \xi_{xx}\dot{\varphi} + \xi\xi_x\dot{\varphi}^2 \right\} + \omega^2 \xi\varphi &= 0, \\ \ddot{\varphi} + \left\{ \left( -\frac{1}{\text{Re}} \frac{\xi_{xx}\dot{\varphi}}{\xi\dot{\varphi}} + \xi_x\dot{\varphi} \right) \dot{\varphi} \right\} + \omega^2 \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $-p_x(x,t) = -\omega^2 \xi(x)\varphi(t) = -\omega^2 \int_0^t u(x,\tau) d\tau$ ,  $p(x,t) = \omega^2 \int_0^x \int_0^t u(\zeta,\tau) d\zeta d\tau$ .

Сравнивая уравнение (5) с уравнением (3), можно записать

$$n = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{u_{xx}}{u} + u_x; \quad -\frac{1}{\text{Re}} \frac{u_{xx}}{u} + u_x = -\frac{u_t + p_x}{u}. \quad (6)$$

Рассмотрим случай (С):

$$\begin{aligned} n = 0 &\Leftrightarrow u_{xx} = \text{Re}_0 u u_x, \quad (u_x)_x = \text{Re}_0 (u^2/2)_x, \\ u_x - u_{x0} &= \text{Re}_0 (u^2/2 - u_0^2/2), \\ u - u_0 - \int_0^1 u_{x0} dx &= \text{Re}_0 \int_0^1 (u^2/2 - u_0^2/2) dx. \end{aligned}$$

Если предположить в (6)  $\text{Re} \gg 1$ , то  $u_x = 0$ ,  $u = u_0$ ; следовательно

$$\text{Re}_0 = \frac{u - u_0}{u^2/2 - u_0^2/2} = \frac{2}{u + u_0} = \frac{1}{u_0}. \text{ Переходя к размерным переменным, получим}$$

$$u_0 = \frac{V_0}{\text{Re}_0}, \text{ где } V_0, \text{Re}_0 \text{ измеряются экспериментально.}$$

Рассмотрим случай (А):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\text{Re}} \frac{u_{xx}}{u} + u_x &> 2\omega, \\ u_{xx} - \text{Re}_L u u_x + 2\text{Re}_L \omega u &< 0, \\ u_x - u_{x0} - \text{Re}_L (u^2/2 - u_0^2/2) + 2\text{Re}_L \omega \int_0^1 u dx &< 0, \\ u - u_0 - \int_0^1 u_{x0} dx &< \text{Re}_L \int_0^1 (u^2/2 - u_0^2/2) dx - 2\text{Re}_L \omega \int_0^1 \int_0^1 u dx d\tau, \\ \text{Re}_L &> \frac{u - u_0 - \int_0^1 u_{x0} dx}{\int_0^1 (u^2/2 - u_0^2/2) dx - 2\omega \int_0^1 \int_0^1 u dx d\tau}, \quad u > u_0, \end{aligned}$$

если предположить, что  $u_x = 0$ , то  $\text{Re}_L > \frac{1}{\frac{u + u_0}{2} - \frac{2\omega}{1 - u_0/u}}$ ;

$$\frac{u + u_0}{2} > \frac{2\omega u}{u - u_0}, \quad u = \frac{u_0}{V}, \quad u_0 = \frac{u_0}{V_0}, \quad V \leq \frac{u_0}{\sqrt{4\omega^2 + u_0^2/V_0^2} + 2\omega}.$$

Рассмотрим случай (Е):

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\operatorname{Re} u} \frac{u_{xx}}{u} + u_x \leq -2\omega, \\
& u_{xx} - \operatorname{Re}_T u u_x - 2\operatorname{Re}_T \omega u \geq 0, \\
& u_x - u_{x0} - \operatorname{Re}_T (u^2/2 - u_0^2/2) - 2\operatorname{Re}_T \omega \int_0^1 u dx \geq 0, \\
& u - u_0 - \int_0^1 u_{x0} dx \geq \operatorname{Re}_T \int_0^1 (u^2/2 - u_0^2/2) dx + 2\operatorname{Re}_T \omega \int_0^1 \int_0^1 u dx d\tau, \\
& \operatorname{Re}_T \geq \frac{u - u_0 - \int_0^1 u_{x0} dx}{\int_0^1 (u^2/2 - u_0^2/2) dx + 2\omega \int_0^1 \int_0^1 u dx d\tau}, \quad u < u_0,
\end{aligned}$$

если предположить, что  $u_x = 0$ , то  $\operatorname{Re}_T \geq \frac{1}{\frac{u + u_0}{2} - \frac{2\omega}{u_0/u - 1}}$ .

В случае (Е) – сверхзвуковое течение среды (конуса Маха), т.е. скорость распространения среды больше скорости звука  $a$  в среде  $V \geq a$

$$\frac{u + u_0}{2} \geq \frac{2\omega u}{u_0 - u}, \quad V \geq \frac{u_0}{\sqrt{4\omega^2 + u_0^2/V_0^2} - 2\omega},$$

где  $\omega = \frac{u_0}{V_0} \left( \frac{a}{V_0} - \frac{V_0}{a} \right)$ .

Числа Рейнольдса и скорость распространения среды в зависимости от характера течения (А–Е) находятся в пределах

$$0 < \operatorname{Re}_L < \operatorname{Re}_0 < \operatorname{Re}_T < \infty,$$

$$0 < V_L < V_0 < V_T < \infty.$$

Таким образом, можно провести аналогию между возможными характерными течениями среды, от ламинарного потока до турбулентного, и механической устойчивостью, определяемой по собственным значениям.

•••••

*Молгачев Алексей Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры “Высшая математика” УлГТУ.*

*Красько Татьяна Игоревна, студентка Ульяновского государственного технического университета.*

# КОНЦЕПЦИЯ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ ПРИ ВОЗВЕДЕНИИ В ДРОБНУЮ СТЕПЕНЬ ЧИСЕЛ И ФУНКЦИЙ

П. А. Новиков

*Эпиграф-девиз*  
*Правила в математике*  
*существуют только*  
*для бездарностей.*  
*(М.В.Остроградский)*

## 1. Возведение в дробную степень чисел

Известно, что при возведении некоторого числа  $A$  в дробную степень  $\frac{1}{m}$  получается  $m$  значений:

$$A^{\frac{1}{m}} = \begin{cases} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_i \\ \dots \\ a_m \end{cases} \quad (01)$$

Обоснование выражение (01) подтверждается условием, что возведение величин  $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_m$ , в степень  $m$  приводит к единственному результату, определяемому величиной  $A$ . Каждое значение  $a_i$  определяется по формуле Муавра. Данную концепцию, концепцию Муавра, назовём *концепцией определённости*. Под определённостью понимается одновариантная конкретная многозначность, содержащая в своём составе  $m$  значений.

Необходимость решения практических задач ставит нас иногда в такие условия, когда требуется выборочно определить некоторое индивидуальное значение  $a_i$  или группу значений при заданной величине  $A$ . В данном случае выражение (01) должно нами рассматриваться в смысле произвольности, в смысле неопределённости. При такой постановке вопроса конкретная цель решения задачи сужается, а многовариантность решения увеличивается. Действительно, при возведении в дробную степень фактор незнания, *фактор неопределённости* должен превалировать. Под *неопределённостью* понимается возможность существования любого однозначного решения (из заданной совокупности (01) ) или существования нескольких групп чисел одновременно. Надо полагать, решение в смысле неопределённости является более общим, нежели решение в смысле определённости.

Нельзя считать, что концепция неопределённости, отвергает концепцию определённости. Наоборот, концепция определённости является базовой для

концепции *неопределённости*. Обе концепции должны существовать подобно тому, как существуют понятия “определённый интеграл” и “неопределённый интеграл”. *Концепция неопределённости* предусматривает *логически обоснованную многовариантность решений*, этим отличается от концепции определённости.

Поясним концепцию неопределённости примерами. Например, если  $A=a^2$ , то неопределённость  $A^{\frac{1}{2}}$  приводит к трём вариантам решений:

$$A^{\frac{1}{2}} = (a^2)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} a \\ -a \\ \pm a \end{cases} \quad (02)$$

Например, если  $A=a^3$ , то неопределённость  $A^{\frac{1}{3}}$  приводит к семи вариантам решений:

$$A^{\frac{1}{3}} = (a^3)^{\frac{1}{3}} = \begin{cases} a \\ -0.5(1+i\sqrt{3})a \\ -0.5(1-i\sqrt{3})a \\ \begin{cases} a \\ -0.5(1+i\sqrt{3})a \end{cases} \\ \begin{cases} a \\ -0.5(1-i\sqrt{3})a \end{cases} \\ \begin{cases} -0.5(1+i\sqrt{3})a \\ -0.5(1-i\sqrt{3})a \end{cases} \\ \begin{cases} a \\ -0.5(1+i\sqrt{3})a \\ -0.5(1-i\sqrt{3})a \end{cases} \end{cases} \quad (03)$$

Выражение (03) предусматривает возможность существования трёх однозначных решений, трёх двузначных решений и одного трёхзначного решения. Возведение в куб любого из указанных вариантов решений приводит к единому числу, определяемому величиной  $A=a^3$ .

При возведении числа в степень  $\frac{1}{4}$  возможно 15 вариантов решений. При возведении числа в степень  $\frac{1}{m}$  количество вариантов решений равно:

$$K_m = 2^m - 1. \quad (04)$$

## 2. Возведение в дробную степень переменных величин

Распространение концепции неопределённости на переменные величины, на функции, приводит к квадратичному увеличению количества решений, по сравнению с возведением в дробную степень чисел, постоянных величин. Варианты решений целесообразно комплектовать в матричной форме.

Например, неопределённость  $X^{\frac{1}{2}}$ , где  $X = x^2$ , может быть раскрыта посредством следующей матрицы:

$$X^{\frac{1}{2}} = (x^2)^{\frac{1}{2}} = \left[ \begin{array}{cc|c} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ \hline x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{array} \right] \quad (05)$$

Главными элементами матрицы (05) являются следующие значения:

$$x_{11} = x; \quad x_{22} = -x; \quad x_{33} = \pm x$$

Неопределённость  $X^{\frac{1}{3}}$ , где  $X = x^3$ , может быть раскрыта посредством следующей матрицы:

$$X^{\frac{1}{3}} = (x^3)^{\frac{1}{3}} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|c} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{27} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} & x_{37} \\ \hline x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} & x_{47} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} \\ x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} & x_{65} & x_{66} & x_{67} \\ \hline x_{71} & x_{72} & x_{73} & x_{74} & x_{75} & x_{76} & x_{77} \end{array} \right] \quad (06)$$

Главными элементами матрицы (06) являются следующие значения:

$$x_{11} = x; \quad x_{22} = -0.5(1 + i\sqrt{3})x; \quad x_{33} = -0.5(1 - i\sqrt{3})x; \quad x_{44} = \begin{cases} x \\ -0.5(1 + i\sqrt{3})x \end{cases};$$

$$x_{55} = \begin{cases} x \\ -0.5(1 - i\sqrt{3})x \end{cases}; \quad x_{66} = \begin{cases} -0.5(1 + i\sqrt{3})x \\ -0.5(1 - i\sqrt{3})x \end{cases}; \quad x_{77} = \begin{cases} x \\ -0.5(1 + i\sqrt{3})x \\ -0.5(1 - i\sqrt{3})x \end{cases}$$

В составе матрицы (05) на долю концепции Муавра приходится только один элемент  $x_{33}$ , в составе матрицы (06) – только один элемент  $x_{77}$ .

Выражения (02) и (03) для чисел так же можно представлять в матричной форме, но матрицы будут диагональными. Например, выражение (02) будет представлено следующим образом:



$$A^{\frac{1}{2}} = (a^2)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & \pm a \end{bmatrix} \quad (02)$$

Необычным для матриц (05) и (06) становится появление побочных элементов. Причём побочные элементы должны удовлетворять условиям:

а) для матрицы (05):- при возведении в квадрат каждого элемента  $x_{ik}$  и  $x_{ki}$  должен получаться единственный результат  $x^2$ ;

б) для матрицы (06):-при возведении в куб каждого элемента  $x_{ik}$  и  $x_{ki}$  должен получаться единственный результат  $x^3$ .

Побочные элементы матриц (05) и (06) могут определяться, как результат асимптотического пересечения главных элементов. Поясним сущность асимптотического метода. Предположим, заданы две пересекающиеся линии  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , которые в общем случае могут быть кривыми. Если эти линии принять за асимптоты, то гиперболические линии, привязанные к этим асимптотам, будут выражаться следующими формулами:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) верхняя ветвь} \\ \text{б) нижняя ветвь} \end{array} \right\} \begin{array}{l} f_{12} = \frac{1}{2} \left[ f_1 + f_2 + \sqrt{(f_1 - f_2)^2 + \Delta} \right] \\ f_{21} = \frac{1}{2} \left[ f_1 + f_2 - \sqrt{(f_1 - f_2)^2 + \Delta} \right] \end{array} \quad (07)$$

В формулах (07) параметр  $\Delta$  характеризует степень приближения гиперболы к асимптоте. При  $\Delta=0$  гипербола полностью сливается с асимптотами. На основании (07) определяются побочные элементы матриц (05) и (06):

$$\left. \begin{array}{l} x_{ik} = \frac{1}{2} \left[ x_{ii} + x_{kk} + \sqrt{(x_{ii} - x_{kk})^2} \right] \\ x_{ki} = \frac{1}{2} \left[ x_{ii} + x_{kk} - \sqrt{(x_{ii} - x_{kk})^2} \right] \end{array} \right\} \quad (08)$$

Если аргумент  $x$  не является комплексной величиной, то знак радикала в формуле (08) можно заменить на знак модуля, на знак абсолютной величины:

$$\left. \begin{array}{l} x_{ik} = \frac{1}{2} (x_{ii} + x_{kk} + |x_{ii} - x_{kk}|) \\ x_{ki} = \frac{1}{2} (x_{ii} + x_{kk} - |x_{ii} - x_{kk}|) \end{array} \right\} \quad (09)$$

### 3. Анализ матрицы (05)

В данной матрице 4 элемента однозначные, один элемент двухзначный и 4 элемента смешанные. По формулам (09) определяем:

а) побочные однозначные элементы:

$$\left. \begin{aligned} x_{12} &= \frac{1}{2}(x - x + |x + x|) = |x| \\ x_{21} &= \frac{1}{2}(x - x - |x + x|) = -|x| \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

б) побочные смешанные элементы:

$$\left. \begin{aligned} x_{13} &= \frac{1}{2}(x \pm x + |x \mp x|) \\ x_{31} &= \frac{1}{2}(x \pm x - |x \mp x|) \\ x_{23} &= \frac{1}{2}(-x \pm x + |x \pm x|) \\ x_{32} &= \frac{1}{2}(-x \pm x - |x \pm x|) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

На рис. №1 изображены графики функций  $x_{13}$ ,  $x_{31}$ ,  $x_{23}$ ,  $x_{32}$ , которые построены на основании формул (11).

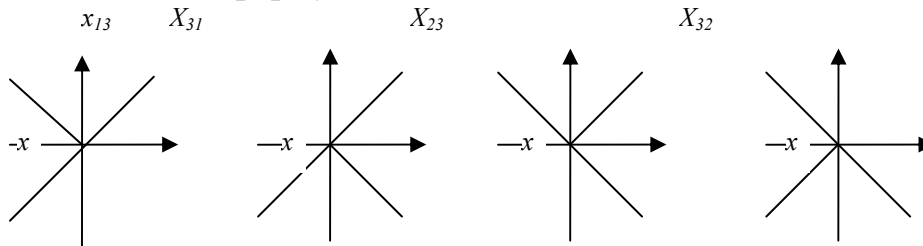


рис.1

#### 4. Анализ матрицы (06)

В данной матрице 9 элементов однозначные, 9 элементов двухзначные, один элемент трёхзначный, остальные 30 элементов смешанные. Для удобства пользования формулами (08) и (09) двухзначные главные элементы нужно представить посредством следующих выражений:

$$\left. \begin{aligned} x_{44} &= \frac{1}{2}[x_{11} + x_{22} \pm (x_{11} - x_{22})] = \frac{x}{2} \left( \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \right); \\ x_{55} &= \frac{1}{2}[x_{11} + x_{33} \pm (x_{11} - x_{33})] = \frac{x}{2} \left( \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3 - i\sqrt{3}}{2} \right); \\ x_{66} &= \frac{1}{2}[x_{22} + x_{33} \pm (x_{22} - x_{33})] = -\frac{x}{2}(1 \pm i\sqrt{3}). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Трёхзначный главный элемент  $x_{77}$  можно представить следующей формулой:

$$x_{77} = \frac{1}{2}[x_{11} + x_{66} \pm (x_{11} - x_{66})] \quad (13)$$

С использованием формул (09) получаем выражения для побочных однозначных элементов:

$$\left. \begin{aligned} x_{12} &= \frac{1}{4} [x(1 - i\sqrt{3}) + |x|(3 + i\sqrt{3})] \\ x_{21} &= \frac{1}{4} [x(1 - i\sqrt{3}) - |x|(3 + i\sqrt{3})] \\ x_{13} &= \frac{1}{4} [x(1 + i\sqrt{3}) + |x|(3 - i\sqrt{3})] \\ x_{31} &= \frac{1}{4} [x(1 + i\sqrt{3}) - |x|(3 - i\sqrt{3})] \\ x_{23} &= -\frac{1}{2} (x - |x|i\sqrt{3}) \\ x_{32} &= -\frac{1}{2} (x + |x|i\sqrt{3}) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

С использованием формул (09) и (12) получаем выражения для побочных двухзначных элементов:

$$\left. \begin{aligned} x_{45} &= \frac{1}{4} [x(1 \pm 3) + |x|(-1 \pm 1)i\sqrt{3}] \\ x_{54} &= \frac{1}{4} [x(1 \pm 3) - |x|(-1 \pm 1)i\sqrt{3}] \\ x_{46} &= \frac{1}{8} [x(-1 \mp 3 - i\sqrt{3} \mp 3i\sqrt{3}) + |x|(3 \mp 3 - i\sqrt{3} \pm i\sqrt{3})] \\ x_{64} &= \frac{1}{8} [x(-1 \mp 3 - i\sqrt{3} \mp 3i\sqrt{3}) - |x|(3 \mp 3 - i\sqrt{3} \pm i\sqrt{3})] \\ x_{56} &= \frac{1}{8} [x(-1 \mp 3 + i\sqrt{3} \pm 3i\sqrt{3}) + |x|(3 \mp 3 + i\sqrt{3} \mp i\sqrt{3})] \\ x_{65} &= \frac{1}{8} [x(-1 \mp 3 + i\sqrt{3} \pm 3i\sqrt{3}) - |x|(3 \mp 3 + i\sqrt{3} \mp i\sqrt{3})] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Из анализа формул (15) можно установить, что  $x_{45}$ ,  $x_{54}$ ,  $x_{46}$ ,  $x_{64}$ ,  $x_{56}$ ,  $x_{65}$ , приобретают следующие значения при различных знаках:

При знаке	$x_{45}$	$x_{54}$	$x_{46}$	$x_{64}$	$x_{56}$	$x_{65}$
Верхний знак +,-	$x_{11}$	$x_{11}$	$x_{22}$	$x_{22}$	$x_{33}$	$x_{33}$
Нижний знак -,+	$x_{32}$	$x_{23}$	$x_{13}$	$x_{31}$	$x_{12}$	$x_{21}$

При определении побочных смешанных элементов так же следует пользоваться аналогичными таблицами и формулами (09); (12); (13).

### 5. Анализ функции $Y = x^{\frac{1}{2}}$

Матричная форма раскрытия неопределённости должна выглядеть следующим образом:

$$Y = x^{\frac{1}{2}} = \left[ \begin{array}{cc|c} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ \hline y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{array} \right] \quad (16)$$

Для установления главных элементов матрицы (16) обратимся к графику функции  $Y = x^{\frac{1}{2}}$ , который изображён на рис.2. Может возникнуть ошибочное предположение, что главными элементами будут являться функции  $Y_{11} = \sqrt{x}$ ,  $Y_{22} = -\sqrt{x}$ . По рис.2 видно, что у этих функций не может быть асимптотического пересечения, следовательно, они не могут быть главными элементами. Поэтому в качестве главных элементов следует принять следующие функции:

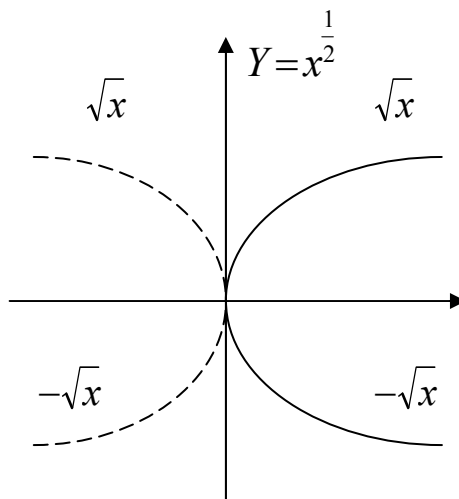


Рис.2

$$y_{11} = \frac{|x|}{x} \sqrt{x}; \quad y_{22} = -\frac{|x|}{x} \sqrt{x}; \quad y_{33} = \pm \sqrt{x}.$$

По формулам (09) определяются побочные однозначные элементы:

$$y_{12} = \sqrt{x}; \quad y_{21} = -\sqrt{x}$$

Побочные элементы  $y_{13}$ ,  $y_{31}$ ,  $y_{23}$ ,  $y_{32}$  определяются также по формулам (09), их графики изображены на рис.3. Матрица (16) приобретает следующее очертание:

$$Y = x^{\frac{1}{2}} = \left[ \begin{array}{cc|c} \frac{|x|}{x} \sqrt{x} & \sqrt{x} & y_{13} \\ -\sqrt{x} & -\frac{|x|}{x} \sqrt{x} & y_{23} \\ \hline y_{31} & y_{32} & \pm \sqrt{x} \end{array} \right] \quad (16)$$

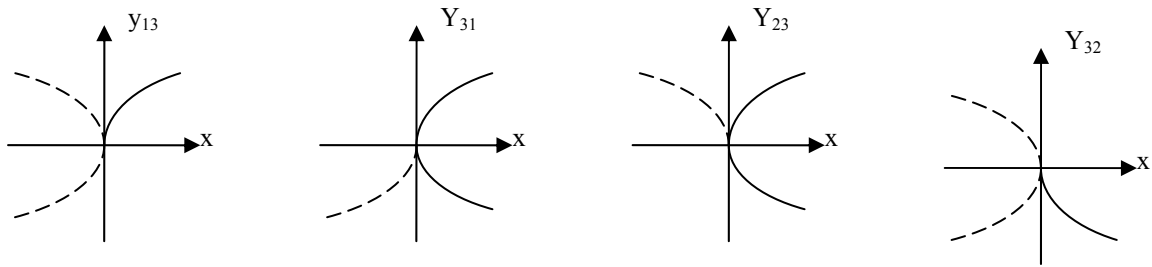


Рис.3

## 6. Заключительные выводы

На основании анализа матриц (05), (06) и (16) устанавливается общая закономерность: многозначная степенная функция  $X^{\frac{1}{m}}$  будет иметь  $K_m^2$  решений, где  $K_m$  – число, определяемое на основании (04). Причём в составе  $K_m^2$  значений содержится  $m^2$  однозначных решений. При возведении в степень  $m$  любой из полученных однозначных функций или любой группы функций должен получиться единственный результат  $X$ .

Из всей группы элементов матриц типа (05) и (06) для нас наибольший интерес представляют побочные элементы, которые имеют в своём составе особые точки переломов или стыковки отростков ветвей. Именно в этом состоит их достоинство. Формулы (08) и (09), с помощью которых устанавливаются аналитические выражения побочных элементов, констатируют вывод о том, что особые точки переломов, скачков, сопряжений имеют степенную природу происхождения. Таким образом, на базе использования побочных элементов матриц типа (05) и (06) может быть построена степенная теория сплайнов. Функции, которые получаются на основании формул (08), (09), (10), (11), (14), (15), могут подвергаться действиям дифференцирования и интегрирования по правилам обычных элементарных функций.

Идея о практическом применении кусочных функций не является новой. Существует достаточно обширная литература по теории сплайнов. Сплайнами называют функции, которые склеены из кусков многочленов. В качестве примера назовём книгу "Сплайны в вычислительной математике" [1]. В данной книге приводится перечень литературы из 180 авторов по теории сплайнов. Сплайны наиболее широкое применение получили за рубежом, это видно по фамилиям авторов. Отличительная особенность теоретических изысканий в области теории сплайнов сводится к тому, что дифференцирование и интегрирование многокусочных функций производится исключительно численными методами.

В противовес выше упомянутой теории сплайнов автором в статье [2] предложен такой метод формирования кусочных функций, который бы

позволял производить дифференцирование и интегрирование кусочных функций аналитическими методами. Идея состояла в том, чтобы точкам стыковки кусочных элементов придать степенную трактовку. По сути дела была использована формула (10) для побочного элемента матрицы (05). Степенная версия образования кусочно-непрерывных функций была также апробирована в статьях [3],[4], автора. В данных статьях, благодаря степенной теории сплайнов, на конкретных примерах показано, что многие задачи в области теоретической механики, в области строительной механики можно решать принципиально по-новому и с большим эффектом, по сравнению с традиционными способами.

На основании анализа статей [2], [3], [4] можно делать далеко идущие выводы фундаментального характера. Например, возникает необходимость пересмотра теоремы о неопределённом интегрировании. В более общем варианте неопределённое интегрирование должно производиться по следующей формуле:

$$\int f(x)dx = F(x) + E_f(x) + E(x), \quad (17)$$

где  $F(x)$  – первообразная функция;

$f(x)$  – подинтегральная функция;

$E_f(x)$  – ступенчатая функция, зависящая от функций  $f(x)$  и  $F(x)$ , призвана компенсировать скачки, если таковые имеются у функции  $F(x)$ ;

$E(x)$  – ступенчатая функция, вводимая взамен константы  $C$  и зависящая от внешних конкретных условий.

Автор надеется, что концепция неопределённости при анализе степенных функций вида  $X^{\frac{1}{m}}$  и образование на её базе побочных элементов создают благоприятную базу для дальнейших научных поисков.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.Б.Стечкин, Ю.Н.Субботин. “Сплаины в вычислительной математике”. Изд-во “Наука”, Москва, 1976г.
2. П.А.Новиков. “Задание кусочно-непрерывных функций и действия над ними”. Учёные записки УлГУ, выпуск 2, Ульяновск, 2000г.
3. П.А.Новиков. “Замена условий равновесия статики уравнениями поля”. Учёные записки УлГУ, выпуск 1, Ульяновск, 2004г.
4. П.А.Новиков. “Уравнения поля при расчёте балок на упругих опорах” Сборник “Актуальные вопросы промышленности и прикладных наук”, УлГТУ, Ульяновск, 2004г.

# РАСЧЕТ НЕСВОБОДНЫХ РАМ ПО МЕТОДУ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ

*П. А. Новиков*

*Расчетная схема рамы рассматривается как сеть, в которой по определенным правилам растекаются усилия и деформации. При этом используются аналогии с электрическими и гидравлическими системами.*

*В этом состоит принципиальное отличие метода пропорциональности от метода сил и метода деформации.*

*В расчетах используются разные коэффициенты пропорциональности и матрицы влияния, пригодные для любых вариантов и комбинаций постоянных и временных нагрузок. Исключается громоздкая процедура составления и решения каких-бы-то ни было систем уравнений.*

## 1. Общие соображения

Метод пропорциональности является альтернативой двум классическим методам: методу сил и методу деформаций. Несмотря на то, что эти два метода занимают монопольное значение в расчетах статически неопределимых стержневых систем, следует отметить два недостатка этих методов:

1. Необходимость решения систем уравнения. Вследствие этого скрывается кинематическая картина передачи усилий и деформаций по стержневой системе. Расчет, вследствие сложности и малопонятности, становится уделом для узкого круга специалистов.

2. Неудобство расчетов на совместное действие постоянных и временных нагрузок. Для каждого варианта сочетаний постоянных и временных нагрузок требуется повторить решение системы уравнений.

Метод пропорциональности выигрывает перед методом сил и методом деформаций благодаря простоте и понятности, а также благодаря снижению трудоемкости расчета.

Метод пропорциональности предусматривает использование матриц влияния, инвариантных к внешним нагрузкам. Данные матрицы являются минимально необходимыми и достаточными для расчета заданной рамы на любые нагрузки. Идея применения таких матриц изложена в статье [1] автора. Расчет несвободных рам может осуществляться с использованием матриц типа  $\alpha$  или типа  $\kappa$ . Вычисление элементов матриц  $\alpha$  и  $\kappa$  предусматривается производить на основании следствий, вытекающих из закона пропорциональности. Метод пропорциональности предусматривает широкое использование в расчетах коэффициентов пропорциональности. К числу коэффициентов пропорциональности относятся также моментные и угловые фокусные отношения. Фокусные отношения – это одно из проявлений всеобъемлющего закона пропорциональности. В этом смысле метод

пропорциональности можно рассматривать как дальнейшее развитие метода фокусов.

Было множество публикаций по использованию фокусных отношений в расчетах стержневых систем. Наиболее обстоятельный расчет рам с использованием фокусных отношений изложен в книге Б.Н. Жемочкина [2]. Однако, научная общественность не выявила потенциальных возможностей в дальнейшем развитии методов фокусов. В последнее время метод фокусов, как обособленный метод расчета рам, подвергся необоснованному забвению. Например, в учебнике по строительной механике [3] метод фокусов даже не упоминается

В науке не всегда предоставляется возможность показать, что наука развивается не в правильном направлении. Для этого прибегнем к методу аналогий. В электротехнике объектом рассмотрения является электрическая сеть; в гидравлике – гидравлическая сеть; в теплотехнике – теплотехническая сеть. В строительной механике расчётная схема рамы также может рассматриваться как сеть, обладающая стационарными упругими свойствами; сеть, в которой по своим законам растекаются усилия и деформации. Расчёт электрических, гидравлических, теплотехнических сетей обходится без решения пресловутых систем уравнений. Автор данной статьи готов показать, что при расчёте рамы также не обязательно и нецелесообразно прибегать к решению системы уравнений.

## 2. Анализ упругих свойств рамы

Предположим, задана рама, изображённая на рис.1. Заданы геометрические размеры и относительные погонные жёсткости стоек и ригелей.

Требуется установить упругие характеристики узлов, стержней и всей рамы в целом. Если к узлу 1 будет приложен момент  $M_1$ , то на основании закона пропорциональности должна существовать пропорциональная зависимость между углом поворота  $\varphi_1$  и моментом  $M_1$ :

$$\varphi_1 = \psi_1 \cdot M_1 \quad (a)$$

Если будет найден способ быстрого определения коэффициента  $\psi_1$ , то будет решена проблема избавления от необходимости решать систему уравнений метода сил или метода деформаций. Назовём коэффициент  $\psi_1$  – коэффициентом податливости узла 1.

В результате действия момента  $M_1$  на концах стержней 12, 14, 17, прилегающих к узлу 1, возникнут реактивные уравновешивающие моменты  $M_{12}$ ,  $M_{14}$ ,  $M_{17}$ . Причем, опять на основании закона пропорциональности, должны существовать равенства:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \psi_{12} \cdot M_{12} \\ \varphi_1 &= \psi_{14} \cdot M_{14} \\ \varphi_1 &= \psi_{17} \cdot M_{17} \end{aligned} \right\}, \quad (a)$$



где:  $\psi_{12}, \psi_{14}, \psi_{17}$  – коэффициенты податливости стержней 12, 14, 17 со стороны узла 1.

Учитывая, что  $M_1 = M_{12} + M_{14} + M_{17}$ , на основании выражений (а) получаем зависимость:

$$\frac{1}{\psi_1} = \frac{1}{\psi_{12}} + \frac{1}{\psi_{14}} + \frac{1}{\psi_{17}} \quad (б)$$

Преобразовывая выражение (б), получаем зависимость коэффициента податливости узла от коэффициентов податливости стержней:

$$\psi_1 = \frac{1}{\frac{1}{\psi_{12}} + \frac{1}{\psi_{14}} + \frac{1}{\psi_{17}}} = \frac{1}{\sum \frac{1}{\psi_{in}}} \quad (1)$$

Следует отметить, что коэффициент податливости  $\psi_{17}$  определяется величиной  $\psi_{17} = \frac{1}{4i_1}$ . Если бы узел 7 имел шарнирное закрепление, то требовалось бы принять  $\psi_{17} = \frac{1}{3i_1}$ . Следовательно, для стержней 12 и 14 можно принять:

$$\psi_{12} = \frac{1}{\mathcal{J}_{12}i_{12}}; \psi_{14} = \frac{1}{\mathcal{J}_{14}i_{14}} \quad (2)$$

Назовём коэффициент  $\mathcal{J}$  коэффициентом жёсткости. Коэффициент  $\mathcal{J}$  может изменяться в пределах от 3-х до 4-х, имеет значение фокусного коэффициента, хотя никаким фокусным отношением не является. После подстановки формул (2) в формулу (1) получаем:

$$\psi_1 = \frac{1}{\mathcal{J}_{12}i_{12} + \mathcal{J}_{14}i_{14} + \mathcal{J}_{17}i_{17}} = \frac{1}{\sum \mathcal{J}_{in}i_{in}} \quad (3)$$

Угол поворота  $\varphi_1$  может также определяться по известной формуле (в соответствии с графо-аналитическим методом):

$$\varphi_1 = \frac{M_{12}\ell_{12}}{3EJ} + \frac{M_{21}\ell_{12}}{6EJ}$$

Преобразуем данное выражение, переходя на масштаб приведённых и относительных жёсткостей:

$$\varphi_1 = \frac{M_{12}}{3i_{12}} + \frac{M_{21}}{6i_{12}} \quad (в)$$

В выражение (в) подставляем  $M_{21} = -\frac{M_{12}}{K_{12}^M}$ , где  $K_{12}^M$  – правое моментное фокусное отношение. После преобразований получаем:

$$\varphi_1 = \frac{2K_{12}^M - 1}{6K_{12}^M} \cdot \frac{M_{12}}{i_{12}} \quad (г)$$

На основании (а) и (2):

$$\varphi_1 = \psi_{12} M_{12} = \frac{M_{12}}{\mathcal{K}_{12} i_{12}} \quad (д)$$

Сопоставляя (г) и (д), находим выражение для коэффициента жёсткости:

$$\mathcal{K}_{12} = \frac{6K_{12}^M}{2K_{12}^M - 1} \quad (4)$$

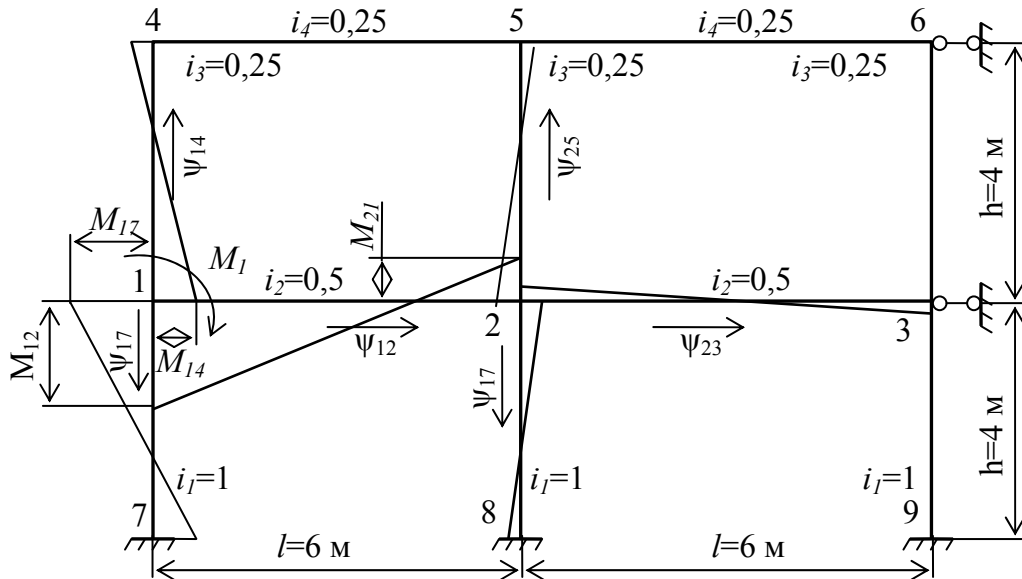


Рис. 1.

На основании (4) получаем выражение для моментного фокусного отношения:

$$K_{12}^M = \frac{\mathcal{K}_{12}}{2(\mathcal{K}_{12} - 3)}. \quad (5)$$

Известно, что между моментным и угловым фокусными отношениями существует следующая взаимосвязь:

$$K_{12}^\varphi = \frac{2K_{12}^M - 1}{K_{12}^M - 2}. \quad (6)$$

Решая совместно (5) и (6), находим выражение для углового фокусного отношения:

$$K_{12}^\varphi = \frac{2}{4 - \mathcal{K}_{12}}. \quad (7)$$

Проанализируем, как осуществляется влияние момента \$M\_1\$ на другие узлы. В узле 2 стержень 12 является активным, так как передает нагрузку от узла 1, а стержни 23, 25, 28 являются реактивными, так как воспринимают

передаваемую нагрузку. На основании закона пропорциональности существуют следующие пропорциональные зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= \psi_{2-1} \cdot M_{21} \\ \varphi_2 &= \psi_{23} \cdot M_{23} \\ \varphi_2 &= \psi_{25} \cdot M_{25} \\ \varphi_2 &= \psi_{28} \cdot M_{28} \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

где:  $\psi_{2-1}$  – неполный коэффициент податливости узла 2;

$\psi_{23}, \psi_{25}, \psi_{28}$  – коэффициенты податливости стержней 23, 25, 28.

Учитывая, что  $M_{21} = M_{23} + M_{25} + M_{28}$ , на основании системы (e) получаем выражение для неполного коэффициента податливости узла 2:

$$\psi_{2-1} = \frac{1}{\frac{1}{\psi_2} - \frac{1}{\psi_{21}}} = \frac{1}{\frac{1}{\psi_{23}} + \frac{1}{\psi_{25}} + \frac{1}{\psi_{28}}} = \frac{1}{\mathcal{J}_{23}i_{23} + \mathcal{J}_{25}i_{25} + \mathcal{J}_{28}i_{28}} \quad (8)$$

Для каждого узла несвободной рамы, в котором стыкуются четыре стержня, характерны один полный коэффициент податливости узла и четыре неполных коэффициента податливости.

Поворот узла 2 окажет влияние на соседние узлы 3, 5, 8. Затем передача влияния будет происходить на последующие узлы. При наличии замкнутых контуров определение влияния от узла к узлу можно производить бесконечно. Но по мере перехода к последующему узлу вычисляемая нами поправка настолько уменьшается, что практически нет никакого смысла обходить замкнутый контур даже один раз. Практически достаточно ограничиваться тремя переходами.

Из сопоставления выражений (a) и (e) можно получить следующее важное следствие:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\psi_{12}M_{12}}{\psi_{2-i}M_{21}} = -K_{12}^\varphi = -\frac{\psi_{12}}{\psi_{2-i}} K_{12}^M.$$

В данное выражение подставляем значение  $K_{12}^M$  по формуле (5), значение  $K_{12}^\varphi$

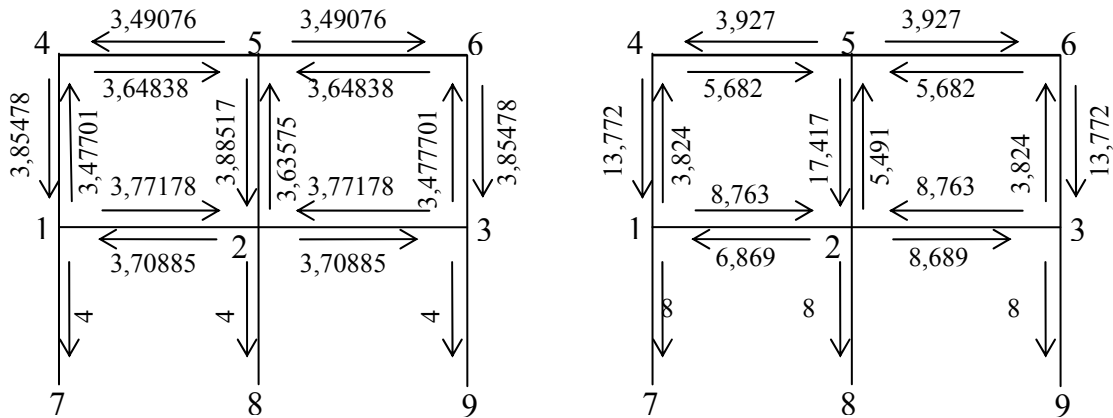
по формуле (7), заменяем выражения  $\psi_{2-i} = \frac{1}{\sum \mathcal{J}_{2n} \cdot i_{2n}}$  и  $\psi_{12} = \frac{1}{\mathcal{J}_{12} \cdot i_{12}}$ . После

преобразований получаем важную формулу для определения коэффициента жесткости в функции от предшествующих коэффициентов жесткости:

$$\mathcal{J}_{12} = 4 \frac{3 + \sum \mathcal{J}_{2n} \frac{i_{2n}}{i_{12}}}{4 + \sum \mathcal{J}_{2n} \frac{i_{2n}}{i_{12}}}. \quad (9)$$

Данная формула является исходной, ключевой в деле формирования упругой характеристики рамы. По формуле (9) последовательно вычисляется левые и





б) коэффициенты жесткости Рис. 2. в) угловые фокусные отношения

Перед вычислением элементов матрицы  $\alpha$ , определим коэффициенты жесткости по формуле (9). Значение этих коэффициентов показаны на рис. 2 б. По формуле (3) определяем коэффициенты податливости узлов, которые в близком приближении, являются главными элементами матрицы  $\alpha$ :

$$\alpha_{11} = \alpha_{33} = \psi_1 = \frac{1}{3,77178 \cdot 0,5 + 3,47701 \cdot 0,25 + 4 \cdot 1} = 0,14804,$$

$$\alpha_{22} = \psi_2 = \frac{1}{2 \cdot 3,70885 \cdot 0,5 + 3,63575 \cdot 0,25 + 4 \cdot 1} = 0,11604,$$

$$\alpha_{44} = \alpha_{66} = \psi_4 = \frac{1}{3,85478 \cdot 0,25 + 3,64838 \cdot 0,25} = 0,5329,$$

$$\alpha_{55} = \psi_5 = \frac{1}{2 \cdot 3,49076 \cdot 0,25 + 3,88517 \cdot 0,25} = 0,3681.$$

Вследствие наличия замкнутых контуров вычисленные значения главных элементов, строго говоря, являются приближенными. Прежде, чем произвести анализ, определим угловые фокусные отношения по формуле (7). Схематично они показаны на рис. 2 в. Определим влияние контура 12541 на величину  $\alpha_{11}$  (контур через узел 6 не берется во внимание из-за большей протяженности):

$$\alpha_{11} = \psi_1 \left( 1 + \frac{1}{K_{12}^{\varphi} \cdot K_{25}^{\varphi} \cdot K_{54}^{\varphi} \cdot K_{41}^{\varphi}} + \frac{1}{K_{14}^{\varphi} \cdot K_{45}^{\varphi} \cdot K_{52}^{\varphi} \cdot K_{21}^{\varphi}} \right) =$$

$$= \psi_1 (1 + 0,00038 + 0,00038) = 0,14804 \cdot 1,00076 = 0,14815.$$

При вычислении  $\alpha_{11}$  по методу деформаций получается:  $\alpha_{11}=0,14816$ . Как видно, ошибка порядка 0,1-0,2 % не стоит того, чтобы учитывать влияния контуров. При вычислении побочных элементов матрицы  $\alpha$  также будем учитывать влияние не более, чем через 3 стержня.

$$\alpha_{21} = -\psi_1 \left( \frac{1}{K_{12}^\varphi} + \frac{1}{K_{14}^\varphi \cdot K_{45}^\varphi \cdot K_{52}^\varphi} \right) = -0,0173, \quad \alpha_{31} = \psi_1 \frac{1}{K_{12}^\varphi \cdot K_{23}^\varphi} = 0,0025,$$

$$\alpha_{41} = -\psi_1 \left( \frac{1}{K_{14}^\varphi} + \frac{1}{K_{12}^\varphi \cdot K_{25}^\varphi \cdot K_{54}^\varphi} \right) = -0,0395, \quad \alpha_{51} = \psi_1 \left( \frac{1}{K_{12}^\varphi \cdot K_{25}^\varphi} + \frac{1}{K_{14}^\varphi \cdot K_{45}^\varphi} \right) = 0,01,$$

$$\alpha_{61} = -\psi_1 \left( \frac{1}{K_{12}^\varphi \cdot K_{23}^\varphi \cdot K_{36}^\varphi} + \frac{1}{K_{12}^\varphi \cdot K_{25}^\varphi \cdot K_{52}^\varphi} + \frac{1}{K_{14}^\varphi \cdot K_{45}^\varphi \cdot K_{56}^\varphi} \right) = -0,0032.$$

Вследствие симметричности рамы вытекают равенства:

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \alpha_{21}; \quad \alpha_{43} = \alpha_{61}; \quad \alpha_{53} = \alpha_{51}; \quad \alpha_{63} = \alpha_{41}.$$

$$\alpha_{42} = \alpha_{62} = \psi_2 \left( \frac{1}{K_{21}^\varphi \cdot K_{14}^\varphi} + \frac{1}{K_{25}^\varphi \cdot K_{54}^\varphi} \right) = 0,0098,$$

$$\alpha_{52} = -\psi_2 \left( \frac{1}{K_{25}^\varphi} + \frac{1}{K_{21}^\varphi \cdot K_{14}^\varphi \cdot K_{45}^\varphi} \right) = -0,0227,$$

$$\alpha_{54} = \alpha_{65} = -\psi_4 \left( \frac{1}{K_{45}^\varphi} + \frac{1}{K_{41}^\varphi \cdot K_{12}^\varphi \cdot K_{25}^\varphi} \right) = -0,1365,$$

$$\alpha_{64} = \psi_4 \frac{1}{K_{45}^\varphi \cdot K_{56}^\varphi} = 0,0239.$$

Вычисленные значения сводим в таблицу:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0,14804 & & & & & \\ -0,0173 & 0,11604 & -0,0173 & & & \\ 0,0025 & -0,0173 & 0,14804 & & & \\ -0,0395 & 0,0098 & -0,0032 & 0,5329 & & \\ 0,01 & -0,0227 & 0,01 & -0,1365 & 0,3681 & \\ -0,0032 & 0,0098 & -0,0395 & 0,0239 & -0,1365 & 0,5329 \end{bmatrix}$$

Остальные элементы устанавливаются на основании симметрии самой матрицы. После вычислений по формуле (10) получаем значения:

$$\varphi_1 = 2,495; \quad \varphi_2 = -1,26172; \quad \varphi_3 = -0,63768;$$

$$\varphi_4 = 7,3696; \quad \varphi_5 = 3,2892; \quad \varphi_6 = -12,8468.$$

Последующий расчет завершается по правилам метода деформаций.

#### 4. Расчет рамы с применением матрицы К

Данный способ рекомендуется использовать для расчета одноярусных рам и неразрезных балок. Предположим, задана рама, изображенная на рис. 3 а, с заданными геометрическими размерами, нагрузками и относительными погонными жесткостями. Для приведения нагрузок к типовому виду загрузки примем условие, что узлы рамы временно защемлены. В узлах

рамы возникнут неуравновешенные моменты, которые определяются следующими величинами (см. рис. 3 б):

$$m_1 = -m_2 = -M_1^{\text{II}} = -M_2^{\text{II}} = 6 \text{ тм}; \quad m_3 = -m_4 = -M_3^{\text{II}} = -M_4^{\text{II}} = 4 \text{ тм};$$

где:  $M_1^{\text{II}}, M_2^{\text{II}}, M_3^{\text{II}}, M_4^{\text{II}}$  – моменты в ригелях рамы (справа и слева от узла), возникшие при условии жесткого защемления концов ригелей.

Канонические уравнения метода пропорциональности, при использовании матрицы К, будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= M_1^{\text{II}} + \kappa_{12,1} \cdot m_1 + \kappa_{12,2} \cdot m_2 + \kappa_{12,3} \cdot m_3 + \kappa_{12,4} \cdot m_4 \\ M_{21} &= M_2^{\text{II}} + \kappa_{21,1} \cdot m_1 + \kappa_{21,2} \cdot m_2 + \kappa_{21,3} \cdot m_3 + \kappa_{21,4} \cdot m_4 \\ M_{23} &= 0 + \kappa_{23,1} \cdot m_1 + \kappa_{23,2} \cdot m_2 + \kappa_{23,3} \cdot m_3 + \kappa_{23,4} \cdot m_4 \\ M_{32} &= 0 + \kappa_{32,1} \cdot m_1 + \kappa_{32,2} \cdot m_2 + \kappa_{32,3} \cdot m_3 + \kappa_{32,4} \cdot m_4 \\ M_{34} &= M_3^{\text{II}} + \kappa_{34,1} \cdot m_1 + \kappa_{34,2} \cdot m_2 + \kappa_{34,3} \cdot m_3 + \kappa_{34,4} \cdot m_4 \\ M_{43} &= M_4^{\text{II}} + \kappa_{43,1} \cdot m_1 + \kappa_{43,2} \cdot m_2 + \kappa_{43,3} \cdot m_3 + \kappa_{43,4} \cdot m_4 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Индексы при коэффициентах влияния обозначают: первая цифра – номер узла, которому передается усилие; первые две цифры – обозначение стержня и направление передачи усилия; третья цифра – номер неуравновешенного момента. Например, коэффициент влияния  $K_{12,1}$  представляет собой момент в стержне 12 со стороны узла 1 от действия  $m_1=1$ . Коэффициент  $K_{12,2}$  представляет собой момент в том же сечении от действия  $m_2=1$ .

В системе уравнений (11) не приводятся данные для моментов в стойках. Поскольку внешние нагрузки не приложены к стойкам, момент в стойках может определяться по разности моментов в ригелях, например:  $M_{15} = -M_{12}$ ;  $M_{26} = M_{21} - M_{23}$ .

Перед вычислением элементов матрицы К производим поэтапно следующие вычисления:

- а) по формуле (9) определяем коэффициенты жесткости (см. рис. 3 в);
- б) по формуле (5) определяем моментные фокусные отношения (см. рис. 3 д);
- в) по формуле (2) определяем коэффициенты податливости стержней (см. рис. 3 г);
- г) по формулам (3) и (8) определяем коэффициенты податливости узлов:

$$\psi_1 = \psi_4 = \frac{1}{1 \cdot 4 + 2 \cdot 3,558} = 0,09; \quad \psi_2 = \psi_3 = \frac{1}{1 \cdot 3 + 2 \cdot 3,333 + 2 \cdot 3,547} = 0,06;$$

$$\psi_{2-1} = \psi_{3-4} = \frac{1}{1 \cdot 3 + 2 \cdot 3,547} = 0,099; \quad \psi_{2-3} = \psi_{3-2} = \frac{1}{1 \cdot 3 + 2 \cdot 3,333} = 0,103.$$

Производим вычисления элементов матрицы К, пользуясь вычисленными значениями коэффициентов податливости узлов и данными из рис. 3 г, д:

$$\begin{aligned}
K_{12,1} &= \frac{\psi_1}{\psi_{12}} = 0,64; & K_{21,1} &= -\frac{K_{12,1}}{K_{12}^M} = -0,201; \\
K_{23,1} &= K_{21,1} \frac{\psi_{2-1}}{\psi_{23}} = -0,141; & K_{32,1} &= -\frac{K_{23,1}}{K_{23}^M} = 0,043; \\
K_{34,1} &= K_{32,1} \frac{\psi_{3-2}}{\psi_{34}} = 0,03; & K_{43,1} &= -\frac{K_{34,1}}{K_{34}^M} = -0,006. \\
K_{12,2} &= -\frac{\psi_2}{\psi_{21}} = -0,4; & K_{12,2} &= -\frac{K_{21,2}}{K_{12}^M} = 0,08; \\
K_{23,2} &= \frac{\psi_2}{\psi_{23}} = 0,4255; & K_{32,2} &= -\frac{K_{23,2}}{K_{23}^M} = -0,131; \\
K_{34,2} &= K_{32,2} \frac{\psi_{3-2}}{\psi_{34}} = -0,09; & K_{43,2} &= -\frac{K_{34,2}}{K_{34}^M} = 0,018.
\end{aligned}$$

Благодаря симметричности рамы существуют антисимметричные равенства:

$$\begin{aligned}
K_{43,4} &= -K_{12,1} = -0,64; & K_{34,4} &= -K_{21,1} = 0,201; & K_{32,4} &= -K_{23,1} = 0,141; \\
K_{23,4} &= -K_{32,1} = -0,043; & K_{21,4} &= -K_{34,1} = -0,030; & K_{12,4} &= -K_{43,1} = 0,006; \\
K_{34,3} &= -K_{21,2} = 0,4; & K_{43,3} &= -K_{12,2} = -0,08; & K_{32,3} &= -K_{23,2} = -0,4255; \\
K_{23,3} &= -K_{32,2} = 0,131; & K_{21,3} &= -K_{34,2} = 0,09; & K_{12,3} &= -K_{43,2} = -0,018;
\end{aligned}$$

Вычисленные значения сводим в таблицу:

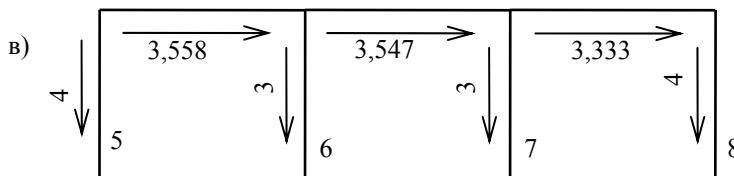
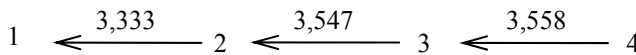
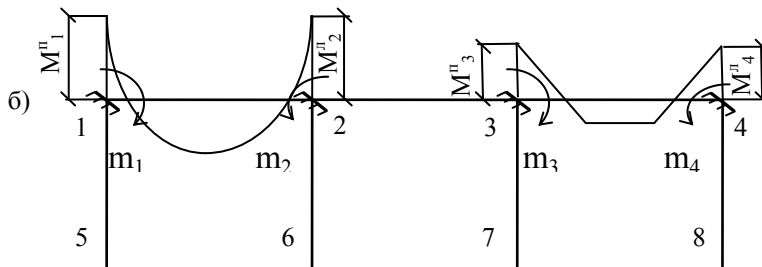
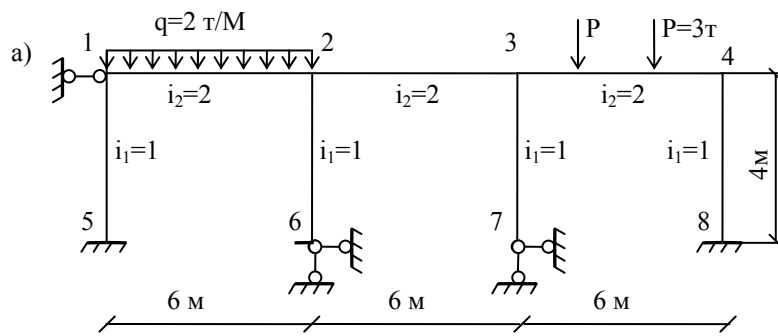
$$K = \begin{bmatrix} 0,64 & 0,08 & -0,018 & 0,006 \\ -0,201 & -0,4 & 0,09 & -0,03 \\ -0,141 & 0,4255 & 0,131 & -0,043 \\ 0,043 & -0,131 & -0,4255 & 0,141 \\ 0,030 & -0,09 & 0,4 & 0,201 \\ -0,006 & 0,018 & -0,08 & -0,64 \end{bmatrix}$$

Данная матрица инвариантна к внешним нагрузкам, то есть она пригодна на любые варианты загрузки. После вычислений по формулам (11) получаем результат:

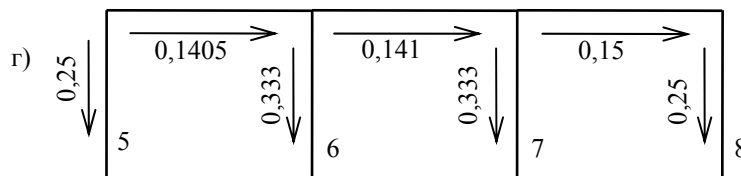
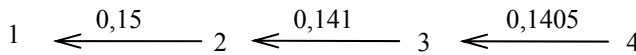
$$M_{12} = -2,952 \text{ тм}; \quad M_{21} = -4,326 \text{ тм}; \quad M_{23} = -2,703 \text{ тм}; \quad M_{32} = -1,222 \text{ тм}; \quad M_{34} = -2,484 \text{ тм}; \\
M_{43} = -1,904 \text{ тм}.$$

При расчёте неразрезных балок на жёстких опорах, матрица  $K$  из прямоугольной превращается в квадратную, с минимальным числом строк, равным количеству неуровновешенных моментов. Отпадает необходимость определять неполные коэффициенты податливости узлов, так как передача усилий от опоры к опоре осуществляется только посредством моментных фокусных отношений.

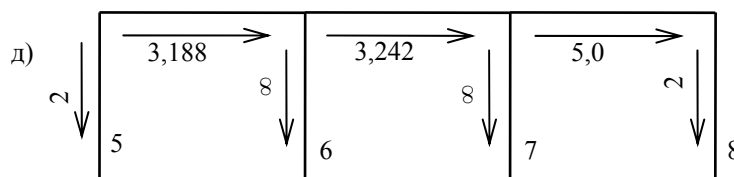
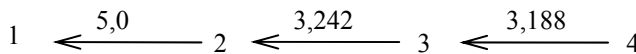




Коэффициент жёсткости



Коэффициенты податливости



Моментные фокусные отношения

Рис. 3.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. П.А.Новиков. "Применение матриц влияния, инвариантных к внешним нагрузкам, для расчёта неразрезных балок и рам". Журнал "Строительная механика и расчёт сооружений", 1975, №1.
2. Б.Н.Жемочкин. "Расчёт рам, М.-Л., Госстройиздат, 1933г.
3. А.В.Дарков, Н.Н.Шапошников. "Строительная механика", И-во "Высшая школа", М.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИБРОАКТИВНОЙ СИСТЕМЫ МОСТОВОГО КРАНА-ШТАБЕЛЕРА С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

*С. В. Поляков*

*Рассматриваются проблемы точности математического описания перемещения грузозахватного устройства мостового крана-штабелера. Разработана математическая модель мостового крана-штабелера, представленная в виде двухмассовой системы с переменным схождение масс, позволяющая учитывать колебания грузозахватного устройства при его двухкоординатном перемещении и переменной жёсткости колонны. Разработана структурная схема управления мостовым краном-штабелером в процессе двухкоординатного движения грузозахватного устройства с двойным активным демпфером его колебаний.*

*Ключевые слова: Математическое моделирование, двухмассовая система, двойной активный демпфер, мостовой кран-штабелер, двухкоординатное перемещение, переменная жёсткость колонны, склад, транспортно-складское оборудование, надёжность, безопасность.*

Среди основных проблем автоматизации технологических процессов, важное место занимает проблема автоматизации транспортно-складских операций.

Необходимость решения подобных задач связана с проблемами повышения производительности труда, с увеличением комфортности и безопасности труда, а также с увеличением срока службы производственного оборудования. В этой связи, чрезвычайно актуальными являются вопросы разработки, модернизации и совершенствования подъёмно-транспортных механизмов, в том числе механизмов, получивших название краны-штабелеры (К-Ш).

На современных предприятиях широчайшее применение получили мостовые К-Ш (Рис. 1) так как они могут обслуживать по 6 – 8 стеллажей и кроме работы в зоне хранения могут выполнять транспортно-складские операции, тем самым исключая применение конвейерных систем в условиях среднего производства. Помимо этого мостовые К-Ш обладают высокой универсальностью в использовании и обладают возможностью укладывать грузы не только в стеллажи, но и в штабеля.

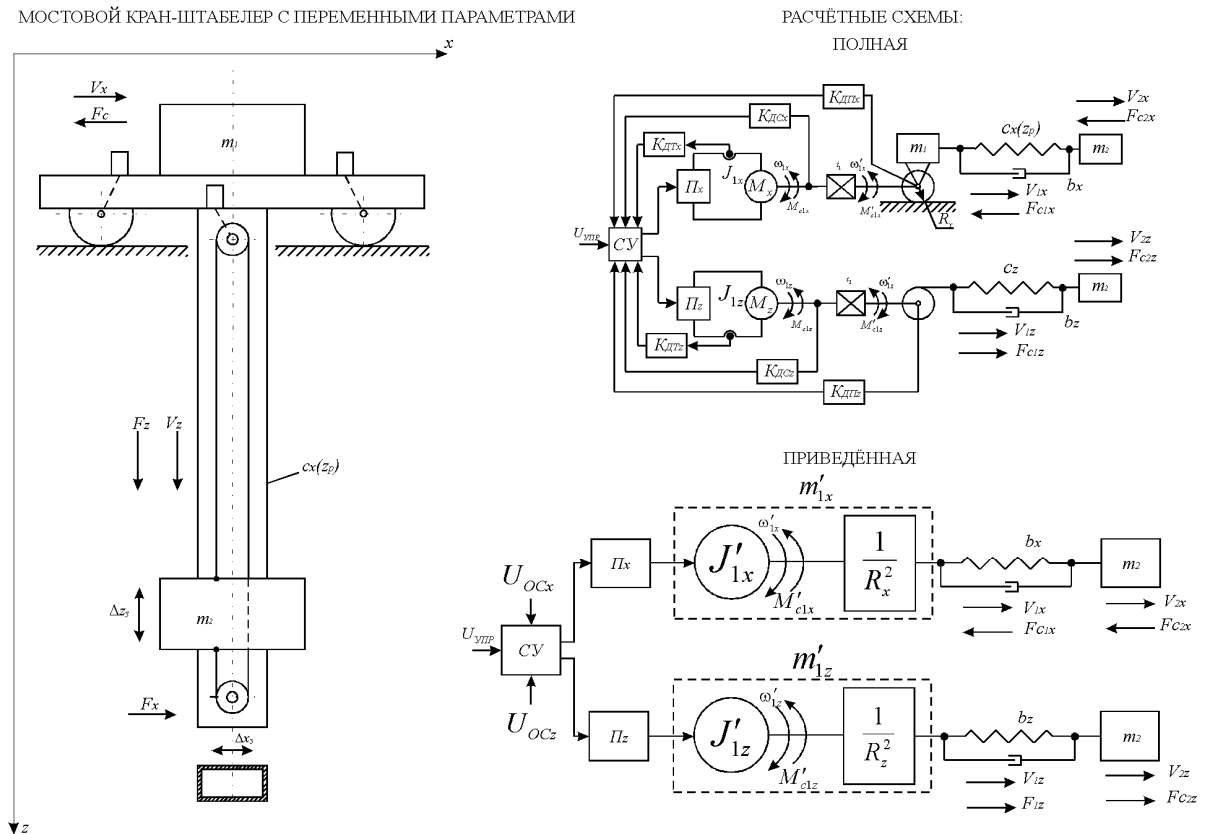


Рис. 1. Схема мостового крана-штабелера

КШ – представляет собой объект повышенной ответственности. Прежде всего, КШ – это подъёмно-транспортный механизм, разрушение или повреждение которого представляет опасность для жизни обслуживающего персонала. Помимо этого, в большинстве случаев КШ– это единственное средство доступа к грузам, находящимся в хранилище, поэтому даже разовые отказы КШ нарушают работу склада, что особенно чувствительно для складов интенсивных производств и технологических линий.

Для избежания подобных отказов и преждевременных разрушений КШ необходимо принимать меры для снижения рывков при пуске и торможении, которые обусловлены электроприводом. Однако качественное управление КШ невозможно без математической модели, максимально точно описывающей его работу.

Существующие математические описания [1, 2, 3, 4] не учитывают двухкоординатного перемещения грузозахватного комплекса [5, 6, 7] с переменной жёсткостью колонны и переменным схождением масс (грузозахватного устройства с мостом).

Для наиболее точного описания этих режимов была разработана соответствующая математическая модель, позволяющая наиболее точно выявлять колебательные составляющие грузозахватного устройства при его перемещении по колонне мостового КШ в процессе движения моста.

Механическая часть мостового крана-штабелера с переменными параметрами математически описана и представлена в виде системы уравнений в операторной форме

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta M_x &= M_x - M_{C_x} \text{sign} V_x = M_x - F_x R_x / i_1; \quad \omega'_{1x} i_1 J'_{1x} = \Delta M_x; \quad J'_{1x} = J_{1x} + m_1 \left( \frac{R_x}{i_1} \right)^2; \\
 \Delta \omega_x &= \omega'_{1x} - \omega_{2x} = \omega'_{1x} - V_x R_x; \quad x' p = \Delta \omega_x R_x; \quad x = x' \quad \text{нпу} \quad x' > \left| \frac{\Delta x_3}{2} \right|; \\
 x &= x' - \frac{\Delta x_3}{2} \quad \text{нпу} \quad x < \frac{\Delta x_3}{2}; \quad -x = -x^{-1} + \frac{\Delta x_3}{2} \quad \text{нпу} \quad |-x| < \frac{\Delta x_3}{2}; \quad F_x = x \cdot c_x(z); \\
 \Delta F_x &= F_x - F_{CTx} \text{sign} V_x - F_{\epsilon Tx} = F_x - F_{CTx} \text{sign} V_x - V_x \epsilon_x; \quad V_x m_2 p = \Delta F_x; \\
 c_x(z) &= \frac{3E}{\frac{\Delta z_p^3}{J_k} + \frac{\Delta z_p^2 L^3}{8J_{\bar{\sigma}} k^2} + \frac{L^3}{128J_{\bar{\sigma z}}}}; \quad \Delta z_p = f(V_z t); \\
 \Delta M_z &= M_z - M_{C_z} \text{sign} V_z = M_z - F_z R_z / i_2; \quad \omega'_{1z} i_2 J'_{1z} = \Delta M_z; \quad J'_{1z} = J_{1z} + m_1 \left( \frac{R_z}{i_2} \right)^2; \\
 \Delta \omega_z &= \omega'_{1z} - \omega_{2z} = \omega'_{1z} - V_z / R_z; \quad z' p = \Delta \omega_z R_z; \quad z = z' \quad \text{нпу} \quad z' > \left| \frac{\Delta z_3}{2} \right|; \\
 z &= z' - \frac{\Delta z_3}{2} \quad \text{нпу} \quad z < \frac{\Delta z_3}{2}; \quad -z = -z^{-1} + \frac{\Delta z_3}{2} \quad \text{нпу} \quad |-z| < \frac{\Delta z_3}{2}; \quad F_z = z \cdot c_z; \\
 \Delta F_z &= F_z - F_{CTz} \text{sign} V_z - F_{\epsilon Tz} = F_z - F_{CTz} \text{sign} V_z - V_z \epsilon_z; \quad V_z m_2 p = \Delta F_z.
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь обозначено:  $J'_{1x}, J'_{1z}$  – приведённые моменты инерции приводов с учётом первой поступательно движущейся массы и редуктора;  $\omega_{2x}, \omega_{2z}$  – скорости вращения колес моста грузозахвата;  $\omega'_{1x} = \omega_{2x}; \omega'_{1z} = \omega_{2z}$ ;  $x', z'$  – перемещения моста и грузозахвата;  $x, z$  – перемещения грузозахвата;  $\Delta x_3, \Delta z_3$  – зазоры в механических приводах;  $F_x, F_z$  – усилия, развиваемые электродвигателями моста и грузозахвата;  $F_{CTx}, F_{CTz}$  – усилия сопротивлений сухого трения моста и грузозахвата;  $F_{\epsilon Tx}, F_{\epsilon Tz}$  – усилия сопротивлений вязкого трения моста и грузозахвата;  $\epsilon_x, \epsilon_z$  – коэффициенты вязкого трения моста и грузозахвата;  $c_x(z)$  – жёсткость мостового крана-штабелера;  $c_z$  – жёсткость цепи привода подъёма грузозахвата;  $V_x$  – скорость передвижения грузозахватного элемента по оси  $x$ ;  $V_z$  – скорость передвижения грузозахватного элемента по оси  $z$ ;  $\Delta z_p$  – переменная длина колонны, определяемая расстоянием по вертикали от нижней точки колонны до головки подтележечного рельса;  $E$  – модуль упругости;  $J_k$  и  $J_{\bar{\sigma}}, J_{\bar{\sigma z}}$  – моменты инерции корневого сечения колонны и среднего сечения балки моста относительно горизонтальной и вертикальной осей;  $L$  – пролёт моста;  $k$  – колея тележки крана.

Далее представлена система уравнений, описывающая двигатели приводов мостового крана-штабелера, рассмотренные на базе двигателей постоянного тока с тиристорным управлением.

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta x(p) = x_3(p) - x'_3(p); \quad W_{PIx}(p) = k_{PIx}; \quad U_{x3}(p) = K_{PIx} \Delta x(p) \leq U_{x3 \max} = \frac{V_{x \max} i_1}{R_x} K_{DCx}; \\
 W_{PCx}(p) = K_{PCx}; \quad U_{PCx}(p) = [U_{x3}(p) - U_{\omega x}(p)] K_{PCx} \leq U_{PCx \max} = M_{x \max} \frac{K_{DTx}}{C_1}; \\
 \Delta U_{Tx}(p) = U_{PCx}(p) - M_x(p) \frac{K_{DTx}}{C_1}; \quad W_{PTx}(p) = \frac{K_{PTx} + T_{PT2x} p}{T_{PT1x} p}; \\
 U_{PTx}(p) T_{PT2x} p = \Delta U_{Px} (K_{PTx} + T_{PT2x} p); \quad U_{PTx}(p) \leq U_{PTx \max} = U_{Ix \max}; \\
 W_{Ix}(p) = \frac{K_{Ix}}{T_{Ix} p + 1}; \quad U_{Яx}(p) = (T_{Ix} p + 1) = U_{PTx} K_{Ix}; \\
 \Delta U_x = U_{Яx} - E_x = U_{Яx} - \omega'_{1x} C_1 i_1; \quad M_x (T_{Яx} p + 1) = \Delta U_x C_1 / r_1; \\
 \Delta z(p) = z_3(p) - z'_3(p); \quad W_{PIz}(p) = k_{PIz}; \quad U_{z3}(p) = K_{PIz} \Delta z(p) \leq U_{z3 \max} = \frac{V_{z \max} i_2}{R_z} K_{DCz}; \\
 W_{PCz}(p) = K_{PCz}; \quad U_{PCz}(p) = [U_{z3}(p) - U_{\omega z}(p)] K_{PCz} \leq U_{PCz \max} = M_{z \max} \frac{K_{DTz}}{C_2}; \\
 \Delta U_{Tz}(p) = U_{PCz}(p) - M_z(p) \frac{K_{DTz}}{C_2}; \quad W_{PTz}(p) = \frac{K_{PTz} + T_{PT2z} p}{T_{PT1z} p}; \\
 U_{PTz}(p) \cdot T_{PT2z} p = \Delta U_{Pz} (K_{PTz} + T_{PT2z} p); \quad U_{PTz}(p) \leq U_{PTz \max} = U_{Iz \max}; \\
 W_{Iz}(p) = \frac{K_{Iz}}{T_{Iz} p + 1}; \quad U_{Яz}(p) = (T_{Iz} p + 1) = U_{PTz} K_{Iz}; \\
 \Delta U_z = U_{Яz} - E_z = U_{Яz} - \omega'_{1z} C_2 i_2; \quad M_z (T_{Яz} p + 1) = \Delta U_z C_2 / r_{2z}.
 \end{aligned} \right\} (2)$$

Здесь обозначено:  $W_{PCx}$ ,  $W_{PCz}$ ,  $W_{PIx}$ ,  $W_{PIz}$  – передаточные звенья регуляторов скорости и положения приводов моста и грузозахвата;  $\Delta x$ ,  $\Delta z$  – рассогласование контуров положения приводов моста и грузозахвата;  $U_{x1}$ ,  $U_{z1}$  – выходные параметры регулирования положений приводов моста и грузозахвата;  $U_{PCx}$ ,  $U_{PCz}$  – выходные параметры регулирования скоростей приводов моста и грузозахвата;  $M_{x \max}$ ,  $M_{z \max}$  – максимальные моменты электродвигателей приводов моста и грузозахвата;  $M_{x \text{ ном}}$ ,  $M_{z \text{ ном}}$  – номинальные моменты электродвигателей приводов моста и грузозахвата;  $C_1$ ,  $C_2$  – электромашинные постоянные электродвигателей приводов моста и грузозахвата;  $\Delta U_{Tx}$ ,  $\Delta U_{Tz}$  – рассогласования контуров тока приводов моста и грузозахвата;  $U_{Яx}$ ,  $U_{Яz}$  – напряжения якорей электродвигателей приводов моста и грузозахвата;  $\Delta U_x$ ,  $\Delta U_z$  – падения напряжений в якорных цепях электродвигателей приводов моста и грузозахвата;  $T_{Яx}$ ,  $T_{Яz}$  – электромагнитные постоянные времени электродвигателей приводов моста и грузозахвата.

С целью уменьшения выявленных колебаний, была разработана система автоматизированного управления (рис. 2) мостовым КШ с активным демпфером.

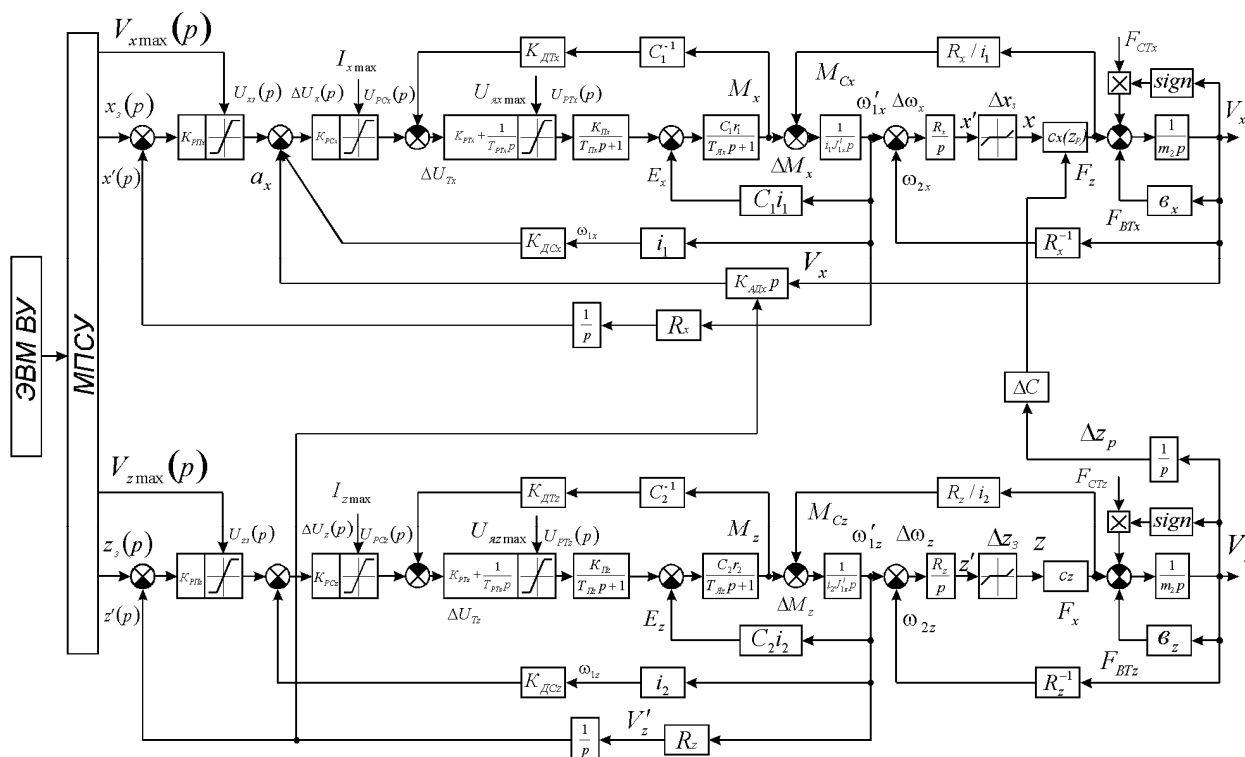
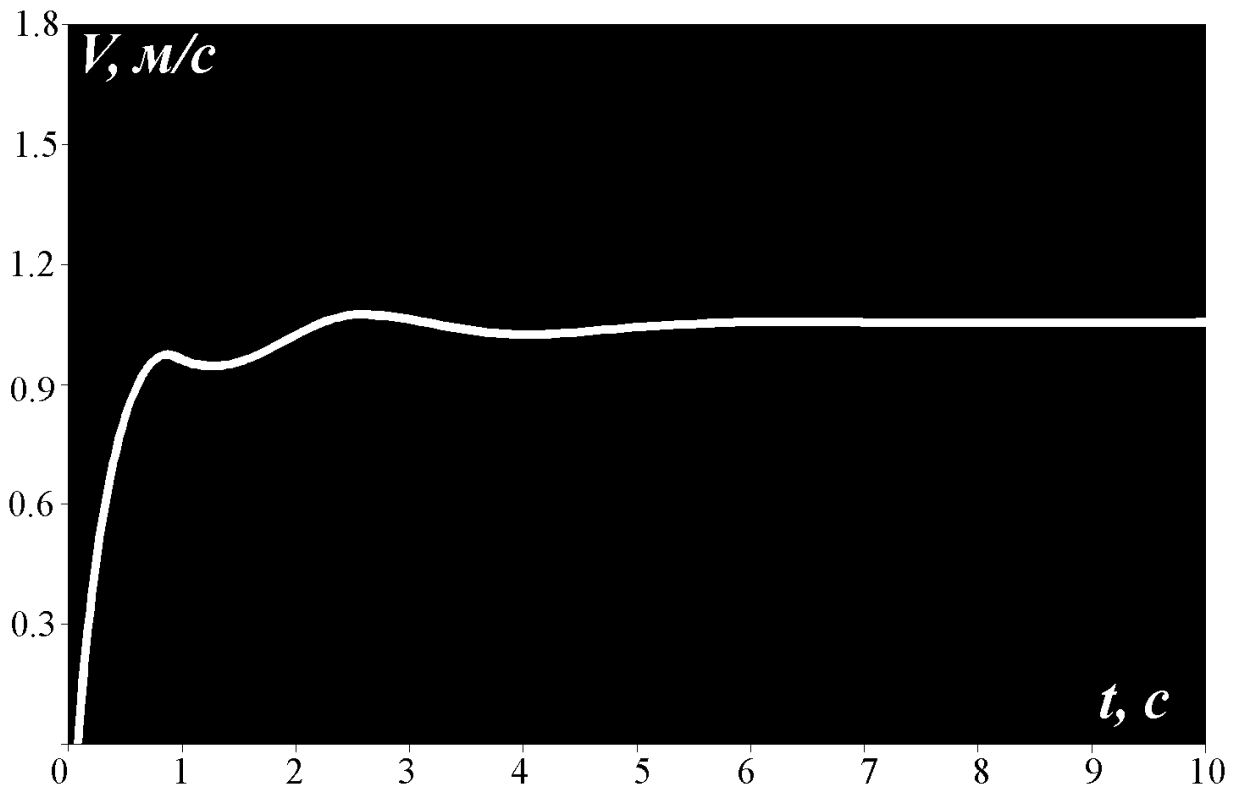


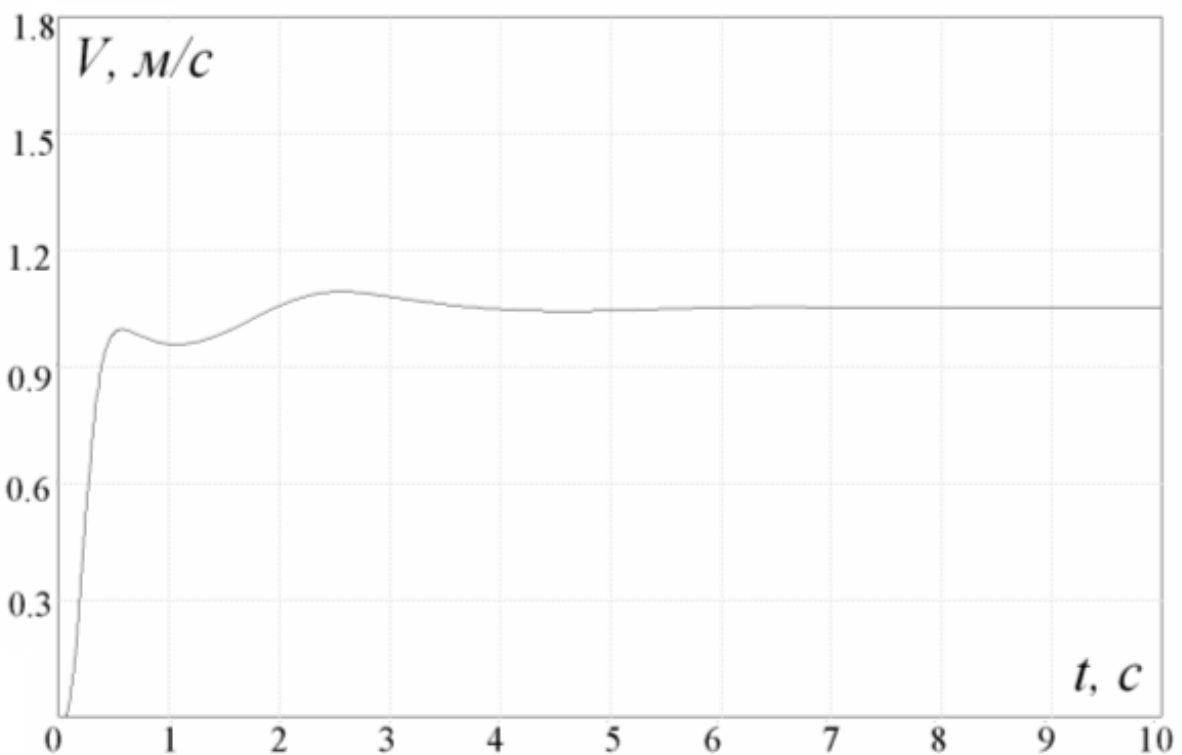
Рис. 2. Структурная схема САУ взаимосвязанным перемещением грузозахватного комплекса с активным демпфером

На основании математической модели и представленной структурной схемы была разработана программа в среде МВТУ 3.6, при помощи которой, а также при помощи натурального физического эксперимента, проведённого на ОАО «АвтоВАЗ», было установлено:

1. Данная математическая модель повышает точность результатов основных параметров мостового КШ (частота, амплитуда, период и время затухания колебаний грузозахватного устройства) на 56 – 62 % по сравнению с известными моделями КШ.
2. Разработанная система автоматизированного управления мостовым КШ, с двухкоординатным перемещением грузозахватного комплекса позволяет повысить качество управления (Рис. 3) и увеличить производительность системы.
3. Разработанная математическая модель даёт возможность введения автоподстройки в канал активного демпфера, что позволяет системе формировать сигнал, адекватный жёсткости колонны на каждом этапе перемещения грузозахватного комплекса по вертикальной оси.



а) График изменения скорости грузозахватного устройства с активным демпфером колебаний при  $\Delta z_p = 7.15 \div 11.15$  м и  $c_x(z_p) = 112100 \div 29400$  Нм, полученный на реальном объекте



б) График изменения скорости грузозахватного устройства с активным демпфером колебаний при  $\Delta z_p = 7.15 \div 11.15$  м и  $c_x(z_p) = 112100 \div 29400$  Нм, полученный на компьютерной модели

Рис. 3. Сравнение экспериментальных графиков.





## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТИПИЗАЦИИ И ПОВТОРНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОЕКТНЫХ ПРОЦЕССОВ

*А. Ф. Похилько, А. А. Масляницын*

*В статье рассмотрен способ фиксации, обобщения и повторного использования информации, получаемой рабочими группами в процессах работы над проектами различных областей применения. Изложены основные положения формальных систем, с помощью которых достигаются вышеозначенные цели. Представлены возможности, условия и ограничения реализации программных систем, использующих предложенные теоретические предпосылки, перечислены возможные сферы применения.*

### 1. Введение

Сохранение, систематизация и повторное использование накопленных знаний, в условиях постоянного увеличения объемов информации, ее усложнения – не теряющая свою актуальность проблемная область.

В области конструкторского проектирования существует масса методов и технологий, позволяющих ускорить, упростить процессы разработки технических объектов, вместе с тем повышая их качество. В этой области имеется весьма широкий класс задач, в которых анализ существующей информации (и/или опыта конструирования) и ее повторное использование – жизненно важная задача.

В настоящее время существует три основные линии программных продуктов для автоматизации означенной деятельности:

- САПР (CAD/CAM/CAE);
- PDM/PLM;
- гибридные системы, в разной степени сочетающие вышеприведенные линейки продуктов.

При этом развитие указанных направлений осуществляется в следующих проблемных областях:

- создание систем расчета для различных классов задач проектирования технических объектов (CAE систем);
- обеспечение обмена проектными данными между САПР различных производителей;
- системное описание готовых технических решений;
- повторное использование типовых конструкторских проектов;
- интеграция специализированных приложений, необходимых конструктору, в единый комплекс на соответствующем автоматизированном рабочем месте;
- организация работы конструкторских групп (в том числе, территориально удаленных друг от друга);

## 2. Системное описание технических объектов

Для решения задачи системного описания готовых технических объектов необходимо так же рассматривать и документировать процессы их проектирования, что показано в работах [3-6].

Разработка и внедрение CALS-технологий (стандарта STEP) обеспечивает возможность частичного или полного решения задач во всех проблемных областях, за исключением задач анализа, повторного использования и организации работы рабочих групп в режиме реального времени [6, 7].

Для системного представления о процессе проектирования технического объекта, необходимо рассматривать совокупность  $\langle O, U, P, S \rangle$  [3], где  $O$  – объект,  $U$  – субъект,  $P$  – процесс и  $S$  – информационная среда проектирования.

Результат проектирования – представление объекта  $O(Gr, Tb, Tx)$  проектирования в форме комплекта технической документации, оговоренной стандартами и включающей в себя графические  $Gr$ , табличные  $Tb$  и текстовые документы  $Tx$ . С системной точки зрения такое представление объекта является целостным. Носителем же представлений о целостности аспектов  $Gr, Tb, Tx$  является субъект  $U$ .

При неавтоматизированном проектировании (среда  $S$  – отсутствует) субъект  $U$ , реализовав в своей интеллектуальной деятельности процесс  $P$ , фиксирует в технической документации полученные решения.

При использовании средств автоматизации, образующих информационную среду  $S$ , процесс  $P$  распределяется между субъектом  $U$  и средой  $S$ , состав и свойства которой определяют степень сохранения в  $S$  представлений о целостности результата проектирования  $O(Gr, Tb, Tx)$ .

С учетом сказанного, можно утверждать, что для системного представления о проектировании технического объекта в информационной среде необходимо выделить следующие механизмы:

- создание технического объекта  $O(Gr, Tb, Tx)$  в среде  $S$  и композиция его графических, табличных и текстовых аспектов в виде технической документации;
- фиксация и представление последовательности состояний объекта и событий, приводящих к целенаправленному переходу между состояниями.

Если первый механизм реализован на вполне удовлетворительном уровне в рамках стандарта STEP, то со вторым возникает довольно много вопросов, теоретическая часть которых решается путем построения каскада формальных систем, основные положения которых приведены ниже.

### **3. Формализация управления автоматизированными распределенными процессами проектной деятельности**

Построение формальных систем преследует своей целью решение следующих задач:

- фиксация причинно-следственных и логических связей между проектными стадиями, процедурами и операциями;
- сохранение эмпирической информации (опыта проектантов), заключенной на синергетическом уровне фиксации проектных связей;
- обязательно введение автоматических абстракций, классификаций и обобщений на уровне проектов, стадий, процедур и операций с целью повышения восприятия записанных ранее процессов реализаций проектной деятельности;
- вся сопутствующая информация, выходящая за рамки формализации и накапливаемая в процессе работы над проектами, должна фиксироваться.

Формальная система строится как иерархически организованная композиция трех формальных теорий, реализующих абстракции понятий и принципов распределенной проектной деятельности.

Кратко, озвученные формальные теории можно охарактеризовать как:

- проектная деятельность в условиях частичной или полной автоматизации работ как линейный событийный процесс;
- документирование процессов распределенной проектной деятельности;
- обобщение процессов распределенной проектной деятельности.

#### **3.1. Формальная система проектной деятельности в условиях частичной или полной автоматизации работ как линейного процесса событий**

В качестве основополагающего принципа построения, принято описание работы программ в виде протоколов исполнений процессов, описанных в работе [1].

Данная формальная система задается как теория  $F^1 \stackrel{def}{=} (\alpha^1, \alpha P^1, AP^1, R^1)$  [3].

Алфавитом  $\alpha^1$  является объединение множеств: служебных символов, идентификаторов пользователей, их групп, линейных проектных процессов и событий проектной деятельности. Грамматика задает протоколы событий, фиксирующих проектную деятельность отдельных пользователей системы.

Полученная сигнатура является производной по отношению к существующим формальным языкам, изоморфным к детерминированным конструкциям языков программирования.

### 3.2. Формальная система документирования процессов распределенной проектной деятельности

Данная система является теорией  $F^2 = (\alpha^2, \alpha P^2, AP^2, R^2)$  [6,7], оперирующей записями действий, задаваемых определениями:

**Определение.** Формальные конструкции, удовлетворяющие следующим порождающим правилам, будем называть *записью действия*:

$$p_i(PI_i, PO_i, PN_i, PE_i, t_i), p_i(PI_i, PO_i, s_i, \emptyset, t_i), \quad (1)$$

где  $PI_i = \{i_{i_1}, i_{i_2}, \dots, i_{i_n}\}$  – множество индексов входных вершин-записей действий,  $PO_i = \{i_{i_1}, i_{i_2}, \dots, i_{i_n}\}$  – множество индексов выходных вершин-записей действий,  $PN_i = \{p_{j_1}, p_{j_2}, \dots, p_{j_n}\}$  – декомпозиционное множество записей действий (т.е. каждый элемент множества  $PN_i$  так же является записью действия),  $PE_i = \{(h_1, h_2, pj_{k_1}), (h_3, h_4, pj_{k_2}), \dots, (h_{2n+1}, h_{2n}, pj_{k_n})\}$  – множество ребер графа – порядок выполнения записей-действий ( $h_j$  – индексы вершин,  $pj_{k_i}$  – индексы проектов),  $t_i$  – метрическое время исполнения соответствующего события.

Приведем определения двух ключевых понятий распределенной проектной деятельности, сформулированных в рамках построенной  $F^2$ :

**Определение.** Развернутой реализацией проектного процесса ( $p_i$ ) некоторого проекта назовем такую последовательность элементарных записей действий, организованную, как запись действия, удовлетворяющая условиям соединения и взаимосвязанности:

$$\begin{aligned} p_i = p_i(\cdot, PN_i, PE_i) : \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_n}\} \subset PN_i, \{(i_1, i_2, pj_j), (i_2, i_3, pj_j), \dots, (i_{n-1}, i_n, pj_j)\} \subset PE_i : \\ p_{i_1}(PI_{i_1}, PO_{i_1}, s_{i_1}, \{\emptyset\}), p_{i_2}(PI_{i_2}, PO_{i_2}, s_{i_2}, \{\emptyset\}), \dots, p_{i_n}(PI_{i_n}, PO_{i_n}, s_{i_n}, \{\emptyset\}): \\ \forall k = 1 \dots n : p_{i_k} \in p_j \wedge (\forall k = 1 \dots n - 1 : i_k \in PI_{k+1} \wedge i_{k+1} \in PO_k) \wedge \\ s_h = s_{i_1} \wedge s_{i_2} \wedge \dots \wedge s_{i_n} = \langle a_{g_1}^{m_{g_1}} \circ \dots \circ a_{g_n}^{m_{g_n}} \rangle a_{g_1}^{m_{g_1}} \in m_s^s \wedge g_n = s. \end{aligned}$$

**Определение.** Реализацией проектного процесса некоторого проекта назовем такую последовательность записей действий, организованную, как запись действия, для которой можно предъявить или построить *развернутую реализацию проектного процесса*.

В рамках построения формальной системы решены задачи:

- формализации причинно-следственных и логических связей между проектными стадиями, процедурами и операциями;
- сохранения эмпирической информации;
- организация введения уровней абстракции проектных этапов.

Однако в рамках данной формальной системы создается большое количество информации, что по мере ее накопления, серьезно затрудняет ее релевантный поиск и восприятие. По этой причине ставится задача

автоматического обобщения информации, которая решается в рамках следующей формальной теории.

### 3.3. Формальная система обобщения процессов распределенной проектной деятельности

Формальная система опирается на предыдущую и преследует следующие ключевые цели:

- обобщение информации о проектных процессах;
- поддержка гетерогенных классификаций проектных процессов.

Ключевой предпосылкой ее построения является выявленный ряд характеристик, определяющих эндоморфизмы *событий*, *протоколов событий*, *записей действий* и *реализаций проектных процессов*.

**Определение.** Порождающей функцией  $\chi^*\langle s_i \rangle(\ )$  некоторого протокола  $s_i$  будем называть биективное отображение, удовлетворяющее

$$\begin{aligned} \forall s_i = \langle a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \dots \circ a_{i_n} \rangle, \exists! \chi^*\langle s_i \rangle : SEnv^* \rightarrow SEnv^* : \\ \forall a_{i_j} \in s_i : \chi^*\langle s_i \rangle(a_{i_1}) = a_{i_2} \wedge \chi^*\langle s_i \rangle(a_{i_2}) = a_{i_3} \wedge \dots \wedge \chi^*\langle s_i \rangle(a_{i_{n-1}}) = a_{i_n}, \\ \forall a_k \notin s_i : \chi^*\langle s_i \rangle(a_k) = a_k. \end{aligned} \quad (2)$$

На основе данного определения, каждому протоколу  $s_i$  можно противопоставить алгебраическую структуру  $\langle SEnv^*; \chi^*\langle s_i \rangle \rangle$ . Причем, множество  $X = \{a_i | a_i \in s_i\} \subset SEnv^*$  является замкнутым относительно операции  $\chi^*\langle s_i \rangle$  и очевидно создает, таким образом, подалгебру  $\langle \{a_i | a_i \in s_i\}; \chi^*\langle s_i \rangle \rangle$ .

**Определение.** Проекцией  $\chi\langle s_i \rangle(\ )$  порождающей функции  $\chi^*\langle s_i \rangle(\ )$  некоторого протокола  $s_i$  будем называть биективное отображение, удовлетворяющее

$$\begin{aligned} \forall s_i = \langle a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \dots \circ a_{i_n} \rangle, \exists! \chi\langle s_i \rangle : \\ \exists \langle c_{i_1} \circ c_{i_2} \circ \dots \circ c_{i_n} \rangle | \forall k = 1 \dots n : res[a_{i_k}] = c_{i_k}, \exists! \chi\langle s_i \rangle : SEnv \rightarrow SEnv, \\ \forall c_{i_j} \in \langle c_{i_1} \circ c_{i_2} \circ \dots \circ c_{i_n} \rangle : \chi\langle s_i \rangle(c_{i_1}) = c_{i_2} \wedge \chi\langle s_i \rangle(c_{i_2}) = c_{i_3} \wedge \dots \wedge \chi\langle s_i \rangle(c_{i_{n-1}}) = c_{i_n}, \\ \forall c_k \notin \langle c_{i_1} \circ c_{i_2} \circ \dots \circ c_{i_n} \rangle : \chi\langle s_i \rangle(c_k) = c_k, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $res[a_i] \stackrel{def}{=} c_j$  – введенная в  $F^1$  операция выделения команды  $c_j$  по событию  $a_i$ , являющаяся по построению *эпиоморфизмом*.

На данной основе выводится следующее утверждение:

**Утверждение.** Два *элементарных действия* или *события* из  $SEnv^*$  являются эндоморфными ( $a_i \stackrel{data}{=} a_j$ ) (т.е. существует эндоморфизм, переводящий  $a_i$  в  $a_j$ ) тогда и только тогда, когда существует команда гомоморфная обоим событиям:

$$a_i \stackrel{data}{=} a_j \Leftrightarrow \exists c_k = res[a_i] = res[a_j]. \quad (4)$$

Аналогично устанавливаются остальные характеристики эндоморфности *протоколов*, реализаций проектных процессов.

На основе вышеизложенного строится формальная теория  $F^3 = (\alpha^3, \alpha P^3, AP^3, R^3)$ , оперирующая действиями, обобщениями процессов и других объектов, используемых в рамках классической проектной деятельности.

**Определение.** Формальную конструкцию (5), удовлетворяющую следующим порождающим правилам, будем называть действием:

$$[id :]w_i(WI_i, WO_i, WN_i, WE_i), \quad (5)$$

где  $id$ : необязательный синтаксический префикс принадлежности действия заданному *обобщенному проекту* (определение см. ниже),  $WI_i = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$  – множество индексов входных вершин-действий или *записей действий*,  $WO_i = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$  – множество индексов выходных вершин-действий или *записей действий*,  $WN_i = \{w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_n}, p_{h_1}, p_{h_2}, \dots, p_{h_m}\}$  – рекуррентно определяемое декомпозиционное множество *действий* и/или *записей действий* (см. правила ниже),  $WE_i$  – множество ребер графа – порядок выполнения *действий* и/или *записей действий* ( $i_k$  – индексы вершин), задаваемое следующим образом:

$$WE_i = \{(k_1, k_2), (k_2, k_3), \dots, (k_{r-1}, k_r) | k_x \in WI_i \cup WO_i \cup \{j_1, j_2, \dots, j_n\} \cup \{h_1, h_2, \dots, h_m\}\}.$$

Минимальный элемент

Любая *запись действия* формальной системы второго уровня является корректной формулой над  $F^3$ .

Декомпозиция элементов

Совокупность *действий* и/или *записей действий*, организованных в виде графа с множествами истоков и стоков также есть *действие*:

$$w_i = w_i(WI_i, WO_i, WN_i, WE_i).$$

Для каждой *развернутой реализации проектного процесса*, которая проходит по некоторому множеству *записей действий*, в общем случае, имеется единственный источник и сток. На этом основании вводится понятие *классификационных узлов*:

**Определение.** Парой классификационных узлов назовем  $(w_{k_1}^s, w_{k_2}^e)$ , задаваемую (6) и объединяющую некоторое множество реализаций проектных процессов, в терминах формальной системы второго уровня.

$$\forall p_i : \exists p_i(\cdot, PN_i, \cdot), PN_i = \{p_i, p_{i_2}, \dots, p_{i_n}\};$$

$$\exists! w_{k_1}^s = p_{k_1}(\{\emptyset\}, PO_{k_1}, \{\emptyset\}), p_{i_1} \in PO_{k_1}, \exists! w_{k_2}^e = p_{k_2}(PI_{k_2}, \{\emptyset\}, \{\emptyset\}), p_{i_n} \in PI_{k_2}. \quad (6)$$

На этой основе строится алгоритм обобщения развернутых эндоморфных реализаций проектных процессов, выходящий за рамки данной статьи.

**Определение.** Обобщенным проектом будем называть действие (7) – совокупность обобщенных проектных процессов, объединенных единственной парой классификационных узлов ( $w_{k_1}^s, w_{k_2}^e$ ).

$$id : W_i(\{\emptyset\}, \{\emptyset\}, WN_i, WE_i), \quad (7)$$

где  $id$  – идентификатор проекта, а для  $WN_i$  и  $WE_i$  выполняется:

$$\begin{aligned} \{w_{k_1}^s, w_{k_2}^e\} \subset WN_i, \forall id : w_{j_h} (WI_{j_h}, WO_{j_h}, WN_{j_h}, WE_{j_h}) \in WN_i, h = 1 \dots n, \\ \{(k_1, j_h) | h = 1 \dots n\} \subset WE_i, \{(j_h, k_2) | h = 1 \dots n\} \subset WE_i. \end{aligned}$$

В результате применения к модели второго уровня (см. рис. 1) процессов автоматического обобщения строится модель третьего уровня (см. рис.2) (Аналитическое описание моделей опущено вследствие их объемности).

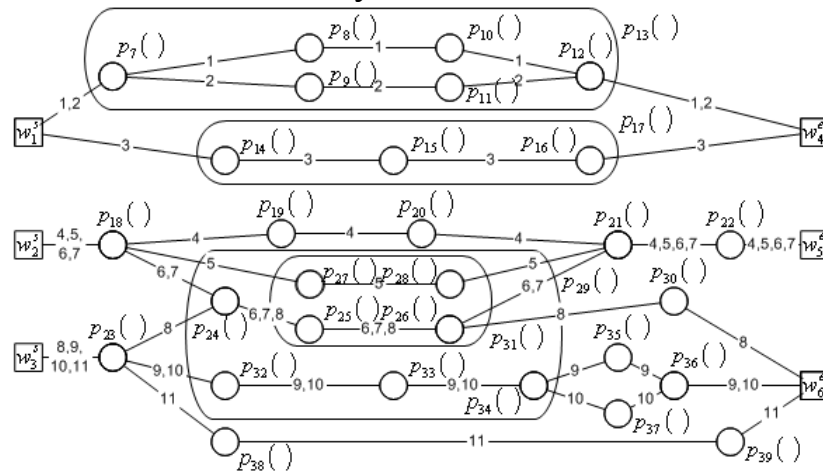


Рис. 1. Пример модели второго уровня

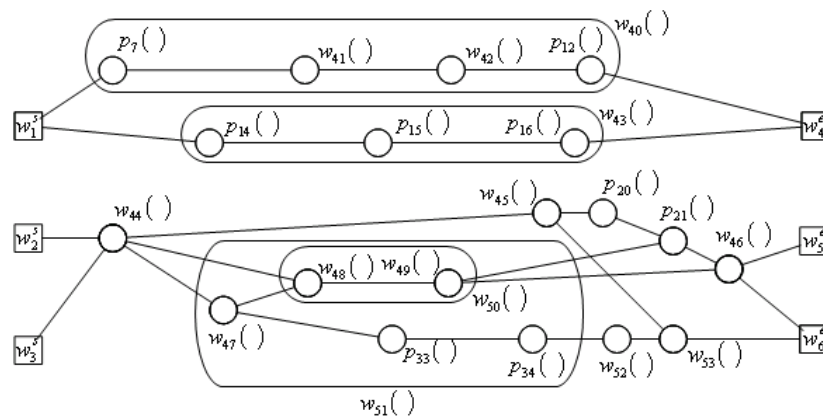


Рис. 2. Пример модели третьего уровня

### 3.4. Выводы

Построена формальная система, позволяющая решать задачи обобщения, связанные с систематизацией накапливаемой информации, генерируемой в ходе проектной деятельности, что позволяет достичь следующих положительных эффектов:

- классификация, документирование и обобщение проектных процессов, повышение гибкости представления проектной документации;

- возможность глубокой автоматизации распределенной и параллельной проектной деятельности в условиях проведения проектов, носящих классифицируемый и типовой характер;

- сохранение и использование эмпирического опыта проектантов, что позволяет сократить экономические издержки, связанные с естественной сменой кадров на предприятиях;

- полная фиксация всей проектной информации с позиций системного анализа.

По итогам работы можно говорить о возможности постановки новых задач обобщения проектных процессов в целом.

#### **4. Условия и границы применения программной реализации формальной системы для конструкторского проектирования**

Место программных систем, использующих обозначенные в работе принципы, ставит их в разряд гибридных систем (см. введение).

Учитывая специфику конструкторского проектирования, программная система должна содержать следующие подсистемы:

- проектно-ориентированная база данных;
- CAD/CAM/CAE системы;

Наличие последнего пункта на практике означает необходимость глубокой интеграции с САПР-системой, что, в свою очередь, влечет жесткую привязку к конкретному программному продукту [2], либо необходимость соответствия определенным стандартам [5-7].

Кроме того, необходимо обеспечить ряд технических условий, связанных с тем, что проект может выполняться во взаимно не интегрированных программных комплексах различных производителей:

- безопасное межпроцессное взаимодействие;
- возможности связывания программного обеспечения разных производителей;

- учет версий программного обеспечения;
- независимость от языков реализации интегрируемого программного обеспечения;

- наличие подходящего языка программирования для генерации и исполнения программного кода во время выполнения.

В результате анализа существующих технологий выделяются пути программного комплекса: COM-модели и Microsoft .NET. Эксперименты в области интеграции программного обеспечения на основе COM-модели с



комплексом SolidWorks, а так же тщательное изучение платформы .NET показали необходимость продолжения работ с использованием последней.

При этом наиболее ключевые аргументы:

- гибкость;
- наличие механизма динамического генерирования и выполнения произвольного кода;

Однако, вследствие того, что выбранная технология довольно нова (для рынка САПР), современные средства поддержки проектной деятельности, равно как и системы САПР, написанные с ее использованием, на практике отсутствуют.

## **5. Возможности применения работы в других областях**

Вследствие того, что теоретическая часть работы строилась на основополагающих принципах проектной деятельности, оказалось возможным ее успешное применение в других областях, в частности:

- программные продукты коммунальной сферы;
- создание и сопровождение паспортов безопасности для опасных промышленных объектов;
- складской и бухгалтерский учет.

Такое применение формальной системы обусловлено возможностью создания монолитного программного комплекса (в рамках одной команды разработчиков) – для коммунальной сферы, что позволило сократить только время расчетных операций на более чем 30% по сравнению с конкурирующими продуктами.

Для МЧС-проекта разработки и сопровождения паспортов безопасности применимость данной работы обусловлена возможностями использования пакета MS Office для создания надстроек, автоматизирующих работу конечных исполнителей (инженеров по технике безопасности).

## **6. Заключение**

В работе рассмотрены теоретические и практические предпосылки для создания программного средства – информационной системы, позволяющей накапливать, модифицировать и обобщать типовые процессы проектной деятельности рабочих групп.

Выделены положительные эффекты, а так же условия применения работы.

В качестве одного из выводов можно выделить тот факт, что развитие современных САПР, PLM систем необходимо проводить с использованием современных технологий автоматизации приложений.

Однако вследствие обобщенности данной работы, оказалось возможным ее успешное применение в областях, не требующих интеграции программных продуктов разных производителей, а так же там, где существующее программное обеспечение активно развивается в концепции «ядро-надстройка».

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hoare A. R. Communicating Sequential Processes, Prentice-Hall International Series in Computer Science, Prentice Hall, 1989.

2. Похилько А. Ф., Маслянцын А. А., Филянин А. Н. Модель управления проектной деятельностью в интероперабельных средах САПР. //Материалы международной научно-технической конференции «Информатизация процессов формирования открытых систем на основе СУБД, САПР, АСНИ и систем искусственного интеллекта», Вологда 2001.

3. Pokhil'ko A. F. Technology of Development of User-Oriented Integrated CAD-Applications Proceedings of International Workshop. CSIT'2001, UFA, Yangatau, Russia, v.3, 2001. – PP. 55-62.

4. Pokhil'ko A. F., Maslyantcin A. A. Toolkit for Support of the Process Approach for an Automated Workplace of the engineer-designer. // Interactive Systems: The Problems of Human – Computer Interaction. Collection of scientific papers. – Ulyanovsk: USTU, 2003. – PP. 29-37.

5. Похилько А. Ф., Маслянцын А. А. //Вестник УлГТУ. Сер. Модели, инструментарий и технологии. 2003, №3-4.

6. Похилько А. Ф., Маслянцын А. А. Модель хранения и модификации процессов проектирования технических объектов // Труды МНТК. «Системный анализ в проектировании и управлении». Санкт-Петербург, 2003.

7. Похилько А. Ф. Маслянцын А. А., Удовиченко А. В., Куприянов А. А. «Формализация и анализ процессов проектирования технических объектов» // Автоматизация процессов управления. Интегрированные АСУ. 2006, №2(8).

•••••

*Похилько Александр Федорович, профессор кафедры САПР УлГТУ,  
e-mail: afp@ulstu.ru*

*Маслянцын Алексей Александрович, программист каф. САПР УлГТУ.*

*Т. Б. Распутько*

Пусть в гильбертовом пространстве  $H$  задан антиунитарный оператор  $K$ . Рассмотрим замкнутый линейный оператор  $A$  в  $H$  с областью определения  $\mathcal{D}_A$ , причем  $\mathcal{D}_A$  плотно в  $H$ . Обозначим поле регулярности оператора  $A$  через  $\Lambda_A$ . Оператор  $K$ , отображающий все гильбертово пространство  $H$  на все  $H$ , называется антиунитарным, если он удовлетворяет условиям: 1)  $\|Kf\| = \|f\|$  для всякого вектора  $f \in H$ ; 2)  $K(\alpha f + \beta g) = \bar{\alpha}Kf + \bar{\beta}Kg$  для любых векторов  $f, g \in H$  и любых чисел  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Если  $K^2 = E$ , то оператор называется инволюцией [1]. Оператор  $A$  называется  $K$ -кососимметрическим, если  $A \subset -A^C$ , где  $A^C = K^{-1}A^*K$ . Оператор  $A$  называется  $K$ -кососамосопряженным, если  $A = -A^C$ ; в этом случае резольвентное множество  $\rho(A)$  симметрично относительно точки  $\lambda = 0$ . Обозначим  $m_\lambda = (A - \lambda E)\mathcal{D}_A$ ,  $n_\lambda = H \ominus m_\lambda$  для  $\lambda \in \Lambda_A$ . Расширение  $\tilde{A}$  оператора  $A$  назовем корректным, если  $\lambda \in \rho(\tilde{A})$ . Для векторов  $f, g \in H$  обозначим  $[f, g] = (f, Kg)$ . Оператор  $V$  называется  $K$ -изометрическим, если его область определения  $\mathcal{D}_V$  и область значений  $R_V$  являются подпространствами в  $H$ , и при всех  $f, g \in \mathcal{D}_V$  выполняется равенство  $[Vf, Vg] = [f, g]$ . Пусть выполняются условия: 1)  $\pm \lambda \in \Lambda_A$ ,  $\lambda \neq 0$ , 2)  $K^2 n_\lambda = n_\lambda$ , 3) для всякого ненулевого вектора  $\varphi \in K^{-1}n_\lambda$  будет  $[\varphi, \varphi] \neq 0$ , 4)  $\dim n_\lambda < +\infty$ .

Совокупность точек  $\lambda$ , для которых выполняются условия 1) – 4), обозначим через  $\omega$ . Пусть оператор  $A$  имеет  $K$ -кососамосопряженное расширение  $\tilde{A}$  в некотором объемлющем пространстве  $\tilde{H}$ , причем  $\omega$  лежит в резольвентном множестве оператора  $\tilde{A}$ . Обобщенной резольвентой оператора  $A$  называется операторнозначная функция комплексного параметра  $\lambda$ , заданная формулой

$$R_\lambda = (\tilde{A} - \lambda \tilde{E})^{-1}|_H,$$

где  $P$  – ортопроектор в  $\tilde{H}$  на  $H$ ,  $\lambda \in \omega$  [2,3].

Лемма 1. Для  $\lambda, z \in \omega$  и  $f \in m_\lambda = (A - \lambda E)\mathcal{D}_A$  имеет место соотношение

$$(R_z - R_\lambda)f = (z - \lambda)R_z \cdot R_\lambda f$$

Лемма 2. Для  $\lambda \in \omega$  имеет место соотношение

$$(R_\lambda)^c = -R_{-\lambda}.$$

Лемма 3. Для  $\lambda \in \omega$  из условия  $R_\lambda = 0$  следует  $f = 0$ .

Для  $\lambda \in \omega$  определим множество  $\tilde{L}_\lambda = \{ \tilde{f} \in \mathcal{D}(\tilde{A}) : (\tilde{A} - \lambda \tilde{E})\tilde{f} \in H \}$ .

Ясно, что  $\mathcal{D}(A) \subset \tilde{L}_\lambda$ . Кроме того, соотношение  $(\tilde{A} - \lambda \tilde{E})\mathcal{D}(\tilde{A}) = \tilde{H}$  влечет соотношение

$$(\tilde{A} - \lambda \tilde{E})\tilde{L}_\lambda = H.$$

Лемма 4. Для любого  $\lambda \in \omega$  множества  $\tilde{L}_\lambda$  и  $\tilde{H} \ominus H$  линейно независимы.

Оператор  $B_\lambda$  для  $\lambda \in \omega$  определим формулами:

$$\mathcal{D}(B_\lambda) = P\tilde{L}_\lambda, \quad B_\lambda P\tilde{f} = P\tilde{A}\tilde{f} \quad (\tilde{f} \in \tilde{L}_\lambda)$$

Оператор  $B_\lambda$  является расширением оператора  $A$  в пространстве  $H$ .

Лемма 5. Обобщенная резольвента  $R_\lambda$  оператора  $A$  при любом  $\lambda \in \omega$  имеет вид:

$$R_\lambda = (B_\lambda - \lambda E)^{-1}.$$

Оператор  $B_\lambda$  при  $\lambda \in \omega$  является максимальным корректным расширением оператора  $A$ .

**Теорема 1.** Формулы

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \mathcal{D}(A) \oplus (V - E)K^{-1}\mathbf{n}_\lambda,$$

$$\tilde{A}(f_0 - g_\lambda + Vg_\lambda) = Af_0 + \lambda g_\lambda + \lambda Vg_\lambda \quad (f_0 \in \mathcal{D}(A), g_\lambda \in K^{-1}\mathbf{n}_\lambda) \quad (1)$$

устанавливают взаимно-однозначное соответствие между совокупностью всех корректных расширений  $\tilde{A}$  оператора  $A$ , для которых  $\pm \lambda \in \rho(\tilde{A})$ , и совокупностью всех ограниченных операторов  $V$ , отображающих подпространство  $K^{-1}\mathbf{n}_\lambda$  на все подпространство  $K^{-1}\mathbf{n}_{-\lambda}$ . Оператор  $\tilde{A}$ , определенный формулами (1), обозначим через  $A_V$ .

**Теорема 2.** Пусть  $A$  есть  $K$ -кососимметрический оператор, и выполняются условия 1) – 4).

Пусть  $\tilde{A}$  – некоторое  $\tilde{K}$ -кососамосопряженное расширение оператора  $A$ , действующее в пространстве  $\tilde{H}$ , ( $\tilde{H} \supset H$ ,  $\tilde{K}$  – антиунитарный оператор в  $\tilde{H}$ ), причем  $\omega \subset \rho(\tilde{A})$ . Пусть  $\lambda \in \omega$  – некая фиксированная точка. При всяком  $z \in \omega$  имеет место формула

$$B_z = A_{F(z)},$$

где  $F(z): K^{-1}\mathbf{n}_\lambda \rightarrow K^{-1}\mathbf{n}_{-\lambda}$  есть операторозначная функция в  $\omega$  с ограниченными значениями.

**Доказательство.** Определим оператор  $F(z)$  при  $z \in \omega$  соотношением

$$F(z) = (B_z + \lambda E)(B_z - \lambda E)^{-1} \Big|_{K^{-1}\mathbf{n}_\lambda}. \quad (2)$$

Оператор  $(B_z - \lambda E)^{-1}$  существует, ограничен и определен на всем  $H$ .

Обозначим

$$W(z) = (B_z + \lambda E)(B_z - \lambda E)^{-1} \quad (3)$$

Оператор  $W(z)$  ограничен и определен на всем  $H$ .

В силу  $K$ -кососимметричности  $A$  оператор

$$V = (A + \lambda E)(A - \lambda E)^{-1} \quad (4)$$

является  $K$ -изометрическим и отображает все  $m_\lambda$  на все  $m_{-\lambda}$ . Оператор  $W(z)$  является расширением оператора  $V$ . Из условий 1) - 4) следует формула

$$H = m_\lambda \oplus K^{-1}n_\lambda \quad (\lambda \in \omega),$$

причем сумма здесь прямая [4,5].

Т. к. оператор  $\tilde{A}$  является  $\tilde{K}$ -кососамосопряженным, то из условия  $\lambda \in \omega$  следует, что  $-\lambda \in \omega$ , значит

$$H = m_{-\lambda} \oplus K^{-1}n_{-\lambda}.$$

Поэтому оператор  $W(z)$  может быть представлен в виде

$$W(z) = V \oplus F(z) \quad (5)$$

Из соотношения (3) следует, что

$$W(z) = E + 2\lambda(B_z - \lambda E)^{-1} \quad (6)$$

Поэтому оператор  $W(z)$  не имеет ненулевых неподвижных элементов.

Формулы (4), (5), (6) дают:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(B_z) &= (W(z) - E)H = (V - E)m_\lambda \oplus (F(z) - E)K^{-1}n_\lambda = \\ &= \mathcal{G}(A) \oplus (F(z) - E)K^{-1}n_\lambda. \end{aligned} \quad (7)$$

При этом для  $h \in K^{-1}n_\lambda$  имеет место соотношение

$$(B_z - \lambda E)(F(z) - E)h = 2\lambda h.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} B_z(f + F(z)h - h) &= Af + \lambda F(z)h + \lambda h \\ (f \in \mathcal{G}(A), h \in K^{-1}n_\lambda). \end{aligned} \quad (8)$$

Из формул (7) и (8) заключаем, что  $B_z = A_{F(z)}$ .

Выразим  $W(z)$  через  $R_z$ . В силу леммы 5

$$B_z = R_z^{-1} + zE \quad (9)$$

Согласно (9) имеем:

$$B_z - \lambda E = ((B_z - \lambda E)R_z)(B_z - zE) = (E + (z - \lambda)R_z)(B_z - zE) \quad (10)$$

Для оператора

$$E + (z - \lambda)R_z = (R_z - \lambda E)(B_z - zE)^{-1}$$

при всех  $z \in \omega$  существует ограниченный обратный, определенный на всем  $H$ :

$$(E + (z - \lambda)R_z)^{-1} = E + (\lambda - z)(B_z - \lambda E)^{-1} \quad (11)$$

Из (6), (10) и (11) вытекает формула

$$W(z) = E + 2\lambda R_z(E + (z - \lambda)R_z)^{-1} \quad (12)$$

Функция  $F(z)$  равна сужению  $W(z)$  на подпространство  $K^{-1}n_\lambda$ :

$$F(z) = W(z) \Big|_{K^{-1}n_\lambda}$$

**Теорема 3.** Пусть  $\tilde{A}$  есть  $\tilde{K}$ -кососамосопряженное расширение оператора  $A$ , действующее в пространстве  $\tilde{H} \supset H$ ;  $\lambda$  есть фиксированная точка, принадлежащая  $\omega$ . Для обобщенной резольвенты  $R_z = P(\tilde{A} - z\tilde{E})^{-1} \Big|_H$  оператора  $A$  ( $z \in \omega$ ) имеет место формула

$$R_z = (A_{F(z)} - zE)^{-1},$$

где  $F(z): K^{-1}n_\lambda \rightarrow K^{-1}n_{-\lambda}$  есть операторнозначная функция, аналитически зависящая от  $z$  в  $\omega$  ( $F(z)$  есть ограниченный линейный оператор), а  $A_{F(z)}$  есть корректное расширение оператора  $A$  в  $H$ , определенное формулами [3]:

$$\mathcal{G}(A_{F(z)}) = \mathcal{G}(A) \oplus (F(z) - E)K^{-1}n_\lambda,$$

$$A_{F(z)}(f_0 - g_\lambda + F(z)g_\lambda) = Af_0 + \lambda g_\lambda + \lambda F(z)g_\lambda \quad (f_0 \in \mathcal{G}(A), \quad g_\lambda \in K^{-1}n_\lambda).$$

**Доказательство.** Из леммы 5 следует, что обобщенная резольвента при любом  $z \in \omega$  имеет вид:  $R_z = (B_z - zE)^{-1}$ . Из теоремы 2 следует, что  $R_z = A_{F(z)}$ . Наконец теорема 1 описывает оператор  $A_{F(z)}$ . Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер, Н. И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н.И.Ахиезер, И.М.Глазман.-М.: Наука, 1966. – 544с.
2. Штраус, А. В. О расширениях и характеристической функции симметрического оператора / А.В.Штраус // Известия АН СССР. Серия математическая. 1968. – № 32. – С.186-207–Библи.: с. 207 (27 назв.)
3. Штраус, А. В. Расширения и обобщенные резольвенты неплотно заданного симметрического оператора / А.В.Штраус // Известия АН СССР. Серия математическая. 1970. – № 34. – С. 175-202 –Библиогр.: с. 202 (2/ назв.)
4. Распутько Т. Б. Расширения К-симметрического оператора / Т.Б.Распутько // Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке и технике: тр. междунар.конф. (17-19мая). - Ульяновск : УлГТУ, 2005.–Т.4. – С.198-200. – Библиогр.: 7 назв.
5. Распутько, Т. Б. К вопросу о корректных К-кососамосопряженных расширениях линейного оператора / Т. Б. Распутько // Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке и технике: тр. междунар.конф. (16-18мая). – Ульяновск :УлГТУ, 2006. – Т.4. – С.251-254. – Библиогр.: 3 назв.

•••••

*Распутько Татьяна Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры “Высшая математика” УлГТУ.*

## МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

*В. Н. Rogov, С. М. Степанов, Т. Н. Лунатова*

Математически задача оптимального управления процессом ставится следующим образом: Пусть имеется некоторая система, которая характеризуется *параметрами состояния*. Эти параметры изменяются в соответствии с происходящим процессом. Имеются уравнения, описывающие поведение объекта управления (дифференциальные или разностные):

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \text{или} \quad \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}$  –  $n$ -мерный вектор параметров состояния системы,

$\mathbf{u}$  –  $r$ -мерный вектор управляющих воздействий.

Качество управляемого процесса характеризуется критерием в виде некоторого функционала:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_1}^{t_2} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \quad (2)$$

Среди допустимых управлений  $\mathbf{u}(t)$  из области  $U$ , для которых соответствующие траектории  $\mathbf{x}(t)$  системы (1) проходят через начальное и конечное состояние, необходимо выбрать такое, для которого функционал (2) принимает экстремальное (минимальное или максимальное) значение.

Для широкого класса управлений  $\mathbf{u}(t)$ , академиком Л.С. Понтрягиным в 1956–1958 гг. необходимые условия оптимальности были сформулированы в форме так называемого *принципа максимума*. Американским математиком Р. Беллманом, были получены условия оптимальности исходя из идей *динамического программирования*.

Применение его метода *динамического программирования* для конкретной задачи можно описать следующим образом:

пусть имеется начальное количество ресурсов, под которыми можно понимать денежные средства или материальные ресурсы ( $S_0$ ). Их требуется распределить по различным объектам и различным промежуткам планового периода так, чтобы получить максимальную отдачу (эффективность). Показателем эффективности может служить в данном случае критерий), зависящий в свою очередь от профессионального уровня профессорско-преподавательского состава  $K_{ППС}$  и коэффициента уровня компьютерных технологий  $K_{КТ}$ . Требуется определить такой способ распределения ресурсов  $S_k$  на увеличение коэффициентов  $K_{ППС}$  и  $K_{КТ}$  на каждом шаге  $k$ , чтобы суммарный критерий на полученной траектории был максимальным.

На каждом отрезке времени (шаге  $k$ ), имеется две управляющие переменные  $u_{k1}$  и  $u_{k2}$  – количество средств, выделенных соответственно на

изменение коэффициентов  $K_{ППС}$  и  $K_{КТ}$  например суммарно на пять групп учебных дисциплин. Состояние управляемой системы, характеризуемое оставшейся суммой средств  $S_k$  в конце очередного шага  $k$ , зависит от своего предыдущего состояния  $S_{k-1}$  и управления на данном шаге  $u_{k1}$  и  $u_{k2}$ :

$$S_k = S_{k-1} - u_{k1} - u_{k2} \quad (3)$$

Процесс динамического программирования сначала разворачивается от конца к началу. Прежде всего определяется условно оптимальное управление на последнем  $n$ -м шаге (от которого уже не зависит будущее), для каждого из предположений о том, чем закончился предпоследний  $(n-1)$ -й шаг. Этот процесс продолжается до 1-го шага и затем строится оптимальное управление, проходя этот процесс от начала к концу по уже готовым рекомендациям. Для численной реализации этого процесса вводится специальная функция, обозначающая максимальное значение показателя эффективности, начиная от шага  $k$  до конца (шага  $n$ ):

$$B_k(S_{k-1}) = \max_{0 \leq u_{k1} + u_{k2} \leq S_{k-1}} \left\{ \sum_{i=1}^2 F_{ik}(S_{k-1}, u_{ki}) + B_{k+1}(S_k) \right\} \quad (4)$$

$$\text{На последнем шаге: } B_n(S_{n-1}) = \max \left\{ \sum_{i=1}^2 F_{in}(S_{n-1}, u_{ni}) \right\}$$

В результате исходная задача сводится к последовательности из  $n$  задач, в каждой из которых требуется проводить максимизацию функции зависящей от двух переменных:  $u_{k1}$  и  $u_{k2}$ .

Упрощенная постановка рассматриваемой задачи выглядит следующим образом: Пусть процесс возрастания  $K_{ППС}$  и  $K_{КТ}$  разделен поквартально на 4 этапа. На каждом этапе очередной фрагмент траектории задается отрезком прямой линии. Требуется определить такой способ пошагового наращивания коэффициентов  $K_{ППС}$  и  $K_{КТ}$ , чтобы суммарный критерий на полученной в виде ломанной линии траектории был максимальным:

На рис. 1 прямоугольная область допустимых изменений  $K_{ППС}$  и  $K_{КТ}$  при переходе от начальной точки А к конечной В, разделена на 4 части тремя прямыми линиями 1, 2, 3. Решение задачи разворачивается, начиная с последнего 4-го этапа, т. е. в треугольнике между линией 3 и точкой А. Перемещая начальную точку по линии 3 (конечной является точка В), определяем, что максимум критерия достигается на отрезке проходящем по границе допустимой области (линия 3б–В). В методе динамического программирования утверждается, что часть рассматриваемой оптимальной траектории также является оптимальной. Аналогично, перемещая начальную точку по линии 2 при конечной точке 3б, определяем отрезок оптимальной траектории на 2-м этапе, который принимает положение 2б–3б. Окончательная оптимальная траектория получается в виде ломанной линии, проходящей через точки А, 1б, 2б, 3б, В, на которой значение критерия составляет 0,687.



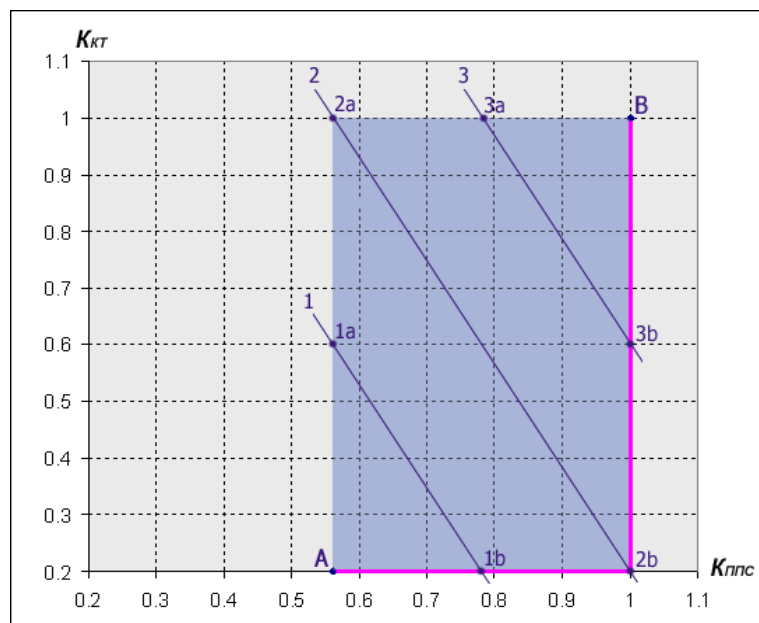


Рис. 1. Пошаговое построение оптимальной траектории.

Характер возрастания  $\Delta Q_{СР}$  на полученной оптимальной траектории представлен на рис 2.

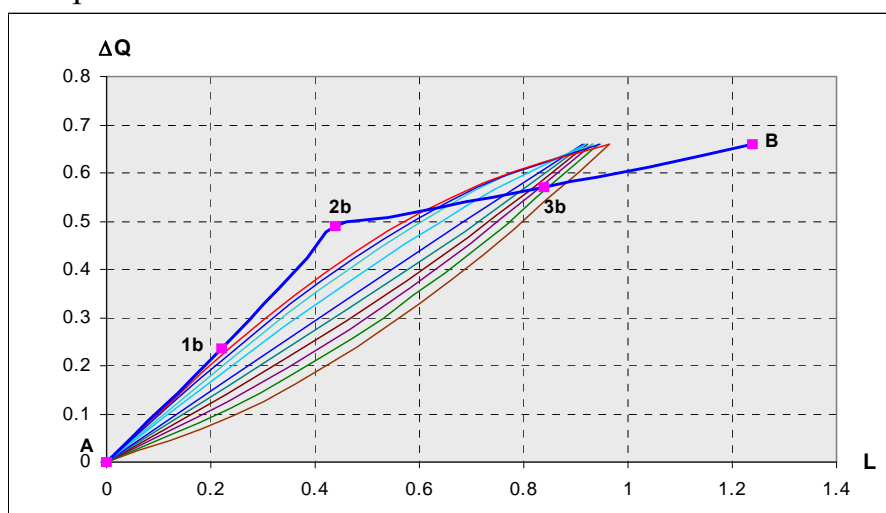


Рис.2. Возрастание  $\Delta Q_{СР}$  по оптимальной траектории.

Из полученных результатов следует, что наиболее крутой подъем по поверхности  $Q_{СР}(x, y)$  происходит в направлении параллельном оси  $K_{ППС}$ . Отсюда следует вывод, что наиболее эффективной стратегией будут меры по первоначальному увеличению коэффициента  $K_{ППС}$  до практически возможного, и лишь после этого меры по наращиванию коэффициента  $K_{КТ}$ . Не зря говорится: «Кадры решают все».

В рассмотренных на каждом шаге задачах *оптимизации* (максимизации или минимизации), имеется ряд следующих общих свойств:

- единственная *целевая функция*, значение которой нужно сделать максимальным, минимальным или же равным конкретному значению.



## 1. Постановка задачи приближения дискретных данных

Пусть величина  $y$  является функцией аргумента  $x$ . Это означает, что дискретному множеству значений аргумента  $\{x_i\}$  поставлено в соответствие множество значений функций  $\{y_i\}$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ). Эти значения – либо результаты расчетов, либо экспериментальные данные. На практике часто могут понадобиться значения величины  $y$  и в других точках, отличны от узлов  $x_i$ . Таким образом, приходим к необходимости использования имеющихся табличных данных для приближенного вычисления искомого параметра  $y$  при любом значении  $x$  (из некоторой области).

Этой цели служит задача о приближении (*аппроксимации*) функций, в которой некоторую функцию  $f(x)$  требуется приближенно заменить (*аппроксимировать*) другой функцией  $\Delta(x)$  так, чтобы отклонение  $\Delta(x)$  от  $f(x)$  в заданной области было наименьшим. Эмпирическая функция  $\Delta(x)$  при этом называется *аппроксимирующей*. Понятие «близко» уточняется при рассмотрении разных видов приближения.

Если приближение строится на дискретном множестве точек  $\{x_i\}$ , то аппроксимация называется *точечной*. К ней относятся интерполирование, среднееквadrатичное приближение и др. При построении приближения на непрерывном множестве точек (например, на отрезке  $[a, b]$ ) аппроксимация называется *непрерывной* (или *интегральной*).

При *среднееквadrатичном приближении* [1,2] мерой отклонения функции  $\Delta(x)$  от заданной  $f(x)$  на множестве точек  $\{x_i, y_i\}$   $i = 0, 1, \dots, m$  является величина  $S$ , равная сумме квадратов отклонений  $\Delta(x_i)$  от  $y_i = f(x_i)$ :

$$S = \sum_{i=0}^m [\varphi(x_i) - y_i]^2 \quad (1)$$

Предположим, что аппроксимирующая функция  $\Delta(x)$  зависит также от набора коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , то есть  $\varphi(x) = \varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_n)$ . Для построения приближения нужно подобрать коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  так, чтобы величина  $S$  была наименьшей. В этом состоит *метод наименьших квадратов*.

## 2. Регрессионная модель

Формализация системы управления учебным процессом в училище производилось методами функционального и имитационного моделирования с использованием программного обеспечения «Вrwin 4.1» и «Арена». После построения имитационной модели был проведен анализ 11 факторов, влияющих на качество подготовленности авиаспециалистов и получены результаты, влияния этих факторов на успеваемость. Получены значения среднего балла ( $Q_{CP}$ ) в зависимости от двух факторов: коэффициента

профессионального уровня профессорско-реподавательского состава ( $K_{\text{ППС}}$ ) и коэффициента уровня компьютерных технологий ( $K_{\text{КТ}}$ ) по пяти группам учебных дисциплин (ГСД, ЕНД, ОПД, СД, ДС).

Для аппроксимации дискретных данных использовались *двумерные эмпирические (приближающие) функции* вида:

$$\Delta(x, y) = a_0 \Delta_0(x, y) + \dots + a_n \Delta_n(x, y) \quad (2)$$

где  $a_k$  – неизвестные коэффициенты

$$\Delta_k(x, y) = x^i \Delta y^j$$

Если ограничиться квадратичными членами, то линейная относительно коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_5$  функция  $\Delta(x, y) = Q_{\text{СР}}$ , примет следующий вид:

$$Q_{\text{СР}}(x, y) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x y + a_5 \cdot y^2 \quad (3)$$

где  $x - K_{\text{ППС}}$ ,  $y - K_{\text{КТ}}$

Полученные вторичные регрессионные модели позволяют применять математические методы с целью моделирования и анализа различных образовательных стратегий при изменении  $K_{\text{ППС}}$  и  $K_{\text{КТ}}$  для каждой отдельной группы учебных дисциплин.

### 3. Анализ и оптимизация образовательных стратегий

Регрессионная модель образовательного процесса с приемлемой степенью достоверности, описывает образовательный процесс, позволяет анализировать возможные управленческие решения и оценивать их эффективность.

Наибольшее затруднение при оценке образовательных стратегий вызывает выбор критерия эффективности образовательного процесса. Проведение реальных экспериментов с экономическими системами требует значительных затрат и вряд ли осуществимо на практике. В условиях неопределенности при отсутствии достаточного статистического материала, следует указать хотя бы косвенный критерий оптимизации. Из графика на рис. 1, можно видеть, что из начальной точки  $\{0,56; 0,2\}$  где показатель  $Q_{\text{СР}}$  минимален, можно перейти в конечную точку  $\{1; 1\}$ , где  $Q_{\text{СР}}$  максимален, по различным траекториям. Из геометрических соображений можно принять, что наиболее эффективным (оптимальным) будет такой способ увеличения факторов  $K_{\text{ППС}}$  и  $K_{\text{КТ}}$  (такая траектория на плоскости факторов  $K_{\text{ППС}}$  и  $K_{\text{КТ}}$ ), при котором показатель  $Q_{\text{СР}}$  будет быстрее всего возрастать и достигать некоторого насыщения. Математическая постановка такой задачи выглядит следующим образом:

Пусть траектория на плоскости факторов задана в параметрическом виде:  $K_{\text{ППС}} = x(t)$  и  $K_{\text{КТ}} = y(t)$ . Определяются зависимости  $x(t)$  и  $y(t)$ , обеспечивающие движение точки из начального положения, когда  $x(0) = 0$  и  $y(0) = 0$ , в конечное, когда  $x(t) = 1$  и  $y(t) = 1$ , по некоторой кривой  $L_1$  с постоянной скоростью равной 1, что можно записать в виде условия  $\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = 1$  (это условие позволяет заменять параметр  $t$  длиной дуги  $l$ ). Затем, подбираются



## ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ АВТОМОБИЛЯ

*С. В. Ромашков*

При проектировании автомобиля необходимо оперативно оценивать влияние параметров конструкции. С этой целью создаются простейшие модели. Ранее таковыми являлись модели с двумя или тремя степенями свободы. С развитием вычислительной техники, когда система динамических уравнений формируется автоматически, подобной простейшей моделью уже можно, например, считать модели с  $6 \times 3 = 18$  степенями свободы.

В работе рассматривается динамическая модель автомобиля в виде произвольной системы твёрдых тел, соединённых упругими элементами или стержнями. В стержнях учитывается их распределённая масса и рассеяние энергии.

Для динамического расчёта упругой системы автомобиля используется частотный метод, основанный на обработке АФЧХ упругой системы, построенной при помощи конечного элемента в виде 2-х сосредоточенных масс конечных размеров, соединённых либо стержнем, либо невесомой пружиной (рис. 1).

Пример расчётной схемы автомобиля показан на рис.2.

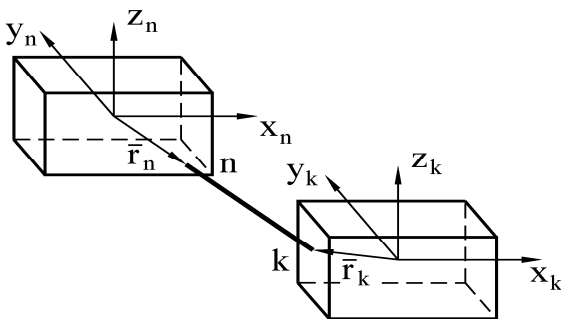


Рис. 1. Система двух масс, соединённых упругим элементом

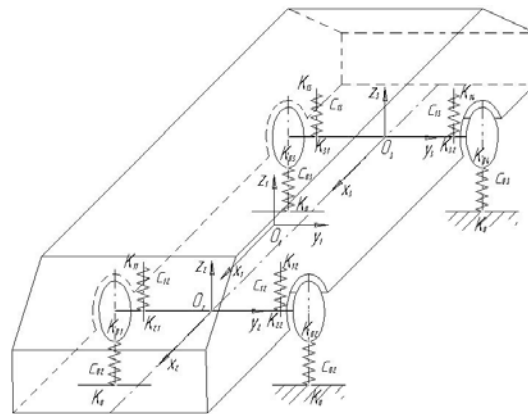


Рис. 2. Динамическая модель автомобиля

Уравнение колебаний узлов в перемещениях, преобразованных по Лапласу, записывается в следующем виде [2]:

$$\begin{aligned}
 (M_k p^2 + \sum_r L_k^T A_{nk}^r L_k) U_{0k} - \sum_r L_k^T B_{nk}^r L_n U_{0n} = \\
 = f(p) + f_1 + f_2 p - L_k^T B_{nk} L_n [U_k].
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

$$\text{где } M_k = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{vmatrix} \text{ – матрица инерции узла;}$$

$$L_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & z_{ni} & -y_{ni} \\ 0 & 1 & 0 & -z_{ni} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y_{ni} & -x_{ni} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad L_k = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & z_{ki} & -y_{ki} \\ 0 & 1 & 0 & -z_{ki} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y_{ki} & -x_{ki} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{– матрицы переноса}$$

линейного перемещения, где  $x, y, z$  – расстояние до центра масс соответствующего твердого тела.

Геометрический смысл матриц  $L_n, L_k$  заключается в том, что с их помощью определяются поля малых перемещений точек твердого тела через три проекции малого перемещения полюса и три проекции малых углов поворота вокруг полюса (рис. 1).

Систему, представленную на рис. 1, и уравнения движения (1) можно рассматривать как конечный элемент, в виде двух масс, соединенных произвольным количеством упругих стержней с распределёнными параметрами. Данный элемент можно использовать для описания упругого стыка, если рассматривать стык как некоторый фиктивный стержень.

Пусть твердые тела соединены между собой сосредоточенными жесткостями:  $C_x, C_y, C_z, C_x^m, C_y^m, C_z^m$ . Первые три жесткости препятствуют линейным смещениям, а три других – угловым. Тогда, с учётом линейных преобразований получим:

$$A_{nk}^0 = L_n^T C L_n; \quad B_{nk}^0 = L_n^T C L_k, \quad (2)$$

где  $C$  – матрица сосредоточенных жесткостей.

Решая полученные уравнения при  $p = i \cdot \omega$ , где  $p$  – параметр преобразования Лапласа,  $\omega$  – частотный параметр, строятся амплитудно-фазочастотные характеристики (АФЧХ) для интересующих нас точек упругой системы автомобиля.

На комплексной плоскости точки вектора  $W(i\omega)$ , образуют кривую, называемую АФЧХ системы.

Данная кривая может служить средством для исследования рассеяния

энергии, а также для приближенного моделирования сложных механических систем. Аналогичные формулы могут быть получены при наличии одного или двух интегрирующих звеньев в цепи измерения, а также при снятии АФЧХ не по перемещению, а по скорости и ускорению.

У АФЧХ для упругой системы автомобиля, и изображённой на рис.3, доминирующих оказалось два витка. Это свидетельствует том, что данная система ведёт себя как система с двумя степенями свободы.

С целью установления характера резонансных пиков АФЧХ сравниваем значения частоты первого и второго витка со значением соответствующих парциальных частот, так, например, первая парциальная частота равна

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{C_{\Sigma}}{m_{куз}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot C_{рес}}{m_{куз}}} = 10,6 \text{ с}^{-1}.$$

Соответствующая частота на АФЧХ равна  $9,6 \text{ с}^{-1}$ . Это позволят говорить, что первый виток АФЧХ соответствует колебанию кузова.

Второй виток АФЧХ близок к парциальной частоте переднего моста

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{C_{\Sigma}}{m_{мост}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot C_{шин} + 2 \cdot C_{рес}}{m_{мост}}} = 31,6 \text{ с}^{-1}.$$

Соответствующая частота на АФЧХ равна  $65 \text{ с}^{-1}$ . Но, тем не менее, можно говорить, что второй виток соответствует колебаниям переднего моста.

По установленным норма частота колебаний кузова не должна превышать частоты шагов человека при ходьбе, которая примерно равна  $0,8 \text{ Гц}$  или  $5,03 \text{ с}^{-1}$ . Соответственно нужно изменить жесткость рессор, чтобы повысить комфортабельность автомобиля.

Для построения переходного процесса используется дискретное преобразование Фурье. Результат получается численным интегрированием при  $t = 0 \dots \infty$  по формуле:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re}(W(i\omega) e^{i\omega t}) d\omega. \quad (3)$$

На рис. 4 показаны переходные процессы, при различном демпфировании в амортизаторах, при наезде левым передним колесом на единичное препятствие.

Кривая 1 имеет первую собственную частоту, равную  $1,45 \text{ Гц}$  и неоптимальный относительный коэффициент демпфирования  $\nu = 0,145$ . Подбираем коэффициент демпфирования из условия отсутствия максимума у коэффициента динамичности. Кривая 2 соответствует первой собственной частоте, равной  $0,8 \text{ Гц}$  и демпфированию, когда  $\nu = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .



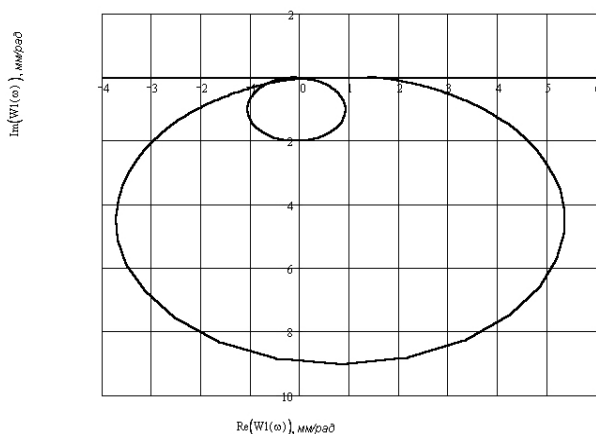


Рис. 3. АФЧХ упругой системы автомобиля

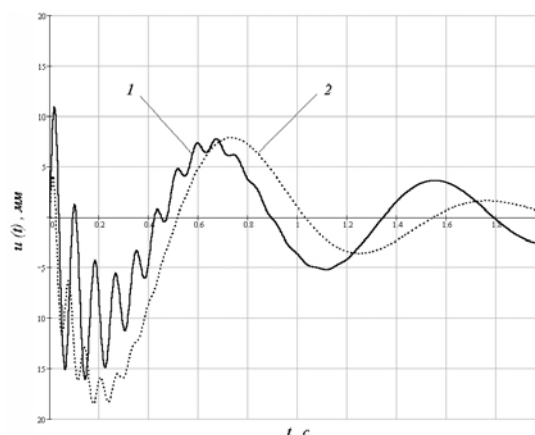


Рис. 4. График переходного процесса

Разработанная методика позволяет учесть влияние динамических характеристик пассажиров на систему в целом, а также разработать механизмы адаптации подвески в зависимости от их количества и состояния дорожного покрытия. При необходимости находим динамические напряжения в узлах и агрегатах автомобиля, возникающие при наезде на препятствие.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Санкин, Ю. Н. Динамические характеристики вязко-упругих систем с распределёнными параметрами / Ю. Н. Санкин // Саратов: Издательство Саратовского университета. – 1977. – 312 с.

2.Санкин, Ю. Н. Нестационарные задачи динамики стержневых систем при внезапном нагружении и соударении с препятствием // Вестник СамГУ. Серия математическая. Самара. № 1(5). 2007. С. 91-100.

3.Санкин, Ю. Н. Метод конечных элементов в динамике вязко-упругих систем в пространстве преобразований Лапласа // Труды Средневожского математического общества. – 2006 . – Т.8, №2. – С. 22-33.

• • • • •

*Ромаишков С. В., аспирант кафедры «Теоретическая и прикладная механика» УлГУ.*

# АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПРИМЕР ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ФАЗОВЫЕ КООРДИНАТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*А. С. Семенов*

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления. Требуется среди непрерывных функций фазовых координат  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и управления  $u(t)$ , удовлетворяющих на отрезке  $[t_0; T]$  системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad (1)$$

и неравенству

$$\mathcal{G}_0(x_1) = x_1 - l \leq 0, \quad (2)$$

а на концах отрезка

$$t_0 = 0, \quad T = 1, \quad (3)$$

условиям

$$x_1(t_0) = 0, \quad x_2(t_0) = 1, \quad x_1(T) = 0, \quad x_2(T) = -1, \quad (4)$$

найти такие, которые доставляют минимальное значение функционалу

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^2(t) dt. \quad (5)$$

Решая методом вариационного исчисления [1] задачу (1)-(5) без фазового ограничения (2), устанавливаем, что имеет смысл рассмотреть задачу оптимизации (1)-(5) для значений параметра  $l$  из интервала  $(0; 1/4)$ , так как в этом случае возможен выход оптимальной траектории на границу области, определяемую неравенством (2). Изображающая фазовая точка будет находиться на границе в интервале  $[t_1; t_2]$  ( $t_0 < t_1 < t_2 < T$ ), если в момент времени  $t = t_1$  выполняются условия

$$\mathcal{G}_0(x_1(t_1)) = x_1(t_1) - l = 0, \quad \mathcal{G}_1(x_2(t_1)) = x_2(t_1) = 0,$$

а для  $t \in [t_1, t_2]$  – равенство

$$\mathcal{G}_2(u) = u = 0.$$

Здесь  $\mathcal{G}_1 = \frac{d}{dt}(\mathcal{G}_0) = \dot{x}_1(t) = x_2(t)$ ,  $\mathcal{G}_2 = \frac{d}{dt}(\mathcal{G}_1) = \dot{x}_2 = u$ .

Таким образом, рассматриваемая задача является задачей оптимального управления с ограничением на фазовые координаты типа неравенства второго порядка [1], [2]. Для ее решения воспользуемся обозначениями и необходимыми условиями оптимальности, приведенными в работе [2].

Последовательно получаем.

На интервале  $t \in [0, t_1)$ , соответствующему участку оптимальной траектории, лежащему внутри области (2), имеем

$$u(t) = -\rho_1 t + \rho_2, \quad x_2 = -\frac{\rho_1}{2} t^2 + \rho_2 t + 1, \quad x_1 = -\frac{\rho_1}{6} t^3 + \frac{\rho_2}{2} t^2 + t,$$

где  $t_1 = 3l$ ,  $\rho_1 = -\frac{2}{9l^2}$ ,  $\rho_2 = -\frac{2}{3l}$ .

На граничном участке  $t \in [t_1, t_2]$ ,  $t_2 = 1 - 3l$ ,  $x_1 = l$ ,  $x_2 = 0$ ,  $u = 0$ .

Для интервала  $t \in (t_2, 1]$ , на котором опять оптимальная траектория находится внутри области (2), находим

$$u = \rho_3 t - (\rho_4 + \rho_3), \quad x_2 = \frac{\rho_3}{2} t^2 - (\rho_4 + \rho_3)t + (\rho_4 + \frac{\rho_3}{2} - 1),$$

$$x_1 = \frac{\rho_3}{6} t^3 - (\rho_4 + \rho_3) \frac{t^2}{2} + (\rho_4 + \frac{\rho_3}{2} - 1)t + 1 - \frac{\rho_4}{2} - \frac{\rho_3}{6}, \quad \text{где } \rho_3 = -\frac{2}{9l^2}, \quad \rho_4 = \frac{2}{3l}.$$

Вычисляя значение функционала (5), получаем  $J = 4/9l$ .

Необходимо отметить, что оптимальная траектория с одним граничным участком возможна только при значениях параметра  $l$  из интервала  $(0; 1/6)$ .

В заключение приводим решение задачи при значении параметра  $l$  из отрезка  $[1/6; 1/4]$ . В этом случае в момент времени  $t = 1/2$  имеет место одна общая точка оптимальной траектории с границей области (2) и решение задачи принимает вид:

при  $t \in [0; 1/2)$

$$u = 24(1 - 4l)t - 8(1 - 3l), \quad x_2 = 12(1 - 4l)t^2 - 8(1 - 3l)t + 1$$

$$x_1 = 4(1 - 4l)t^3 - 4(1 - 3l)t^2 + t;$$

при  $t \in [1/2; 1]$

$$u = 24(1 - 4l)(1 - t) - 8(1 - 3l), \quad x_2 = -12(1 - 4l)(1 - t)^2 + 8(1 - 3l)t - 1,$$

$$x_1 = (1 - 4l)(1 - t)^3 - 4(1 - 3l)(1 - t)^2 - t + 1,$$

а значение функционала определится формулой  $J = 2 + 6(1 - 4l)^2$ .

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК №П1122.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Троицкий В. А. Оптимальные процессы колебаний механических систем / В. А. Троицкий – Л.: Машиностроение, 1976. – 246 с.
2. Семенов А. С. Необходимые условия в вариационных задачах оптимизации процессов управления с ограничениями на фазовые координаты  $q$ -го порядка // А.С. Семенов. – Труды ЛПИ №318, 1971. – С. 122-130.



*Семенов Алексей Степанович*, к.ф.-м.н., профессор кафедры «Высшая математика» УлГТУ, тел. (8422)77-81-17

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

*А. С. Семенов, А. Р. Дегтярев*

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления. Требуется среди дифференцируемых функций  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  (фазовые координаты) и непрерывных функций  $u(t)$  (управление), удовлетворяющих на отрезке  $[t_0; T]$  системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad \dot{x}_3 = x_1; \quad (1)$$

а на концах отрезка – условиям

$$\begin{aligned} t_0 = 0, \quad x_1(t_0) = 0, \quad x_2(t_0) = 1, \quad x_3(t_0) = 0; \\ T = 1, \quad x_1(T) = 0, \quad x_2(T) = -1, \quad x_3(T) = 1,5; \end{aligned} \quad (2)$$

найти такие, которые доставляют минимальное значение функционалу

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^2(t) dt.$$

Решаем поставленную задачу методом вариационного исчисления [1]. Строим функции

$$\begin{aligned} H = -\frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u + \lambda_3 x_1, \\ \varphi = \rho_1 x_1(t_0) + \rho_2 (x_2(t_0) - 1) + \rho_3 x_3(t_0) + \rho_4 x_1(T) + \rho_5 (x_2(T) + 1) + \\ + \rho_6 \left( x_3(T) - \frac{3}{2} \right) + \rho_7 t_0 + \rho_8 (T - 1), \end{aligned}$$

где  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$ ,  $\lambda_3(t)$  – функциональные, а  $\rho_i (i = \overline{1,8})$  – постоянные множители Лагранжа.

Используя необходимые условия правила множителей [1], получаем систему дифференциальных уравнений для  $\lambda_i(t)$

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_3, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1, \quad \dot{\lambda}_3 = 0 \quad (3)$$

и начальные условия для нее

$$\lambda_1(t_0) = \rho_1, \quad \lambda_2(t_0) = \rho_2, \quad \lambda_3(t_0) = \rho_3, \quad (4)$$

а также уравнение для определения управления  $u(t)$  -

$$u(t) = \lambda_2(t). \quad (5)$$

Интегрируя систему (3) с начальными условиями (4), получаем

$$\lambda_3(t) \equiv const = \rho_3, \quad \lambda_1(t) = -\rho_3 t + \rho_1, \quad \lambda_2(t) = \frac{1}{2} \rho_3 t^2 - \rho_1 t + \rho_2. \quad (6)$$

Теперь решаем систему (1) с начальными условиями из (2), учитывая, что последнее соотношение из (6) и формуле (5) дают

$$u = \frac{1}{2} \rho_3 t^2 - \rho_1 t + \rho_2 .$$

Последовательно находим

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{6} \rho_3 t^3 - \frac{1}{2} \rho_1 t^2 + \rho_2 t + 1, \\ x_1(t) &= \frac{1}{24} \rho_3 t^4 - \frac{1}{6} \rho_1 t^3 + \frac{1}{2} \rho_2 t^2 + t, \\ x_3(t) &= \frac{1}{120} \rho_3 t^5 - \frac{1}{24} \rho_1 t^4 + \frac{1}{6} \rho_2 t^3 + \frac{1}{2} \rho_2 t^2 . \end{aligned}$$

Используя граничные условия (при  $t=T$ ) из (2), получим следующую линейную алгебраическую систему уравнений для определения постоянных  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$

$$\begin{cases} \rho_3 - 3\rho_1 + 6\rho_2 = -12, \\ \rho_3 - 4\rho_1 + 12\rho_2 = -24. \\ \rho_3 - 5\rho_1 + 20\rho_2 = 120. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$\rho_3 = 960, \quad \rho_1 = 480, \quad \rho_2 = 78 .$$

Таким образом, искомое решение рассматриваемой задачи оптимального управления определяется следующими формулами

$$\begin{aligned} u(t) &= 480t^2 - 480t + 78, \\ x_1(t) &= 40t^4 - 80t^3 + 39t^2 + t, \\ x_2(t) &= 160t^3 - 240t^2 + 78t + 1, \\ x_3(t) &= 8t^5 - 20t^4 + 13t^2 + \frac{1}{2}t^2, \\ J &= 642 . \end{aligned}$$

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК №П1122.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Троицкий В. А. Оптимальные процессы колебаний механических систем / В. А. Троицкий. – А. : Машиностроение, 1976. – 246 с.



*Семенов Алексей Степанович, к.ф.-м.н., профессор кафедры «Высшая математика» УлГТУ.*

*Дегтярев Алексей Робертович, студент группы Пд-21 ФИСТ УлГТУ.*

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О БРАХИСТОХРОНЕ СО СВОБОДНЫМ КОНЦОМ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ КАК ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

*А. С. Семенов, С. А. Кондратьев*

Рассмотрим следующую задачу о брахистохроне. Требуется на множестве всех гладких плоских кривых, лежащих в первом квадранте правой декартовой системы координат  $Oxy$  (ось  $Oy$  направлена вертикально вниз), найти такую, двигаясь по которой из начала координат с нулевой начальной скоростью материальная точка (массы  $m$ ) под действием силы тяжести ( $F = mg$ ) достигнет прямой с уравнением  $x = a$  ( $a > 0$ ) за кратчайшее время  $T_k$ .

Введя безразмерные переменные

$$x_1 = \frac{x}{a}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{y}{a}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{2g}{a}}t \quad (1)$$

и используя построенную в работе [1] математическую модель движения точки, приходим к следующей задаче оптимального управления. Среди непрерывных и неотрицательных функций  $x_1(\tau)$ ,  $x_2(\tau)$ ,  $u_1(\tau)$ ,  $u_2(\tau)$ , удовлетворяющих на отрезке  $[\tau_0, T]$  системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{d\tau} = u_1 x_2, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{1}{2} u_2, \quad (2)$$

соотношению

$$u_1^2 + u_2^2 - 1 = 0, \quad (3)$$

а на концах отрезка – условиям

$$\tau_0 = 0, \quad x_1(\tau_0) = 0, \quad x_2(\tau_0) = 0, \quad x_1(T) = 1, \quad (4)$$

найти такие, которые сообщают функционалу

$$J = T$$

минимальное значение.

Решаем эту задачу методом вариационного исчисления [2]. Строим функции

$$H = \lambda_1(\tau)x_2 u_1 + \lambda_2(\tau)\frac{1}{2}u_2 + \mu_1(\tau)(u_1^2 + u_2^2 - 1),$$
$$\varphi = T + \rho_1 x_1(\tau_0) + \rho_2 x_2(\tau_0) + \rho_3(x_1(T) - 1) + \rho_4 \tau_0,$$

где  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\mu_1$  – переменные, а  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$ ,  $\rho_4$  – постоянные множители Лагранжа.

Используя необходимые условия правила множителей и автономность системы (2), получаем

$$\frac{d\lambda_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\lambda_2}{d\tau} = -\lambda_1 u_1; \quad (5)$$

$$x_2 \lambda_1 + 2u_1 \mu_1 = 0, \quad \frac{1}{2} \lambda_2 + \mu_1 2u_2; \quad (6)$$

$$\lambda_1(\tau_0) = \rho_1, \quad \lambda_2(\tau_0) = \rho_2, \quad \lambda_1(T) = -\rho_3, \quad \lambda_2(T) = 0; \quad (7)$$

$$\rho_4 = -1, \quad \lambda_1(T)u_1(T)x_2(T) + \frac{1}{2} \lambda_2(T)u_2(T) = 1. \quad (8)$$

Из соотношений (3) и (6), учитывая условия Клейма [2], которое в нашем случае имеет вид  $\mu_1(\tau) \leq 0$ , получаем

$$\mu_1(\tau) = -\frac{1}{2} f, \quad u_1 = \frac{\lambda_1 x_2}{f}, \quad u_2 = \frac{1}{2} \frac{\lambda_2}{f}, \quad (9)$$

где  $f = \sqrt{\lambda_1^2 x_2^2 + \frac{1}{4} \lambda_2^2}$ .

Теперь из первого уравнения системы (5), используя первое условие из (7), имеем  $\lambda_1(\tau) \equiv const = \rho_1$ .

Следовательно, учитывая соотношения (9), для определения функций  $x_1(\tau)$ ,  $x_2(\tau)$  и  $\lambda_2(\tau)$  из уравнений (2) и второго уравнения из системы (5) получаем следующую нормальную систему дифференциальных уравнений третьего порядка

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{\rho_1 x_2^2}{f_1}, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{1}{4} \frac{\lambda_2}{f_1}, \quad \frac{d\lambda_2}{d\tau} = -\frac{\rho_1^2 x_2}{f_1}, \quad (10)$$

где  $f_1 = \sqrt{\rho_1^2 x_2^2 + \frac{1}{4} \lambda_2^2}$ ,  $\rho_1 > 0$ , т. к.  $x_1(\tau)$  возрастает.

Симметрическая форма записи системы (10) такова

$$\frac{dx_1}{\rho_1 x_2^2} = \frac{dx_2}{\frac{1}{4} \lambda_2} = \frac{d\lambda_2}{-\rho_1^2 x_2} = \frac{d\tau}{f_1}.$$

Из нее видно, что система (10) имеет интегрируемую комбинацию [3] первого

порядка  $\frac{dx_2}{\frac{1}{4} \lambda_2} = \frac{d\lambda_2}{-\rho_1^2 x_2}$  или  $\rho_1^2 x_2 dx_2 + \frac{1}{4} \lambda_2 d\lambda_2 = 0$ . Общий интеграл этой

комбинации можно записать в виде  $f_1 = \sqrt{\rho_1^2 x_2^2 + \frac{1}{4} \lambda_2^2} \equiv C_1 = const$ ,  $C_1 > 0$ .

Отсюда, в частности, следует, что  $C_1 = f_1(T) = \sqrt{\rho_1^2 x_2^2(T) + \frac{1}{4} \lambda_2^2(T)}$ .

Подставляя во второе соотношение из (8) выражения для  $u_1(\tau)$ ,  $u_2(\tau)$  из (9),

учитывая, что  $\lambda_1(T) = \rho_1$  получаем  $\frac{\rho_1^2 x_2^2(T) + \frac{1}{4} \lambda_2^2(T)}{f_1(T)} = 1$  или  $\frac{f_1^2(T)}{f_1(T)} = 1$ .

Следовательно,  $f_1(T) = C_1 = 1$ .

Таким образом, система (10) равносильна следующей системе

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \rho_1 x_2^2, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{1}{4} \lambda_2, \quad \frac{d\lambda_2}{d\tau} = -\rho_1^2 x_2. \quad (11)$$

Интегрируя систему (11) при начальных условиях из (4) и (7) методом исключения [3], последовательно получаем

$$\frac{d^2 x_2}{d\tau^2} = -\frac{1}{4} \rho_1^2 x_2, \quad x_2 = C \sin \frac{\rho_1}{2} \tau, \quad C = \text{const} > 0, \quad \lambda_2 = 4 \frac{dx_2}{d\tau};$$

$$\lambda_2 = 1C\rho_1 \cos \frac{\rho_1}{2} \tau, \quad f_1 = \sqrt{\rho_1^2 C^2 \left( \sin^2 \frac{\rho_1}{2} + \cos^2 \frac{\rho_1}{2} \right)} = \rho_1 C = 1,$$

$$C = \frac{1}{\rho_1}; \quad x_2 = \frac{1}{\rho_1} \sin \frac{\rho_1}{2} \tau, \quad \lambda_2 = 2 \cos \frac{\rho_1}{2} \tau;$$

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \rho_1 \frac{1}{\rho_1^2} \sin^2 \frac{\rho_1}{2} \tau = \frac{1}{2\rho_1} (1 - \cos \rho_1 \tau),$$

$$x_1 = \frac{1}{2\rho_1} \left( \tau - \frac{1}{\rho_1} \sin \rho_1 \tau \right).$$

Теперь для определения неизвестных  $\rho_1$  и  $T$  воспользуемся последними условиями из (4) и (7). Получаем систему

$$\frac{1}{2\rho_1} \left( T - \frac{1}{\rho_1} \sin \rho_1 T \right) = 1, \quad 2 \cos \left( \frac{\rho_1}{2} T \right) = 0,$$

решая которую, имеем

$$T = \sqrt{2\pi}, \quad \rho_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи оптимального управления определяется следующими формулами

$$x_1 = \frac{1}{\pi} \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tau - \sin \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tau \right), \quad x_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \tau,$$

$$u_1 = \sin \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \tau \right), \quad u_2 = \cos \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \tau \right);$$

$$J = \sqrt{2\pi}.$$

Возвращаясь к размерным переменным  $x$  и  $y$ , получаем параметрическое решение задачи о брахистохроне с «полусвободным» концом





а на концах отрезка – условиям

$$t_0 = 0, x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 1, T = 1, x_1(T) = 0, x_2(T) = -1 \quad (2)$$

найти такие, которые сообщают функционалу

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^2(t) dt$$

минимальное значение.

Решаем сформулированную задачу методом вариационного исчисления [1]. Строим функции

$$H = -\frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u,$$

$$\varphi = \rho_1 x_1(t_0) + \rho_2 (x_2(t_0) - 1) + \rho_3 x_1(T) + \rho_4 (x_2(T) + 1) + \rho_5 t_0 + \rho_6 (T - 1),$$

где  $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$  – функциональные, а  $\rho_1, \dots, \rho_6$  – постоянные множители Лагранжа.

Используя необходимые условия правила множителей (условия стационарности) [1], получаем систему дифференциальных уравнений для  $\lambda_1, \lambda_2$

$$\dot{\lambda}_1 = 0, \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \quad (3)$$

и начальные условия для нее

$$\lambda_1(t_0) = \rho_1, \lambda_2(t_0) = \rho_2, \quad (4)$$

а также уравнение для определения управления  $u(t)$

$$u(t) = \lambda_2(t). \quad (5)$$

Интегрируя систему (3) с начальными условиями (4), получаем

$$\lambda_1(t) \equiv const = \rho_1, \lambda_2(t) = -\rho_1 t + \rho_2. \quad (6)$$

Тогда в соответствии с равенством (5), из (6) следует

$$u(t) = -\rho_1 t + \rho_2.$$

Теперь решаем систему (1) с начальными условиями из (2). Последовательно находим

$$x_2(t) = -\frac{1}{2}\rho_1 t^2 + \rho_2 t + 1,$$

$$x_1(t) = -\frac{1}{6}\rho_1 t^3 + \frac{1}{2}\rho_2 t^2 + t.$$

Используя граничные условия (при  $t = T = 1$ ) из (2), получаем следующую линейную алгебраическую систему уравнений для определения постоянных  $\rho_1$  и  $\rho_2$

$$\begin{cases} -\rho_1 + 2\rho_2 = -4, \\ -\rho_1 + 3\rho_2 = -6. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение  $\rho_1 = 0, \rho_2 = -2$ .



Используя необходимые условия стационарности и автономность системы (2), получаем

$$\dot{\lambda}_1 = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 u_1; \quad (4)$$

$$\lambda_1 x_2 + 2\mu_1 u_1 = 0, \quad \frac{1}{2}\lambda_2 + 2\mu_1 u_2 = 0; \quad (5)$$

$$\lambda_1(t_0) = \rho_1, \quad \lambda_2(t_0) = \rho_2, \quad \lambda_1(T) = -\rho_3, \quad \lambda_2(T) = -\rho_4; \quad (6)$$

$$\rho_5 = -1, \quad \lambda_1(T)u_1(T)x_2(T) - \frac{1}{2}\lambda_2(T)u_2(T) = 1. \quad (7)$$

Из соотношений (2) и (5), учитывая условия Клейма [1], которое в нашем случае принимает вид  $\mu_1(t) \leq 0$ , получаем

$$\mu_1 = -\frac{1}{2}f, \quad u_1 = \frac{\lambda_1 x_2}{f}, \quad u_2 = \frac{1}{2} \frac{\lambda_2}{f}, \quad (8)$$

где  $f = \sqrt{\lambda_1^2 x_2^2 + \frac{1}{4}\lambda_2^2}$ . Теперь из первого уравнения системы (4), используя первое условие из (6) получаем  $\lambda_1(t) \equiv const = \rho_1$ . Следовательно, учитывая соотношения (8), для определения функций  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и  $\lambda_2(t)$  из уравнений (1) и второго уравнения из системы (4) получаем следующую нормальную систему дифференциальных уравнений третьего порядка

$$\dot{x}_1 = \frac{\rho_1 x_2^2}{f_1}, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{4} \frac{\lambda_2}{f_1}, \quad \dot{\lambda}_2 = -\frac{\rho_1^2 x_2}{f_1}, \quad (9)$$

где  $f_1 = \sqrt{\rho_1^2 x_2^2 + \frac{1}{4}\lambda_2^2}$ , причем  $\rho_1 > 0$ , так как  $x_1(t)$  возрастает.

Симметрическая форма записи системы (9) имеет вид

$$\frac{dx_1}{\rho_1 x_2^2} = \frac{dx_2}{\frac{1}{4}\lambda_2} = \frac{d\lambda_2}{-\rho_1^2 x_2} = \frac{dt}{f_1}.$$

Из нее видно, что система (9) имеет интегрируемую комбинацию [2] первого порядка  $\frac{dx_2}{\frac{1}{4}\lambda_2} = \frac{d\lambda_2}{-\rho_1^2 x_2}$  или  $\rho_1^2 x_2 dx_2 + \frac{1}{4}\lambda_2 d\lambda_2 = 0$ .

Общий интеграл ее можно записать в виде  $f_1 = \sqrt{\rho_1^2 x_2^2 + \frac{1}{4}\lambda_2^2} \equiv const = C_1$ ,  $C_1 \geq 1$ .

Отсюда, в частности, следует, что  $C_1 = f_1(T) = \sqrt{\rho_1^2 x_2^2(T) + \frac{1}{4}\lambda_2^2(T)}$ .

Подставляя во второе соотношение из (7) выражения для  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  из (9),

учитывая, что  $\lambda_1(T) = \rho_1$ , получаем  $\frac{\rho_1^2 x_2^2(T) + \frac{1}{4} \lambda^2(T)}{f_1(T)} = 1$  или  $\frac{f_1^2(T)}{f_1(T)} = 1$ .

Следовательно,  $f_1(T) = 1$  и  $C_1 = 1$ .

Таким образом, система уравнений (9) равносильна системе

$$\dot{x}_1 = \rho_1 x_2^2, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{4} \lambda_2, \quad \dot{\lambda}_2 = -\rho_1^2 x_2. \quad (10)$$

Интегрируя систему (10) при начальных условиях из (3) и (6) методом исключения [2], последовательно получаем

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= \frac{1}{4} \rho_1^2 x_2, \quad x_2 = C \cdot \sin \frac{\rho_1}{2} t, \quad C = \text{const} > 0, \\ \lambda_2 &= 4\dot{x}_2 = 2C\rho_1 \cos \frac{\rho_1}{2} t, \\ f_1 &= \sqrt{\rho_1^2 C^2 \left( \sin^2 \frac{\rho_1}{2} t + \cos^2 \frac{\rho_1}{2} t \right)} = \rho_1 C = 1, \quad C = \frac{1}{\rho_1}; \\ x_2 &= \frac{1}{\rho_1} \sin \frac{\rho_1}{2} t, \quad \lambda_2 = 2 \cos \frac{\rho_1}{2} t, \\ \dot{x}_1 &= \frac{1}{2\rho_1} (1 - \cos \rho_1 t), \quad x_1 = \frac{1}{2\rho_1} \left( t - \frac{1}{\rho_1} \sin \rho_1 t \right). \end{aligned}$$

Теперь для определения неизвестных  $\rho_1$  и  $T$  воспользуемся двумя последними условиями из (3). Получаем систему уравнений

$$\frac{1}{2\rho_1} \left( T - \frac{1}{\rho_1} \sin \rho_1 T \right) = 1, \quad \frac{1}{\rho_1} \sin \frac{\rho_1}{2} T = \alpha. \quad (11)$$

Введем новые переменные  $x$  и  $y$  по формулам

$$x = \rho_1 T, \quad y = \rho_1. \quad (12)$$

В новых переменных системы (11) принимает вид

$$x - \sin x = 2y^2, \quad \sin \frac{x}{2} = \alpha y,$$

и на множестве  $G = \left\{ x \in (0, 2\pi); y \in \left( 0, \frac{1}{\alpha} \right] \right\}$  допускаемых по условиям задачи

значений переменных она будет равносильна системе

$$y = \frac{1}{\alpha} \sin \frac{x}{2}, \quad \frac{x - \sin x}{1 - \cos x} = \frac{1}{\alpha^2}. \quad (13)$$

Ясно, что в общем случае при произвольном значении  $\alpha$  второе уравнение в системе (13) можно решить только численным методом. Однако, в некоторых частных случаях, возможно получение точного решения методом



## МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ДИНАМИКИ ИННОВАЦИОННОГО РАЗВИТИЯ РЕГИОНА НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ИННОВАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА И РАНГА

*В. А. Сергеев, Д. К. Подымало*

*На основе известной детерминированной модели инновационного потенциала и развитой авторами корреляционно-регрессионной модели инновационного ранга региона предложены варианты прогнозного расчета изменения инновационного потенциала и ранга региона при ожидаемых изменениях показателей инновативности региональной экономики и известных среднероссийских темпах изменения указанных показателей.*

В современной экономической теории и в практической деятельности при анализе инновационных процессов на макро-, мезо- и микроуровнях широко используется понятие инновационного потенциала (ИП) [1-5]. В широком смысле потенциал (от латинского *potentia* - сила, мощь) означает «совокупность имеющихся средств, возможностей в какой-либо области»; согласно [1] ИП региона – это совокупность научно-технических, инфраструктурных, финансовых, правовых, социокультурных и иных возможностей обеспечить восприятие и реализацию инноваций.

Алгоритмы количественной оценки ИП базируются на нескольких методологических основаниях. Первое - выбор совокупности показателей, характеризующих инновационное развитие региона. Система показателей должна обеспечивать комплексную характеристику инновационных процессов, включая его основные стадии: "наука - инновации - производство и распространение", при этом число показателей должно быть ограничено и доступно из открытой статистики. Конкретный набор таких показателей определяется зачастую пристрастиями авторов, однако большинство ученых и экспертов выделяет пять групп показателей, характеризующих структурные составляющие ИП [2-4]: кадровая; научная; технико-технологическая; финансовая; результирующая.

В литературе преобладают детерминированные модели оценки ИП, суть которых сводится к расчету комплексного показателя [5]. По каждой группе показателей определяется обобщенный показатель  $I_j$  уровня соответствующей структурной составляющей ИП. Далее определение количественной оценки ИП состоит в суммировании обобщенных показателей со своими весовыми коэффициентами  $K_j$ :

$$ИП = \sum_{j=1}^N K_j \cdot I_j, \quad (1)$$

где  $m$  – число групп показателей. Подобный подход используют многие аналитические и научные организации, в том числе и Академия народного хозяйства при Правительстве РФ.

Детерминированные модели количественной оценки ИП не позволяют адекватно оценить достаточность уровня и сбалансированность структурных составляющих ИП; значительный уровень ИП может быть получен за счет одной структурной составляющей. Методологической основы для определения весовых коэффициентов  $K_j$  обычно не предлагается и зачастую весовые коэффициенты определяются либо экспертно, либо просто полагаются одинаковыми.

Оценку сбалансированности структурных составляющих ИП в ряде работ [2, 4] предлагается проводить путем сравнения значений региональных показателей со среднероссийскими. В [5] в качестве количественной меры ИП предлагается использовать площадь профиля показателей инновационной сферы региона, отнесенных к среднероссийским значениям и ранжированных в порядке убывания. Недостатками таких подходов является невозможность прогнозирования изменения ИП региона при изменении тех или иных показателей.

Наряду с детерминированными методами оценки уровня инновативности региональной экономики широко применяются экспертные рейтинговые оценки, на которые чаще всего и ориентируются региональные элиты. Инновационный ранг региона может рассматриваться не как детерминированная величина, полученная расчетным путем, а как случайная величина, определяемая экспертно совокупностью количественных и качественных показателей региональной экономики.

Наиболее авторитетными являются рейтинги (ранги) рейтингового агентства «Эксперт РА» [7]. Поэтому нами были рассмотрены статистические связи между инновационными рангами региона, публикуемыми агентством «Эксперт РА», агрегатированными показателями развития субъектов РФ, рассчитанными АНХ, и отдельными показателями инновационного развития регионов, опубликованными в официальной статистике. Расчеты проводились по стандартной программе Microsoft Excel.

Коэффициент корреляции  $\rho_{ИР\_АП}$  между инновационным рангом 89 регионов за 2005-2006 гг. и агрегатированным показателем развития этих субъектов РФ, рассчитанным АНХ по состоянию на середину 2006 г. [6], оказался равным 0,663. Такое значение коэффициента корреляции на наш взгляд свидетельствует с одной стороны о достаточно тесной связи между различными моделями оценки, а с другой стороны - о наличии факторов, которые не отражаются в официальной статистике, но учитываются при экспертной оценке.



Расчет коэффициентов корреляции между показателями инновационного развития регионов и их инновационными рангами произведен по данным 2004 года. Для Ульяновской области этот год может рассматриваться как отсчетный, поскольку в 2004 году произошла смена руководства области, а инновационный ранг был наивысшим за последние 10 лет. В статистических сборниках по этому году приводится информация по широкому набору показателей. Результаты расчета по 27 показателям приведены в [6]. Разброс составил от 0,79 до 0,07. Для дальнейшего анализа были выделены группы слабо коррелированных  $\rho \leq 0,33$ , средне коррелированных  $0,33 < \rho < 0,66$  и сильно коррелированных  $\rho \geq 0,66$  показателей. Выборочные расчеты корреляции ИР и ряда показателей по 2000 г. и 2006 г. показали, что коэффициенты корреляции изменяются в пределах второго знака после запятой. Это значит, что выделенные по степени коррелированности группы показателей достаточно устойчивы.

К слабо коррелированным относятся четыре показателя: число исследователей с учеными степенями, объем произведенной продукции подвергшейся значительным технологическим изменениям или вновь внедренной, удельный вес затрат на технологические инновации в объеме отгруженной продукции инновационно-активных предприятий и число персональных компьютеров на 100 работников. Сама по себе «остепененность» персонала и компьютеризированность предприятий не играют сколько-нибудь важного значения, важна структура «остепененности» и эффективное использование компьютеров в сфере управления.

Средне коррелированные показатели с коэффициентом корреляции  $0,33 < \rho < 0,66$  требуют отдельного рассмотрения для каждого региона в контексте развития региональной экономики. Для принятия решения и включения того или иного показателя в число актуальных, по нашему мнению, необходимо исследовать тенденцию изменения коррелированности этого показателя с инновационным рангом на протяжении нескольких лет. Если присутствует устойчивая тенденция роста  $\rho$ , то этот показатель следует принимать во внимание при выработке управленческих решений. Если наблюдается тренд на снижение  $\rho$ , то показатель можно отнести к слабо коррелированным.

В группу сильно коррелированных входят семь показателей. Следует отметить, что четыре из семи показателей характеризуют уровень и качество менеджмента:

- число организаций, использовавших специализированные программные средства для организационных, управленческих и экономических задач;
- число инновационно активных организаций по обучению и подготовке персонала;
- число организаций, использовавших сеть Интернет;
- число организаций, использовавших специализированные программные средства для проектирования.

Управление этими показателями не требует серьезных капитальных вложений, но требует серьезной заинтересованной работы по совершенствованию управленческих команд. В этой сфере значительную роль могут и должны играть региональные институты развития персонала, общественные организации, профессиональные сообщества и объединения предпринимателей. Материально-финансовые показатели тоже важны, но они на наш взгляд являются следствием правильно выбранных стратегий и в большей степени зависят не только от прямой поддержки и преференций государства, но и от состояния финансовой, налоговой и кредитной систем в целом.

Для выделенной группы сильно коррелированных показателей по стандартной методике определены коэффициенты  $\{m_i\}$  уравнения множественной регрессии, связывающего значения инновационного ранга ИР региона со значениями этих показателей (см. таблицу).

$$IP = \sum_{i=1}^n m_i X_i + b \quad (2)$$

*Таблица*

m7	m6	m5	m4	m3	m2	m1	b
-0,035	-1,959	0,070	-0,012	-1,113	0,169	-0,021	79,638

Коэффициент детерминированности составил 0,793, близость этого коэффициента к единице указывает на достаточно высокую достоверность выбранной модели. Уравнение (2) дает значение инновационного ранга региона со среднеквадратической погрешностью  $-\pm 12,3$ . Точность модели, вероятно, можно повысить, если при статистических расчетах брать приведенные показатели.

Из сущности моделей инновационного потенциала и развитой в работе корреляционно-регрессионной модели инновационного ранга региона следует, что повышение инновационного потенциала (или понижение инновационного ранга) региона возможно за счет изменения только тех **позитивных** показателей инновационной деятельности региона, темпы изменения которых превышают среднероссийские темпы. При этом суммарный вклад **позитивных** показателей в увеличение инновационного потенциала (или уменьшение инновационного ранга) должен превышать уменьшение инновационного потенциала (или рост инновационного ранга) обусловленные отставанием изменения остальных **негативных** показателей инновационной деятельности от среднероссийского темпа. На основе этого подхода разработано три варианта количественной оценки динамики инновативности региональной экономики.

**ВАРИАНТ 1.** На основе детерминированной модели инновационного потенциала региона. В детерминированной модели инновационный потенциал  $i$ -го региона определяется по формуле:

$$ИП_T^i = \sum_{j=1}^N K_j \cdot I_{jT}^i, \quad (3)$$

где  $K_j$  – весовые коэффициенты, удовлетворяющие условию  $\sum_{j=1}^N K_j = 1$ ,

$I_{jT}^i = \frac{X_{jT}^i}{X_{jT}^{БАЗ}}$  – приведенное значение  $j$ -го показателя  $i$ -го региона в  $T$ -ый год,

$X_{jT}^i$  – абсолютное значение  $j$ -го показателя  $i$ -го региона в  $T$ -ый год,  $X_{jT}^{БАЗ}$  – базовое (нормирующее) значение  $j$ -го показателя в  $T$ -ый год, как правило, это максимальное значение указанного показателя среди регионов России.

Для того чтобы определить изменение инновационного потенциала конкретного региона по изменению показателей инновационной деятельности, необходимо учитывать, что эти показатели изменяются во всех регионах России. Для оценки необходимо использовать среднероссийскую скорость (темп) изменения каждого параметра, которую можно найти из статистических данных стандартным методом.

$$S_j^{POC} = \left[ \frac{\sum_i^M X_{jT}^i}{\sum_i^M X_{j(T-1)}^i} \right] - 1, \quad (4)$$

где  $T$  – текущий год, предшествующий планируемому периоду,  $(T-1)$  – соответственно, предыдущий год.

Более жесткие прогнозные оценки получаться, если скорость изменения каждого параметра рассчитывать по данным регионов-лидеров.

Скорость (темп) изменения каждого показателя в данном конкретном регионе рассчитывается аналогично

$$S_j^i = \left[ X_{jT}^i / X_{j(T-1)}^i \right] - 1. \quad (5)$$

Полагая весовые коэффициенты неизменными, инновационный потенциал по результатам следующего  $(T+1)$ -го года можно оценить по формуле

$$ИП_{(T+1)}^i = \sum_{j=1}^N K_j \cdot I_{j(T+1)}^i \approx \sum_{j=1}^N K_j \cdot I_{jT}^i \frac{1 + S_j^i}{1 + S_j^{POC}} = ИП_T^i + \Delta ИП^i, \quad (6)$$

где  $\Delta ИП^i$  – изменение инновационного потенциала:

$$\Delta ИП^i = \sum_{j=1}^N K_j I_{jT}^i \frac{S_j^i - S_j^{POC}}{1 + S_j^{POC}}. \quad (7)$$

Очевидно, что изменение инновационного потенциала может быть как положительным так и отрицательным, в зависимости от соотношения региональной  $\{S_j^i\}$  и среднероссийской  $\{S_j^{POC}\}$  скорости изменения показателей инновационной деятельности.

Обозначим для удобства выражение  $K_j I_{jT}^i \frac{S_j^i - S_j^{POC}}{1 + S_j^{POC}}$  под знаком суммы

в (7) через  $R_j^i$  и проранжируем значения  $R_j^i$  в порядке возрастания от наименьшего к наибольшему, присвоив каждому показателю ранг его значимости  $-r_j$ , то есть  $r_j$  - это номер показателя в ранжированном по значениями  $R_j^i$  ряде. При принятии управленческих решений по развитию инновационной сферы региона основное внимание необходимо в первую очередь уделять показателям с наибольшими отрицательными значениями  $R_j^i$ , то есть тем показателям, которые дают снижение ИП. Необходимо стремиться к увеличению темпов изменения этих показателей и к приближению к среднероссийским значениям. И так по мере возрастания  $r_j$ .

**ВАРИАНТ 2** - на основе статистической (регрессионной) модели инновационного ранга. Инновационный ранг  $i$ -го региона в  $T$ -ый год определяется по регрессионной зависимости

$$ИП_T^i = \sum_{j=1}^N m_{jT} X_{jT}^i, \quad (8)$$

где  $m_{jT}$  - коэффициенты регрессионного уравнения, связывающего инновационный ранг региона со значениями показателей его инновационной деятельности. Коэффициенты  $m_{jT}$  находятся с помощью стандартной программы на основании статистических данных за соответствующий год. Очевидно, что эти коэффициенты изменяются от года к году, по мере изменения показателей инновационной деятельности. Полагая, что темп изменения  $m_{jT}$  сохраняется неизменным в течение хотя бы двух лет ( в силу инерционности НИС) ожидаемое изменение  $\Delta m_{j(T+1)}$  коэффициентов  $m_{jT}$  в планируемом  $(T+1)$ -м году можно оценить на основе сравнения  $m_{jT}$  с этими коэффициентами в предшествующем году:  $m_{j(T-1)}$ .

$$\Delta m_{j(T+1)} = m_{jT} - m_{j(T-1)}. \quad (9)$$

Обозначим  $Q_j$  относительное изменение  $j$ -го коэффициента  $Q_j = \frac{\Delta m_{j(T+1)}}{m_{jT}}$ .

Тогда изменение инновационного ранга можно записать

$$\Delta IP_{(T+1)}^j = \sum_{j=1}^N m_{j(T+1)} X_{jT}^i (1 + S_j^i) - \sum_{j=1}^N m_{jT} X_{jT}^i = \sum_{j=1}^N m_{jT} X_{jT}^i (S_j^i + Q_j + S_j^i Q_j). \quad (10)$$

Инновационный ранг может повышаться или понижаться в зависимости от соотношения  $\{Q_j\}$  и  $\{S_j^i\}$ . Далее алгоритм анализа и определения приоритетных направлений управленческих решений и действий субъектов региональной инновационной системы аналогичен рассмотренному в варианте 1: значения  $W_j = m_{jT} X_{jT}^i (S_j^i + Q_j + S_j^i Q_j)$  необходимо проранжировать в порядке убывания и наибольшее внимание обращать на те показатели, которые приводят к наибольшему увеличению инновационного ранга.

**ВАРИАНТ 3.** На основе комбинированного подхода. По алгоритму варианта 1 рассчитываются значения  $R_j^i$ . Затем эти значения умножаются на коэффициенты корреляции  $\rho_j$  соответствующего  $j$ -го параметра с инновационным рангом региона, которые находятся по стандартной методике по статистическим данным в текущем году:

$$Z_j^i = R_j^i \cdot \rho_j \quad (11)$$

Далее ранжируются значения комплексного показателя  $Z_j^i$  в порядке возрастания значений. Выбор направлений влияния проводят также как и в варианте 1, то есть наибольшее внимание и наибольшие усилия уделяются тем показателям, которые соответствуют наименьшим значениям  $Z_j^i$ . В этом варианте усилия направляются на изменение тех показателей, которые наряду с увеличением ИП дают наибольшее снижение ИР.

Предложенные методики позволяют количественно оценить изменение инновационного потенциала или инновационного ранга региона при заданных рубежных показателях изменения показателей инновативности региона и известных среднероссийских темпах изменения указанных показателей. Методики позволяют также определить приоритетные направления приложения управленческих усилий и ресурсов для более динамичного развития инновативности региональной экономики.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Большой экономический словарь / Под ред. А.Н. Азрилияна. - 4-е изд., доп. и перераб. - М.: Институт новой экономики, 1999. - С. 705.



## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ГЕТЕРОПЕРЕХОДНЫХ СВЕТОДИОДНЫХ СТРУКТУРАХ**

***В. А. Сергеев, А. М. Ходаков***

*Представлена неизотермическая тепловая модель InGaN/GaN светодиода, учитывающая экспоненциальную зависимость плотности тока и плотности рассеиваемой мощности активной областью гетероструктуры от температуры. Итерационным методом решена система уравнений, включающая решение стационарного уравнения теплопроводности с адиабатными условиями второго рода на боковых границах гетероструктуры и уравнения термодинамики, при условии постоянства полного тока, поступающего в структуру. Получены расчётные распределения плотности тока и температуры по активной области структуры в зависимости физических характеристик модели.*

В процессе эксплуатации высокоэффективных светодиодов (СИД) на основе гетероструктуры InGaN/GaN необходимо обеспечение стабильной работы полупроводниковой структуры прибора в условиях высоких плотностей токов и температур. Обычно анализируя тепловые свойства СИД полагают, что температура и плотность мощности однородно распределены в плоскости гетероперехода [1, 2], хотя даже при однородном распределении источников тепла в структуре, в результате неравномерного отвода тепла от ее различных частей, распределение температуры будет неоднородным. Экспоненциальная зависимость плотности теплового потока источников тепла, расположенных в активной области полупроводниковой структуры, от температуры приводит к перераспределению плотности мощности в структуре и увеличению этой неоднородности. Внутренняя квантовая эффективность гетеропереходных СИД с ростом температуры и плотности тока уменьшается, что приводит к ещё большему возрастанию положительной тепловой обратной связи. В результате действия указанных механизмов положительной тепловой обратной связи зависимость максимальной температуры гетероперехода от полного тока СИД будет нелинейной. Степень нелинейности может служить мерой неоднородности плотности мощности и температуры в приборной структуре и применяться в качестве оценки её качества.

Для расчёта и анализа указанных эффектов была рассмотрена нелинейная теплоэлектрическая модель InGaN/GaN СИД с гетеропереходной структурой на сапфировой подложке, размещенной на металлическом теплоотводе. Расчётная геометрия структуры и её состав приведены на рис.1. Плотность тока структуры определяется выражением [3]:

$$J(x, y) = C \cdot \exp\left(-\frac{E_g - e(U_D - \rho_n L_{get} J(T_n))}{kT_n(x, y)}\right), \quad (1)$$

где  $C$  – слабо зависящий от температуры параметр,  $U_D$  – прямое падение напряжения на СИД,  $E_g$  – ширина запрещённой зоны полупроводника,  $T_n(x, y)$  – температура гетероперехода,  $\rho_n$ ,  $L_{get}$  – удельное сопротивление и толщина гетероструктуры соответственно,  $k$  – постоянная Больцмана,  $e$  – заряд электрона. Плотность электрической мощности, преобразуемой в тепло можно найти по следующей формуле

$$q(x, y) = [1 - \eta(T_n, J)] J(T_n) U_D, \quad (2)$$

где  $\eta$  – внутренняя квантовая эффективность гетероструктуры.

Математическая модель, описывающая тепловые процессы в рассматриваемой структуре СИД, включает в себя составление и решение следующей системы уравнений:

1) решение нелинейной задачи теплопроводности, с температурозависимой функцией плотности теплового потока источников тепла, действующих в активной области рассматриваемой гетероструктуры;

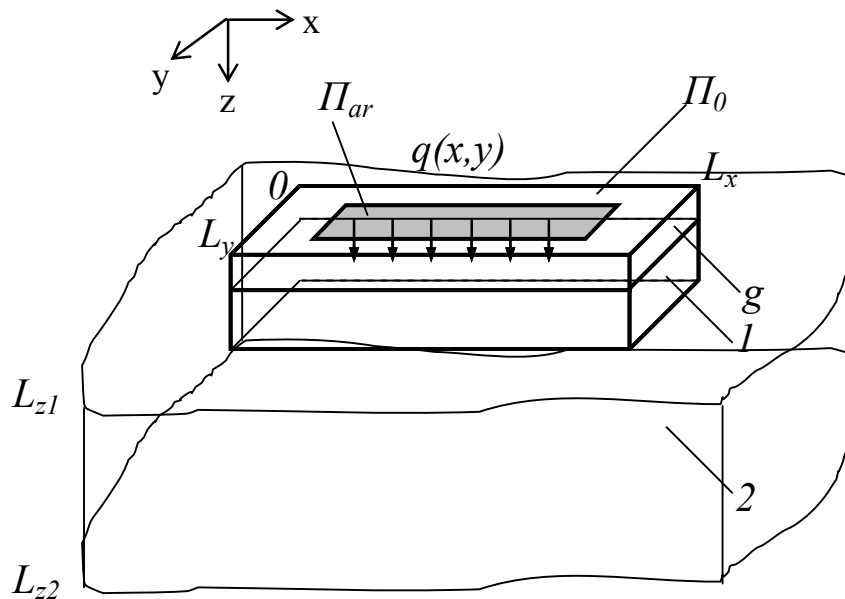


Рис. 1. Расчётная модель диодной структуры:  $g$  - гетероструктура InGaN/GaN; 1 – сапфировая подложка; 2 – теплоотвод;  $P_{ar}$  – область источников тепла.

2) уравнения (1), определяющего положительную обратную связь между протекающими в структуре тепловыми и электрическими процессами;

3) уравнение условия постоянства полного тока через СИД, так как при подключении СИД к источнику тока, полный ток, поступающий в структуру, должен поддерживаться постоянным.

При построении тепловой модели были сделаны следующие предположения:

а) источники тепла будем считать распределенными на поверхности подложки, вследствие малой толщины и высокой теплопроводности слоёв



гетероструктуры;

б) не учитываем отвод тепла через боковые поверхности структуры;

в) теплофизические характеристики слоёв считаем постоянными и их значения берём при средней температуре полупроводниковой структуры.

В тепловой модели полупроводниковой структуры размеры теплоотвода определялись конечными по осям  $x$  и  $y$  размерами подложки. На его боковых поверхностях задавались адиабатные условия, а температура нижней поверхности теплоотвода по оси  $z$  принималась равной  $T_0$ . На границе подложка – теплоотвод задавались обычные условия сопряжения, то есть равенства тепловых потоков и температур. Рассматривался в качестве предельного случая идеальный теплоотвод, с температурой равной температуре окружающей среды  $T_0$ .

Уравнения тепловой модели и граничные условия будут следующими:

- уравнение теплопроводности

$$T_{i_{xx}} + T_{i_{yy}} + T_{i_{zz}} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

$$(x, y, z) \in \Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, L_{z(i-1)} \leq z \leq L_{zi} (L_{z0} = 0)\}; \quad (4)$$

- граничные условия

$$T_{1_x}(0, y, z) = T_{1_x}(L_x, y, z) = 0, \quad T_{1_y}(x, 0, z) = T_{1_y}(x, L_y, z) = 0, \quad (5)$$

$$-\lambda_1 T_{1_z}(x, y, 0) = q(T_1) = \begin{cases} q_{ar}(T_1), & (x, y) \in \Pi_{ar}; \\ 0, & (x, y) \in (\Pi_0 - \Pi_{ar}); \end{cases} \quad (6)$$

$$\Pi_0 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y\},$$

$$\Pi_{ar} = \{(x, y) : (L_x - l_x)/2 \leq x \leq (L_x + l_x)/2, (L_y - l_y)/2 \leq y \leq (L_y + l_y)/2\}$$

$$T_{2_x}(0, y, z) = T_{2_x}(L_x, y, z) = 0, \quad T_{2_y}(x, 0, z) = T_{2_y}(x, L_y, z) = 0, \quad (7)$$

$$\lambda_1 T_{1_z}(x, y, L_{z1}) - \lambda_2 T_{2_z}(x, y, L_{z1}) = 0, \quad T_2(x, y, L_{z1}) - T_1(x, y, L_{z1}) = 0, \quad (8)$$

$$T_2(x, y, L_{z2}) = T_0, \quad (9)$$

где  $\Delta T_i = T_i = (T_{li} - T_0)$ ,  $T_{li}$  – температура  $i$  – го слоя структуры,  $L_x, L_y, L_{z1}, L_{z2}$  – линейные размеры структуры по осям  $x, y, z$ ,  $l_x, l_y$  – линейные размеры активной области по осям  $x, y$ ,  $\lambda_1$  – коэффициент теплопроводности гетероструктуры, который принимаем равным коэффициенту теплопроводности подложки,  $\lambda_2$  – коэффициент теплопроводности теплоотвода,  $S_0$  – площадь верхней поверхности гетероструктуры;

- уравнение (2), с учётом температурной зависимости плотности тока в активной области структуры СИД, согласно соотношению (1);

- условие постоянства полного тока через СИД

$$\iint_{S_{ar}} J(U_D, T_{1l}) dx dy = I_D = const, \quad (10)$$

где  $S_{ar}$  – площадь активной области гетероструктуры.

В общем виде зависимость внутренней квантовой эффективности от температуры и плотности тока аппроксимировались экспоненциальными функциями

$$\eta(T_1, J) = \eta(T_0, J_0, \exp(-B\Delta T_1), \exp(-D\Delta J)), \quad (11)$$

где  $\Delta T_1$  и  $\Delta J$  – отклонения температуры и плотности тока от начальных значений  $T_0$  и  $J_0$ . В рассматриваемой тепловой модели эта функциональная зависимость представлялась в виде

$$\eta(T_1, J) = \exp\left(-B\frac{\Delta T_1}{T_0}\right) \cdot [A + C \exp(-D(J_0 + \Delta J))]. \quad (12)$$

Постоянные параметры  $A$ ,  $C$ ,  $B$ ,  $D$  в расчётной формуле определялись на основании экспериментальных данных [1,4] и были равны:

$$A = -0.115597, \quad C = 1.115597, \quad B = 6.279868, \quad D = 0.313955 \text{ A}^{-1}.$$

Задача теплопроводности (3) – (9) решалась при помощи интегрального косинус-преобразования Фурье по координатам  $x$  и  $y$

$$T_{inm}(z) = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} T_i(x, y, z) \cos\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right) dx dy. \quad (13)$$

В результате была получено следующее выражение для температуры перегрева верхней поверхности гетероструктуры:

$$T_1(x, y, 0) = \frac{T_{100}}{L_x L_y} + \frac{2}{\lambda_1 L_x L_y} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q_{nm} A_{nm} B_{nm} \cos(n\pi x / L_x) \cos(m\pi y / L_y), \quad (14)$$

где

$$q_{nm} = \iint_{S_0} q(x, y) \cos(n\pi x / L_x) \cos(m\pi y / L_y) dx dy,$$

$$\gamma_{nm}^2 = (n\pi / L_x)^2 + (m\pi / L_y)^2,$$

$$A_{nm} \gamma_{nm} = \begin{cases} 1/2, & n=0 \text{ и } m=0, \\ 1, & n=0 \text{ или } m=0, \\ 2, & n \neq 0 \text{ и } m \neq 0, \end{cases}$$

а величина  $T_{100}$  и коэффициенты разложения  $B_{nm}$  находились по формулам

$$T_{100} = \frac{q_{00}}{\lambda_1} \left[ (L_{z1} - z) + \frac{(L_{z2} - L_{z1})}{K_\lambda} \right],$$

$$B_{nm} = \frac{\{ch(\gamma_{nm} L_{z1}) sh[\gamma_{nm}(L_{z2} - L_{z1})] + K_\lambda sh(\gamma_{nm} L_{z1}) ch[\gamma_{nm}(L_{z2} - L_{z1})]\}}{\{sh(\gamma_{nm} L_{z1}) sh[\gamma_{nm}(L_{z2} - L_{z1})] + K_\lambda ch(\gamma_{nm} L_{z1}) ch[\gamma_{nm}(L_{z2} - L_{z1})]\}},$$

$$K_\lambda = \lambda_2 / \lambda_1.$$

Для учета тепловой обратной связи необходимо совместное решение уравнений (14) и (1) при условии (10). Алгоритм численного решения задачи

представляет собой два вложенных итерационных цикла. Внешний цикл – нахождение распределения температуры в точках разбиения при заданном распределении источников тепла. На первом шаге распределение источников тепла задается однородным и равным  $\bar{J}_0 = I_D / S_{ar}$ . Во вложенном цикле вычисляется распределение тока соответствующее полученному распределению температуры путем численного решения уравнения (10) относительно  $J_D$ . На каждом этапе внутренних итераций проводилось сравнение вычисленного значения средней плотности тока  $\bar{J}_0^{(r_1)}$  с исходным значением, то есть проверялось выполнение условия

$$\varepsilon_J^{(r_1)} = \frac{|\bar{J}_0^{(r_1)} - \bar{J}_0|}{\bar{J}_0} > \varepsilon_D, \quad (15)$$

где  $\varepsilon_D$  – заданная точность выполнения условия (10),  $r_1 = 1, 2, \dots$  – номер внутреннего цикла итераций. Управляющим изменяющимся параметром внутреннего цикла итераций выбиралось напряжение  $U_D$ . В случае выполнения условия (15), значение напряжения уменьшалась на величину

$$\Delta U = -\frac{k_B T_{II}^{(r_2-1)}}{e} \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon_D}{\varepsilon_J^{(r_1-1)} + 1} \right), \quad (16)$$

где  $r_2 = 1, 2, \dots$  – номер внешнего цикла итераций по температуре. Найденное значение  $U_D$  использовалось для вычисления плотности тока по формуле (1), затем определялись коэффициенты разложения температуры (14) и находилось новое распределение температуры по площади структуры. Процедура повторялась до тех пор, пока новое значение средней плотности тока, рассчитанное по формуле (1), не отличалось от начального  $\bar{J}_0$  на величину заданной точности  $\varepsilon_D$ . Внешний итерационный цикл заканчивался при выполнении неравенства

$$\frac{|\Theta_{max}^{(r_2)} - \Theta_{max}^{(r_2-1)}|}{\Theta_{max}^{(r_2-1)}} \leq \varepsilon_T, \quad (17)$$

где  $\Theta_{max}$  – максимальное значение температуры,  $\varepsilon_T$  – заданная точность расчёта температуры.

При проведении расчётов был выбран индикаторный InGaN/GaN мощный светодиод, параметры которого представлены в работе [1]. Размеры светодиодной структуры с подложкой составляют  $L_x \times L_y \times L_z = 0.34 \times 0.34 \times 0.102$  мм, её активной области  $l_x \times l_y = 0.24 \times 0.24$  мм. В качестве

подложки использовался сапфир с  $\lambda_1 = 0.035 \text{ Вт} \cdot \text{мм}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ . Материалом теплоотвода выбиралась медь толщиной 2 мм, с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_2 = 0.390 \text{ Вт} \cdot \text{мм}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ . Электрофизические характеристики гетероструктуры:

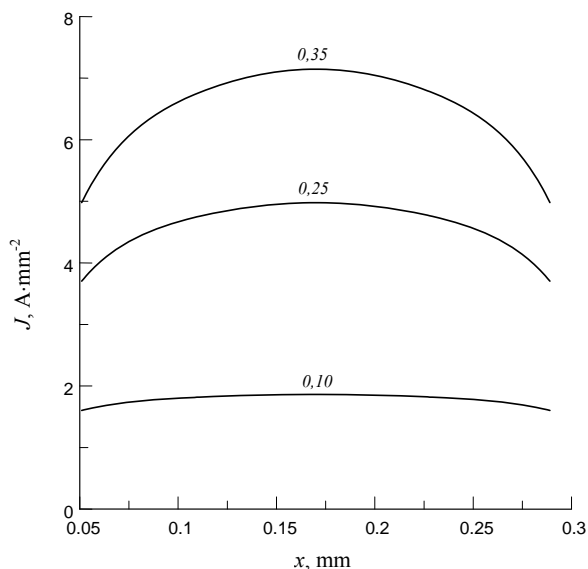


Рис. 2. Плотность тока по активной области гетероструктуры  $I_D$ : 0.1, 0.25, 0.35 А; идеальный теплоотвод;  $T_0 = 290 \text{ К}$

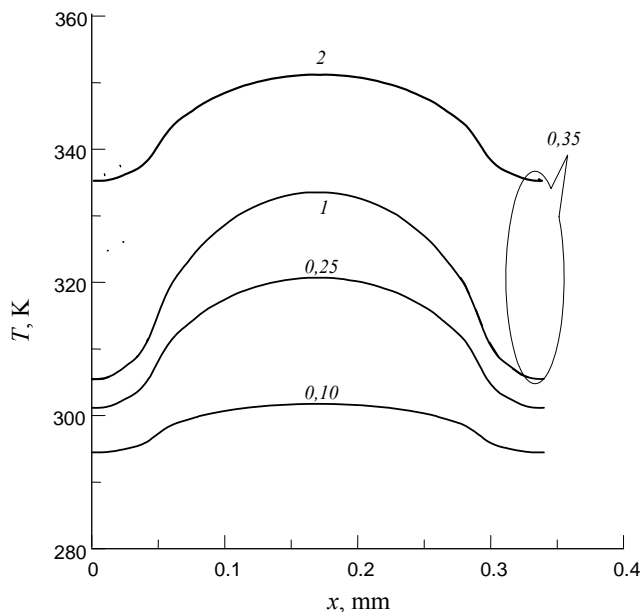


Рис. 3. Температура по активной области гетероструктуры  $I_D$ : 0.1, 0.25, 0.35 А; 1 – идеальный теплоотвод, 3 – ограниченный теплоотвод;  $T_0 = 290 \text{ К}$

$E_g = 3.4 \text{ эВ}$ ,  $\rho_n = 0.83\text{-}1.67 \text{ Ом} \cdot \text{мм}$  [5]. Значения  $\varepsilon_T = \varepsilon_D = 1e\text{-}4$ . Расчёты проводились для нескольких значений температуры окружающей среды, взятых из диапазона изменения  $T_0 = 240\text{-}340 \text{ К}$ .

На рисунках 2 и 3 представлены распределения плотности тока и температуры для центрального ( $y = 0.17 \text{ мм}$ ) сечения активной области структуры, там, где плотность мощности и температура принимают максимальные значения. Увеличение полного тока в структуре приводит к возрастанию неоднородности плотности тока по активной области. Расчёты показывают, что при возрастании средней плотности тока с 2 до 6  $\text{А}/\text{мм}^2$  степень неоднородности распределения температуры, равная отношению максимального перегрева к среднему по структуре  $\delta_T = \Delta T_{max} / \Delta T_{av}$ , увеличивается на 6 % для варианта с идеальным теплоотводом.

Расчётные распределения температуры и плотности тока по верхней поверхности гетероструктуры светодиода при различных комбинаций параметров и вида функциональной зависимости  $\eta(J, T)$  показаны на рис. 4.



## **ЗАДАЧА О ЗАВИСИМОСТИ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ОТ УРОВНЯ РАЗВИТИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ СРЕДЫ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ УЧРЕЖДЕНИИ**

*А. Р. Сибирёва*

*Математическое моделирование процессов повышения качества образования – актуальная задача сегодняшнего дня. В данной работе из многопараметрического пространства, отвечающего системе развития общеобразовательного учреждения, выделяется подпространство мега-параметров дерева целей, и строятся нелинейные дифференциальные уравнения, отражающие зависимость этих параметров от уровня развития информационной среды.*

Проблемы математического моделирования социальных процессов, в частности, процессов повышения качества образования, – актуальная задача сегодняшнего дня. Вопросы повышения качества образовательного процесса (ОП) изучались в работах по педагогике В.И. Андреева, А.П. Афанасьева, С.Е. Беспалько, Ю.В. Васильевой, Г.В. Гутник, В.А. Кальней, И.С. Клеймана, Д.Ш. Матроса, А.М. Моисеева, В.П. Панасюка, В.М. Полонского, М.М. Поташника, А.И. Севрука, Т.А. Строковой, А.И. Субетто, Д.В. Татьянченко, С.Е. Шишова и др.

Новую методологию при изучении поведения сложных систем, нелинейных, неравновесных процессов предлагает междисциплинарное направление «синергетика», зародившееся в 90-е годы в рамках естественных наук. Синергетика – научное направление, изучающее связи между элементами структуры (подсистемами), которые образуются в открытых системах (биологических, физико–химических, социальных и т.д.). Синергетический подход в педагогике использован в работах В.И. Аршинова, М.В. Богуславского, В.Г. Буданова, В.Г. Виненко, А.А. Ворожбитовой, Л.Я. Зориной, В.А. Игнатовой, С.П. Капицы, Е.Н. Князевой, С.П. Курдюмова, Г.Г. Малинецкого, В.В. Маткина, А.П. Назаретяна, Л.И. Новиковой, Е.Г. Пугачевой, Н.М. Таланчука, Д.И. Трубецкова, Т.И. Шамовой, Ю.В. Шаронина, С.С. Шевелевой и др.

Элементами модели развития образовательного учреждения (ОУ) будем считать процессы, направленные на улучшение качества ОП. Среди параметров, характеризующих модель, выделим параметры дерева целей ОУ, средовые параметры и параметры, описывающие эффективность организационных механизмов обеспечения качества.

Ветви дерева целей [2, с. 87-130] ОУ разделены на иерархические уровни (мега-, макро-, микро-) [1, с. 50] в соответствии с делением любого вида деятельности на стратегический, функциональный, операционный. Имеет место «коллективная» природа вышележащих параметров по отношению к

нижележащим. Параметры, характеризующие стратегическое планирование, более долгоживущие, чем параметры тактического и операционного планирования. Изменение вышележащих параметров влечет изменение нижележащих.

Модель развития ОУ оперирует с большим числом параметров, что создает системные трудности, когда в погоне за полнотой набора критериев, предпринимается невыполнимая попытка собрать, сопоставить и проанализировать одновременно информацию о средах, о процессах, информацию разных иерархических уровней.

Синергетические модели – грубые модели, оперирующие относительно небольшим числом параметров. «Проблема сегментирования модели на подпространства параметров малых размерностей»[1, с. 209] – задача, требующая экспертных оценок. С целью огрубления модели микро- и макро-параметры будем считать стационарно изменяющимися, средовые параметры, являющиеся сверх-медленными по сравнению с процессами жизненного цикла ОУ, будем считать постоянными. В иерархической пирамиде информация о средах занимает верхний этаж, управляя параметрами дерева целей.

В нашей задаче изучим изменение одной из сред: информационно-коммуникативной. Состояние информационно-коммуникативной среды ОУ опишем в терминах уровня сформированности информационных потоков  $V(t)$ , измеряемой в баллах по методике С.А. Степанова [5]. Экспериментально выявлена линейная зависимость уровня реализованности управляющих функций  $\varphi(t)$  по П.И. Третьякову [6, с. 105] от  $V(t)$ . Имеет место сильная корреляция.

Качество ОП характеризуется положением точки в четырехмерном пространстве. Её координаты – мега-параметры: улучшение качественного состава и деятельности учителей  $Y_1(t)$ , улучшение содержания образовательного процесса  $Y_2(t)$ , развитие личности ученика  $Y_3(t)$ , улучшение организации ОП  $Y_4(t)$ . В.П. Панасюком [3] экспериментально выявлена зависимость качества ОП от этих параметров. Величины  $Y_i(t)$  оцениваются на практике по особой шкале путем опросов потребителей, или могут быть получены путем обработки результатов микро- и макро-уровней, как интегральные критерии.

Структура мега-ветвей дерева целей зависит от структуры ОП, поэтому будет общей для различных ОУ. Тактические и операционные цели зависят от сред, от специфики ОУ, которую отразим в макро- и микро-параметрах. По М. М. Поташнику, некорректно сравнивать различные типы ОУ, результаты классов выравнивания и специализированных классов и т.д. Нужно изучать степень достижения ими поставленных целей.

Изучим зависимость показателей образовательного процесса  $Y_i(t)$  от  $V(t)$ . Предположим, что скорости  $dY_i/dt$  полиномиально зависят от  $\varphi(t)$ ,  $Y_i(t)$





# МЕТОДИКА РАСЧЕТА ЖЕСТКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТКАНЕЙ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

*А. М. Шакирова*

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 08-01-00628*

**Введение.** Для оптимизации технологий обработки тканевых материалов необходимо создание математической модели деформирования тканей. При этом необходимо учитывать, что ткани обладают целым рядом специфических свойств, в частности, перемещения и деформации не являются малыми; В данной работе рассмотрена задача определения механических характеристик тканей.

**Методика расчета жесткостных характеристик тканей.** Картина испытания на растяжение образца ткани показана на рис.1.

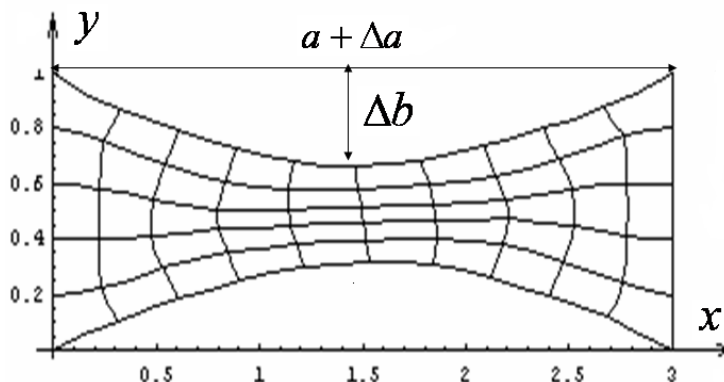


Рис. 1 Образец ткани в растянутом положении

Введем упругий потенциал в виде ( $\varepsilon_{12} = \gamma_{12}$  – деформация сдвига):

$$W = D_{110}\varepsilon_{11}^2 + D_{114}\varepsilon_{11}^6 + D_{120}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + D_{220}\varepsilon_{22}^2 + D_{224}\varepsilon_{22}^6 + D_{330}\varepsilon_{12}^2 + D_{334}\varepsilon_{12}^6, \quad (1)$$

Погонные усилия выражаются по формуле

$$N_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}},$$

В дальнейшем будем использовать и векторно-матричную символику:

$$\{N\} = [D]\{\varepsilon\}. \quad (2)$$

Для учета больших деформаций задача решается в приращениях:

$$\{\Delta N\} = [D]\{\Delta \varepsilon\} = \frac{\partial [N]}{\partial \varepsilon}\{\Delta \varepsilon\} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2}, \quad (3)$$

$$D_{11} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{11}^2} = 4D_{110} + 30D_{114}\varepsilon_{11}^4, \quad D_{22} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{22}^2} = 4D_{220} + 30D_{224}\varepsilon_{22}^4,$$

$$D_{33} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{12}^2} = 4D_{330} + 30D_{334}\varepsilon_{12}^4, \quad D_{12} = D_{21} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{11}\partial \varepsilon_{22}} = D_{120}. \quad (4)$$

Для отыскания  $D_{ijk}$  вообще говоря необходимо решать обратную задачу о деформировании образца с учетом геометрической и физической нелинейностей и использовать методы идентификации. Чтобы найти приближенные начальные значения  $D_{110}$ ,  $D_{114}$  предлагается, принимая, что  $a \gg b$ , использовать экспериментальные данные только при  $\alpha = 0^\circ$  из условия:

$$N^{11} \approx 2D_{110}\varepsilon_{11} + 6D_{114}\varepsilon_{11}^5 = D_{11}\varepsilon_{11}. \quad (5)$$

Так как рассматривается плоская задача и задаются перемещения лишь по горизонтали, то

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{\Delta a}{a} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta a}{a} \right)^2. \quad (6)$$

Далее получим соотношение для «нефизических» компонент погонных усилий с учетом больших перемещений.

Связь между физическими и тензорными компонентами имеет вид

$$N_{\text{физ}}^{11} = \frac{N^{11}}{\sqrt{G_{11}G_{11}}} = \frac{P}{b}, \quad (7)$$

Здесь  $G_{11}$  – это компоненты метрического тензора деформированной среды:

$$\begin{cases} \vec{G}_m = (\delta_{im} + u_{i,m}) \vec{e}_i \\ G_{ij} \equiv \vec{G}_i \cdot \vec{G}_j \end{cases} \quad (8)$$

$$G_{ij} = \delta_{ij} + u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i} \cdot u_{m,j} \quad (9)$$

$$G_{11} = 1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \approx \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (10)$$

Тогда получим, что

$$N^{11} = N_{\text{физ}}^{11} \sqrt{G_{11}G_{11}} = \frac{P}{b} \sqrt{\left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} = \frac{P}{b} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (11)$$

Методом минимизации квадратичной невязки между экспериментальными и расчетными значениями погонной силы  $N^{11}$  (они вычисляются с помощью (11) и (5) соответственно) легко можно найти коэффициенты  $D_{110}$ ,  $D_{114}$ . Эта методика была применена для отыскания



# К ВОПРОСУ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

*Ф. Г. Шигабутдинов, Р. З. Муртазин, Р. Ф. Мухутдинов*

**Введение:** В предыдущих работах рассматривались задачи о выпучивании изотропных цилиндрических оболочек переменной толщины в неосесимметричной постановке. Уравнения, используемые при этом, дают возможность решения и других видов задач. В данной работе рассмотрена задача о продольном ударе по части торцевого сечения цилиндрической оболочки постоянной толщины. Задача также ставится и решается в неосесимметричной постановке.

**Постановка задачи:** Пусть в начальный момент времени изотропная цилиндрическая оболочка постоянной толщины подвергается удару абсолютно твердым телом, ударяющим со скоростью  $v$ . Общий вид оболочки показан на рис.1. Положения точек поверхности приведения определим продольной координатой  $x$  и угловой координатой  $\varphi$ . Начало правой системы координат  $Oxuz$  расположено на левом торце оболочки, воспринимающем удар. Ось  $Ox$  направлена вправо, ось  $Oz$  в сторону выпуклости оболочки. На рис.2 штриховкой показана часть поверхности торцевого сечения, подвергаемая удару.

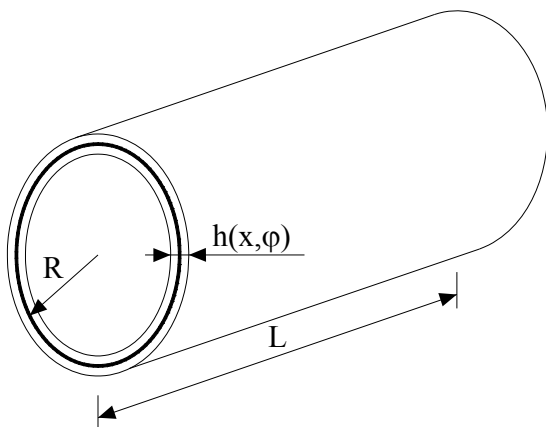


рис.1  
Общий вид оболочки

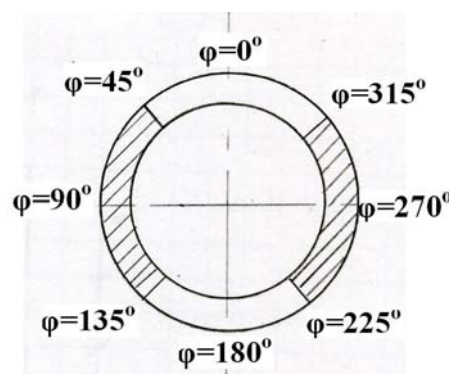


рис.2  
Площадь ударяемой поверхности торца

Начальные условия для перемещений и деформаций приняты нулевыми. Дифференциальные уравнения движения тонкой цилиндрической оболочки по модели типа Тимошенко в геометрически нелинейной постановке, учитывающие сдвиг и инерцию вращения, для переменной толщины будут иметь вид [1]:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{12}}{\partial \varphi} &= \rho h(x, \varphi) \ddot{u} \\
\frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{22}}{\partial \varphi} &= \rho h(x, \varphi) \ddot{v} \\
\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} - \frac{T_{22}}{r} + \frac{\partial}{\partial x} \left( T_{11} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{T_{12}}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( T_{12} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{T_{22}}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) &= \\
&= \rho h(x, \varphi) \ddot{w} \\
\frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi} - N_1 &= \frac{\rho (h(x, \varphi))^3}{12} \ddot{\psi}_1 \\
\frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{22}}{\partial \varphi} - N_2 &= \frac{\rho (h(x, \varphi))^3}{12} \ddot{\psi}_2
\end{aligned} \right\} (1)$$

Соотношения физического закона упругости приняты в виде:

$$T_{11} = K(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}); \quad T_{12} = \frac{K(1-\nu)}{2} \varepsilon_{12}; \quad T_{22} = K(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}); \quad (2)$$

$$M_{11} = D \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} \right); \quad M_{12} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right); \quad M_{22} = D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + \nu \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right); \quad (3)$$

$$N_1 = k^2 \frac{K(1-\nu)}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_1 \right); \quad N_2 = k^2 \frac{K(1-\nu)}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \psi_2 \right); \quad (4)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \varphi}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{r} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2; \quad (5)$$

$$K = \frac{Eh(x, \varphi)}{1-\nu^2}; \quad D = \frac{E(h(x, \varphi))^3}{12(1-\nu^2)}; \quad (6)$$

$k^2$  – коэффициент сдвига,  $\psi_1$  – угол поворота нормали к срединной поверхности вокруг касательной к окружности,  $\psi_2$  – угол поворота нормали к срединной поверхности вокруг нормали к окружности.  $u, v, w$  – перемещения точек поверхности приведения оболочки,  $T_{11}, T_{22}, T_{12}$  – усилия в срединной поверхности оболочки,  $M_{11}, M_{22}, M_{12}$  – изгибающие и крутящий моменты в срединной поверхности оболочки,  $N_1, N_2$  – перерезывающие силы,  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$  – относительные деформации, соответствующие введенной системе координат.

Соотношения (1)-(6) записывались в виде явной конечно-разностной схемы. Для оценки устойчивости разностной схемы проводились расчеты при различных шагах сетки. По временной координате в вычислительных экспериментах принималось: 0,005; 0,0025; 0,00125. Шаги по пространственным координатам были равны: 0,025 - по продольной

пространственной координате; 0,157 - по дуговой координате. Оптимальными оказались значения  $\Delta x=0,025$ ,  $\Delta \varphi=0,157$  и  $\Delta t=0,0025$ .

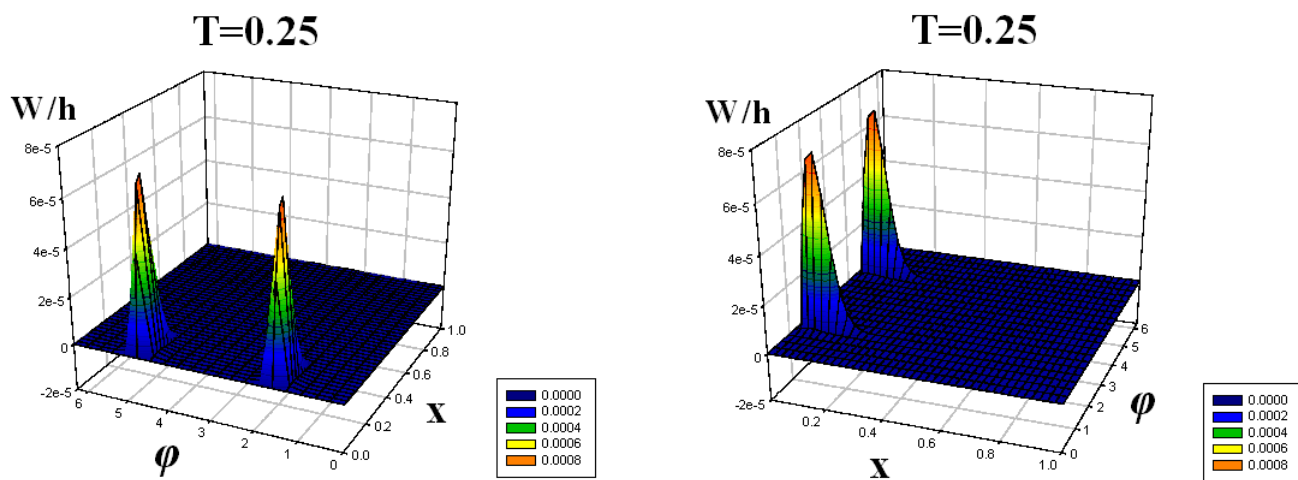


рис.3

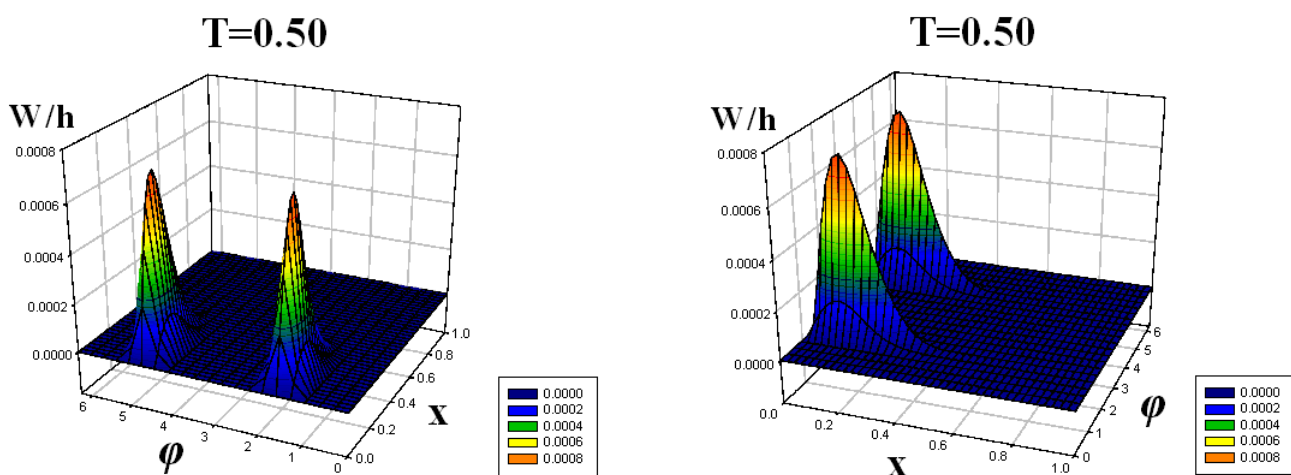


рис.4

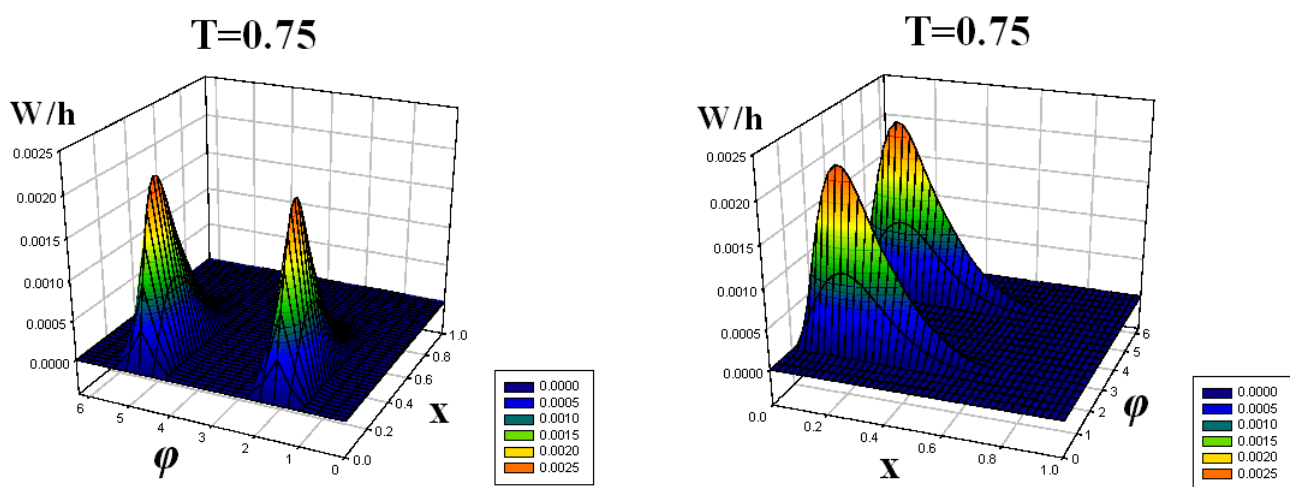


рис.5

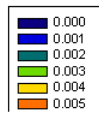
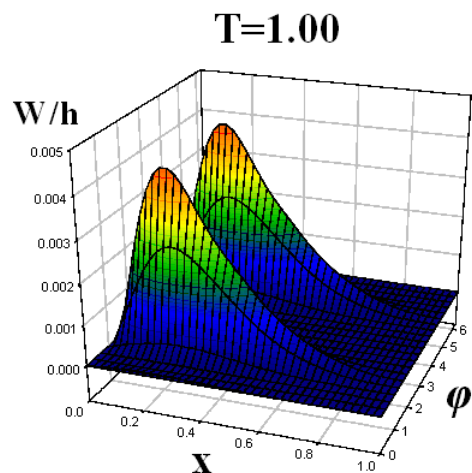
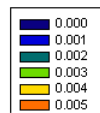
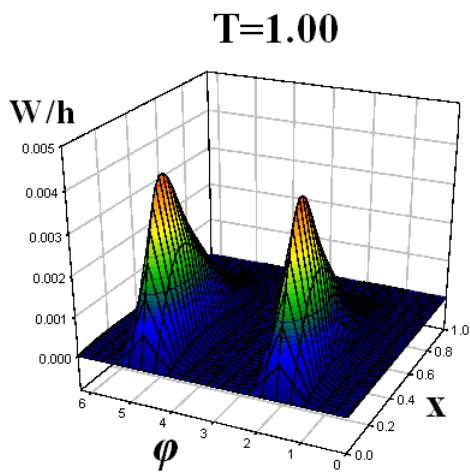


рис.6

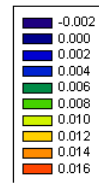
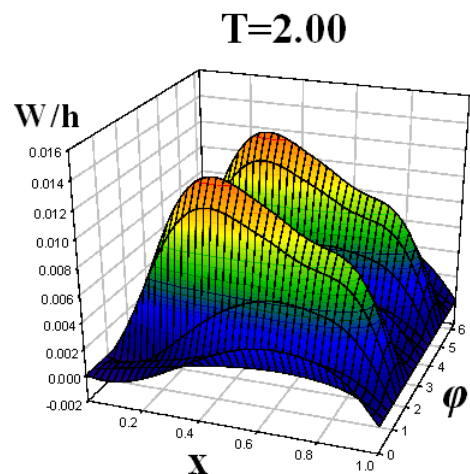
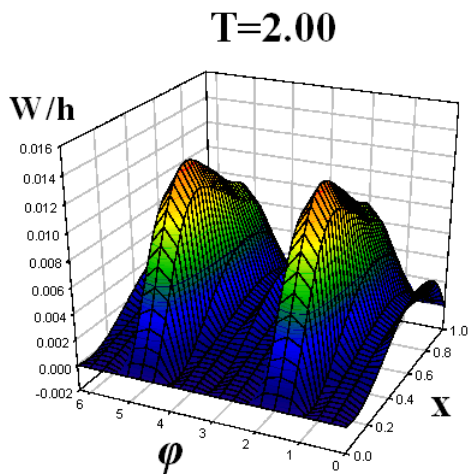


рис.7

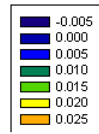
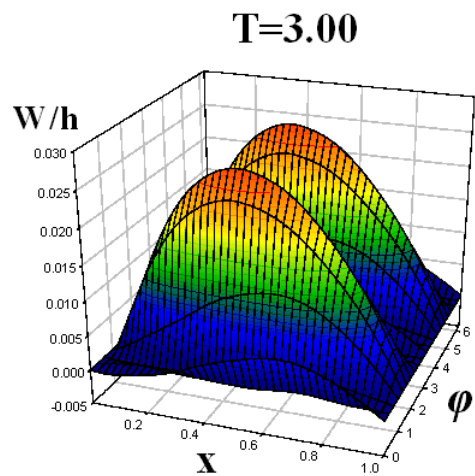
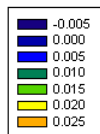
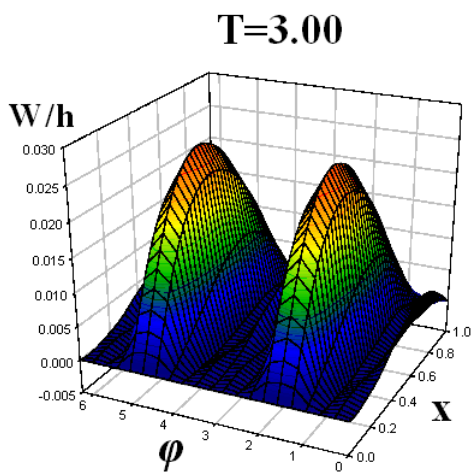


рис.8



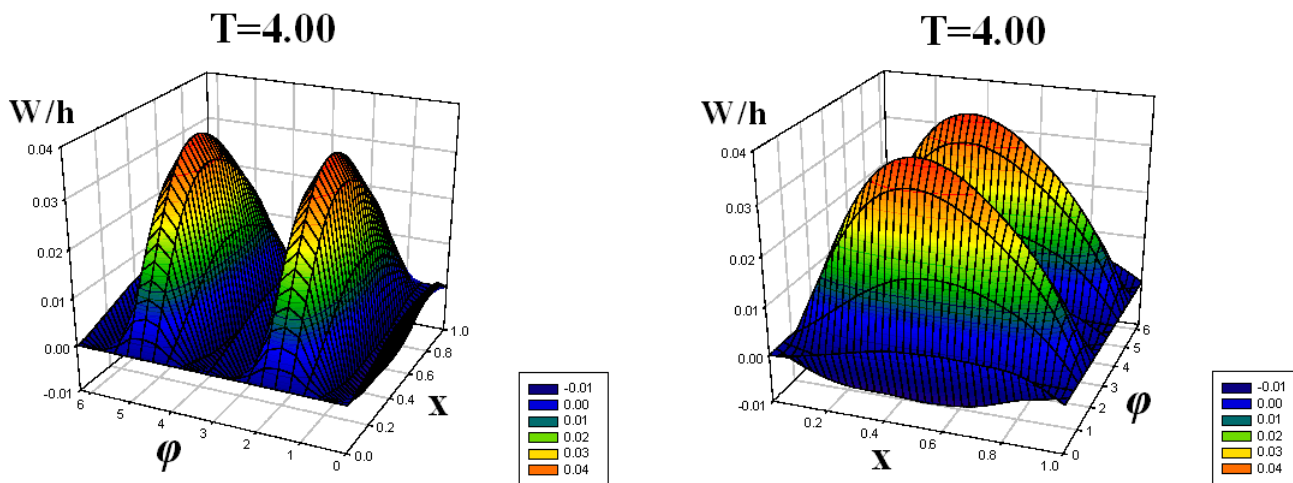


рис.9

**Обсуждение результатов.** В качестве объекта исследования рассматривалась оболочка с подвижной шарнирной опорой на торце, воспринимающем удар, и неподвижной шарнирной опорой на другом конце. Срединная поверхность выбиралась в форме круговой цилиндрической оболочки. Толщина оболочки принималась постоянной, равной  $0,05\text{ м}$ . Длина оболочки принималась равной  $2\text{ м}$ , радиус поверхности приведения равнялся  $1\text{ м}$ ; скорость удара принималась равной  $5\text{ м/с}$ . Изучались движения оболочки в течении времени, соответствующего шести пробегам продольной волны вдоль оболочки.

Некоторые результаты решений представлены на рис. 3–9. На рисунках, с двух различных точек обзора, представлены картины волнообразования во всей оболочке в различные моменты времени  $T=t/t_0$ ,  $t_0$  - время, за которое продольная волна один раз пробегает вдоль оболочки. По одной из осей откладывается продольная координата  $x$ , по другой – угловая координата  $\varphi$  (от 0 до  $2\pi$ ). Наглядность данных пространственных представлений прогибов позволяет охватить единым взглядом всю оболочку, увидеть прогибы в любой ее точке. Отчетливо видна симметричность картины прогибов по угловой координате, обусловленная симметричностью ударяемой части поверхности торцевого сечения относительно вертикальной оси.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / кол. авторов. Казань: Изд-во КГУ, 1977. – С. 3-132.

2. Шигабутдинов Ф. Г., Муртазин Р. З., Мухутдинов Р. Ф. Неосесимметричные продольно-поперечные движения изотропной цилиндрической оболочки переменной толщины при продольном ударе абсолютно твердым телом // Труды международной конференции «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке и технике», том 4. – Ульяновск, 2006. – С. 308-311.

•••••  
**Шигабутдинов Феликс Галлямович**, к.ф.м.н., проф., зав. кафедрой теоретической механики Казанской Государственной архитектурно-строительного университета (КГАСУ). Тел. (843) 510-47-29; e-mail: shigabutdinov@ksaba.ru

**Муртазин Ренат Зарипович**, к.ф.м.н., доц. кафедры теоретической механики КГАСУ. 420043, Казань, ул. Зеленая, 1, КГАСУ. Тел. (843) 510-47-91; e-mail: shigabutdinov@ksaba.ru

**Мухутдинов Рустем Фаритович**, ассистент кафедры теоретической механики КГАСУ. Тел. (843) 510-47-91; e-mail: ktm80@yandex.ru



## КОЛЕБАНИЯ КРУГЛОГО ДИСКА НА СЛОЕ АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

*И. И. Ефремов, Е. П. Лукащук*

*На основе преобразования Ханкеля построена математическая модель задачи определения сил реакции акустической среды, вызванных поперечными колебаниями круглого диска на слое, в виде сингулярного интегрального уравнения 1 рода. Определена методика нахождения его решения. Полученные закономерности имеют физическое обоснование, для частных случаев результаты подтверждаются работами других авторов.*

Рассматриваются гармонические колебания твердого круглого диска на слое акустической среды.

Для случая несжимаемой жидкости, когда определение гидродинамических силы и момента реакции сводится к определению присоединенных масс и присоединенного момента инерции, задача решена в [1], [2] сведением к интегральному уравнению Фредгольма 2 рода. В случае сжимаемой жидкости появляются демпфирующие силы и момент, математическая постановка оказывается значительно более сложной, наиболее целесообразным представляется переход к сингулярному интегральному уравнению 1 рода.

Ниже излагается методика расчета гидродинамических сил реакции акустической среды при осесимметричных поперечных колебаниях диска.

### ***Математическая постановка задачи.***

Пусть твердый круглый диск толщиной значительно меньше радиуса  $a$  совершает вынужденные колебания с заданной вертикальной скоростью  $v_z(r)$ .

Введем в рассмотрение комплексную амплитуду потенциала скорости  $\varphi(r, z)$ , которая в данном случае удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi = 0,$$

где  $\omega$  – круговая частота колебаний,  $c$  – скорость звука.

Граничными условиями являются:

– динамическое условие

$$\varphi(r, 0) = \begin{cases} \varphi^*(r), & 0 < r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases},$$

функция  $\varphi^*(r)$  связана с распределением давления по поверхности диска.

– кинематическое условие непротекания

$$\varphi_z(r,0) = v_z(r), \quad 0 < r < a.$$

На твердом дне слоя

$$\varphi_z(r,-h) = 0, \quad \forall r.$$

По условию Зоммерфельда образовавшиеся в результате кинематического возбуждения волны должны уходить от диска на бесконечность.

Для нахождения решения поставленной задачи воспользуемся преобразованием Ханкеля

$$\Phi(\alpha, z) = \int_0^{\infty} r \varphi(r, z) J_0(\alpha r) dr,$$

$$\varphi(r, z) = \int_0^{\infty} \alpha \Phi(\alpha, z) J_0(\alpha r) d\alpha$$

Тогда для функции  $\Phi(\alpha, z)$  получим дифференциальное уравнение

$$-\alpha^2 \Phi + \frac{d^2 \Phi}{dz^2} + \kappa^2 \Phi = 0, \quad \kappa = \frac{\omega}{c}$$

с краевыми условиями

$$\Phi(\alpha, 0) = \Phi^*(\alpha), \quad \Phi^*(\alpha) = \int_0^a r \varphi^*(r) J_0(\alpha r) dr,$$

$$\Phi_z(\alpha, -h) = 0.$$

Решение краевой задачи для  $\Phi(\alpha, z)$  приводит к функциональному уравнению

$$\Phi^*(\alpha) \frac{\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}}{\alpha} \operatorname{th}(h\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}) = V(\alpha),$$

где  $V(\alpha) = \int_0^{\infty} r \varphi_z(r, 0) J_0(\alpha r) dr$ .

Обратным преобразованием Ханкеля получим интегральное уравнение

$$\int_0^a s \varphi^*(s) ds \int_0^{\infty} \sqrt{\alpha^2 - \kappa^2} \operatorname{th}(h\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}) J_0(\alpha r) J_1(\alpha s) d\alpha = v_z(r), \quad (1)$$

$$0 < r < a$$

Поскольку  $\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2} \operatorname{th}(h\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}) \approx |\alpha|$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ , то ядро интегрального уравнения (1) будет гиперсингулярным. Чтобы перейти к сингулярному уравнению введем вместо  $\varphi^*(r)$  ее производную

$$\gamma(r) = -\frac{d\varphi^*}{dr}.$$

Интегральное представление  $\gamma(r)$  имеет вид

$$\gamma(r) = \int_0^{\infty} \alpha \Gamma(\alpha) J_1(\alpha, r) d\alpha, \quad \Gamma(\alpha) = \alpha \Phi^*(\alpha). \quad (2)$$

Подставив выражение (2) в уравнение (1), приходим к сингулярному уравнению относительно  $\gamma(r)$

$$\int_0^a s \gamma(s) ds \int_0^{\infty} \sqrt{\alpha^2 - \kappa^2} \operatorname{th}(h\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}) J_0(\alpha r) J_1(\alpha s) d\alpha = v_z(r), \quad (3)$$

$$0 < r < a$$

При  $\kappa \rightarrow 0$  уравнение (3) переходит в соответствующее уравнение для диска на слое несжимаемой жидкости, рассмотренное ранее в работе [3].

Гидродинамическое давление после решения уравнения (3) находится интегрированием

$$p(r) = i\rho\omega \int_r^a \gamma(s) ds.$$

Полная гидродинамическая сила давления определяется соотношением

$$N = 2\pi \int_0^a r p(r) dr.$$

### **Вычисление ядра интегрального уравнения.**

Остановимся подробнее на вопросе вычисления ядра интеграла уравнения (3)

$$k(r, s) = \int_0^{\infty} \sqrt{\alpha^2 - \kappa^2} \operatorname{th}(h\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2}) J_0(\alpha r) J_1(\alpha s) d\alpha. \quad (4)$$

Предварительно преобразуем (4) с помощью процедуры, которую обычно называют «разворотом контура интегрирования» [4].

Запишем интеграл (4) в виде

$$k(r, s) = \int_0^{\infty} f(\alpha) J_0(\alpha r) J_1(\alpha s) d\alpha. \quad (5)$$

Для нашей задачи  $f(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - \kappa^2} \operatorname{th}(h\sqrt{\alpha^2 - \kappa^2})$  является четной по  $\alpha$ .

Функции Бесселя первого рода  $J_n(z)$  представимы в виде полусуммы функций Ханкеля 1 и 2 рода:

$$J_n(z) = \frac{1}{2} \left( H_n^{(1)}(z) + H_n^{(2)}(z) \right).$$

Тогда согласно упомянутой процедуре интеграл (5) можно представить при  $r > s$  в виде

$$k(r, s) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) H_0^{(1)}(\alpha r) J_1(\alpha s) d\alpha, \quad (6)$$

а при  $r < s$  придем к выражению

$$k(r, s) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) J_0(\alpha s) H_1^{(1)}(\alpha r) d\alpha. \quad (7)$$

Для вычисления интегралов (6) и (7) контур интегрирования замыкаем в верхнюю полуплоскость. В соответствии с принципом предельного поглощения контур от  $-\infty$  до  $+\infty$  отклоняется от вещественной оси, обходя положительные вещественные полюса подынтегральной функции снизу, а отрицательные сверху. По лемме Жордана интеграл  $k(r, s)$  равен сумме вычетов в точках  $\alpha_m$  – полюсах  $f(\alpha)$ , лежащих внутри области при замыкании контура интегрирования.

Если использовать обозначения для нулей знаменателя функции  $f(\alpha)$

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha^2 - \kappa^2} &= \pm i \frac{2m-1}{2h} \pi = \pm i b_m, \\ \alpha^2 - \kappa^2 &= -b_m^2, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

то

$$\alpha_m = \begin{cases} \pm \sqrt{\kappa^2 - b_m^2}, & \kappa > b_m \\ \pm i \sqrt{b_m^2 - \kappa^2}, & \kappa < b_m \end{cases} \quad (8)$$

Из соотношений (8) видно, что  $f(\alpha)$  в нашем случае имеет конечное число вещественных полюсов и бесконечное число мнимых полюсов. Число полюсов на вещественной оси определяется по формуле

$$m_1 = \text{trunc}\left(\frac{2\kappa h + \pi}{2\pi}\right),$$

функция  $\text{trunc}(a)$  в качестве результата выдает целую часть выражения  $a$ .

С физической точки зрения  $m_1$  задает число вызванных колебаниями диска волн, расходящихся к бесконечности.

Таким образом, при  $r > s$  получим следующее выражение для ядра:

$$\begin{aligned} k(r, s) &= -\frac{\pi i}{h} \sum_{m=1}^{m_1} \frac{b_m^2}{\sqrt{\kappa^2 - b_m^2}} J_1(s\sqrt{\kappa^2 - b_m^2}) H_0^{(1)}(r\sqrt{\kappa^2 - b_m^2}) - \\ &- \frac{2}{h} \sum_{m=m_1+1}^{\infty} \frac{b_m^2}{\sqrt{b_m^2 - \kappa^2}} I_1(s\sqrt{b_m^2 - \kappa^2}) K_0(r\sqrt{b_m^2 - \kappa^2}), \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогичным путем в случае  $r < s$  придем к соотношению для ядра:

$$\begin{aligned} k(r, s) &= -\frac{\pi i}{h} \sum_{m=1}^{m_1} \frac{b_m^2}{\sqrt{\kappa^2 - b_m^2}} J_0(s\sqrt{\kappa^2 - b_m^2}) H_1^{(1)}(r\sqrt{\kappa^2 - b_m^2}) + \\ &+ \frac{2}{h} \sum_{m=m_1+1}^{\infty} \frac{b_m^2}{\sqrt{b_m^2 - \kappa^2}} I_0(s\sqrt{b_m^2 - \kappa^2}) K_1(r\sqrt{b_m^2 - \kappa^2}), \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $I_n$  – функции Вебера,  $K_n$  – функции Макдональда.

Вклад мнимых полюсов экспоненциально убывает с удалением  $\alpha_m$  от вещественной оси, поэтому при расчетах для достижения допустимой погрешности можно ограничиться конечным числом мнимых полюсов.

Для несжимаемой жидкости формулы упрощаются

$$k(r, s) = \begin{cases} -\frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} b_m I_1(b_m s) K_0(b_m r), & r > s \\ \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} b_m I_0(b_m s) K_1(b_m r), & r < s \end{cases}$$

Для больших глубин канала более удобна другая форма выражения ядра  $k(r, s)$ , приведенная в [3]

$$k(r, s) = B_0(r, s) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m B_m(r, s).$$

Коэффициенты

$$B_m(r, s) = \int_0^{\infty} \alpha e^{-2m\alpha h} J_0(\alpha r) J_1(\alpha s) d\alpha$$

можно выразить через полные эллиптические интегралы  $E(z)$  и  $K(z)$ :

$$B_m(r, s) = \frac{1}{\sqrt{4m^2 h^2 + (r+s)^2}} \times \\ \times \left( \frac{2-k_m^2}{1-k_m^2} E(k_m) - 2K(k_m) - \frac{s}{r} \frac{k_m^2}{1-k_m^2} E(k_m) \right)$$

с модулем  $k_m$

$$k_m = \sqrt{\frac{4rs}{4m^2 h^2 + (r+s)^2}}$$

### Численное решение основного интегрального уравнения

Решение интегрального уравнения (3) определяется в классе функций, ограниченных в центре диска и имеющих интегрируемую особенность на краях диска.

Соответствующая система линейных алгебраических уравнений при применении метода дискретных кольцевых вихрей имеет вид:

$$\frac{a}{n} \sum_{j=1}^n \gamma_j k(r_i, s_j) = V_z(r_i), \tag{11}$$

$$r_i = \left(i - \frac{3}{4}\right) \frac{a}{n}, \quad s_j = \left(j - \frac{1}{4}\right) \frac{a}{n}.$$

После решения системы (11) коэффициент нормальной гидродинамической силы  $N$  можно определить по формуле

$$C_n = \frac{N}{\rho \omega^2 a^3} = \pi \int_0^1 \bar{s}^2 \bar{\gamma}(\bar{s}) d\bar{s} = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n \bar{s}_j^2 \bar{\gamma}_j,$$

здесь  $\bar{s} = \frac{s}{a}$ ,  $\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\omega \cdot a}$  – безразмерные величины.

На рис.1 представлена зависимость  $|C_n|$  от приведенной частоты  $\kappa$  при  $h = 0.2$ .

Отметим, что  $b_m$  являются собственными частотами системы, представляющей собой слой акустической среды без диска. При  $\kappa = b_m$  значения ядра уравнения (3) обращаются в бесконечность, в связи с этим нормальная гидродинамическая сила стремится к нулю, что явно видно на рис.1.

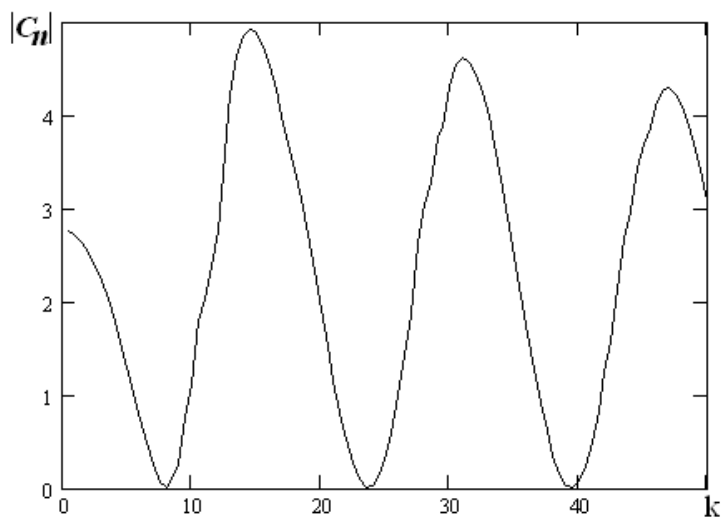


Рис.1. Зависимость  $|C_n|$  от приведенной частоты  $\kappa$  ( $h = 0.2$ ).

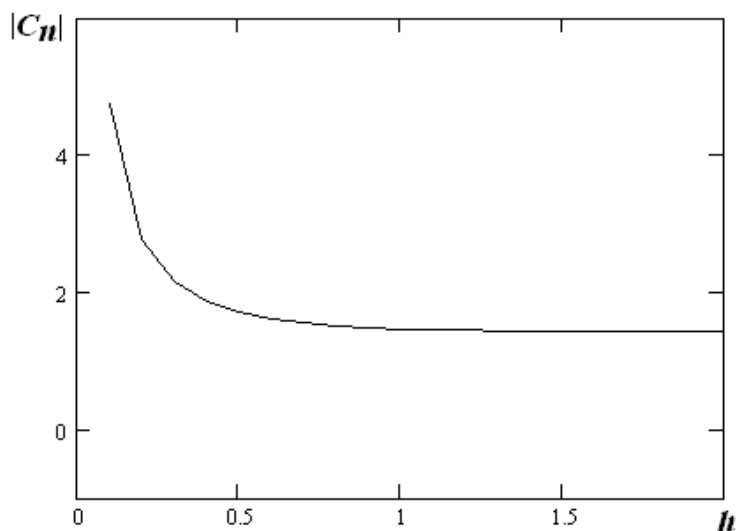


Рис.2. Зависимость  $|C_n|$  от толщины слоя ( $\kappa = 0$ ).

На рис.2 показана зависимость  $C_n$  от толщины слоя среды при  $\kappa = 0$ , что соответствует несжимаемой жидкости. Результаты, полученные по изложенной выше методике, сопоставлялись с данными работы [1] для больших глубин канала и данными работы [2] для малых толщин слоя жидкости и показали хорошее согласование

Заметим, что слой сжимаемой жидкости с диском на свободной поверхности представляет собой волновод, имеющий частоту запирания  $\omega^* = \frac{\pi c}{2h}$ . При частоте вынуждающего фактора колебаний (кинематического или динамического) ниже частоты запирания с учетом движения диска как твердого тела в системе *слой сжимаемой жидкости–диск* могут возникать изолированные бесконечные резонансы, известные как V–резонансы (резонансы Воровича [5]).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ворович И. И., Юдович В. И. Удар круглого диска о жидкость конечной глубины // ПММ, 1957, т.21, вып.4. – С. 525-532.
2. Чебаков М. И. Удар круглого диска о жидкость малой глубины // ПММ, 1974, т.38, вып.4. – С. 675-681.
3. Ефремов И. И., Лукащик Е. П. Об ударе круглого диска, лежащего на слое несжимаемой жидкости // Вестник национального техн.ун-та Украины. – Киев: Машиностроение, 2002, т.1. – С. 29-32.
4. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. – М. : Наука, 1989. – 345с.
5. Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. – М. : Научный мир, 1999. – 247с.



*Ефремов Ион Иванович, д.ф.-м.н., профессор кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского госуниверситета, e-mail: i.efremov@math.kubsu.ru.*

*Лукащик Елена Павловна, к.ф.-м.н., доцент кафедры информационных технологий Кубанский госуниверситет, e-mail ler@fpm.kubsu.ru.*

# НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

*П. А. Вельмисов, Ю. А. Казакова, А. А. Васильева*

Рассмотрим систему уравнений, описывающую движение идеальной среды (жидкости или газа):

$$\begin{cases} \rho(u_t + uu_x + vu_y + wu_z) = -p_x, \\ \rho(v_t + uv_x + vv_y + wv_z) = -p_y, \\ \rho(w_t + uw_x + vw_y + ww_z) = -p_z, \\ \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0, \\ \rho c_v (T_t + uT_x + vT_y + wT_z) + p(u_x + v_y + w_z) = (\lambda T_x)_x + (\lambda T_y)_y + (\lambda T_z)_z, \\ p = R\rho T, \end{cases} \quad (1)$$

где  $u(t, x, y, z)$ ,  $v(t, x, y, z)$ ,  $w(t, x, y, z)$  – проекции вектора скорости,  $\rho(t, x, y, z)$  – плотность,  $p(t, x, y, z)$  – давление,  $T(t, x, y, z)$  – температура,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $c_v, c_p$  – коэффициенты теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении,  $R = c_p - c_v$ . Первые три уравнения системы (1) – уравнения движения Эйлера, четвертое – уравнение неразрывности, пятое – уравнение энергии, шестое – уравнение состояния.

Для адиабатических процессов ( $\lambda = 0$ ) уравнение энергии можно привести к виду:

$$S_t + uS_x + vS_y + wS_z = 0, \quad (2)$$

где  $S$  – энтропия,  $S = c_v \ln\left(\frac{p}{\rho^\chi}\right) + S_0$ ,  $\chi = \frac{c_p}{c_v} = const$ .

Предположим, что течение плоское  $\left(\frac{\partial}{\partial z} = 0, w = 0\right)$  и изэнтропическое

( $p = c\rho^\chi$ ,  $c = \frac{p_0}{\rho_0^\chi}$ , где  $p_0, \rho_0$  – некоторые постоянные значения давления и

плотности). Для таких течений система (1) принимает вид:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y = -c\chi\rho^{\chi-2} p_x, \\ v_t + uv_x + vv_y = -c\chi\rho^{\chi-2} p_y, \\ \rho_t + \rho(u_x + v_y) + u\rho_x + v\rho_y = 0. \end{cases} \quad (3)$$

**а)** Рассмотрим частный случай системы уравнений (3) при  $\chi = 1$ ,  $\rho = e^q$  ( $q = \ln \rho$ ):



$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y = -cq_x, \\ v_t + uv_x + vv_y = -cq_y, \\ q_t + uq_x + vq_y + u_x + v_y = 0. \end{cases} \quad (4)$$

После перехода к новым переменным  $\xi, \eta, t$  [1] система (4) принимает вид:

$$\begin{cases} u_t(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) + u_\xi(x_\eta y_t - y_\eta x_t) + u_\eta(y_\xi x_t - y_t x_\xi) + u(u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi) + \\ + v(u_\eta x_\xi - u_\xi x_\eta) + c(q_\xi y_\eta - q_\eta y_\xi) = 0, \\ v_t(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) + v_\xi(x_\eta y_t - y_\eta x_t) + v_\eta(y_\xi x_t - y_t x_\xi) + u(v_\xi y_\eta - v_\eta y_\xi) + \\ + v(v_\eta x_\xi - v_\xi x_\eta) + c(q_\eta x_\xi - q_\xi x_\eta) = 0, \\ q_t(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) + q_\xi(x_\eta y_t - y_\eta x_t) + q_\eta(y_\xi x_t - y_t x_\xi) + u(q_\xi y_\eta - q_\eta y_\xi) + \\ + v(q_\eta x_\xi - q_\xi x_\eta) + u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi + v_\eta x_\xi - v_\xi x_\eta = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Решение системы (5) ищется в виде многочленов по степеням  $\eta$ :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=0}^{\alpha} u_k(\xi, t) \eta^k, \quad v = \sum_{k=0}^{\beta} v_k(\xi, t) \eta^k, \quad q = \sum_{k=0}^{\theta} q_k(\xi, t) \eta^k, \\ x &= \sum_{k=0}^{\gamma} x_k(\xi, t) \eta^k, \quad y = \sum_{k=0}^{\omega} y_k(\xi, t) \eta^k. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\alpha, \beta, \theta, \gamma, \omega$  – натуральные числа. При подстановке выражений (6) в систему (5) получим следующие максимальные степени переменной  $\eta$ :

$$\begin{cases} J_1 = \alpha + \gamma + \omega - 1, \quad J_2 = 2\alpha + \omega - 1, \quad J_3 = \beta + \alpha + \gamma - 1, \quad J_4 = \theta + \omega - 1, \\ J_5 = \beta + \gamma + \omega - 1, \quad J_6 = \alpha + \beta + \omega - 1, \quad J_7 = 2\beta + \gamma - 1, \quad J_8 = \theta + \gamma - 1, \\ J_9 = \omega + \gamma + \theta - 1, \quad J_{10} = \alpha + \omega + \theta - 1, \quad J_{11} = \beta + \gamma + \theta - 1, \quad J_{12} = \alpha + \omega - 1, \\ J_{13} = \beta + \gamma - 1. \end{cases}$$

Параметры  $J_1, J_2, J_3, J_4$  соответствуют первому уравнению системы (5),  $J_5, J_6, J_7, J_8$  – второму уравнению,  $J_9, J_{10}, J_{11}, J_{12}, J_{13}$  – третьему уравнению. Число коэффициентов в (6) равно  $r = \alpha + \beta + \theta + \gamma + \omega + 5$ , а число уравнений в системе (5) определяется соотношением:  $s = I_1 + I_2 + I_3 + 3$ , где  $I_1 = \max(J_1, J_2, J_3, J_4)$ ,  $I_2 = \max(J_5, J_6, J_7, J_8)$ ,  $I_3 = \max(J_9, J_{10}, J_{11}, J_{12}, J_{13})$ . Максимальные значения  $I_1, I_2, I_3$  можно выбрать 80 способами. Условие совместности системы уравнений для коэффициентов, зависящих от  $\xi, t$ , имеет вид:  $r = s + j$ , где  $j$  – натуральное число.

После применения описанной в [1] программы получены возможные значения параметров  $\alpha, \beta, \theta, \gamma, \omega \in \mathbb{N}$ , для которых система уравнений для

функций, зависящих от  $\xi, t$ , будет определенной или недоопределенной. Результаты классификации представлены в таблице 1:

Таблица 1

Допустимые значения параметров.													
№	$\alpha$	$\beta$	$\theta$	$\gamma$	$\omega$	$j$	№	$\alpha$	$\beta$	$\theta$	$\gamma$	$\omega$	$j$
1	0	0	0	0	1	3	30	1	1	0	0	1	0
2	0	0	0	0	2	1	31	1	1	1	0	1	0
3	0	1	0	0	1	3	32	1	1	2	0	1	0
4	0	1	0	0	2	1	33	1	2	0	0	1	0
5	0	2	0	0	2	1	34	1	2	1	0	1	0
6	1	0	0	1	0	3	35	1	2	2	0	1	0
7	1	0	0	1	1	1	36	2	0	0	1	0	0
8	1	0	1	1	1	1	37	2	0	1	1	0	0
9	1	1	0	1	1	1	38	2	1	0	1	0	0
10	1	1	1	1	1	1	39	2	1	1	1	0	0
11	1	1	2	1	1	1	40	2	1	2	1	0	0
12	2	0	0	2	0	1	41	0	1	0	1	0	0
13	0	0	0	1	0	3	42	0	1	1	1	0	0
14	0	0	0	2	0	1	43	0	1	2	1	0	0
15	0	1	0	1	1	1	44	0	2	0	0	1	0
16	0	1	1	1	1	1	45	0	2	1	0	1	0
17	1	0	0	2	0	1	46	1	1	0	1	0	0
18	0	0	0	1	1	1	47	1	1	1	1	0	0
19	0	0	1	1	1	1	48	1	1	2	1	0	0
20	1	0	1	1	0	2	49	0	0	1	0	1	2
21	1	0	2	1	0	1	50	0	0	1	0	2	0
22	1	0	2	1	1	0	51	0	1	1	0	1	2
23	2	0	1	2	0	0	52	0	1	1	0	2	0
24	0	0	1	1	0	2	53	0	1	2	0	1	1
25	0	0	1	2	0	0	54	0	2	1	0	2	0
26	1	0	1	2	0	0	55	0	1	2	1	1	0
27	1	0	0	0	1	0	56	0	0	2	0	1	0
28	1	0	1	0	1	0	57	0	0	2	1	0	0
29	1	0	2	0	1	0							

В качестве примера рассмотрим частный случай  $\alpha = \gamma = 1, \beta = \omega = \theta = 0$ , степень недоопределенности  $j = 3$ . Тогда решение имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0(\xi, t) + x_1(\xi, t)\eta, & y = y_0(\xi, t), \\ u = u_0(\xi, t) + u_1(\xi, t)\eta, & v = v_0(\xi, t), \\ q = q_0(\xi, t). \end{cases}$$

Представим это решение в форме

$$\begin{cases} u = u_0(y, t) + u_1(y, t)x, \\ v = v_0(y, t), \quad q = q_0(y, t). \end{cases}$$

Подставляя в (4), группируя слагаемые при степенях  $x$  и приравнявая суммарные коэффициенты к 0, получим систему четырех уравнений для четырех функций:

$$\begin{cases} u_{1t} + u_1^2 + v_0 u_{1y} = 0, \\ u_{0t} + u_1 u_0 + v_0 u_{0y} = 0, \\ v_{0t} + v_0 v_{0y} = c q_{0y}, \\ q_{0t} + v_0 q_{0y} + u_1 + v_{0y} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Решение системы (7) можно искать в виде:  $u_0 = u_0(\delta)$ ,  $u_1 = u_1(\delta)$ ,  $v_0 = v_0(\delta)$ ,  $q_0 = q_0(\delta)$ , где  $\delta = at + by$ ,  $a$ ,  $b$  – произвольные константы. Тогда для четырех функций, зависящих от  $\delta$ , получим систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений.

**б)** Аналогичным образом проведена классификация двухпараметрических решений полиномиального вида для системы уравнений (4) в стационарном случае:

$$\begin{cases} uu_x + vu_y = -cq_x, \\ uv_x + vv_y = -cq_y, \\ uq_x + vq_y + u_x + v_y = 0. \end{cases} \quad (8)$$

После перехода к переменным  $\xi$ ,  $\eta$  система (8) примет вид:

$$\begin{cases} u(u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi) + v(u_\eta x_\xi - u_\xi x_\eta) + c(q_\xi y_\eta - q_\eta y_\xi) = 0, \\ u(v_\xi y_\eta - v_\eta y_\xi) + v(v_\eta x_\xi - v_\xi x_\eta) + c(q_\eta x_\xi - q_\xi x_\eta) = 0, \\ u(q_\xi y_\eta - q_\eta y_\xi) + v(q_\eta x_\xi - q_\xi x_\eta) + u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi + v_\eta x_\xi - v_\xi x_\eta = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Решение системы (9) ищется в виде:

$$u = \sum_{k=0}^{\alpha} u_k(\xi) \eta^k, \quad v = \sum_{k=0}^{\beta} v_k(\xi) \eta^k, \quad q = \sum_{k=0}^{\theta} q_k(\xi) \eta^k,$$

$$x = \sum_{k=0}^{\gamma} x_k(\xi) \eta^k, \quad y = \sum_{k=0}^{\omega} y_k(\xi) \eta^k.$$

Здесь  $\alpha, \beta, \theta, \gamma, \omega$  – натуральные числа. При подстановке данных выражений в систему (9) получим следующие максимальные степени переменной  $\eta$ :

$$\begin{cases} J_1 = 2\alpha + \omega - 1, & J_2 = \beta + \alpha + \gamma - 1, & J_3 = \theta + \omega - 1, \\ J_4 = \alpha + \beta + \omega - 1, & J_5 = 2\beta + \gamma - 1, & J_6 = \theta + \gamma - 1, \\ J_7 = \alpha + \omega + \theta - 1, & J_8 = \beta + \gamma + \theta - 1, & J_9 = \alpha + \omega - 1, & J_{10} = \beta + \gamma - 1. \end{cases}$$

Допустимые значения параметров  $\alpha, \beta, \theta, \gamma, \omega \in \mathbb{N}$ , для которых система уравнений для функций, зависящих от  $\xi$ , будет определенной или недоопределенной, приведены в таблице 2:

**Таблица 2**

Допустимые значения параметров.													
№	$\alpha$	$\beta$	$\theta$	$\gamma$	$\omega$	$j$	№	$\alpha$	$\beta$	$\theta$	$\gamma$	$\omega$	$j$
1	0	0	0	0	1	3	51	1	0	1	2	1	1
2	0	0	0	0	2	1	52	1	0	1	3	2	0
3	0	0	0	1	1	4	53	1	0	2	1	0	1
4	0	0	0	1	2	2	54	1	0	2	1	1	0
5	0	0	0	1	3	0	55	1	0	2	2	1	0
6	0	0	0	2	2	3	56	2	0	1	2	0	0
7	0	0	0	2	3	1	57	0	0	0	1	0	3
8	0	0	0	3	3	2	58	0	0	0	2	0	1
9	0	0	0	3	4	0	59	0	0	0	2	1	2
10	0	0	0	4	4	1	60	0	0	0	3	1	0
11	0	0	0	5	5	0	61	0	0	0	3	2	1
12	0	1	0	0	1	3	62	0	0	0	4	3	0
13	0	1	0	0	2	1	63	0	1	0	1	0	0
14	0	1	0	1	2	2	64	0	1	0	1	1	1
15	0	1	0	1	3	0	65	0	1	0	2	2	0
16	0	1	0	2	3	1	66	0	1	1	1	0	0
17	0	1	0	3	4	0	67	0	1	1	1	1	1
18	0	2	0	0	2	1	68	0	1	1	2	2	0
19	0	2	0	1	3	0	69	0	1	2	1	0	0
20	1	0	0	0	1	0	70	0	2	0	0	1	0
21	1	0	0	1	0	3	71	0	2	1	0	1	0
22	1	0	0	1	1	1	72	1	0	0	2	0	1
23	1	0	0	2	1	2	73	1	0	0	3	1	0
24	1	0	0	2	2	0	74	1	1	0	1	0	0
25	1	0	0	3	2	1	75	1	1	1	1	0	0
26	1	0	0	4	3	0	76	1	1	2	1	0	0
27	1	0	1	0	1	0	77	0	0	1	1	0	2
28	1	0	1	1	1	1	78	0	0	1	2	0	0
29	1	0	1	2	2	0	79	0	0	1	2	1	1
30	1	0	2	0	1	0	80	0	0	1	3	2	0
31	1	1	0	0	1	0	81	1	0	1	2	0	0

32	1	1	0	1	1	1	82	0	0	1	0	1	2
33	1	1	0	2	2	0	83	0	0	1	0	2	0
34	1	1	1	0	1	0	84	0	0	1	1	2	1
35	1	1	1	1	1	1	85	0	0	1	2	3	0
36	1	1	1	2	2	0	86	0	1	1	0	1	2
37	1	1	2	0	1	0	87	0	1	1	0	2	0
38	1	1	2	1	1	1	88	0	1	1	1	2	1
39	1	1	2	2	2	0	89	0	1	1	2	3	0
40	1	2	0	0	1	0	90	0	1	2	0	1	1
41	1	2	1	0	1	0	91	0	1	2	1	2	0
42	1	2	2	0	1	0	92	0	2	1	0	2	0
43	2	0	0	1	0	0	93	0	1	2	1	1	0
44	2	0	0	2	0	1	94	0	0	1	1	1	2
45	2	0	0	3	1	0	95	0	0	1	2	2	1
46	2	0	1	1	0	0	96	0	0	1	3	3	0
47	2	1	0	1	0	0	97	0	0	2	0	1	0
48	2	1	1	1	0	0	98	0	0	2	1	1	0
49	2	1	2	1	0	0	99	0	0	2	1	0	0
50	1	0	1	1	0	2							

В качестве примера рассмотрим частный случай:  $\omega = \gamma = 1, \alpha = \beta = \theta = 0$ , степень недоопределенности  $j = 4$ :

$$\begin{cases} x = x_0(\xi) + x_1(\xi)\eta, & y = y_0(\xi) + y_1(\xi)\eta, \\ u = u_0(\xi), & v = v_0(\xi), & q = q_0(\xi). \end{cases}$$

Подставляя в (9), группируя слагаемые при степенях  $\eta$  и приравнявая суммарные коэффициенты к 0, получим систему трех уравнений для семи функций:

$$\begin{cases} u_0 u_0' y_1 - v_0 u_0' x_1 + c q_0' y_1 = 0, \\ u_0 v_0' - v_0 v_0' x_1 - c q_0' x_1 = 0, \\ u_0 q_0' - v_0 q_0' x_1 + u_0' y_1 - v_0' x_1 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Если в (10) положить  $u_0(\xi) = \xi$ ,  $y_1(\xi) = 1$ , то получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений для трех функций:

$$\begin{cases} \xi - v_0 x_1 + c q_0' = 0, & (\xi - v_0 x_1) v_0' - c q_0' x_1 = 0, \\ \xi q_0' - v_0 q_0' x_1 + 1 - v_0' x_1 = 0, \end{cases}$$

из которой определяются функции  $x_1(\xi)$ ,  $v_0(\xi)$ ,  $q_0(\xi)$ , а функции  $x_0(\xi)$ ,  $y_0(\xi)$  являются произвольными.

в) Рассмотрим частный случай системы уравнений (3) для  $\chi = 2$ :

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y = -2c\rho_x, \\ v_t + uv_x + vv_y = -2c\rho_y, \\ \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + \rho u_x + \rho v_y = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Для построения точных решений применяется метод, описанный в [1-2].

После перехода к переменным  $\xi, \eta, t$  система (11) принимает вид:

$$\begin{cases} u_t(x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta) + u_\xi(x_\eta y_t - y_\eta x_t) + u_\eta(y_\xi x_t - x_\xi y_t) + u(u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi) \\ + v(u_\eta x_\xi - u_\xi x_\eta) + 2c(\rho_\xi y_\eta - \rho_\eta y_\xi) = 0, \\ v_t(x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta) + v_\xi(x_\eta y_t - y_\eta x_t) + v_\eta(y_\xi x_t - x_\xi y_t) + u(v_\xi y_\eta - v_\eta y_\xi) + \\ + v(v_\eta x_\xi - v_\xi x_\eta) + 2c(x_\xi \rho_\eta - x_\eta \rho_\xi) = 0, \\ \rho_t(x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta) + \rho_\xi(x_\eta y_t - y_\eta x_t) + \rho_\eta(y_\xi x_t - x_\xi y_t) + \\ \rho(u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi + v_\eta x_\xi - v_\xi x_\eta) + u(\rho_\xi y_\eta - \rho_\eta y_\xi) + v(\rho_\eta x_\xi - \rho_\xi x_\eta) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Решение системы (12) ищется в виде:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=0}^{\alpha} u_k(\xi, t)\eta^k, \quad v = \sum_{k=0}^{\beta} v_k(\xi, t)\eta^k, \quad \rho = \sum_{k=0}^{\theta} \rho_k(\xi, t)\eta^k, \\ x &= \sum_{k=0}^{\gamma} x_k(\xi, t)\eta^k, \quad y = \sum_{k=0}^{\omega} y_k(\xi, t)\eta^k \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $\alpha, \beta, \theta, \gamma, \omega$  – натуральные числа. При подстановке выражений (13) в систему (12) получим следующие максимальные степени переменной  $\eta$ :

$$\begin{cases} J_1 = \alpha + \gamma + \omega - 1, \quad J_2 = 2\alpha + \omega - 1, \quad J_3 = \beta + \alpha + \gamma - 1, \quad J_4 = \theta + \omega - 1, \\ J_5 = \beta + \gamma + \omega - 1, \quad J_6 = \alpha + \beta + \omega - 1, \quad J_7 = 2\beta + \gamma - 1, \quad J_8 = \theta + \gamma - 1, \\ J_9 = \alpha + \omega + \theta - 1, \quad J_{10} = \beta + \gamma + \theta - 1, \quad J_{11} = \theta + \gamma + \omega - 1. \end{cases}$$

Параметры  $J_1, J_2, J_3, J_4$  соответствуют первому уравнению системы (12),  $J_5, J_6, J_7, J_8$  – второму уравнению,  $J_9, J_{10}, J_{11}$  – третьему уравнению. Число коэффициентов в (6) равно  $r = \alpha + \beta + \theta + \gamma + \omega + 5$ , а число уравнений в системе (5) определяется соотношением:  $s = I_1 + I_2 + I_3 + 3$ , где  $I_1 = \max(J_1, J_2, J_3, J_4)$ ,  $I_2 = \max(J_5, J_6, J_7, J_8)$ ,  $I_3 = \max(J_9, J_{10}, J_{11})$ . Максимальные значения  $I_1, I_2, I_3$  можно выбрать 48 способами.

После применения описанной в [1] программы получены возможные значения параметров  $\alpha, \beta, \theta, \gamma, \omega \in \mathbb{N}$ , для которых система уравнений для функций, зависящих от  $\xi, t$ , будет определенной или недоопределенной. Результаты классификации запишем в сводную таблицу 3:

Таблица 3.

Допустимые значения параметров.													
№	$\alpha$	$\beta$	$\theta$	$\gamma$	$\omega$	$j$	№	$\alpha$	$\beta$	$\theta$	$\gamma$	$\omega$	$j$
1	0	0	0	0	1	3	30	1	1	0	0	1	0
2	0	0	0	0	2	1	31	1	1	1	0	1	0
3	0	1	0	0	1	3	32	1	1	2	0	1	0
4	0	1	0	0	2	1	33	1	2	0	0	1	0
5	0	2	0	0	2	1	34	1	2	1	0	1	0
6	1	0	0	1	0	3	35	1	2	2	0	1	0
7	1	0	0	1	1	1	36	2	0	0	1	0	0
8	1	0	1	1	1	1	37	2	0	1	1	0	0
9	1	1	0	1	1	1	38	2	1	0	1	0	0
10	1	1	1	1	1	1	39	2	1	1	1	0	0
11	1	1	2	1	1	1	40	2	1	2	1	0	0
12	2	0	0	2	0	1	41	0	1	0	1	0	0
13	0	0	0	1	0	3	42	0	1	1	1	0	0
14	0	0	0	2	0	1	43	0	1	2	1	0	0
15	0	1	0	1	1	1	44	0	2	0	0	1	0
16	0	1	1	1	1	1	45	0	2	1	0	1	0
17	1	0	0	2	0	1	46	1	1	0	1	0	0
18	0	0	0	1	1	1	47	1	1	1	1	0	0
19	0	0	1	1	1	1	48	1	1	2	1	0	0
20	1	0	1	1	0	2	49	0	0	1	0	1	2
21	1	0	2	1	0	1	50	0	0	1	0	2	0
22	1	0	2	1	1	0	51	0	1	1	0	1	2
23	2	0	1	2	0	0	52	0	1	1	0	2	0
24	0	0	1	1	0	2	53	0	1	2	0	1	1
25	0	0	1	2	0	0	54	0	2	1	0	2	0
26	1	0	1	2	0	0	55	0	1	2	1	1	0
27	1	0	0	0	1	0	56	0	0	2	0	1	0
28	1	0	1	0	1	0	57	0	0	2	1	0	0
29	1	0	2	0	1	0							

В качестве примера рассмотрим частный случай  $\beta = \omega = 1, \alpha = \theta = \gamma = 0$  (степень недоопределенности  $j = 3$ ):

$$\begin{cases} x = x_0(\xi, t), & y = y_0(\xi, t) + y_1(\xi, t)\eta, \\ u = u_0(\xi, t), & v = v_0(\xi, t) + v_1(\xi, t)\eta, \\ \rho = \rho_0(\xi, t). \end{cases}$$

Это решение можно записать в виде:

$$\begin{cases} u = u_0(x, t), \\ v = v_0(x, t) + v_1(x, t)y, \\ \rho = \rho_0(x, t). \end{cases}$$

Подставляя в (11), группируя слагаемые при степенях  $u$  и приравнивая суммарные коэффициенты к 0, получим систему четырех уравнений для четырех функций:

$$\begin{cases} u_{0t} + u_0 u_{0x} = -2c\rho_{0x}, \\ v_{1t} + u_0 v_{1x} + v_1^2 = 0, \\ v_{0t} + u_0 v_{0x} + v_0 v_1 = 0, \\ \rho_{0t} + u_0 \rho_{0x} + \rho_0 u_{0x} + \rho_0 v_1 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Заметим, что решение системы (14) можно искать в виде:  $u_0 = u_0(\delta)$ ,  $v_0 = v_0(\delta)$ ,  $v_1 = v_1(\delta)$ ,  $\rho_0 = \rho_0(\delta)$ , где  $\delta = nx + kt$ ,  $n$ ,  $k$  - произвольные константы. Тогда для четырех функций, зависящих от  $\delta$ , получим систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} ku_0' + u_0 u_0' = -2c\rho_0', \\ kv_1' + u_0 v_1' + v_1^2 = 0, \\ kv_0' + u_0 v_0' + v_0 v_1 = 0, \\ k\rho_0' + u_0 \rho_0' + \rho_0 u_0' + \rho_0 v_1 = 0. \end{cases}$$

Параметрический метод удобен для построения решений типа «простая волна». Рассмотрим случай, когда  $\gamma = \omega = 1$ ,  $\alpha = \beta = \theta = 0$ :

$$\begin{cases} x = x_0(\xi, t) + x_1(\xi, t)\eta, \\ y = y_0(\xi, t) + y_1(\xi, t)\eta, \\ u = u(\xi, t), \quad v = v(\xi, t), \quad \rho = \rho(\xi, t). \end{cases} \quad (15)$$

Если в (15) положить  $x_0(\xi, t) = x_2(\xi)t + x_3(\xi)$ ,  $y_0(\xi, t) = 0$ ,  $y_1(\xi, t) = 1$ , а функции  $x_1$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $\rho$  считать зависимыми от  $\xi$ , то получим решение системы (11) в виде простой волны:

$$\begin{cases} u = u(\xi), \quad v = v(\xi), \quad \rho = \rho(\xi), \\ x = x_3(\xi) + x_2(\xi)t + x_1(\xi)y, \quad y = \eta. \end{cases}$$

Подставим в (12), затем положим  $u(\xi) = \xi$ , тогда получим:

$$\begin{cases} x_1(\xi) = -v'(\xi), \\ x_2(\xi) = \xi + v(\xi)v'(\xi) + 2c\rho'(\xi), \\ \rho(\xi)(1 + (v'(\xi))^2) - 2c(\rho'(\xi))^2 = 0. \end{cases}$$

Две функции  $\rho(\xi)$  и  $v(\xi)$  связаны одним уравнением, поэтому любая из этих функций – произвольная. Произвольной является также функция  $x_3(\xi)$ . Таким образом, получено решение, зависящее от двух произвольных функций.



г) Аналогичным образом проведена классификация двухпараметрических решений полиномиального вида для системы уравнений (11) в стационарном случае:

$$\begin{cases} uu_x + vu_y = -2c\rho_x, \\ uv_x + vv_y = -2c\rho_y, \\ u\rho_x + v\rho_y + \rho u_x + \rho v_y = 0. \end{cases} \quad (16)$$

После перехода к переменным  $\xi, \eta$  система (16) примет вид:

$$\begin{cases} u(u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi) + v(u_\eta x_\xi - u_\xi x_\eta) + 2c(\rho_\xi y_\eta - \rho_\eta y_\xi) = 0, \\ u(v_\xi y_\eta - v_\eta y_\xi) + v(v_\eta x_\xi - v_\xi x_\eta) + 2c(x_\xi \rho_\eta - x_\eta \rho_\xi) = 0, \\ \rho(u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi + v_\eta x_\xi - v_\xi x_\eta) + u(\rho_\xi y_\eta - \rho_\eta y_\xi) + v(\rho_\eta x_\xi - \rho_\xi x_\eta) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Решение системы (17) ищется в виде:

$$u = \sum_{k=0}^{\alpha} u_k(\xi)\eta^k, \quad v = \sum_{k=0}^{\beta} v_k(\xi)\eta^k, \quad \rho = \sum_{k=0}^{\theta} \rho_k(\xi)\eta^k, \\ x = \sum_{k=0}^{\gamma} x_k(\xi)\eta^k, \quad y = \sum_{k=0}^{\omega} y_k(\xi)\eta^k,$$

где  $\alpha, \beta, \theta, \gamma, \omega$  – натуральные числа. При подстановке данных выражений в систему (17) получим следующие максимальные степени переменной  $\eta$ :

$$\begin{cases} J_1 = 2\alpha + \omega - 1, \quad J_2 = \beta + \alpha + \gamma - 1, \quad J_3 = \theta + \omega - 1, \\ J_4 = \alpha + \beta + \omega - 1, \quad J_5 = 2\beta + \gamma - 1, \quad J_6 = \theta + \gamma - 1, \\ J_7 = \beta + \gamma + \theta - 1, \quad J_8 = \theta + \gamma + \omega - 1. \end{cases}$$

Допустимые значения параметров  $\alpha, \beta, \theta, \gamma, \omega \in \mathbb{N}$ , для которых система уравнений для коэффициентов, зависящих от  $\xi$ , будет определенной или недоопределенной, приведены в таблице 4:

Таблица 4

Допустимые значения параметров.													
№	$\alpha$	$\beta$	$\theta$	$\gamma$	$\omega$	$j$	№	$\alpha$	$\beta$	$\theta$	$\gamma$	$\omega$	$j$
<b>1</b>	0	1	0	0	1	3	<b>35</b>	2	0	2	1	0	0
<b>2</b>	0	2	0	0	2	1	<b>36</b>	1	0	1	2	1	0
<b>3</b>	1	0	0	1	0	3	<b>37</b>	1	0	2	1	1	0
<b>4</b>	1	1	0	0	1	1	<b>38</b>	0	0	0	1	0	3
<b>5</b>	1	1	0	1	1	1	<b>39</b>	0	0	0	2	0	1
<b>6</b>	1	1	1	0	1	1	<b>40</b>	0	1	0	1	0	0
<b>7</b>	1	1	1	1	1	1	<b>41</b>	0	1	0	1	1	1
<b>8</b>	1	1	2	0	1	1	<b>42</b>	0	1	1	1	0	0
<b>9</b>	1	1	2	1	1	1	<b>43</b>	0	1	1	1	1	1
<b>10</b>	1	2	0	0	1	0	<b>44</b>	0	1	2	1	0	0

11	1	2	1	0	1	0	45	0	2	0	0	1	0
12	1	2	2	0	1	0	46	0	2	1	0	1	0
13	2	0	0	1	0	1	47	1	0	0	2	0	1
14	2	0	0	2	0	1	48	1	1	0	1	0	0
15	2	0	1	1	0	1	49	1	1	1	1	0	0
16	2	1	0	1	0	0	50	1	1	2	1	0	0
17	2	1	1	1	0	0	51	0	0	0	2	1	1
18	2	1	2	1	0	0	52	0	0	1	1	0	2
19	0	0	0	0	1	3	53	0	0	1	2	0	0
20	0	0	0	0	2	1	54	1	0	1	2	0	0
21	0	0	0	1	1	3	55	0	0	1	2	1	0
22	0	0	0	1	2	1	56	0	1	1	0	1	2
23	0	0	0	2	2	1	57	0	1	2	0	1	1
24	0	1	0	0	2	1	58	0	2	1	0	2	0
25	0	1	0	1	2	1	59	1	1	3	0	1	0
26	1	0	0	0	1	1	60	0	0	1	0	1	2
27	1	0	0	1	1	1	61	0	0	1	0	2	0
28	1	0	0	2	1	1	62	0	0	1	1	2	0
29	1	0	1	0	1	1	63	0	1	1	0	2	0
30	1	0	1	1	1	1	64	0	1	1	1	2	0
31	1	0	2	0	1	1	65	0	1	2	1	1	0
32	1	0	1	1	0	2	66	0	0	2	1	0	0
33	1	0	2	1	0	1	67	0	0	1	1	1	1
34	2	0	1	2	0	0	68	0	0	2	0	1	0

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК №П1122, а также поддержана грантом РФФИ № 09-01-97005-р\_поволжье\_а.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vel'misov, P. A. Some classes of the solutions of aerohydronechanic equations // P. A. Vel'misov, M. D. Todorov, J. A. Kazakova. – Applications of Mathematics in Engineering and Economics. – Soft trade, Sofia, Bulgaria, 2008, p.427-441.

2. Вельмисов П. А., Казакова Ю. А. О некоторых классах решений квазилинейных уравнений с частными производными // Труды Седьмой Международной конференции «Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов». 2-5 февраля 2009 года, г.Ульяновск – Ульяновск: УлГУ, 2009, с.70-72.

•••••

**Вельмисов Петр Александрович** – д.ф.-м.н., проф., зав.кафедрой «Высшая математика» УлГТУ. E-mail: velmisov@ulstu.ru. Тел. (8422) 778117

**Казакова Юлия Александровна** – аспирант кафедры «Высшая математика» УлГТУ. E-mail: kazakova\_ua@inbox.ru. Тел. (8422) 778117

**Васильева Анастасия Александровна** – студентка группы МИЯ-05 УГПУ

## О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ СИСТЕМЫ «ТРУБОПРОВОД – ДАТЧИК ДАВЛЕНИЯ»

**П. А. Вельмисов, Ю. А. Решетников, Е. П. Семенова**

*Предложена математическая модель механической системы «трубопровод – датчик давления», в которой для описания движения рабочей среды в трубопроводе применяется линейная теория, а для исследования динамики упругого элемента датчика – как линейная, так и нелинейные теории. Дано решение азрогидродинамической части задачи, основанное на методах теории функций комплексного переменного. Получено уравнение, связывающее между собой давление рабочей среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания двигателя) и деформацию упругого элемента датчика, расположенного на другом конце трубопровода. Длина трубопровода предполагается бесконечной.*

Пусть на одном конце трубопровода ( $x = \infty$ ) задан закон изменения давления рабочей среды (например, на выходе из камеры сгорания двигателя), а на другом расположен датчик, предназначенный для измерения этого давления и содержащий в качестве составного элемента упругую пластину  $AB$  (рис. 1).

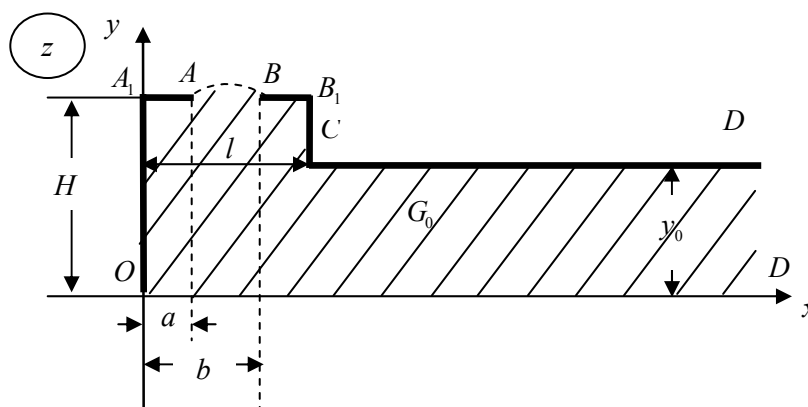


Рис.1 Схема механической системы

**а) Линейная модель.** В линейной постановке, соответствующей малым прогибам упругого элемента и малым возмущениям потенциала скорости рабочей среды, математическая модель определяется следующими уравнениями и граничными условиями:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G_0; \quad (1)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, \infty); \quad (2)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (l, \infty); \quad (3)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = 0, \quad y \in (0, H); \quad (4)$$

$$\varphi_x(l, y, t) = 0, \quad y \in (y_0, H); \quad (5)$$

$$\varphi_y(x, H, t) = 0, \quad x \in (0, a) \cup (b, l); \quad (6)$$

$$\varphi_y(x, H, t) = \dot{w}(x, t), \quad x \in (a, b); \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (P_* - \rho\varphi_t(x, y, t)) = P(t), \quad y \in (0, y_0); \quad (8)$$

$$L(w) \equiv M\ddot{w} + Dw_{xxxx} + Nw_{xx} + \delta\dot{w}_{xxxx} + \beta\dot{w} + \gamma w = P_* - \rho\varphi_t(x, H, t) - P_0(x, t), \\ x \in (a, b). \quad (9)$$

Здесь  $x, y$  – декартовы координаты,  $t$  – время;  $G_0$  – многоугольник;  $\varphi(x, y, t)$  – потенциал скорости рабочей среды (идеального несжимаемого газа или жидкости);  $w(x, t)$  – прогиб упругого элемента (пластины);  $P_*$  – давление рабочей среды в состоянии покоя;  $P(t)$  – закон изменения давления на входе в трубопровод;  $\rho$  – плотность рабочей среды;  $M, D$  – погонная масса и изгибная жесткость пластины;  $N$  – сжимающее (растягивающее) пластину усилие;  $\delta$  – коэффициент внутреннего демпфирования;  $\beta, \gamma$  – коэффициенты демпфирования и жесткости основания;  $P_0(x, t)$  – распределенная внешняя нагрузка, действующая на пластину; извне нижние индексы  $x, y, t$  означают частные производные по  $x, y, t$ , точка – частную производную по  $t$ .

В области  $G_0$  введем комплексный потенциал  $W(z, t) = \varphi + i\psi$ . Из условий (2) – (6) следует, что ломаная  $AA_1ODCB_1B$  является линией тока, поэтому

$$\psi(x, y, t) = C(t), \quad (x, y) \in AA_1ODCB_1B, \quad (10)$$

где  $C(t)$  – произвольная функция времени  $t$ . Если  $y = H, x \in [a, b]$ , то, интегрируя условие Коши-Римана  $\psi_x = -\varphi_y$ , получим с учетом условия (7)

$$\psi(x, H, t) = -\int_a^x \dot{w}(x, t) dx + C(t), \quad x \in [a, b]. \quad (11)$$

Для непрерывной стыковки выражений (10), (11) в точке  $B(b, H)$  необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_a^b \dot{w}(x, t) dx = 0. \quad (12)$$

Условие (12) означает равенство нулю потока рабочей среды через границу области  $G_0$ , что соответствует выбранной модели несжимаемой среды.

Отобразим конформно нижнюю полуплоскость  $\text{Im } \zeta < 0$  (рис. 2) на пятиугольник  $G_0$  с помощью интеграла Кристоффеля-Шварца

$$z = z(\zeta) = C_0 \int_0^\zeta \sqrt{\frac{m - \zeta}{\zeta(1 - \zeta)}} \frac{d\zeta}{n - \zeta} + iH \quad (13)$$

$$(C_0 > 0, \sqrt{\frac{m - \zeta}{\zeta(1 - \zeta)}} > 0 \text{ при } \zeta \in (0, 1)).$$

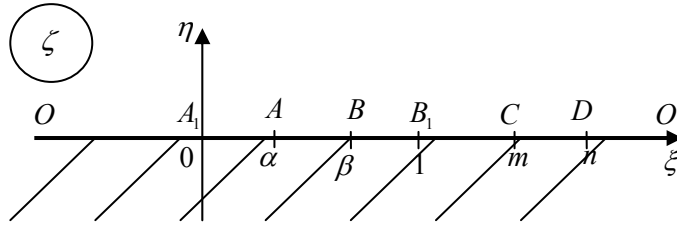


Рис. 2 Плоскость комплексной переменной  $\zeta$

На рис. 1, 2 соответствующие точки обозначены одинаковыми буквами.

Для функции  $W_1(\zeta, t) = iW(z(\zeta), t) + C(t) = C(t) - \psi + i\varphi$  согласно условиям (8), (10), (11) на границе полуплоскости  $\text{Im } \zeta < 0$  имеем

$$\text{Re } W_1 = C(t) - \psi = \begin{cases} 0, \xi \in (-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty), \\ \int_a^{x(\xi)} \dot{w}(x, t) dx, \xi \in [\alpha, \beta]. \end{cases} \quad (14)$$

Найдем функцию  $x(\xi)$ . Дифференцируя (13) и полагая в полученной формуле  $\zeta = \xi \in [0, 1]$  (при этом  $z = x + iH$ ,  $x \in [0, l]$ ), будем иметь

$$\frac{dx}{d\xi} = C_0 \sqrt{\frac{m - \xi}{\xi(1 - \xi)}} \frac{1}{n - \xi}.$$

Отсюда с учетом того, что  $x(0) = 0$ , получим

$$x(\xi) = C_0 \int_0^\xi \sqrt{\frac{m - s}{s(1 - s)}} \frac{ds}{n - s}, \quad \xi \in [0, 1]. \quad (15)$$

Концы интервала  $(\alpha, \beta)$  определяются из условий:  $x(\alpha) = a$ ,  $x(\beta) = b$ .

Функция  $W_1(\zeta, t) = iW(z(\zeta), t) + C(t)$  является аналитической в полуплоскости  $\text{Im } \zeta < 0$ , граничные значения ее вещественной части определяются формулой (14). Применяя формулу Шварца [1], будем иметь

$$iW + C(t) = -\frac{1}{\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{u(\tau, t)}{\tau - \zeta} d\tau + iC_0(t), \quad (16)$$

где  $u(\tau, t) = \int_a^{x(\tau)} \dot{w}(x, t) dx$ ,  $C_0(t)$  – произвольная вещественная функция.

Дифференцируя (16) по  $t$ , получаем

$$W_t = \varphi_t + i\psi_t = \frac{1}{\pi} \int_\alpha^\beta \frac{\dot{u}(\tau, t)}{\tau - \zeta} d\tau + C'_0(t) + iC'(t). \quad (17)$$

Подберем  $C_0(t)$  так, чтобы выполнялось условие (8). Заметим, что  $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \zeta \rightarrow n$ . Из (8) следует, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_t = \frac{P_* - P(t)}{\rho}$ , а из (17) имеем:

$$\lim_{\zeta \rightarrow n} (\varphi_t + i\psi_t) = \frac{1}{\pi} \int_\alpha^\beta \frac{\dot{u}(\tau, t)}{\tau - n} d\tau + C'_0(t) + iC'(t),$$

поэтому

$$C'_0(t) = \frac{P_* - P(t)}{\rho} - \frac{1}{\pi_\alpha} \int_{\tau-n}^{\beta} \frac{\dot{u}(\tau, t)}{\tau - n} d\tau. \quad (18)$$

Перейдем в (17) к пределу при  $\zeta \rightarrow \xi \in (\alpha, \beta)$  (при этом  $z \rightarrow x + iH$ ,  $x \in (a, b)$ ). Применяя формулу Сохоцкого, находим

$$\varphi_t + i\psi_t = -i \cdot \dot{u}(\xi, t) + \frac{1}{\pi_\alpha} \int_{\tau-\xi}^{\beta} \frac{\dot{u}(\tau, t)}{\tau - \xi} d\tau + C'_0(t) + iC'(t).$$

Отделив вещественные части, с учетом формулы (18) получим

$$\varphi_t(x, H, t) = \frac{1}{\pi_\alpha} \int_{\tau-\xi(x)}^{\beta} \frac{\dot{u}(\tau, t)}{\tau - \xi(x)} d\tau + \frac{P_* - P(t)}{\rho} - \frac{1}{\pi_\alpha} \int_{\tau-n}^{\beta} \frac{\dot{u}(\tau, t)}{\tau - n} d\tau, \quad x \in (a, b), \quad (19)$$

где  $\xi(x)$  – функция, обратная к функции (15), а  $\dot{u}(\tau, t) = \int_a^{x(\tau)} \ddot{w}(x, t) dx$ .

Преобразуем в (19) интегральные слагаемые. Применяя сначала подстановку  $\tau = \xi(\tau_1)$ , а затем, интегрируя по частям, с учетом условия (12) будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\dot{u}(\tau, t)}{\tau - \xi(x)} d\tau &= \int_a^b \frac{\dot{u}(\xi(\tau_1), t)}{\xi(\tau_1) - \xi(x)} \xi'(\tau_1) d\tau_1 = \int_a^{\tau_1} \left( \int_a^{\tau_1} \ddot{w}(x, t) dx \right) d \ln |\xi(\tau_1) - \xi(x)| = \\ &= - \int_a^b \ddot{w}(\tau_1, t) \ln |\xi(\tau_1) - \xi(x)| d\tau_1. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\dot{u}(\tau, t)}{\tau - n} d\tau = - \int_a^b \ddot{w}(\tau_1, t) \ln |\xi(\tau_1) - n| d\tau_1.$$

Таким образом,

$$\varphi_t(x, H, t) = \frac{1}{\pi_\alpha} \int_a^b \ddot{w}(\tau, t) \ln \left| \frac{\xi(\tau) - n}{\xi(\tau) - \xi(x)} \right| d\tau + \frac{P_* - P(t)}{\rho}, \quad x \in (a, b). \quad (20)$$

Подставляя (20) в уравнение колебаний (9), представим его в виде

$$L(w) = P(t) - P_0(x, t) - \frac{\rho}{\pi_\alpha} \int_a^b \ddot{w}(\tau, t) \ln \left| \frac{\xi(\tau) - n}{\xi(\tau) - \xi(x)} \right| d\tau, \quad x \in (a, b). \quad (21)$$

Функция (15), следовательно, и правая часть уравнения (21) содержит три параметра  $C_0$ ,  $m$ ,  $n$ . Найдем связь этих параметров с параметрами  $l$ ,  $y_0$ ,  $H$  области  $G_0$ . Согласно (13) имеем

$$z(1) - z(0) = C_0 \int_0^1 \sqrt{\frac{m - \zeta}{\zeta(1 - \zeta)}} \frac{d\zeta}{n - \zeta}.$$

Так как  $z(0) = iH$ ,  $z(1) = l + iH$ , то, интегрируя по отрезку  $[0, 1]$ , получим

$$l = C_0 \int_0^1 \sqrt{\frac{m - s}{s(1 - s)}} \frac{ds}{n - s}. \quad (22)$$

Аналогично, учитывая, что  $z(m) = l + iy_0$  и интегрируя по отрезку  $[1, m]$ , будем иметь

$$z(m) - z(1) = C_0 \int_1^m \sqrt{\frac{m-\zeta}{\zeta(1-\zeta)}} \frac{d\zeta}{n-\zeta} = \frac{C_0}{i} \int_1^m \sqrt{\frac{m-s}{s(s-1)}} \frac{ds}{n-s}.$$

Отсюда

$$y_0 = H - C_0 \int_1^m \sqrt{\frac{m-s}{s(s-1)}} \frac{ds}{n-s}. \quad (23)$$

Далее, при положительном обходе точки  $\zeta = n$  по полуокружности  $\gamma_r$  сколь угодно малого радиуса  $r$  функция  $z(\zeta)$  получает приращение

$$\Delta z = C_0 \sqrt{\frac{n-m}{n(n-1)}} \int_{\gamma_r} \frac{d\zeta}{n-\zeta} + O(r) = -\frac{iC_0 \pi \sqrt{n-m}}{\sqrt{n(n-1)}} + O(r).$$

С другой стороны, при этом обходе соответствующая точка  $z$  переходит с луча  $CD$  на луч  $OD$ , следовательно,  $\Delta z$  мало отличается от  $(-iy_0)$ . При  $r \rightarrow 0$  получим

$$y_0 = \pi C_0 \sqrt{\frac{n-m}{n(n-1)}}. \quad (24)$$

Задавая произвольные значения  $C_0, m, n$  ( $C_0 > 0, n > m > 1$ ) по формулам (22) - (24) можно найти соответствующие значения  $l, y_0, H$ .

**б) Нелинейные модели.** Постановка задачи (1) – (9) соответствует линейной теории аэрогидроупругости, когда движение жидкости (газа), а также динамика деформируемого тела описываются линейными уравнениями. Можно предложить также «смешанные» математические модели, в которых часть уравнений, описывающих динамику упругого элемента, являются нелинейными. Одна из таких моделей определяется приведенными выше уравнениями, при этом уравнение (9) заменяется следующим

$$\left( \frac{Dw''}{[1+(w')^2]^{3/2}} \right)'' + Nw'' - \theta w'' \left( \int_a^b \sqrt{1+(w')^2} dx + a - b \right) + M\ddot{w} + \delta \dot{w}'''' - \\ - \alpha \dot{w}'' + f(x, t, w, \dot{w}) = P(\varphi), \quad x \in (a, b)$$

где  $P(\varphi)$  – аэрогидродинамическое давление;  $f(x, t, w, \dot{w})$  – заданная функция, характеризующая внешние воздействия, а также упругие и демпфирующие свойства основания («постели»);  $\alpha$  – коэффициент, учитывающий инерцию вращения сечений; штрих обозначает частную производную по  $x$ , точка – частную производную по  $t$ .

Вторая модель также предполагает использование уравнений линейной теории (1) – (8), при этом уравнение (9) заменяется системой двух уравнений

$$\begin{cases} -EF \left[ u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right]' + M\ddot{u} + \delta_* \dot{u}'' + g(x, t, u, \dot{u}, w, \dot{w}) = 0 \\ -EF \left[ w' \left( u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right) \right]' + \left( \frac{Dw''}{[1 + (w')^2]^{3/2}} \right)'' + M\ddot{u} + \delta_0 \dot{w}'''' - \alpha \dot{w}'' + Nw'' - \\ - \theta w'' \left( \int_a^b \sqrt{1 + (w')^2} dx + a - b \right) + f(x, t, u, \dot{u}, w, \dot{w}) = P(\varphi), \quad x \in (a, b) \end{cases}$$

где  $u(x, t)$ ,  $w(x, t)$  – продольная и поперечная деформации упругого элемента;  $P(\varphi)$  – аэрогидродинамическое давление;  $g(x, t, u, \dot{u}, w, \dot{w})$ ,  $f(x, t, u, \dot{u}, w, \dot{w})$  – заданные функции, характеризующие внешние воздействия, а также упругие и демпфирующие свойства подкрепляющих элементов;  $E$  – модуль упругости;  $F$  – площадь поперечного сечения;  $\delta_*$ ,  $\delta_0$  – коэффициенты продольного и поперечного внутреннего демпфирования.

Часть нелинейных математических моделей связана с заменой  $[1 + (w')^2]^{-3/2}$  и  $[1 + (w')^2]^{1/2}$  на  $\left[1 - \frac{3}{2}(w')^2\right]$  и  $\left[1 + \frac{1}{2}(w')^2\right]$  соответственно, а также с заменой этих выражений единицей.

Различные модификации моделей возникают также при выборе формы записи интеграла Лагранжа-Коши, согласно которому давление  $P(\varphi)$  определяется по одной из формул

$$\begin{cases} P(\varphi) = P_* - \rho \left[ \varphi_t(x, H, t) + \frac{1}{2} \varphi_x^2(x, H, t) + \frac{1}{2} \dot{w}^2(x, t) \right] \\ P(\varphi) = P_* - \rho \left[ \varphi_t(x, H, t) + \frac{1}{2} \dot{w}^2(x, t) \right] \\ P(\varphi) = P_* - \rho \varphi_t(x, H, t) \end{cases}$$

Линейное уравнение (21), связывающее давление  $P(t)$  в камере сгорания двигателя и деформацию  $w(x, t)$  упругого элемента датчика, получено при использовании третьей из этих формул, соответствующей линейной теории. В случае применения первой и второй формул уравнение связи между  $P(t)$  и  $w(x, t)$  будет нелинейным относительно  $w(x, t)$ . В частности, если использовать вторую формулу, то в правую часть уравнения (21) добавится слагаемое  $\left(-\frac{1}{2} \rho \dot{w}^2\right)$ .

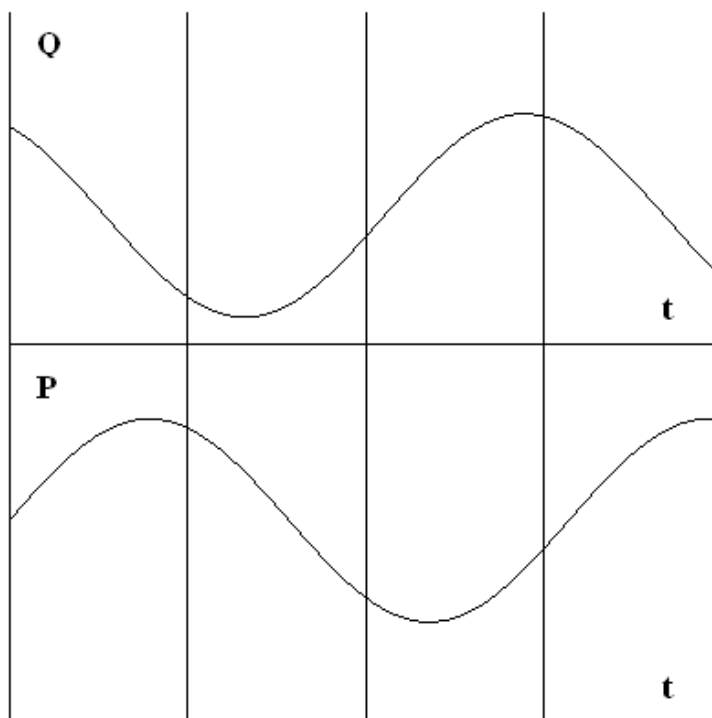




# ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ СПРОСА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ИЗЛИШЕК ПОТРЕБИТЕЛЯ

*А. В. Синдяев*

В микроэкономике для анализа деятельности отдельных звеньев хозяйственной системы или бизнеса часто применяются функции спроса и предложения. В различной экономико-математической литературе можно встретить функции спроса и предложения, заданные с помощью линейных, параболических и гиперболических функций [1,2]. Как было показано в работе [3], такое описание имеет ряд определённых недостатков, а именно ненулевой объём продаж при нулевой цене на этот товар, нулевая цена при ненулевом объёме продаж, логически необоснованное завышение объёма продаж и т. д. Поэтому в работе [3] предлагается параметрическое задание функции спроса. Параметрическое задание функции спроса не только избавляет экономическую модель от вышеуказанных недостатков, но и позволяет ввести в рассмотрение такую величину как время, за которое происходят какие либо изменения на рынке товаров и услуг. К примеру, это может быть сезонное колебание цен на какой либо товар. При повышении цены, объём спроса убывает, а при понижении возрастает. В упрощённой модели предполагается, что максимальное значение цены соответствует минимальному объёму спроса. Но в реальных экономических условиях не всегда происходит именно так: одни покупатели не сразу узнают о минимальной цене, другие, узнав, – ожидают ещё большего понижения цен. В этом случае графики зависимости цены  $P$  и объёма продаж  $Q$  от времени будут иметь вид, как показано на рис.1.



*Рис.1.*

В данной работе предлагается усовершенствовать модель, описанную в статье [3], добавив в уравнения дополнительный коэффициент  $k_1$ . В результате получим систему:

$$\begin{cases} Q = A_1 \cos(k_1 t + k_2) + B_1 \\ P = A_2 \sin(k_1 t) + B_2 \end{cases} \quad (1)$$

где  $t$  – параметр,  $A_1, A_2, B_1, B_2$  – коэффициенты большие нуля. Причём  $B_1 > A_1, B_2 > A_2, Q$  – объём продаж,  $P$  – цена товара.  $k_2 \neq n\pi/2$ , где  $n$  – нечётное.

Все коэффициенты в системе (1) зависят от благосостояния общества, политической обстановки и других факторов. В качестве параметра  $t$  возьмём время. В системе координат  $(Q, P)$  зависимость будет иметь вид, показанный на рис.2.

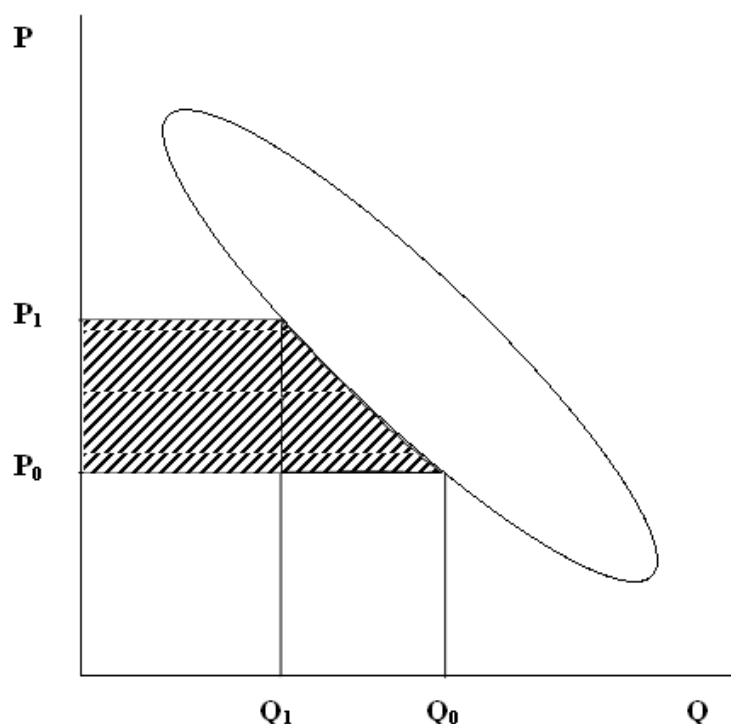


Рис.2.

Теперь поставим перед собой цель – найти излишек потребителя. При обычном способе задания функции спроса излишек потребителя находится по методике, приведённой в книге [2].

В данной статье предлагается для нахождения излишек потребителя использовать усовершенствованную модель (1), что позволяет ввести диапазон времени, в котором происходят экономические изменения на рынке. По определению принимается, [2] что излишек потребителя – это разность между гипотетическими затратами потребителя, которые могли бы быть, и реальными затратами в условиях рынка, равными  $P_0Q_0$ , где  $P_0$  – равновесная цена,  $Q_0$  – реализуемое по этой цене количество товара. Для нахождения гипотетических затрат потребителя проинтегрируем функцию  $P(Q)$  заданную параметрически (1) в диапазоне времени от  $t_1$  до  $t_2$ , подбирая коэффициент  $k_1$

таким образом, чтобы полученное произведение  $k_1 t$  соответствовало нижнему участку эллипса на рис 2. Время  $t_2$  соответствует появлению равновесной цены  $P_0$ , а время  $t_1$  соответствует цене  $P_1$ . Используя общеизвестную формулу перехода к интегралу от функции заданной параметрически, получаем:

$$\int_{Q_1}^{Q_2} P(Q)dQ = \int_{t_1}^{t_2} P(t)Q'_t(t)dt. \quad (2)$$

Излишек потребителя соответствует заштрихованной области на рис.2 и поэтому искать его будем по формуле:

$$CS = P_1 Q_1 + \int_{t_1}^{t_2} P(t)Q'_t(t)dt - P_0 Q_0. \quad (3)$$

Подставив в формулу (2) уравнения системы (1) получим:

$$\int_{t_1}^{t_2} P(t)Q'_t(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} [A_2 \sin(k_1 t) + B_2][ -k_1 A_1 \sin(k_1 t + k_2)]dt. \quad (4)$$

После интегрирования получим:

$$\int_{t_1}^{t_2} P(t)Q'_t(t)dt = A_1 A_2 [\Phi_1(t_1, t_2) - \Phi_2(t_1, t_2) - \Phi_3(t_1, t_2)], \quad (5)$$

где  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  – безразмерные величины, зависящие от времени  $t_1$  и  $t_2$ :

$$\Phi_1(t_1, t_2) = \frac{B_2}{A_2} [\cos(k_1 t_2 + k_2) - \cos(k_1 t_1 + k_2)], \quad (6)$$

$$\Phi_2(t_1, t_2) = k_1 \cos(k_2) \left[ \frac{t_2 - t_1}{2} - \frac{1}{4k_1} (\sin(2k_1 t_2) - \sin(2k_1 t_1)) \right], \quad (7)$$

$$\Phi_3(t_1, t_2) = \frac{\sin(k_2)}{2} [\sin^2(k_1 t_2) - \sin^2(k_1 t_1)]. \quad (8)$$

Подставляя формулу (5) в формулу (3) получаем:

$$CS = P_1 Q_1 + A_1 A_2 [\Phi_1(t_1, t_2) - \Phi_2(t_1, t_2) - \Phi_3(t_1, t_2)] - P_0 Q_0. \quad (9)$$

Таким образом, применение модели параметрического задания функции спроса позволяет, используя заданный промежуток времени вычислять излишек потребителя.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике: Учебник. – Москва: Дело и сервис, 2004. – 368 с.
2. Колесников А. Н. Краткий курс математики для экономистов: Учебное пособие.– Москва: ИНФРА-М, 1998. – 208 с.

3. Синдяев А. В. Анализ потребительского рынка с помощью параметрически заданных функций // Материалы международной научно-практической конф. «Проблемы подготовки специалистов для гражданской авиации». – Ульяновск: УВАУ ГА, 23-24 ноября 2006 г.– С. 250-252.



*Синдяев А. В., к. ф.-м. н., доцент кафедры естественно-научных дисциплин Ульяновского высшего авиационного училища гражданской авиации.*

---

---

### **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОТИВАЦИИ К ОВЛАДЕНИЮ ПРОФЕССИЕЙ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ИНТЕРЕСА К ИЗУЧЕНИЮ СТУДЕНТАМИ ДИСЦИПЛИН «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» И «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»**

*А. В. Синдяев*

Высшая математика и математическое моделирование обычно преподаются на младших курсах высших учебных заведений. В этот период формируется основа для последующего изучения спецдисциплин и в тоже время для него характерно то, что естественный интерес обучаемых к будущей профессии не получает достаточного удовлетворения. Это позволяет создать предпосылки к заинтересованности в математике, если показать её применение в специальных областях профессиональных знаний. Для младших курсов эта задача осложняется их неподготовленностью к восприятию специальных понятий. Поэтому достаточно сложно подбирать примеры доступные для понимания студентами младших курсов. В то же время усвоение этих знаний является началом специальной подготовки. В дисциплине «Математическое моделирование» таких применений значительно больше, и кроме того, подготовленность обучаемых на этой стадии значительно выше.

Рассмотрим один из примеров, используемый для подготовки инженеров-пилотов в высшей математике (раздел «Теория вероятности и математическая статистика»). Известно, что для простейшего потока событий [1] с интенсивностью  $\lambda$  интервал  $T$  между соседними событиями имеет показательное распределение с плотностью

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0), \quad (1)$$



## О КОНЦЕПТУАЛЬНЫХ ОСНОВАХ ФОРМИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННОГО КАЧЕСТВА ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СРЕДЫ

*А. Ф. Ширялкин*

*Среди современных подходов к реализации идеи благоприятной производственной среды наиболее применяемой среди российских пользователей считается идеология создания информационная поддержки процессов жизненного цикла изделий на основе **CALS (ИПИ)-технологий** – технологии комплексной компьютеризации сфер промышленного производства. Одной из основных функций данного комплекса систем является классификация различных объектов производственного процесса. Заметим, что качество этой классификации, а значит и эффективность всего комплекса, ключевым образом зависит от степени приближенности к естественной для нее производственной среде.*

Говоря об объекте, как о некоторой *производственной среде*, заметим, что ее качество во многом зависит от степени их системности, правильности построения структуры классификаций составляющих. От неё же зависит и качество обмена информацией между элементами среды. Так как классифицированная информация об объекте используется на протяжении всего его жизненного цикла, то качество этой структуры определяет и эффективность производственной среды в целом. Эффективность производственной среды проявляется как в процессе, так и в результатах функционирования ее конкретных элементов.

Под **эффективностью** производственной среды следует понимать соотношение эффекта применения результатов функционирования среды и затрат, связанных с ее созданием. Она проявляется в следующих видах:

- экономическая;
- техническая и (или) информационная;
- социальная.

Под *экономической эффективностью производственной среды* понимают выраженную в денежном или натуральном показателях экономию живого и овеществленного труда в конкретном производстве в результате функционирования производственной среды и с учетом необходимых затрат.

*Техническая эффективность производственной среды* может выражаться в относительных показателях, например, в росте уровня безопасности, снижении материало-или энергоемкости производства, повышении ресурса, надежности изготовленных в ней изделий и т. п.

*Информационная эффективность производственной среды* выражается в достижении необходимого для общества взаимопонимания, единства восприятия информации, например, стандартов.

Социальная эффективность *производственной среды* выражается в положительном влиянии результатов внедрения *производственной среды* на уровень жизни и здоровья участников производства, улучшении социально-психологического климата в коллективах и т. п.

Если рассматривать научное представление информационного айсберга как качества производственной среды, то его можно свести к образу некой пирамиды, или тетраэдра, рис. 1.

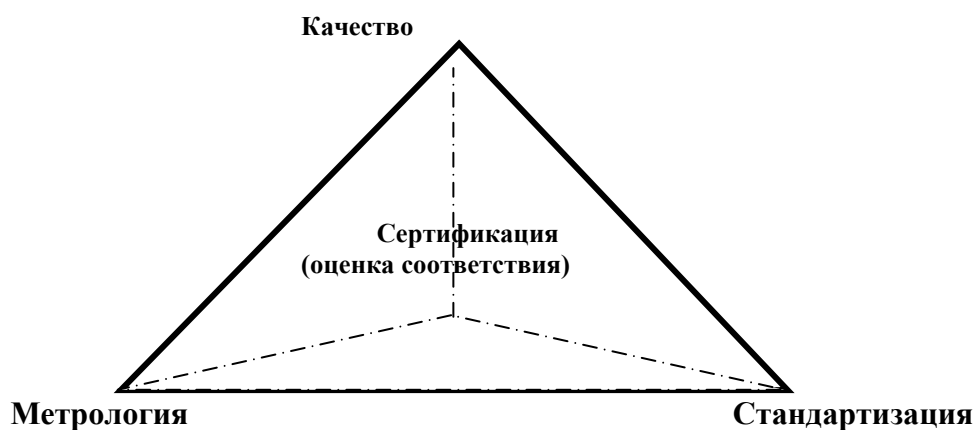


Рис. 1. Системная модель информационного качества объекта

Основание этой пирамиды составляют элементы системной триады [1], При этом стандартизация выступает как ключевое, связующее звено качества продукции, призванное быть согласующим видом деятельности, определяя деятельность и метрологии, и сертификации. Взаимно регулирующее, согласованное воздействие этих звеньев-приспособлений на объект и создает определенный уровень его качества. При этом указанные виды деятельности определенным образом структурируют производственную среду, направляя развитие деятельности всего предприятия.

Основную суть деятельности предприятия составляет процесс изготовления продукции характеризующийся ее жизненным циклом (ЖЦП) в последовательности 12-ти этапов, рис. 2 [2].

Главные этапы образуют шесть основных стадий ЖЦП:

Отдельные стадии могут разделяться на этапы и процессы. При этом стадии ЖЦП охватывают модель информационного качества объекта на разных уровнях детализации данных производственного процесса.

Таким образом, под *эффективной производственной средой* следует понимать сложную человеко-машинную систему, выполняющую функции преобразования входящих компонентов в готовое изделие, имеющее определенные элементы производственного процесса и структуру связей обладающих некоторым информационным качеством.

Этапом утилизации не заканчивается деятельность предприятия. К этому сроку предприятие начинает изучать предполагаемые потребности, уточнять



текущие потребности и после маркетинговой деятельности приступает к проектированию новой продукции. Так возникает новый виток деятельности в области качества – от стадии маркетинга до стадии утилизации и т. д., т. е. возникает некая эволюционная спираль качества [2]. В целом, эта модель может быть представлена в виде расширяющейся эволюционной спирали информационного качества объекта (стрелка на рис. 2.), каждый виток которой символизирует новый уровень совершенства изделия.



Рис. 2. Стадии жизненного цикла продукции

Поэтому наиболее приемлемой методологией его создания развития является *классификационно-эволюционный подход* [3]. Заметим, что идея этого подхода зародилась еще в конце 70-ых годов прошлого века в условиях Ульяновского авиационного комплекса (сейчас Авиастар СП). Указанную методологию следует трактовать как алгоритм последовательного развития информационного качества некоторой производственной среды, адекватным образом объединяющей участников производственного процесса с объектами управления.



развиваться в конкретных ее областях, в том числе и в области машиностроения. При этом информация об изделии в ходе этих процессов проходит различные стадии *информационного отбора*, подвергаясь воздействию ряда принципов и закономерностей.

Эти процессы могут протекать на различных этапах ЖЦП. Например, при проектировании технологических процессов обработки детали производится отбор элементов технологической системы: (материал, оборудование, инструмент, приспособление). При этом образуется карта технологического процесса, **документ** – *отобранная информация, согласованная и утвержденная установленным образом, закрепленная на соответствующем носителе*

Полный комплект конструкторских, технологических и организационно-экономических документов на изделие, прошедших информационный и документальный отбор, который упорядочивает и закрепляет полный комплекс качественных и количественных признаков производственной среды, становится его *генотипом* – системой взаимосвязанных единиц документированной информации, отвечающих за структуру и конкретное наполнение самого изделия. Таким образом, документальный *генотип* закрепляет информационную *структуру* производственной среды, определяя направления в динамике организационных потоков дальнейшего жизненного цикла, т. е. ее **технологии**. Заметим также, что изначальной информационной основой подавляющего большинства документов вышеуказанного комплекта, структурирующего производственную среду, служат *детали изделий основного производства*.

Внешне проявленное, материализованное в процессе изготовления изделие, как совокупность всех реализованных признаков генотипа, становится его (изделия) *фенотипом*, который складывается в результате взаимодействия генотипа и с конкретными условиями производственной среды в процессе техноэволюции. В то же время, с появлением фенотипа можно говорить о появлении категории **продукции**, которая получается в результате реализации этапа «производство» Статус готовой продукция получает после ее отбора в результате реализации этапа окончательного контроля. Этап упаковки и хранения является последним в предпродажной подготовке, иногда он может и отсутствовать. Остальные четыре этапа, включая реализацию и распределение продукции и следующие за ним, обычно осуществляется за пределами предприятий в сферах обращения и потребления. Результатом последнего этапа – утилизации, предваряемого отбором изделий отработавших свой ресурс, является появление **отходов**.

Существенную и наиболее сложную часть функций производственной среды (до 60% технологического цикла) представляет обрабатывающее производство, связанное с обработкой деталей машин. Таким образом,

сведения по изготовлению деталей является самой важной, основополагающей частью информации функционирующей в машиностроительной производственной среде.

Тогда комплект документации на изготовление конкретной единичной детали следует рассматривать как ген - единицу наследственного материала, ответственного за формирование какого-либо элементарного признака. В нашем представлении ген, точнее *техноген* изделия определяет какой-то признак его фенотипа (например, признак некоторой части геометрической формы изделия).

*Если продолжить терминологию биологических понятий вверх по иерархической лестнице, то согласно современным научным представлениям в рамках химической теории, ген – часть молекулы ДНК со специфическим набором нуклеотидов в линейной последовательности которых закодирована генетическая информация объекта. Таким образом, ДНК – носитель генетической информации, отдельные участки которой соответствуют отдельным генам. Хромосомы – структурные единицы ядра клетки, содержащие ДНК, в которой заключена наследственная информация организма. Геном – совокупность генов, содержащихся в одинарном (гаплоидном) наборе хромосом данного организма. Заметим также, что гаплоидный набор содержат половые клетки, клетки вирусов и бактерий. Генотип, в этой терминологии – генетическая (наследственная) конституция организма, совокупность всех его генов.*

Если по аналогии с рассмотренной терминологией говорить о техническом значении генотипа предприятия, то он определен как совокупность всей документации предприятия, находящейся в сфере его производственной среды (внутренней и внешней).

Нетрудно заметить, что роль этого техногена как источника базовой информации в производственном пространстве предприятия – первоначальное управление процессом изготовления детали и, в целом, всего изделия, частью которого является управление его качеством. При этом важными критериями качества системы управления являются ее оперативность и гибкость, что делает необходимым решение ее задач в реальном режиме времени. Последнее во многом определяется целостностью и компактностью системы техногенов качество которой, как элемента качества технической документации, зависит от качества взаимосвязи техногена данной детали с другими техногенами производственной информации. Такая целостная и компактная взаимосвязь осуществляется в *техногеноме* информации о деталях, которым в производственном пространстве предприятия (техноценоза) может являться их правильно построенная классификационная система. Последняя, структурно, на генетическом уровне, отвечая за процесс рождения (изготовления) изделия, определяет и его качество, так и качество этой процедуры рождения

(производственный процесс). От этого в свою очередь, исходит не только качество изделий-фенотипов, но и уровни гибкости и оперативности производственных процессов, и в целом, эффективность управления всей производственной системой предприятия.

В свою очередь, качество классификационной системы зависит от степени приближения к естественному типу, т. е. насколько ее признаки существенны на каждом ее системно-информационном уровне и насколько структура этих признаков адекватна рассматриваемой производственной системе. Существует ряд критериев естественности классификаций [2]. Например, согласно критерию Уэвелла - Любищева, « ... естественной системой следует называть такую, где количество свойств объекта поставленного в функциональную связь с его положением в системе является максимальным».

На современном этапе развития классификационных систем (КС) все явственнее проявляется тенденция внедрения этих структур, не только в виде общероссийских классификаторов, но и как средства упорядочения конкретной производственной информации. Этот процесс особенно характерен при разработке сложных комплексных информационных систем, а также, например, при разработке качественной терминологии в рамках онтологий. [3].

Заметим также, что разработка онтологий достаточно сложная и емкая задача. Наибольшую трудность в этом аспекте является разработка качественной классификационной системы (КС) информации об объектах производства, адекватной конкретной рассматриваемой области производственной среды. При этом необходимо чтобы классификация сколь возможно близко приближалась к естественному типу. Классификацию называют естественной, если она опирается на существенные свойства, необходимые и достаточные для идентификации объектов, а ее логика построения соответствует структуре этих объектов [4].

Основные объекты, определяющие структуру информации в производственной технологической среде предназначенной для изготовления требуемой продукции, кроме рассмотренной нами категории *детали*, присутствует в виде *станков, приспособлений и инструмента*, взаимодействующих между собой в составе элементов некоторой технологической системы. Следовательно, эти элементы системы должны быть четко завязаны между собой и исходить из требований, определяемых основным элементом среды – ***детали основного производства***. При этом указанные объекты должны выступать в виде автономных классификаций, вытекающих из условий диктуемых отдельными признаками информации о детали, находящейся в структуре заранее сформированной КС естественного типа.

Таким образом, для получения классификаций высокого качества необходимо построить ее так, чтобы она максимально четко отражала все объекты в рассматриваемой области, их отношения и происходящие в этой области процессы, связывая эти компоненты максимально естественным образом. Только в этом случае классификация может выражать элементы производственной структуры в порядке, который существует в отражаемом ею мире, представляя этот мир как эффективную производственную среду.

Поэтому, понятие эффективной производственной среды следует представлять как сложную человеко-машинную систему, выполняющую функции преобразования входящих компонентов в готовое изделие, и *структурированную классификационной системой естественного типа*.

Так как увеличение разнообразия объектов в ходе их техноэволюции – процесс объективный [1], необходимы методы снижения. Наиболее употребляемые специальные методы снижения разнообразия объектов в рамках стандартизации являются их унификация и типизация. Качество унификации, как и качество типизации, при достаточной величине номенклатуры деталей, напрямую связано с качеством классификатора, с помощью которого проводятся  $\bar{C}$ бе указанные работы, а также в целом от качества проведения работ по классификации и кодированию деталей.

Наиболее совершенной, в признаковом отношении системой, обладающей обширным и отработанным составом признаков, адаптированных к отечественному машиностроению и сравнительно развитой терминологией является классификатор ЕСКД и связанный с ним технологический классификатор деталей (ТКД) [5, 6]. Последний совместно с ЕСКД предназначен для решения технологических задач. Однако исследования [7], проведенные на предмет его применения как основы для создания автоматизированной системы технической подготовки и управления производством, показали ряд недостатков, в том числе: недостаточную информативность и наличие разнокодирования. Кроме того, этот классификатор, к сожалению, не приспособлен для простого дополнения из-за жесткости большей части структуры и несоответствия типов признаков для деталей разных классов в классификационных группировках одного уровня. Поэтому актуальность применения новых качественных классификационных моделей не вызывает сомнений. Таким образом, в реальном производстве возникает необходимость классификатора обладающего более объемной и упорядоченной структурой, чем структура классификатора ЕСКД.

Также мы можем говорить о необходимости многоуровневой структуры качества объекта, основополагающим элементом которой является качество классификации деталей. Учитывая высокую сложность информации о деталях, а также необходимость рассмотрения всей их (деталей) номенклатуры в реальном шаге времени применение указанных методов



## КОНЦЕПТУАЛЬНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ КЛАССИФИКАЦИОННО-ЭВОЛЮЦИОННОГО ПОДХОДА В МАШИНОСТРОЕНИИ

*А. Ф. Ширялкин*

Машиностроительное производство, являющееся предметом наших исследований, с системной точки зрения представляет сложную открытую человеко-машинную систему, обладающую слабыми взаимодействиями и слабыми взаимосвязями. Последнее обстоятельство определяет большую инерционность его управления в реальном масштабе времени при высокой степени динамичности производственной системы, что накладывает определенные критерии на методы ее исследования. Основой динамики производства являются потоковые процессы [1]. Абстрагируясь от финансовых потоков, в сфере материально-технического производства следует выделить два основных типа потоков: материальный и информационный. Информационный поток (ИП) сопровождает материальный и является некоторой системой сообщений необходимой для управления и контроля производства.

В машиностроительном производстве ИП целесообразно разделить на несколько видов, согласно функций соответствующих материальных потоков, например: ИП основных материалов, ИП вспомогательных материалов, ИП инструмента и т. д. Указанные потоки образуют своего рода нервную систему производства, управляющую деятельностью материальных потоков производства, его кровеносной системы. В позвоночном столбе всего производственного организма проходит главный информационный поток – информация о детали основного производства. Эта информация определяет суть и причину существования всего производственного процесса и управляет всеми другими ИП.

Как видно на рисунке, главный ИП, разветвляясь, связывает конструкторскую информацию о детали с цеховыми подразделениями, где каждая деталь получает свое материальное воплощение. При этом каждому уровню производства соответствуют определенные информационные уровни. Схема распределения ИП по иерархии производственных уровней представлена на рис.1.

Поэтому основной целью создания оптимизированной системы управления производственными процессами является четкое распределение уровней информации по выделенным уровням производства, т. е. максимального приближения к участникам производства для владения этой информацией в реальном шаге времени. Другими словами, проблема заключается в том, чтобы информация необходимая каждому участнику для действий по управлению производством находила его в нужное время и в нужном месте.



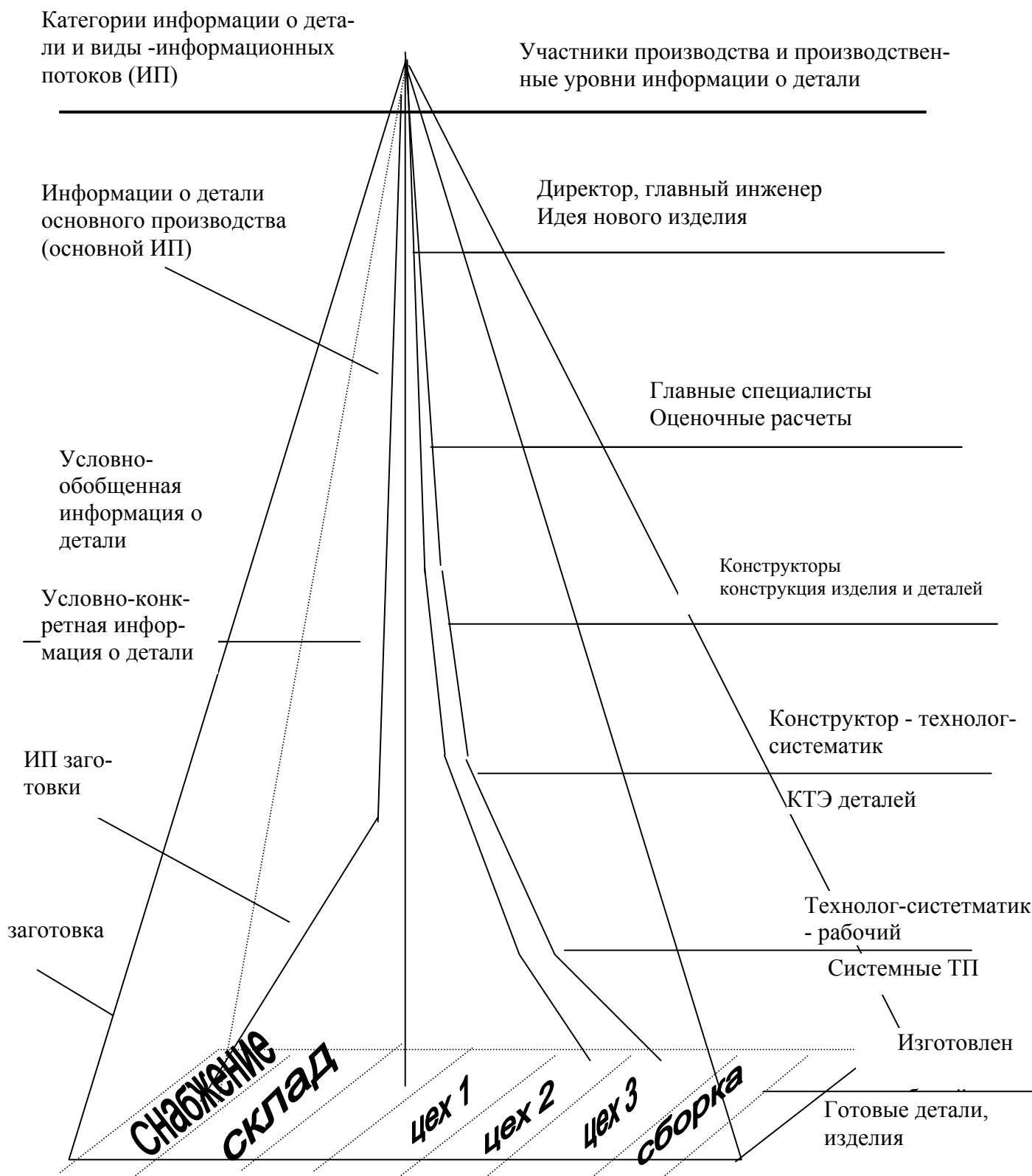
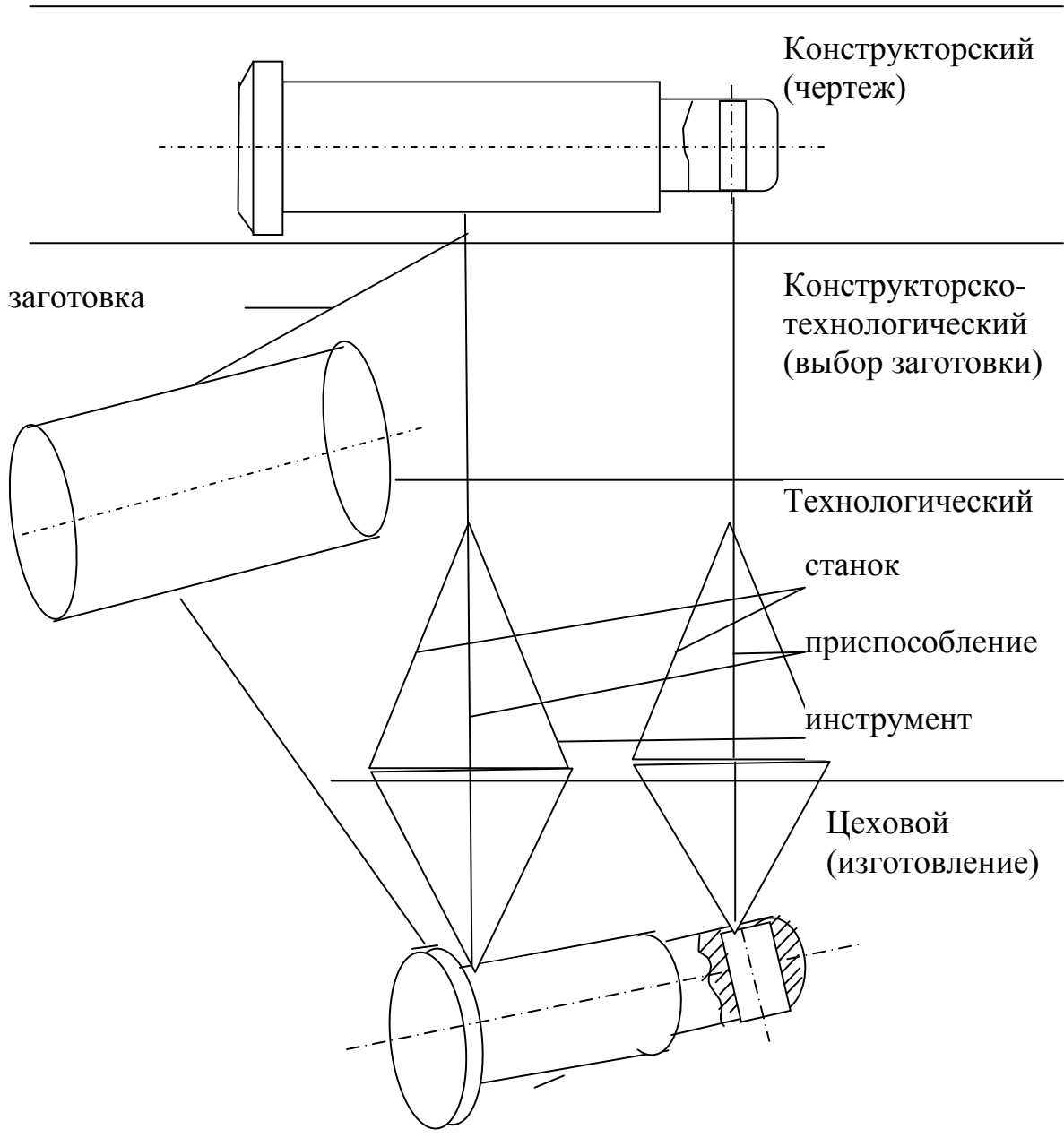


Рис. 1. Модель системной технической подготовки и управления машиностроительным производством на основе информации о детали

Для постановки задач по решению этой проблемы целесообразно применить статический подход. На мгновение остановим течение производственного процесса и рассмотрим его каналы на уровне конструкторско-технологической информации о детали. Элементарной (на данном уровне обобщения) является информация о единичной детали. Поэтому целесообразно рассмотреть информационную связь (ИС), идущую от конструкторской информации о детали и составляющую определенную цепочку управляющих конструкторско-технологических решений вплоть до ее материального воплощения в цехе, что в очень упрощенном виде представлено на рис.2.

*Уровни развития производственного процесса*



*Рис. 2. Структура эволюционного развития конструкторско-технологической информации единичной детали в процессе ее материализации*

Как это видно на рисунке, эта связь не является однонаправленной, а разделяется на некоторое количество ветвлений на разных уровнях, неся информацию об отдельных ее элементах: заготовке, конструктивно-технологических элементах (КТЭ). В свою очередь эта информация также разделяется на части, процесс ветвления в принципе бесконечен. Рассматривая слои информации о детали, достаточные для ее уверенной системной материализации не следует забывать, что эти слои, в идеале, должны системно отражать структуру самого машиностроительного предприятия (рис. 2.5).

В целом, даже для одной детали на уровне количества информации, достаточной для ее обработки (материализации) получается хотя и конечная, но сложная и часто запутанная в реальном производстве система связей, существенно затрудняющая и замедляющая управление производством.

В целом, даже для одной детали на уровне количества информации, достаточной для ее обработки (материализации) получается хотя и конечная, но сложная и часто запутанная в реальном производстве система связей, существенно затрудняющая и замедляющая управление производством.

Очевидно, что для материализации детали необходимо чтобы указанные 3 составляющих для каждого КТЭ детали (см. рис.2.1) попали в производственный цех в нужный, совершенно определенный момент времени и, конечно, в одно, совершенно определенное место. Однако в реальном производстве такие согласованные встречи происходят далеко не всегда. По мнению автора, эта задача при достаточно широкой номенклатуре деталей и небольшой степени системности (сгруппированности) ее информации вообще принципиально неразрешима.

Другими словами, участники больших многономенклатурных серийных производств (например, авиационных) никогда в достаточной степени не владели информацией о курируемых ими участках производственного процесса. Внешне такие производственные издержки выливаются в виде известных феноменов: авральности, аритмии и постоянной лихорадки. Даже для малых серийных предприятий с номенклатурой 100 и более наименований, при наличии опытейших специалистов, с большим опытом работы в предельно многономенклатурных заводах, указанная задача не всегда разрешима. Причин этого достаточно много, однако с точки зрения системности информации о детали, главной является недооценка ее глубины. Сопоставляя и обобщая сказанное, в том числе информацию на рис. 1, 2, можно вывести определенные критерии технической управляемости производством по количеству и качеству его информационных связей и потоков:

- количество ИС;
- разветвленность ИС;



## О ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ЗАДАЧИ РАСЧЕТА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

*С. А. Чернов*

*Приведены основные зависимости МКЭ, используемые в программе расчета плоской стержневой системы МКЭ, ее функциональные возможности. Представлены матрицы жесткости балочного конечного элемента, работающего на растяжение-сжатие и изгиб, ортогонального преобразования координат КЭ.*

В алгоритме программы [2] используется следующая матричная зависимость МКЭ для определения вектора внутренних узловых сил конструкции в общей системе координат  $X^0 Y^0 Z^0$  [1]:

$$\{S_k^0\} = [K_k^0] [A] ([A]^T [K_k^0] [A])^{-1} \{P^0\} = [K_k^0] [A] \{Z^0\},$$

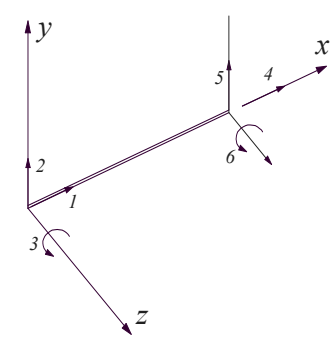
где  $\{S_k^0\}$  – вектор внутренних узловых сил конструкции, состоящий из блоков (клеток) векторов внутренних узловых сил КЭ;  $[K_k^0]$  – квазидиагональная матрица жесткости конструкции, состоящая из блоков матриц жесткости КЭ  $[K_r^0]$  в общей системе координат;  $[A]$  – матрица соответствий конструкции;  $\{P^0\}$  – вектор узловой нагрузки конструкции;  $\{Z^0\}$  – вектор узловых перемещений конструкции.

Матрица жесткости балочного КЭ, который используется для моделирования произвольной плоской стержневой системы, приведена в табл. 1

**Таблица 1**

*Матрица жесткости балочного КЭ: растяжение-сжатие, изгиб*

$[K_r] =$	$\frac{EF}{l}$					
	0	$\frac{12EJ_z}{l^3}$	симметрично			
	0	$\frac{6EJ_z}{l^2}$	$\frac{4EJ_z}{l}$			
	$-\frac{EF}{l}$	0	0	$\frac{EF}{l}$		
	0	$-\frac{12EJ_z}{l^3}$	$-\frac{6EJ_z}{l^2}$	0	$\frac{12EJ_z}{l^3}$	
	0	$\frac{6EJ_z}{l^2}$	$\frac{2EJ_z}{l}$	0	$-\frac{6EJ_z}{l^2}$	$\frac{4EJ_z}{l}$



где  $E$  – модуль упругости материала;  $F$  – площадь сечения стержня;  $l$  – длина стержня;  $J_z$  – момент инерции сечения относительно главной оси  $Z$ .

Матрицы жесткости КЭ с произвольными шарнирами в узлах вычисляются с помощью процесса конденсации.

Узловые силы  $\{P_r\}$  и соответствующие им узловые перемещения  $\{Z_r\}$  КЭ связаны между собой уравнением равновесия

$$[K_r] \{Z_r\} = \{P_r\}.$$

Это выражение представим в блочном виде следующим образом:

$$\begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix}_r \times \begin{Bmatrix} Z_A \\ Z_B \end{Bmatrix}_r = \begin{Bmatrix} P_A \\ P_B \end{Bmatrix}_r.$$

Выполнив умножение элементов матриц, получим

$$\begin{aligned} [K_{AA}] \{Z_A\} + [K_{AB}] \{Z_B\} &= \{P_A\}, \\ [K_{BA}] \{Z_A\} + [K_{BB}] \{Z_B\} &= \{P_B\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть по направлениям узловых перемещений  $\{Z_A\}$  расположены шарниры, тогда  $\{P_A\} = 0$  и из 1-го уравнения (1) будет

$$\begin{aligned} [K_{AA}] \{Z_A\} &= -[K_{AB}] \{Z_B\}, \\ \{Z_A\} &= -[K_{AA}]^{-1} [K_{AB}] \{Z_B\}. \end{aligned}$$

Подставив  $\{Z_A\}$  во 2-е уравнение (1), получим следующее выражение:

$$([K_{BB}] - [K_{BA}] [K_{AA}]^{-1} [K_{AB}]) \{Z_B\} = \{P_B\}.$$

Таким образом, матрица жесткости КЭ с одним или несколькими шарнирами  $[K_r^{III}]$  по направлениям узловых перемещений  $\{Z_A\}$  будет

$$[K_r^{III}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{III} \end{bmatrix},$$

где

$$[K_{III}] = [K_{BB}] - [K_{BA}] [K_{AA}]^{-1} [K_{AB}].$$

Приведенное преобразование матрицы жесткости КЭ может быть выполнено в местной или в общей системе координат.

На рис. 1 представлены плоские шарнирные соединения стержней: линейные по оси  $X$  (рис. 1,а) и по оси  $Y$  (рис. 1,б), а также шарнир по углу поворота сечения (рис. 1,в).

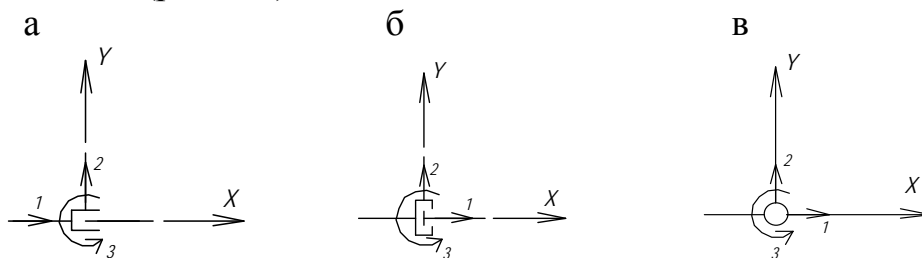

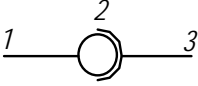
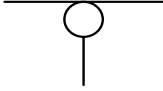
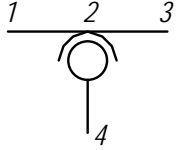
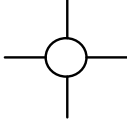
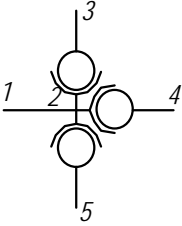
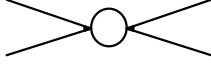
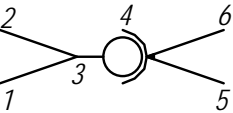


Рис. 1. Схемы вариантов шарниров в узле: а – свободное перемещение по оси  $X$ ; б – свободное перемещение по оси  $Y$ ; в – свободное угловое перемещение

В табл. 2 приведены варианты наиболее распространенных шарнирных соединений узлов

Таблица 2

## Шарнирные соединения стержней

№	Тип	Схема	Наименование
1			Простой шарнир
2			Присоединенный шарнир
3			Кратный шарнир, К = 3
4			Групповой шарнир

Реализация в программе этих вариантов шарнирных соединений стержней выполняется следующим образом.

Простой шарнир: КЭ 1–2 с шарниром в узле 2. КЭ 2–3 без шарнира.

Присоединенный шарнир: КЭ 2–4 с шарниром в узле 2. КЭ 1–2, 2–3 без шарниров.

Кратный шарнир: КЭ 3–2, 4–2, 5–2 с шарнирами в узле 2. КЭ 1–2 без шарнира.

Групповой шарнир: В шарнирное соединение вводится КЭ 3–4 с шарниром в узле 4. Остальные КЭ без шарниров.

Матрица ортогонального преобразования координат  $[T_r]$  балочного КЭ имеет вид

$$[T_r] = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix},$$

где

$$[t] = [\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{xx^0} & \lambda_{xy^0} & \lambda_{xz^0} \\ \lambda_{yx^0} & \lambda_{yy^0} & \lambda_{yz^0} \\ \lambda_{zx^0} & \lambda_{zy^0} & \lambda_{zz^0} \end{bmatrix}.$$

Направляющие косинусы осей Z, X и Y, соответственно:

$$\begin{cases} \lambda_{zz^0} \\ \lambda_{zx^0} \\ \lambda_{zy^0} \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda_{xz^0} \\ \lambda_{xx^0} \\ \lambda_{xy^0} \end{cases} = \frac{1}{L_{1-2}} \begin{cases} 0 \\ x_2^0 - x_1^0 \\ y_2^0 - y_1^0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda_{yz^0} \\ \lambda_{yx^0} \\ \lambda_{yy^0} \end{cases} = \frac{1}{L_{1-2}} \begin{cases} 0 \\ -(y_2^0 - y_1^0) \\ x_2^0 - x_1^0 \end{cases},$$

где  $x^0, y^0$  – координаты соответствующих узлов элемента в общей системе координат;  $L_{1-2}$  – длина стержня:

$$L_{1-2} = \sqrt{(x_2^0 - x_1^0)^2 + (y_2^0 - y_1^0)^2}.$$

Матрица жесткости балочного КЭ в общей системе координат вычисляется по формуле

$$[K_r^0] = [T_r]^T [K_r] [T_r].$$

Для преобразования матрицы жесткости конструкции в матрицу коэффициентов системы уравнений равновесия применяется способ, аналогичный преобразованию при решении задачи, для которой заданы перемещения. Например, при известном перемещении, положим  $Z_1^0$ , элементы первой строки и первого столбца матрицы жесткости конструкции становятся нулевыми, а элемент главной диагонали – единичным. При этом элементы вектора-столбца нагрузки становятся равными

$$\begin{aligned} P_1^0 &= Z_1^0, \\ P_i^0 &= P_i^0 - K_{1,i}^0 Z_1^0, \quad i = 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

При кинематическом закреплении (пусть  $Z_1^0 = 0$ ) необходимо изменить матрицу жесткости описанным выше способом. Элементы вектора нагрузки остаются неизменными, кроме  $P_1 = 0$ .

Этот подход к преобразованию матрицы коэффициентов системы уравнений используется в программе и при расчете при заданных перемещениях, осадке опор.

Реализация в программе упруго-оседающей опоры в стержневой системе реализуется следующим образом: к соответствующему элементу на главной диагонали матрицы жесткости конструкции прибавляется жесткость заданной опоры.

Вычисление нормальных напряжений в узлах тонкостенного стержневого КЭ (начало – первый номер узла в матрице индексов) выполняется в четырех точках сечения согласно принятым положительным направлениям



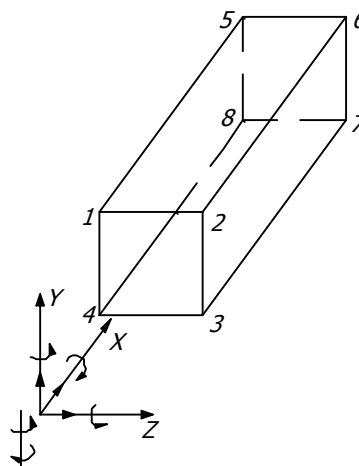
узловых перемещений, сил и моментов (рис. 2).

$$\sigma_{1,5} = \mp \frac{N}{F} \pm \frac{M_z}{W_z},$$

$$\sigma_{2,6} = \mp \frac{N}{F} \pm \frac{M_z}{W_z},$$

$$\sigma_{3,7} = \mp \frac{N}{F} \mp \frac{M_z}{W_z},$$

$$\sigma_{4,8} = \mp \frac{N}{F} \mp \frac{M_z}{W_z}.$$



*Рис. 2. К вычислению напряжений в сечениях стержневого КЭ*

В программе единицы измерений силы и длины определяются соответствующими единицами измерений модуля упругости материала. Единицы измерений результатов расчета будут те же, что и выбранные в исходных данных задачи.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. Пер. с англ. под ред. Б. Е. Победри. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
2. Чернов, С. А. Статика произвольной плоской стержневой системы / С. А. Чернов // Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2005611943 ; заявитель и правообладатель Ульян. гос. техн. ун-т. – № 2005611339; заявл. 7.06.2005. – М. : РОСПАТЕНТ, 3.08.2005.

•••••

**Чернов Сергей Анатольевич**, инженер ООО «Ремстроймост», Ульяновск.  
E-mail: [i.dyakov@ulstu.ru](mailto:i.dyakov@ulstu.ru).

## АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МОЩНОСТЬЮ НАГРЕВА МАТЕРИАЛОВ И ИЗДЕЛИЙ В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ

**В. В. Юдин, В. А. Сергеев**

*Предложен адаптивный алгоритм установления необходимой мощности источников нагрева материалов и изделий по результатам определения параметров тепловой эквивалентной схемы нагреваемого объекта на начальном участке переходной характеристики. Показано, что алгоритм расчета параметров тепловой схемы существенно упрощается при измерении приращения температуры объекта в моменты времени  $t_1$  и  $t_2 = 2t_1$ . Обсуждаются возможные постановки задач оптимизации режимов нагрева объектов по различным критериям.*

Большое число технологических процессов и операций в различных сферах производства связано с разогревом материалов и изделий до заданной (рабочей) температуры. Мощность внешних или внутренних источников тепла, необходимая для нагрева материалов и изделий до заданной температуры, может быть определена заранее, если известны параметры тепловой эквивалентной схемы (ТЭС) нагреваемого объекта [1,2]. Однако, зачастую, параметры ТЭС заранее неизвестны, имеют значительный разброс от образца к образцу и изменяются в процессе разогрева поэтому для исключения перегрева (или недогрева) объекта относительно заданной рабочей температуры  $T_p$  необходимо постоянно контролировать и регулировать мощность источников нагрева (охлаждения). В данной статье предлагается алгоритм установления необходимой мощности внутренних источников нагрева по результатам определения параметров ТЭС объекта нагрева на начальном участке переходной тепловой характеристики [3].

При подаче на разогреваемый объект ступеньки греющей мощности  $P_m$  процесс разогрева через некоторое время, определяемое числом Фурье:  $F_o > 0,3$ , из стадии иррегулярной перейдет в регулярную стадию. В регулярной стадии выражение для изменения средней температуры объекта  $T(t)$  имеет вид [3,4]:

$$\Delta T = T(t) - T_0 = \Delta T_m (1 - e^{-mt}), \quad (1)$$

где

$$\Delta T_m = R_T \cdot P_m, \quad (2)$$

превышение температуры объекта над температурой  $T_0$  окружающей среды в установившемся тепловом режиме,  $R_T$  – полное тепловое сопротивление объекта,  $t$  – текущее время,  $m$  – темп нагрева.

В общем случае значения  $R_T$  и  $m$  для каждого конкретного объекта неизвестны и величина  $\Delta T_m$  будет отличаться от заданного приращения рабочей температуры  $\Delta T_p = T_p - T_0$ .

Если записать выражения приращения температуры изделия в произвольные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ :

$$\Delta T_1 = \Delta T_m \cdot (1 - e^{-mt_1}); \quad (3a)$$

$$\Delta T_2 = \Delta T_m \cdot (1 - e^{-mt_2}), \quad (3б)$$

то, исключая из полученной системы уравнений неизвестную  $m$ , нетрудно получить уравнение относительно  $\Delta T_m$ :

$$\frac{\Delta T_m - \Delta T_2}{\Delta T_m} = \left( \frac{\Delta T_m - \Delta T_1}{\Delta T_m} \right)^{\frac{t_1}{t_2}}. \quad (4)$$

Заметим, что при  $t_2 = 2t_1$  уравнение (4) значительно упрощается и преобразуется к виду

$$\Delta T_m (\Delta T_m - \Delta T_2) = (\Delta T_m - \Delta T_1)^2, \quad (5)$$

откуда

$$\Delta T_m = \frac{\Delta T_1^2}{2\Delta T_1 - \Delta T_2}. \quad (6)$$

Поскольку величина  $P_m$  греющей мощности известна, то из (6) легко находится полное тепловое сопротивление объекта:

$$R_T = \frac{\Delta T_m}{P_m} = \frac{\Delta T_1^2}{P_m (2\Delta T_1 - \Delta T_2)}. \quad (7)$$

Тогда рабочая мощность  $P_p$  источников нагрева, необходимая для достижения в стационарном режиме заданной рабочей температуры  $T_p$ , будет определяться выражением:

$$P_p = \frac{\Delta T_p}{R_T} = \frac{\Delta T_p \cdot (2\Delta T_1 - \Delta T_2)}{\Delta T_1^2} \cdot P_m. \quad (8)$$

Таким образом, по результатам измерения приращения температуры объекта в моменты времени  $t_1$  и  $t_2 = 2t_1$  при заданном (номинальном) уровне греющей мощности  $P_m$  легко определяется значение рабочей мощности  $P_p$  источников нагрева и режим источников нагрева соответствующим образом изменяется.

Если переключение источников нагрева с уровня мощности  $P_m$  на уровень мощности  $P_p$  осуществляется в момент времени  $t_2$ , то при  $t > t_2$  температура объекта будет изменяться по закону:

$$\Delta T(t) = \Delta T_2 \cdot e^{-m(t-t_2)} + \Delta T_p (1 - e^{-m(t-t_2)}) \quad (9)$$

и через некоторое время  $\Delta t_{\text{ст}} \approx t - t_2 \approx 3/m$  достигнет практически (с погрешностью  $\delta \leq 5\%$ ) стационарного значения  $T_p$ .

Для рассматриваемой тепловой модели изделия переключение греющей мощности с уровня  $P_m$  на уровень  $P_p$  лучше всего производить в момент достижения рабочей температуры

$$t_p = \frac{1}{m} \ln \left( 1 - \frac{\Delta T_p}{\Delta T_m} \right) = \frac{1}{m} \ln \left( 1 - \frac{P_p}{P_m} \right). \quad (10)$$

В этом случае из (9) следует, что после переключения температура будет оставаться постоянной. Заметим, что энергия, затраченная на достижение рабочей температуры, в этом случае определяется выражением

$$W = P_m t_p = \frac{P_m}{m} \ln \left( 1 - \frac{\Delta T_p}{\Delta T_m} \right) = \frac{P_m}{m} \ln \left( 1 - \frac{P_p}{P_m} \right). \quad (11)$$

Полная энергия  $W$ , затраченная на нагрев, является монотонно спадающей функцией  $P_m$  и с ростом  $P_m$  стремится к 0. Однако поскольку, во-первых, мощность любого реального источника ограничена, а во-вторых, у многих классов контролируемых изделий ограничена и рассеиваемая мощность, то существует некоторое минимальное значение энергии, необходимое для разогрева изделия до рабочей температуры. Предлагаемый алгоритм защищен патентом [5], но, строго говоря, применим только для устройств с безинерционными источниками нагрева, например с нагревом лазерным или СВЧ излучением и с безинерционными датчиками температуры. Если сами источники нагрева и датчик температуры инерционны, то задача управления усложняется и для ее оптимизации необходимо решать систему уравнений Вольтерра с запаздыванием.

Характер изменения мощности источников нагрева и температуры объекта показан на рис. Режим нагрева состоит из двух этапов: начального разогрева номинальной мощностью  $P_m$  в течение времени  $t_2$ , необходимого для определения уровня рабочей греющей мощности по результатам измерения температуры объекта с достаточной точностью (например, с помощью термопар) и нагрева объекта до стационарного рабочего температурного режима источниками, переключенными в режим рабочей греющей мощности. При таком алгоритме общее время выхода объекта на рабочий температурный режим с погрешностью, не превышающей 5%, составляет  $\approx 4/m$ . Как показывает апробация алгоритма в лабораторных условиях он обеспечивает достижение рабочей температуры без недогревов и перегревов объекта, которые зачастую могут приводить к нежелательным, а,

нередко, к необратимым эффектам, как, например, при термической обработке или сушке биологических продуктов.

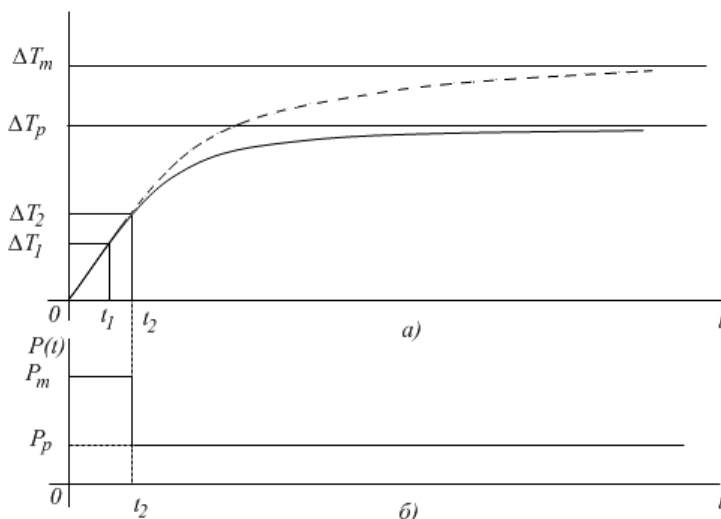


Рис. Изменение температуры нагреваемого объекта (а) и мощности источников нагрева (б).

Предлагаемый алгоритм является универсальным для объектов, параметры ТЭС которых не изменяются в процессе нагрева. Для объектов с температурозависимыми параметрами ТЭС, по нашему мнению, могут быть разработаны аналогичные алгоритмы адаптивного управления мощностью источников нагрева, если иметь хотя бы самые общие представления о характере температурных зависимостей параметров ТЭС. В случае монотонного характера указанных зависимостей, вероятно, возможно применение предложенного алгоритма путем его повторения после каждого очередного переключения мощности источников. Однако при этом требуют дополнительного исследования вопросы устойчивости, сходимости, погрешности и других характеристик процесса установления стационарного температурного режима.

Использование алгоритма в задачах диагностики качества тепловых параметров полупроводниковых приборов и интегральных микросхем позволяет осуществить, в частности, автоматическую стабилизацию температуры нагрева при исследовании тепловых свойств выборки однотипных приборов, что уменьшает время определения теплового сопротивления, тепловых постоянных времени нагрева и охлаждения, при

этом практически исключаются нежелательные перегревы контролируемых изделий.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теплотехника: Учебник для вузов / В. Н. Луканин и др.; Под ред. В. Н. Луканина – М.: Высшая школа, 1999. – 671 с.
2. Пехович А. И., Жидких В. М. Расчеты теплового режима твердых тел. – Л.: Энергия, 1968. – 304 с.
3. Теплофизические измерения и приборы / Е. С. Платунов, С. Е. Буравой, В. В. Курепин, Г. С. Петров; Под общей ред. Е. С. Платунова. – Л.: Машиностроение, 1986. – 256 с.
4. Дульнев Г. Н., Семьяшкин Э. М. Теплообмен в радиоэлектронных аппаратах. –Л.: Энергия, 1968. – 360 с.
5. Патент РФ № 2231821 Способ программного регулирования греющей мощности\ Юдин В. В., Сергеев В. А. - Бюл. №18. - 2004.



**Сергеев Вячеслав Андреевич**, директор УФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, заведующий базовой кафедрой «Радиотехника, опто- и наноэлектроника» УлГТУ в УФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. доктор технических наук, доцент. (432011, г. Ульяновск, ул.Гончарова, д. 48/2; тел./факс: (8422) 44-29-96; E-mail: [ufire@mv.ru](mailto:ufire@mv.ru))

**Юдин Виктор Васильевич**, ведущий специалист Комитета ЖКХ мэрии г. Ульяновска, аспирант базовой кафедры «Радиотехника, опто- и наноэлектроника». (432029, г. Ульяновск, ул. Самарская, д.22, кв. 60, тел. 8(8422)69-52-35; E-mail: [687681\\_27@mail.ru](mailto:687681_27@mail.ru))

---

УДК 004.896

### **МНОГОУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ**

**С. А. Сухов**

*Рассмотрена модель для решения задачи структурного синтеза проектных решений. Определены основные уровни структурного синтеза, их последовательность, результаты. Предложена модель морфологического множества.*

Для автоматизации структурно-параметрического синтеза необходимо представление различных знаний относящихся к той предметной области, к

которой относится синтезируемое проектное решение. Это связано с тем, что структурно-параметрический синтез относится к классу NP-трудных задач, для которых на данный момент не существует эффективных универсальных алгоритмов. Поэтому алгоритмы синтеза широко используют различные эвристики, специфичные для данной предметной области, позволяющие улучшить ряд характеристик синтезируемого проектного решения. А это в свою очередь даст возможность сделать трансформацию структуры более целесообразной и избежать перебора заранее нерациональных для данного случая вариантов. Но для представления таких эвристик и других знаний необходимы специальные модели.

Нередко, для описания классов технических объектов используют различного вида морфологические множества, которые включают в себя возможные структурные решения объектов рассматриваемого класса. Такое множество может быть как неупорядоченным, так и частично упорядоченным. Если речь идет о неупорядоченном морфологическом множестве, то подразумевается просто множество структур всех объектов ему принадлежащих. В случае представления такого множества с помощью морфологического дерева или каким-либо иным способом, оно становится частично упорядоченным. Одно и тоже морфологическое множество можно упорядочить различными способами, создавая различные системы классификационных признаков. Выделив классификационные признаки и сведя их в систему, мы получим частично упорядоченное множество, которое будет представлять собой модель морфологического множества на начальном уровне.

Обычно такую модель представляют в виде морфологического И/ИЛИ-дерева либо морфологической таблицы, но возможны и другие способы представления. Представление морфологического множества в том или ином виде правомочно называть моделью по аналогии с математическими моделями, представленными системами математических уравнений.

### **Представление морфологического множества на основе многодольных графов**

Аппарат двудольных графов давно используется в дискретной математике для решения различных задач, имеющих большое теоретическое и прикладное значение. Намного менее известно расширение этого средства на многомерный случай — так называемые многодольные (N-дольные) графы.

N-дольным называется граф вида  $G=(X, R)$ , где множество вершин  $X$  разбито на совокупность непересекающихся подмножеств  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , а из существования ребра  $r=(z, y)$  следует, что инцидентные ребру вершины принадлежат разным подмножествам. Подмножества вида  $X_i$  принято

называть долями графа. Из определения следует, что все доли являются независимыми множествами вершин.

Средствами N-дольных графов можно описывать обобщенные структуры с не очень сложной системой разбиения функции на подфункции. Будем рассматривать класс технических объектов, главная функция которого имеет единственное разделение на подфункции. В этом случае, техническим подфункциям поставим в соответствие доли многодольного графа. Вершинам долей графа поставим в соответствие технические реализации подфункций. Пара вершин будет связана ребром тогда и только тогда, когда не существует запретов на сочетание соответствующих реализаций в составе одного технического объекта, и имеются правила их композиции в техническом объекте (рис. 1).

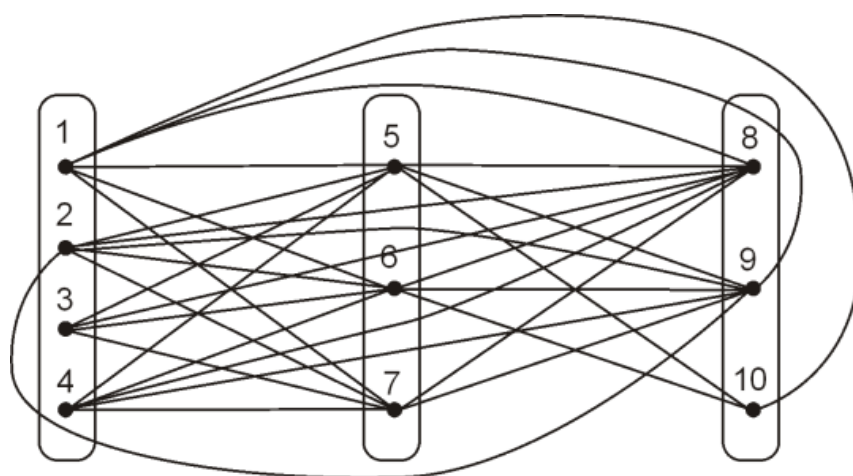


Рис. 1. Описание структуры в виде многодольного графа

Морфологическое множество в виде многодольных графов не только дает ясный способ описания обобщенных структур с простой функциональной структурой, но и дает решение задачи структурного синтеза. Решением задачи структурного синтеза является любой полный N-вершинный подграф многодольного графа (рис. 2).

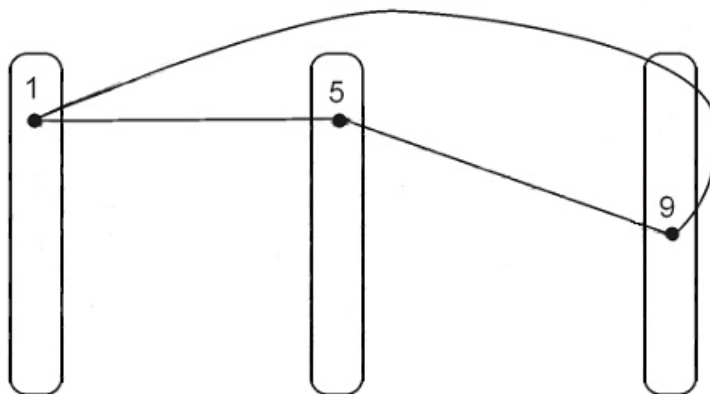


Рис. 2. Решение задачи синтеза



### Многоуровневая модель структурно-параметрического синтеза

Предлагаемая модель – это наиболее полная системологическая модель класса объектов, содержащая знания, как об анализе, так и о синтезе объектов, принадлежащих рассматриваемым классам (рис. 3). Состоит из четырех слоев (уровней): уровень идентификации (модель морфологического множества уровня идентификации), уровень спецификации (модель морфологического множества уровня спецификации), уровень анализа (модель уровня анализа) и уровень интеграции (модель уровня интеграции).

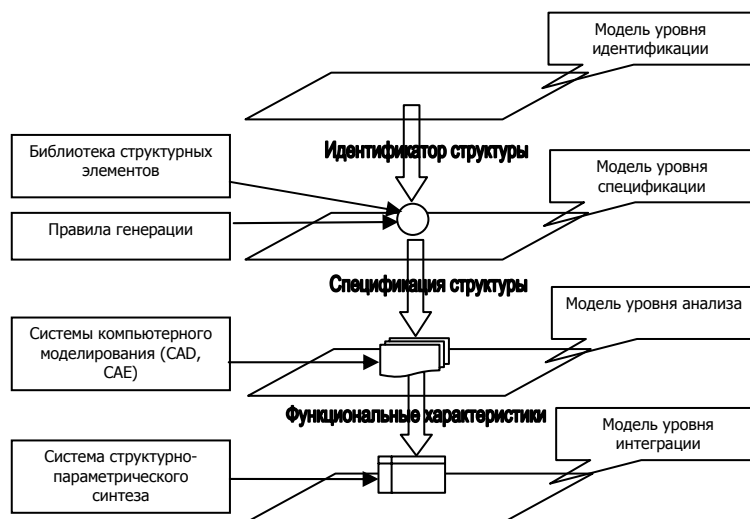


Рис 3. Многоуровневая модель структурно-параметрического синтеза

Первый уровень охватывает вопросы получения предварительного описания проектного решения на основе генерации из морфологического множества объектов данного класса.

Для описания структур классов объектов, имеющих одинаковое функциональное назначение используется модель представления морфологического множества в виде многодольных графов, рассмотренная выше. Результатом первого уровня является множество идентификаторов технических реализаций связанных с подмножеством вершин полученного подграфа.

Второй уровень охватывает вопросы генерации структуры технического решения и формирования его спецификации. Результатом этапа является спецификация структуры объекта, содержащая исчерпывающую структурную информацию. Спецификация структуры объекта может быть представлена в виде блок-схемы (рис. 4), либо с помощью специальных языков.

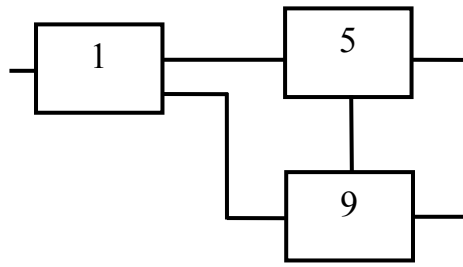


Рис. 4. Синтезированная структура проектного решения

Используя модель первого уровня можно однозначно идентифицировать объект, назвав все значения его классификационных признаков. Но такая модель не содержит всю информацию о структуре идентифицированного объекта. Поэтому, чтобы восстановить структуру объекта, необходима библиотека базовых параметризованных моделей, представляющая собой множество спецификаций базовых структур, на которые может быть разложена общая спецификация объекта. Если объединить решение первого этапа с такой библиотекой параметризованных моделей и задать правила генерации спецификации устройства, то будет получена модель на новом качественном уровне. Такая модель содержит всю необходимую информацию о морфологическом множестве и позволяет получить спецификацию структуры любого объекта, принадлежащего данному множеству. Данная модель позволяет получить спецификацию структуры любого объекта принадлежащего рассматриваемому классу (рис. 5).

Полученная спецификация не позволяет провести всесторонний анализ объекта, не дает возможность получить какие-либо характеристики объекта, кроме структурных. Если помимо возможности восстановления структуры объекта по значениям классификационных признаков имеется возможность восстановить геометрическую модель, описывающую объект, и провести всесторонний анализ объекта, не только структурный, но и функциональный, то такая модель будет уже универсальной моделью.

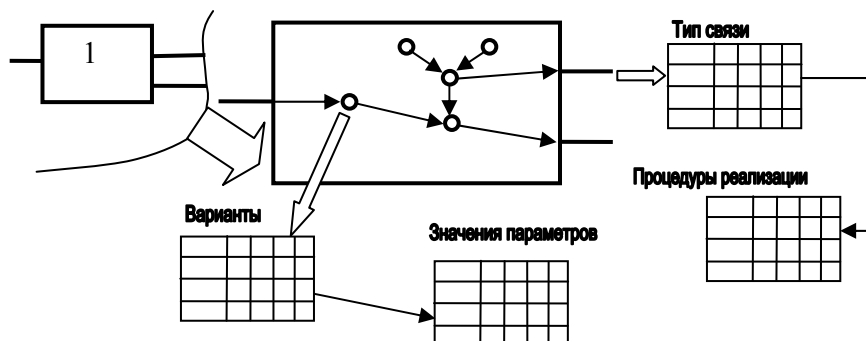


Рис. 5. Получение спецификации сгенерированной структуры

Задачами третьего уровня является восстановление геометрической модели технического решения в соответствии с полученной структурной моделью и анализ полученной модели в САД/САЕ системах. Для придания модели универсальности и возможности использования в различных средах САПР, необходимо описание базовых параметризованных элементов хранить в виде описаний на языке Express стандарта STEP. А для реализации структурных связей, создать библиотеку процедур, реализующих правила объединения структурных элементов в соответствии с функциями и правилами создания агрегатов в промышленных САПР.

Модель 3 уровня позволяет провести всесторонний анализ любого устройства, принадлежащего рассматриваемому классу, структура которого идентифицирована. Поэтому на такой модели возможно проведение структурно-параметрического синтеза при помощи модуля, реализующего его алгоритм. Но в настоящий момент отсутствуют универсальные алгоритмы, позволяющие проводить такой синтез за приемлемое время, и поэтому используются различные дополнительные модули, взятые из конкретных предметных областей. Модель 4 уровня является моделью 3 уровня, дополненная знаниями необходимыми для синтеза объектов данного класса. Таким образом, она представляет собой универсальную модель, дополненную алгоритмом синтеза.

В настоящее время рассмотренный подход к решению задачи структурного синтеза находится в стадии формирования языка описания структуры, правил ее генерации и разработки инструментальных программных средств.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Божко А. Н., Толпаров А. Ч. Структурный синтез на элементах с ограниченной сочетаемостью.– Журнал «Инженерное образование», №5, 2004.
2. Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях / под ред. Нечепуренко М. И. — Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1990.
3. Одрин В. М., Картавов С. С. Морфологический анализ систем: построение морфологических таблиц. – Киев : Наукова думка, 1977.
4. Свирщева Э. А. Структурный синтез неизоморфных систем с однородными компонентами. – Харьков : ХТУРЕ, 1998.



*Сухов Сергей Альбертович, канд. техн. наук, доцент кафедры САПР Ульяновского государственного технического университета, e-mail: [ijt@ulx.ru](mailto:ijt@ulx.ru)*

# ТРИАДНАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМНОГО АТТРАКТОРА НООСФЕРНОГО БУДУЩЕГО

*Ю. В. Сафрошкин*

Памяти Л.И. Волгина ----- (\*1)

*"Без высшей идеи не могут существовать ни человек, ни нация"*  
(Ф.Достоевский)

**Введение.** В последние годы многие мыслители и форумы [1-6 и др.], разделяющие эпиграф, призывают (разными словами) повернуться лицом к глобальным Проблемам. И думающие люди России, оставшейся в конце XX века без своей Национальной Идеи (НИР [7д]), видя её деградацию на фоне техногенной глобализации, пришли или подходят к Пониманию важной для России (и Мира в целом) Проблемы как создание (выявление) эффективной аксиологической Модели **Аттрактора будущего** (далее АБ). ----- (\*2)

В рамках естественно-исторического Мировоззрения/МЕИ (отражающего Практику), давно апробируется «триада» [4,5] наиболее вероятных АБ. Так, **Коммунизм/К** складывается как учение с опыта первохристианских и иных коммун. Его ядро: демиургом Развития служат общественные Процессы (производство, Общественное сознание/ОС...) и их Противоречия [6]. Оппозицией ему со средних веков развивается Концепция **Гуманизма/Г** - акцентирует демиургом Развития уже Личность, индивидуального Человека.

С начала же XX века на сотнях конференций, в тысячах книг и журналов ищущие Умы развивают Концепцию НООС-сферы (дефис указывает этимологию НООтерминов от НООСа Пифагора) и **Ноосферизм/Н** как 3й (в рамках МЕИ) относительно юный АБ [3,6,7]. Без его учета многовековое становление Цивилизаций и борьба с Кризисами - глобальными и локальными лишаются полноценного духовного (Э1) Смысла Развития. В.И.Вернадский (смотрящий на Науку "обширным взглядом, а не взглядом специалиста", 1944) так определил НООсферный АБ (структурирован предикативно [7а:10]):

- Ноосфера это:** 1) Биосфера, радикально преобразованная Человеком;  
2) в интересах человечества, народных масс - всех и каждого:
- а) как единого целого;
  - б) не употребляющего разум и труд на самоистребление;
  - в) свободно мыслящего, в интересах свободной мысли личности;
  - г) с творческими возможностями всё более широкими;
  - д) смотрящего на будущее уверенно.

Несмотря на обилие последующих интерпретаций и попыток её Развития [7а:153-177 -ссылки], эта ВИБ-формула остаётся основой разных Понятий Земной ноосферы (кратко ЗН, пп.1 и 2а,б) и более широких Процессов НООсферного развития/НР (пп. 2в-д), возможно, ведущих дальше и выше (в

разных Смыслах) ЗН. Диалектическая мысль видит противоречия в пожеланиях формулы и необходимость Развития обобщающих Понятий НР и ЗН [6,7], так и Понимания и исследований реальных Процессов НР человечества в будущее и признаков ЗН. А также - "сгущающегося" на переднем крае НР взаимодействия триады важнейших и крупнейших АБ - К,Г,Н (по их "возрасту").

На первый взгляд (скажем, социально-экономический) актуальные противоречия между ними обусловлены разными интересами социальных страт, их поддерживающих (в их конкуренции за ОС и ресурсы общества).

А в Сущности перспективная цель К,Г,Н общая – благополучие человечества и его доброкачественное Развитие к Идеалам целостных и гармоничных общества и человека будущего (пока это размытые образы неких "горних храмов": «Солнце духа» Н.Гумилева, «точка Омега» П.Тейяра, "Цитадель" А.Экзюпери, фильмы «Солярис», "Покаяние" и др.). Главная же "работа" К,Г,Н общая, хотя и выполняется пока, на разных внешне этапах/этажах НР. Это – исследование Противоречий Развития в целом /6/, а "в частности" – Противоречий "Построения человеческого общества..." (дискуссия "свободных философов" - Вестник РФО, 2007/№4,с. 43 ) и Развития адекватной этому Личности - до "противоречий противоречий" /76/ Процессов Развития и самоорганизации, учитывая вложенность "вверх" (вперед, в перспективу) и "вниз" (в ретроспективу) "бесконечных" спиралей Развития. (\*3)

**Синтез на этой основе единого системного АБ** (кратко САБ) возможен - с опорой на предшествующие анализ и систематизацию Содержания, общего и различного (в т.ч. Противоречий) К,Г,Н. Такой Синтез тесно связан с онтологическими и философско-методологическими Проблемами Человека [1-3, 7а:139] и с Проблемой "реконструкции Вавилонской башни" частных картезианских наук в целостную **МЕГАнауку** будущего о Человеке, обществе и Природе, она же Холистика, Ноосферология (работы И.Т.Фролова и о нём, также [7а:110,7д]). Большая для неё интрига - раскрыть Принципы долговременно устойчивой самоорганизации слабого "ручейка" Жизни и Культуры, их способность "победить многие препятствия" многократно более мощного "нисходящего" энтропийного потока Материи (А.Бергсон. Творч. эволюция). И предложить "сборку элементов знаний о жизни и человеке в единую систему... в обобщенной форме", т.е. как САБ. Не меньше интриг для Культурологии, Этики и Эстетики – предугадать будущее взаимодействие в "ручейке" Жизни "струйки" Разума с превосходящими пока "потоками" эмоций и чувств [7а:141]. И выявить/предложить новые Факторы и Процессы, чтобы из "роскоши человеческого общения" (А.Экзюпери о важной социальной потребности) выросла "плодотворная ноосфера общения" (КЛИН-03,т1: 58 -Баранцев Р.Г., удачное Развитие образа). Итак, через Противоречия

к Синтезу (от Гегеля до "Теории развития противоречий"[6]). Но КАК именно практически? - вопрошает Кант☺

**Системному синтезу** именно трех АБ (К,Г,Н - выше) в целостность ныне способствует и укрепление позиций тринитарной Методологии (тринитаризм, варианты триалектик [4,5], www.trinitas.ru). Но простая сумма аспектов и Смыслов (К+Г+Н) не превратит в САБ такой "фонд Идей" (это останется лишь базой данных/БД - версией архива).

А вот хотя бы попарное их соединение "туннелями" двухсторонних взаимодействий даст уже три "простейшие" Системы с новыми Качествами: К==Н, К==Г, Н==Г (их перевернутые концами версии будем пока считать вырожденными, см. ниже). Соединение же всех трех АБ парой "туннелей" дает ряд "линейных" (если изображать их строкой текста) триад с более богатыми Качествами: К==Г==Н, Г==Н==К, Н==К==Г; вторую подгруппу (перестановкой концов) тоже будем считать пока вырожденной.

Наконец, "кольцевание" триады в треугольный плоский граф - добавлением 3го "туннеля" взаимодействий =К==Г==Н= (мысленно замкнув концы) даёт новый скачок качеств - «хотя бы» от возникшей формальной двумерности нового треугольного графа, но, важнее, потому, что лишь теперь у КАЖДОГО его элемента появляется возможность "вступать как минимум в два качественно различных типа взаимодействия" [1а,т2:367-Егоров Д.Г.] (у линейных триад выше этим обладают лишь их центральные элементы).

Если не интересоваться пока внутренними Структурой и Содержанием элементов, их связей и их зависимостями от внешней среды (в т.ч. динамикой), то формально свойства полной кольцевой триады инвариантны к поворотам на плоскости. В любых же социальных и информационных взаимодействиях отнюдь не безразлично, где "верх" и "низ", источник и приемник - пусть "только" Информации, не говоря об ином (подробнее о "логич. триадах Васильева" [5:40]). Поэтому в [4] **Системной** названа двумерная триада (треугольный граф) с "головой" сверху как **Меры** систематизации двух других её членов внизу. Наш триадный САБ, выходит, можно обсуждать в трех вариантах: с Мерой наверху любого АБ (из К,Г,Н; два нижних члена полагаем пока равноценными - см. [4:13] о "диалоговой триаде").

**Добавим содержательности** к показанным формализмам. В [7г] приведена интересная "формула" В.Н.Сагатовского: "Ноосфера это сотворчество личности, общества и природы." Она сначала «зацепила» нас ключевым словом "Сотворчество" (обобщающим решающие Процессы в «узкой калитке» НР к НООсфере [7а:142]). А затем - перечислением **всех трех** (в рамках МЕИ) главных акторов Сотворчества. Формула, однако, "не тянет" на достаточное определение НООсферы, акцентируя лишь один тип Процессов НР (можно анализировать ещё сотрудничество, соразвитие,

сожителство). Но она возбудила диалоговое Сотворчество - началось такими уточнениями (учетом старшинства и мощи акторов всей Эволюции и НР).

А1. Ноосфера это Сотворчество Природы, Общества и Человека. Отсюда быстро явились ещё две версии (по опыту "вращения" триад [5]).

А2. Коммунизм это Сотворчество Общества, Человека и Природы. (1)

А3. Гуманизм это Сотворчество Человека, Общества и Природы.

Полагаем, что эти симметричные варианты формулы (1) для всех трёх (К,Г,Н) участников нашего САБ заслуживают внимания и потому, что первыми и основными (по важности) Субъектами Сотворчества акцентируют РАЗНЫЕ смысловые фокусы.

Из трех возможных вариантов САБ (с Мерами К,Г,Н вверху) обсуждать, в Принципе, можно любой - в объединительных ("эйкуменических"?) диалогах партий и/или движений (ниже некоторые к этому аспекты). Это полезно как для систематизации Содержания и Противоречий самих Концепций К,Г,Н, так и для содействия их "консолидации" к САБ и, тем более, для содействия со стороны Теории более важному "движению бытия навстречу мысли" (одна из максим марксизма, см. ниже).

Почему же из трех возможных САБ самым перспективным является САБ-Н (=Г==Н==К=) с систематизирующей Мерой Н (НООсферизм-НР-НООсфера) в его "голове"? Главный аргумент «спрятан» в порядке и текстах формул А1-А3 выше. Поэтому продолжим перечень дополнительных аргументов со 2й буквы (последовательность ниже не отражает их весов).

Б) Только НООсферизм явно полагает демиургом будущего НР Разум и Знание (НООС Пифагора - главный признак нашего биологического вида "Homo sapiens");

В) Только НООсферизм в состав важнейших Факторов Развития вводит явно Творчество и Сотворчество: от «Творческой эволюции» А.Бергсона и п.2 формулы Вернадского (выше) до формулы Сагатовского и наших её вариаций;

Г) Только НООсферизм не имеет фундаментальных (трудно устранимых) Противоречий с обоими АБ-партнерами К и Г, признавая их лидерство (не только по возрасту) в Познании и Практике, соответственно, общественных и личностных аспектов Развития;

Д) Только НООсферизм всем своим Генезисом (из Концепций Эволюции и Биосферы) сущностно готов поставить на 1ю позицию сотворцов НР Природу (с большой буквы!). Поскольку в рамках МЕИ нет сомнений, что именно Природа сотворила общество и человека-Личность. Лишь после этого развивается их общее Сотворчество. Ещё неизвестно, чем оно кончится (но Природа "умеет" подстраховывать свои неудачи...☺)

Наши логику аргументы дополним иными избранными компетентными мнениями. "Надежда на Свет будет опираться на целостность Земной ноосферы. А минимальной структурой, сохраняющей целостность: является

системная триада, воплощающая тринитарный архетип." [КЛИН03,т1:14-Р.Г.Баранцев Р.Г.].

"Ноосферная картина Универсума обладает интегративностью, синтетичностью, синкретичностью,... наиболее полно отвечает формам современного бытия человека в сверхсложной социоприродной системе." [1а, т1:245-Смирнов Г.С.]. ----- (\*4)

Раскрытие отдельных парных взаимосвязей, преодоление обнаруженных Противоречий (между Содержаниями, Формами, Методами Концепций К,Г,Н), раскрытие отдельных сторон триады САБ (с любой МЕРОЙ сверху!) потребует, конечно, мыслить по-новому, «может быть следствием широкого коллективного творчества и... мучительного пересмотра... трафаретов мышления, религиозных и прочих воззрений" [3:258].---- (\*5)

**Главный вывод:** САБ-Н можно и нужно создавать «широким коллективным творчеством» как важное условие "Творческой эволюции" (Бергсон - Вернадский-...) к НООсферной "стратегии современного цивилизационного развития" [1а,т3:66-Заров Д.И.], НР к духовным смыслам Бытия и к "новой соборности" [1а,т1:61-Ерофеева К.Л.], в т.ч.:

а) к завещанному Пушкиным преодолению "мышьей беготни" потребительства [7а:7] - через его же формулу: "Ищу **союза** волшебных звуков, чувств и дум" ([7а:139];

б) через развитие адекватных ОС и общего Доброго ответственного **РАЗУМА/НООСа** (пока, увы, юного и слабого) человечества, Этики и Эстетики эпохи НООсферы;

в) ведущих к Формированию целостного гармоничного Человека будущего;

г) с его ответственностью за восстановление Гармонии на Земле.----- (\*6)

В трудной этой работе ноосферное движение (НД, пока слабое) России родило в начале XXI века ряд стимулирующих лозунгов в направлении НИР [7в].

Например, "Наше общее дело - НООсфера!" (вековым «мостом» соединяет НООсферу с "Общим делом" Н.Федорова, "Всеединством" и "Цельным знанием" Вл.Соловьева).

Или "Миру - НИР!" (в этой формуле "Н" означает и Национальный, и НООсферный).

Или предварительный вариант НИР - в поддержку САБ-Н: "Птица-тройка! На российских движителях социального творчества, технической сметки и дружбы Духа с Природой вперед - к творческому экологическому Социализму и НООсфере!"

Наконец, формула НИР как синтез предыдущего и развёртка САБ-Н:

**"Наше общее дело - НООсфера как сотворчество, сотрудничество и содружество Природы, Общества и Человека!"** (2)



Две диалектически связанные максимы марксизма противоречат лишь внешне: а) "нет ничего практичнее верной теории"; б) "движение бытия навстречу мысли" важнее и труднее абстракций.

Понимая это, из сотни проблемных вопросов (ПВ) в [7а] и из пятерок ПВ в некоторых статьях [7б-е] оставим здесь «лишь» один, но центральный и обобщающий задачи дальнейшего Развития формул (1) и (2): КАК возможна оптимизация Синтеза Категорий Коммунизм, Гуманизм, НООсферизм в Модель системного Аттрактора будущего (САБ) и его продвижение в Практику? ----- (\*6,7)

**ПРИМЕЧАНИЯ:** (\*1) Статья кратко обобщает фокус (центральный момент) книги [7б]. Данная и смежные темы книги обсуждались: а) в на организованных проф. Л.И.Волгиным Международных конференциях по логике, информатике, науковедению (кратко КЛИН, с вариациями названия) в 2002-08 гг.; б) на 3м, 4м, 5м Российских философских конгрессах; в) В Ульяновском отделении Росс. философ. общества.

(\*2) Важные ключевые слова (существительные) по Проблемам Развития здесь непривычно выделены заглавными в строке, чтобы указать на наличие их кратких авторских предикативных определений (все доступны в [7а:Прилож.2], частично в [7б-е]).

(\*3) Конкретным возвышением таких "вавилонских спиралей"[7а:84] и "серпантинов" [7а:63] до "мышьей беготни жизни" давно кормятся экономика и бизнес, государство и политика, множество частных наук (источник некоторых технологич. Кризисов), правовые и силовые Структуры, Искусство и СМИ, строя врозь "этажи и переходы Вавилонских башен" [7а:177].

(\*4) В этой цитате «спрятаны» важные для анализа и систематизации свойств всех трех САБ проблемные вопросы типа: Каких «синкретичностей» недостает в САБ-К и САБ-Г?

(\*5) Возможно, понимание этого помогло В.В.Путину упомянуть на саммите в Брунее 15.11.2000 [7а:10], что на фундаменте учения о "ноосфере - сфере разума... фактически строится концепция Устойчивого развития". А правительство РФ проявило отвагу, назвав экспозицию России на ЭКСПО-2005 в Японии хорошим вызовом "Гармония ноосферы" (КЛИН-06,т1:113).

(\*6) Развертывание духовного "покрова ноосферы" (П.Тейяр [7а:7]) началось тоже давно. Например, ранний Маркс определял К как "практический гуманизм". А Концепция "ноосферного коммунизма" заложена в сочинениях И.Ефремова и активно развивается его последователями (noogen.newmail.ru; nk.noogen.spb.ru;...). Похоже, "новый марксизм, еще не знающий своего имени, рождается из гуши народной и интеллектуальной Жизни..." (Вестник РФО-04/3:44) и, возможно, перспективный САБ-Н будет продвигаться и с этой стороны (Сотворчеством и Синтезом К,Г,Н). Ширящееся движение АНТИ-глобализма тоже склоняется к подобной работе [7а:121].



# СИСТЕМНЫЙ АТТРАКТОР НООСФЕРНОГО БУДУЩЕГО И ЕГО ОТРАЖЕНИЕ В НАЦИОНАЛЬНОЙ ИДЕЕ РОССИИ ----- (\*1,\*2)

*Ю. В. Сафрошкин*

**Аннотация.** После кратких критики религиозных образов будущего (п.1.2 ниже) и обзора естественно-исторических **Аттракторов будущего** (АБ, п.2) аргументированы целесообразность и триадная Модель-образ системного АБ (п.3). Обсуждаются возможности его отражения в кратких формулах (словесных Моделях) **Национальной Идеи России** (НИР, п.4), их доводки в перспективную НИР (п.5), возможного соучастия в этом Науки (п.6). Работа Развивает теоретические и социокультурные аспекты, намеченные в предшествующей книге [1] и смежных статьях [2-9].----- (\*3)

**Э1: "Искра творчества (чудо из чудес), высеченная в трениях с природой, зажгла пламень человеческой истории" [Бойков1:33]**

**Э2: "Жизни мышья беготня,/ Что тревожишь ты меня?"**

**ОБЩИЕ От меня чего ты хочешь?/ Ты зовешь или пророчишь?...**

**ЭПИГРАФЫ Я понять тебя хочу./ Смысла я в тебе ищу..."**

... (А.Пушкин, Стихи, сочинённые ночью во время бессоницы)

**Э3: "...развитие начинает восходящий путь по сети противоречий... ноосфера с движущим противоречием "познание - производство" при условии примата познания..." И[Лопин]**

## **СОДЕРЖАНИЕ книги:**

**Предисловие: о разведке будущего**

**1. Введение:** 1.1. О мировоззренческой и методологической базе работы;

1.2. Элементы критики некоторых Идеалов будущего;

1.3. Пояснения к организации текста.

**2. Об естественно-исторических аттракторах будущего:**

2.1. Коммунизм; 2.2. Гуманизм; 2.3. Ноосферизм - Ноосфера.

**3. Как возможен системный Аттрактор будущего?**

**4. О необходимости и возможностях поиска Национальной идеи России:**

4.1. О необходимости НИР;

4.2. О возможных способах (алгоритмах) поиска НИР;

4.3. О ноосферных вариантах НИР. 4.4. Резюме

**5. Сотворчество как необходимый фактор становления общественного РАЗУМА:**

5.1. О взаимосвязях смежных понятий активности Человека

5.2. КАК диалоговое Сотворчество содействует становлению РАЗУМА

5.3. Зачем и что диалог мог бы заимствовать от ИТ? 5.4. Резюме.

**6. Надежды на МЕГАнауку будущего?:**

6.1. О возможной структуре МЕГАнауки;

6.2. Некоторые аспекты становления МЕГ Анауки; 6.3. Резюме.

### **7. Общие выводы. Заключение.**

**Дополнения** (некоторые иллюстративные фрагменты):

Д1. Подсказки русского языка к глубинам сотворчества;

Д2. Из СТОИК-диалогов о Сотворчестве РАЗУМА;

Д3. Из материалов Ульяновского Совета социокультурного синтеза;

Д4. Краткая информация Ульяновского клуба "Ноосфера";

Д5. Избранные проблемные вопросы к дискуссии.

Д6. Концептуальная модель Деятельности и Сознания

**Приложения:** П1. Расшифровка аббревиатур и сокращений;

П2. Тезаурус: краткие определения основных терминов;

П3. Список источников.

П4. О двух памятниках в Ульяновске...

**Из предисловия.** С позиций Естественно-исторического Мирозрения (кратко МЕИ - база нашей работы, п.1.1) Природа, "высекая искру творчества" (эпиграф Э1) "не думала" о социальных и культурных перспективах этого "чуда из чудес" сверх рассудочного Мышления как усиления "глаз и ушей, клыков и когтей" (~Сент-Дьёрди?) наших далёких предков в борьбе за выживание. Этим Природа "обрекла" в последующие века некоторых людей на Рефлексию типа Э2 и, как её итог, - на утверждения типа Э3.

Российские и всемирные философские конгрессы и многие другие форумы последние годы всё активнее призывают повернуться лицом к глобальным Проблемам, разведке и исследованиям доброкачественных образов будущего и путей к ним. Культурные и властные круги близки в Понимании, что Развитие общества требует, среди прочих Факторов, ещё и духовной "тяги" **Аттракторов будущего** (АБ). И многие думающие люди, наблюдая Процессы техногенно-экономической глобализации и на этом фоне - деградацию России, пришли или подходят к сходным с нашими выводам (аргументы в тексте):

А) одна из глобальных и важных Проблем Мира - поиск и создание эффективной аксиологической Модели (Идеала) общего АБ;

Б) Для России (и для иных стран) очень важно, чтобы этот АБ принял понятную большинству краткую Форму **Национальной Идеи** (НИ).....

Автор заранее благодарит за любые отклики (вопросы, замечания и др.) по любому каналу связи (их реквизиты ниже).

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

(минимум публикаций автора по теме)

1 Ноосферное развитие и земная ноосфера(материалы о двух путях в будущее).- УлГТУ, 2004.-196/150 ([www.venec.ulstu.ru/lib/V7/Safroshkin](http://www.venec.ulstu.ru/lib/V7/Safroshkin));



# ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

*В. И. Левин*

Предложена методика упорядочения, классификации и унификации формул нечеткой (непрерывной) логики, описывающих динамические процессы в конечных автоматах. На примере класса автоматов без памяти с простейшими входными воздействиями показано, что методика позволяет существенно (в разы) сократить число необходимых формул.

**0. Введение.** В 1970-е годы автором была построена так называемая непрерывно-логическая теория динамического поведения конечных автоматов [1, 2]. Эта теория позволяла с помощью математического аппарата непрерывной (нечеткой) логики, адекватного динамике автоматов, находить в аналитической форме динамические процессы на выходах автоматов любой сложности, являющиеся откликами на заданные воздействия по их входам. В рамках развития теории были получены многочисленные логико-математические формулы, позволяющие вычислять динамические процессы в различных схемах автоматов, анализировать их, синтезировать необходимую их форму и т.д. [3–5]. К сожалению, число накопленных к сегодняшнему дню конкретных формул стало довольно большим, что затрудняет работу по выбору подходящей готовой формулы, возникающую каждый раз, когда приходится изучать динамические процессы в очередной новой автоматной схеме. Это побуждает рассмотреть проблему гармонизации всей теории путем упорядочения, классификации и унификации имеющейся но-менклатуры формул динамических процессов в автоматах, с тем чтобы при изучении динамики каждой новой схемы автомата быстро подобрать необходимую для изучения формулу либо убедиться, что таковой нет и ее следует заново вывести.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим произвольный логический  $(n, m)$ -плюсник из произвольных двоичных логических элементов, на  $n$  входов которого поданы простейшие, однократные переключения сигнала в виде  $1 \rightarrow 0$  или  $0 \rightarrow 1$ , с указанием в буквенной форме моментов этих переключений. Пусть необходимо найти динамические процессы, т.е. последовательности переключений  $1 \rightarrow 0$  и  $0 \rightarrow 1$ , на всех  $m$  выходах заданной логической схемы, причем сделать это в аналитической форме. В теории динамики конечных автоматов эта и другие подобные ей задачи решаются просто с помощью набора формул, задающих вход-выходные динамические соотношения всех элементов изучаемой схемы при всех возможных вариантах переключений сигналов на их входах [2,4,5]. Однако число формул в наборе может оказаться достаточно большим. Это, с одной стороны, создает некоторые практические неудобства при расчете динамики конкретных логических схем, а с другой, придает разработанной ранее динамической теории конечных автоматов

некоторую незаконченность. В связи с этим возникает важная и актуальная задача упорядочения, классификации и унификации имеющейся номенклатуры формул, описывающих вход-выходные динамические соотношения различных элементов логических схем. Эту задачу можно решить путем интеллектуализации [6] имеющейся теории динамики автоматов. Результатом этой работы должно стать выделение целых классов однородных формул, где каждый класс полностью определяется одной формулой-представителем, из которой можно получить все остальные его формулы. Такая классификация и унификация формул должна сделать теорию динамических автоматов более гармоничной наукой, а практические расчеты в ней – более простыми. При этом необходимо отметить, что различные формулы, объединяемые в один и тот же класс, не являются физически эквивалентными: они относятся к различным логическим элементам и различным воздействиям на их входы. Рассматриваемое объединение различных формул в один класс определяется только формально – наличием единого алгоритма, позволяющего из одной формулы этого класса получить все остальные.

**2. Динамические процессы в дизъюнкторе и конъюнкторе при однородных входных воздействиях.** Следуя [1–5], введем такие обозначения:  $0'_a$  – это изменение сигнала  $1 \rightarrow 0$  в момент  $a$ ;  $1'_a$  – изменение сигнала  $0 \rightarrow 1$  в момент  $a$ ;  $1(a,b) = 1'_a 0'_b$  – единичный импульс на интервале  $a \leq t < b$ ;  $0(a,b) = 0'_a 1'_b$  – нулевая пауза в интервале  $a \leq t < b$ . Рассмотрим  $n$ -входовый элемент-дизъюнктор, реализующий в статике на выходе  $y$  булеву логическую дизъюнкцию своих входов  $x_i, i = \overline{1, n}$

$$y = \bigvee_{i=1}^n x_i. \quad (1)$$

Пусть теперь на всех входах дизъюнктора действуют однородные динамические сигналы в виде однократных переключений вида  $0 \rightarrow 1$ , т.е.  $x_i(t) = 1'_{a_i}, i = \overline{1, n}$ . Тогда динамический процесс на выходе дизъюнктора будет иметь вид такого переключения, совершаемого в момент  $t = \bigwedge_{i=1}^n a_i$ , где  $\wedge$  – конъюнкция непрерывной логики (НЛ), т.е. операция взятия минимума [2, 4, 5]. В формульном виде это соотношение между входными и выходным динамическими процессами дизъюнктора

$$\bigvee_{i=1}^n 1'_{a_i} = 1'_{\bigwedge_{i=1}^n a_i}. \quad (2)$$

Обратим внимание, что логическая операция дизъюнкции  $\vee$  в строке формулы (2) означает булеву дизъюнкцию, оперирующую с двоичными элементами 0 и 1 и их изменениями  $0'$  и  $1'$ , в то время как логическая операция конъюнкции  $\wedge$  в индексе этой формулы означает конъюнкцию НЛ, оперирующую с любыми элементами непрерывного множества  $[0, \infty)$ . Это

замечание, касающееся различия логических операций в строке и индексах формулы, относится также ко всем последующим формулам, описывающим соотношения между входными и выходными динамическим процессами в элементах. Если на всех входах дизъюнктора действуют однородные сигналы в виде однократных переключений  $1 \rightarrow 0$ , т.е.  $x_i(t) = 0'_{a_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , то динамический процесс на его выходе будет иметь вид такого переключения, совершаемого в момент  $t = \bigvee_{i=1}^n a_i$ , где  $\vee$  – дизъюнкция НЛ, т.е. операция взятия максимума [2, 4, 5]. В формульном виде такое соотношение входных и выходного динамических процессов дизъюнктора записывается аналогично (2)

$$\bigvee_{i=1}^n 0'_{a_i} = 0'_{\bigvee_{i=1}^n a_i} . \quad (3)$$

Совершенно аналогично выглядят формулы, дающие зависимость между входными и выходным динамическими процессами элемента-конъюнктора, который в статике реализует на выходе  $y$  булеву логическую конъюнкцию своих входов  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$

$$y = \bigwedge_{i=1}^n x_i . \quad (4)$$

А именно, для входных динамических процессов в виде однократных переключений  $x_i(t) = 1'_{a_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , это формула

$$\bigwedge_{i=1}^n 1'_{a_i} = 1'_{\bigwedge_{i=1}^n a_i} , \quad (5)$$

а для входных динамических процессов в виде однократных переключений вида  $x_i(t) = 0'_{a_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , это формула

$$\bigwedge_{i=1}^n 0'_{a_i} = 0'_{\bigwedge_{i=1}^n a_i} . \quad (6)$$

Вход-выходные динамические соотношения в дизъюнкторе и конъюнкторе, описываемые формулами (2), (3), (5), (6), можно представить более компактно и наглядно, указав последовательность входящих в каждую формулу символов переменных и операций и разделив вертикальной чертой символы, относящиеся ко входам элемента, от символов, относящихся к его выходу. Например, формулу (2) представим символьно в виде записи  $\vee 1' | 1'_{\wedge}$ , формулу (3) – в виде  $\vee 0' | 0'_{\vee}$  и т.д. Собрав вместе все четыре символьных представления, соответствующие четырем имеющимся формулам, поместив каждое представление в рамку и соединив линиями те соответственные символы различных представлений, значения которых совпадают, получим мультиграф формул динамики дизъюнктора и конъюнктора при однородных входных воздействиях (рис. 1).



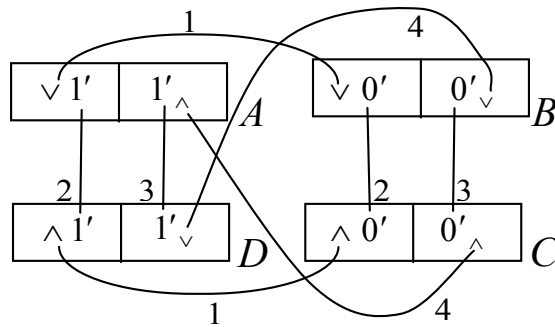


Рис. 1. Мультиграф 1 символьного представления формул динамики

Из рис. 1 хорошо видно, какие из соответствующих друг другу символов различных символьных представлений формул имеют одинаковые значения (они соединены линиями), а какие – противоположные значения (между ними нет линий). Это позволяет легко перейти от одного символьного представления (одной формулы) к другому представлению (другой формуле), используя полностью формализованную алгоритмическую процедуру. Эта процедура проста и очевидна.

**Пример 1.**

Необходимо получить из символьно представленной формулы  $A$ , которая считается известной, символьно представленную формулу  $C$ , которая считается неизвестной (рис. 1).

**Шаг 1.** В вершине  $C$  мультиграфа рис. 1 выделяем позицию, соединенную линией с соответствующей позицией вершины  $A$ . В данном случае это 4-я по порядку позиция. В ней проставляем тот же самый символ, что и в позиции 4 вершины  $A$ . В данном случае это символ  $\wedge$ .

**Шаг 2.** В вершине  $C$  мультиграфа рис. 1 выделяем позиции, не соединенные линиями с соответствующими позициями вершины  $A$ . В данном случае это позиции 1, 2, 3. В них проставляем символы, противоположные символам в соответствующих позициях вершины  $A$ , т.е. вместо  $\vee, 1', 1'$  ставим соответственно  $\wedge, 0', 0'$ . В итоге получаем символьно представленную формулу  $C$  (рис. 1).

**Конец алгоритма.**

Обнаруженное существование единого алгоритма, позволяющего из любой одной формулы четырехформульного мультиграфа (рис. 1) чисто формально получить три остальные, дает основание отнести все четыре формулы –  $A, B, C$  и  $D$  к единому классу однородных формул. При этом в качестве формулы-представителя, полностью определяющей этот класс, можно выбрать любую из четырех указанных формул.

**3. Динамические процессы в дизъюнкторе и конъюнкторе при неоднородных входных воздействиях.** Рассмотрим теперь ситуацию, когда на входах  $n$ -входных дизъюнктора и конъюнктора (реализуемые в статике на выходе  $y$  булевы логические функции входов  $x_i, i = \overline{1, n}$ , соответственно (1) и (4)) действуют неоднородные динамические сигналы в виде однократных

переключений вида  $0 \rightarrow 1$  на одних входах и вида  $1 \rightarrow 0$  на других входах, т.е.  $x_i(t) = 1'_{a_i}$  при  $i = \overline{1, m}$  и  $0'_{a_i}$  при  $i = \overline{m+1, n}$ . В этой ситуации динамические процессы на выходах дизъюнктора и конъюнктора легко вычислить, представив каждый из них в виде параллельного соединения двух одноименных элементов, на входах первого из которых действуют только переключения  $1'$ , а на входах второго – только переключения  $0'$ , выходы которых подаются на входы двухвходового элемента того же типа. В итоге, используя формулы (2), (3), (5), (6) для выходных динамических процессов многовходовых дизъюнктора и конъюнктора при однородных входных воздействиях в виде однократных переключений  $1'$  или  $0'$  и формулы [2, 4, 5] для выходных динамических процессов двухвходовых дизъюнктора и конъюнктора при неоднородных воздействиях (по одному входу  $1'$ , а по другому  $0'$ )

$$1'_a \vee 0'_b = 0(b, a \vee b), \quad (7)$$

$$1'_a \wedge 0'_b = 1(a, a \vee b), \quad (8)$$

получим следующие искомые формулы:

$$\bigvee_{i=1}^m 1'_{a_i} \vee \bigvee_{i=m+1}^n 0'_{a_i} = 0 \left[ \bigvee_{i=m+1}^n a_i, \bigvee_{i=m+1}^n a_i \vee \left( \bigwedge_{i=1}^m a_i \right) \right], \quad (9)$$

$$\bigwedge_{i=1}^m 1'_{a_i} \wedge \bigwedge_{i=m+1}^n 0'_{a_i} = 1 \left[ \bigvee_{i=1}^m a_i, \bigvee_{i=1}^m a_i \vee \left( \bigwedge_{i=m+1}^n a_i \right) \right]. \quad (10)$$

Формула (9) дает выходной динамический процесс в дизъюнкторе с неоднородными входными динамическими воздействиями в виде нулевой паузы  $0[\cdot]$  в указанном в скобках интервале времени. Аналогично, формула (10) дает выходной динамический процесс в конъюнкторе с такими входными воздействиями в виде единичного импульса  $1[\cdot]$  в указанном в скобках временном интервале.

Вход-выходные динамические соотношения в дизъюнкторе и конъюнкторе, описываемые формулами (9), (10), можно, как и предыдущие соотношения, представить в символьной форме. Для этого обозначим в указанных формулах булевы дизъюнкции и конъюнкции в виде

$$\bigvee_{i=1}^m = \vee^1, \quad \bigvee_{i=m+1}^n = \vee^2, \quad \bigwedge_{i=1}^m = \wedge^1, \quad \bigwedge_{i=m+1}^n = \wedge^2, \quad (11)$$

а дизъюнкции и конъюнкции НЛ в виде

$$\bigvee_{i=1}^m = \vee_1, \quad \bigvee_{i=m+1}^n = \vee_2, \quad \bigwedge_{i=1}^m = \wedge_1, \quad \bigwedge_{i=m+1}^n = \wedge_2. \quad (12)$$

Собрав теперь вместе два символьных представления формул (11), (12), разделив в них, как и раньше, вертикальной чертой символы, относящиеся ко входам элемента, от символов, относящихся к его выходу, и соединив линиями соответственные символы двух представлений, значения которых совпадают, получим мультиграф формул динамики дизъюнктора и конъюнктора при неоднородных входных воздействиях (рис. 2).

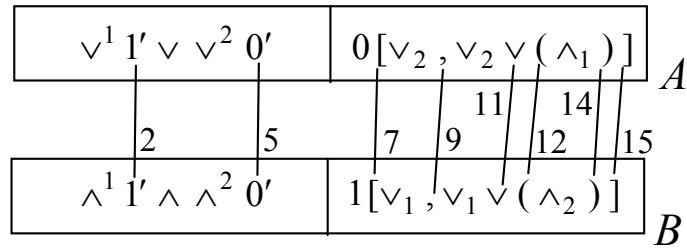


Рис. 2. Мультиграф 2 символьного представления формул динамики

Из рис. 2 видно, какие соответствующие друг другу символы двух имеющихся символьных представлений формул имеют одинаковые значения (они соединены линиями), а какие – противоположные значения (между ними нет линий). Это позволяет формализовано перейти от одного представления (одной формулы) к другому (другой формуле). Алгоритм перехода поясним на нижеследующем примере 2 перехода от предполагаемого известным символьного представления формулы *A* к неизвестному представлению формулы *B* (рис. 2).

**Пример 2.**

Получим из символьно представленной формулы *A*, считающейся известной, символьно представленную формулу *B*, которая считается нами неизвестной (рис. 2).

**Шаг 1.** В вершине *B* мультиграфа рис. 2 выделяем позиции, соединенные линиями с соответствующими позициями вершины *A*. В данном случае это позиции 2, 5, 7, 9, 11, 12, 14, 15. В них проставляем те же символы, что и в соответствующих позициях вершины *A*. В данном случае это символы  $1', 0', [\vee, \vee, (\wedge, )]$ .

**Шаг 2.** В вершине *B* мультиграфа рис. 2 выделяем позиции, не соединенные линиями с соответствующими позициями вершины *A*. В данном случае это позиции 1, 3, 4, 6, 8, 10, 13. В них проставляем символы, противоположные символам в соответствующих позициях вершины *A*, т.е. вместо  $\vee_1, \vee, \vee^2, 0, \vee_2, \vee_2, \wedge_1$  соответственно  $\wedge_1, \wedge, \wedge^2, 1, \vee_1, \vee_1, \wedge_2$ . В результате получаем символьное представление формулы *B* (рис. 2).

**Конец алгоритма.**

Итак, существует единый алгоритм, позволяющий из любой одной формулы двухформульного мультиграфа рис. 2 чисто формально получить другую. Это позволяет отнести обе формулы – *A* и *B* к единому классу однородных формул. Причем в качестве формулы-представителя класса можно выбрать как *A*, так и *B*.

**4. Динамические процессы в произвольных логических  $(n, m)$ -полюсниках.** Обратимся теперь к заданному выше условиями (§ 2) логическому  $(n, m)$ -полюснику. Без ограничения общности решения поставленной задачи его можно представить в виде совокупности *m* отдельных логических  $(n, 1)$ -полюсников с общими *n* входами, реализующих на своих выходах  $y_i$

соответствующие булевы логические функции  $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , от общих для них всех входов  $x_1, \dots, x_n$ . Любой такой  $(n, 1)$ -полюсник, как известно [7], можно представить в виде эквивалентной двухступенчатой логической схемы, первая ступень которой состоит из нескольких параллельно работающих конъюнкторов, реализующих на своих выходах булеву логическую функцию входов конъюнкцию (4), а вторая – из одного дизъюнктора, реализующего на своем выходе булеву логическую функцию входов дизъюнкцию (1), причем входами дизъюнктора являются выходы конъюнкторов (рис. 3).

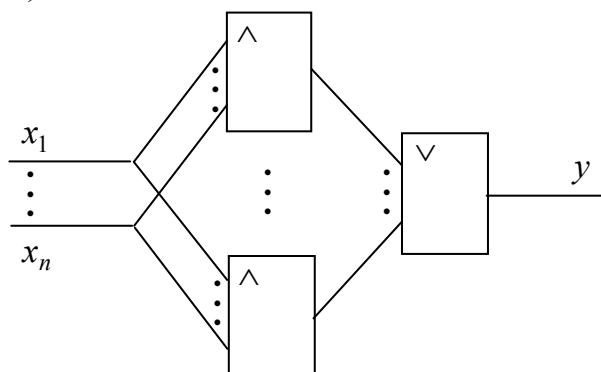
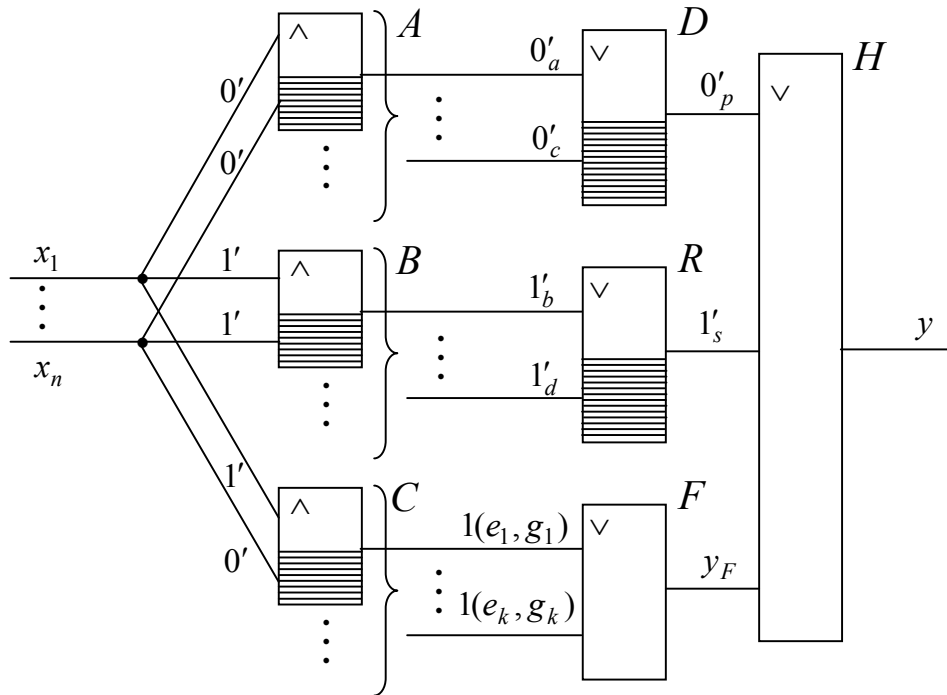


Рис. 3. Эквивалентная двухступенчатая логическая схема  $(n, 1)$ -полюсника

Но, как установлено выше формулами (5), (6), (10), при простейших динамических входных воздействиях вида  $1 \rightarrow 0 = 0'$  и  $0 \rightarrow 1 = 1'$  (а по условию задачи рассматриваются только такие воздействия) на выходе конъюнктора могут вырабатываться динамические процессы только следующих трех типов:  $0'_a, 1'_a$  и  $1(a, b)$ . В соответствии с этим и учитывая ассоциативный закон для булевой логической дизъюнкции, схему рис. 3 можно заменить эквивалентной ей трехступенчатой логической схемой рис. 4.

В схеме рис. 4 частичной штриховкой выделены логические элементы, динамические процессы на выходах которых мы уже умеем вычислять по их входным динамическим процессам с помощью подходящих формул: для элементов-конъюнкторов групп  $A, B$  и  $C$  это соответственно формулы (6), (5) и (10), а для элементов-дизъюнкторов  $D$  и  $R$  это соответственно формулы (3) и (2). Таким образом, из рис. 4 видно, что для того, чтобы найти динамический процесс  $y(t)$  на выходе произвольного логического  $(n, 1)$ -полюсника с простейшими динамическими воздействиями  $x_i(t)$  вида  $0'$  и  $1'$ , используя для этого метод последовательных подстановок выходов предыдущих ступеней на входы последующих, нам не хватает лишь двух формул. Первая формула должна вычислять динамический процесс  $y_F(t)$  на выходе элемента-дизъюнктора  $F$ , получающего по всем входам однородные динамические воздействия в виде единичного импульса  $1(\cdot)$  в указанном в скобках временном интервале. Вторая формула должна вычислять динамический процесс  $y(t)$  на выходе трехвходового элемента-дизъюнктора  $H$ , на 1-м и 2-м входах которого действуют динамические процессы

соответственно  $0'_p$  и  $1'_s$ , а на 3-м входе – процесс, полученный на выходе элемента-дизъюнктора  $F$ . Этот процесс и есть искомым динамический процесс на выходе заданного логического  $(n,1)$ -полюсника (рис. 3, 4).



$A$  – конъюнкторы 1-й группы,  $B$  – 2-й группы,  $C$  – 3-й группы. Конъюнкторы одной группы имеют однотипные входные воздействия.

Рис. 4. Эквивалентная трехступенчатая логическая схема  $(n,1)$ -полюсника

Первая необходимая нам формула, вычисляющая динамический процесс  $y_F(t)$  на выходе дизъюнктора  $F$  с входными воздействиями в виде единичных импульсов, есть частный случай формулы для динамического процесса на выходе дизъюнктора с входными динамическими процессами в виде конечных последовательностей единичных импульсов [4, 5]. Она имеет вид

$$y_F(t) \equiv \bigvee_{i=1}^k 1(e_i, g_i) = 1(E^1, G^1 \wedge E^2) 0(-, -) 1(E^2, G^2 \wedge E^3) \dots \dots 1(E^{k-1}, G^{k-1} \wedge E^k) 0(-, -) 1(E^k, G^k), \quad (13)$$

где  $E^r = \begin{vmatrix} e_1 \\ \dots \\ e_k \end{vmatrix}^r$  – логический определитель (ЛО) ранга  $r$  от матрицы-столбца

$E = \begin{vmatrix} e_1 \\ \dots \\ e_k \end{vmatrix}$ , т.е.  $r$ -й в порядке неубывания элемент этой матрицы,  $G^r = \begin{vmatrix} g_1 \\ \dots \\ g_k \end{vmatrix}^r$  –

логический определитель ранга  $r$  от матрицы-столбца  $G = \begin{vmatrix} g_1 \\ \dots \\ g_k \end{vmatrix}$ ,  $\wedge$  – операция

конъюнкции НЛ. ЛО  $E^r$  и  $G^r$  раскрываются (выражаются) соответствующими суперпозициями операций дизъюнкции и конъюнкции НЛ, совершаемыми над

элементами матриц  $E$  и  $G$  [4, 5]. Вторая необходимая нам формула вычисляет динамический процесс  $y(t)$  на выходе трехвходового дизъюнктора  $H$  с входными динамическими процессами  $y_D(t) = 0'_p$ ,  $y_R(t) = 1'_s$  и  $y_F(t) = 1(E^1, \tilde{G}^1) \cdot 0(-, -) \dots 1(E^k, \tilde{G}^k)$ , где

$$\tilde{G}^r = \begin{cases} G^r \wedge E^{r+1} & \text{при } r < k, \\ G^r & \text{при } r = k. \end{cases} \quad (14)$$

Теперь, после нахождения в явном виде процесса  $y_F(t)$ , эта формула может быть также выписана явно, с использованием выражения динамического процесса на выходе дизъюнктора с входными воздействиями в виде последовательностей единичных импульсов [4, 5]

$$\begin{aligned} y(t) &= y_D(t) \vee y_R(t) \vee y_F(t) = 0'_p \vee 1'_s \vee 1(E^1, \tilde{G}^1) 0(-, -) \dots 1(E^k, \tilde{G}^k) = \\ &= 1(-\infty, p) \vee 1(s, \infty) \vee 1(E^1, \tilde{G}^1) 0(-, -) \dots 1(E^k, \tilde{G}^k) = \\ &= 1(A^1, B^1 \wedge A^2) 0(-, -) 1(A^2, B^2 \wedge A^3) \dots 1(A^{k+1}, B^{k+1} \wedge A^{k+2}) 0(-, -) 1(A^{k+2}, B^{k+2}), \end{aligned}$$

где  $A^r = \begin{vmatrix} -\infty \\ s \\ E^1 \dots E^k \end{vmatrix}^r$ ,  $B^r = \begin{vmatrix} p \\ \infty \\ \tilde{G}^1 \dots \tilde{G}^k \end{vmatrix}^r$ .

Упрощая теперь ЛО  $A^r$  и  $B^r$ :

$$A^r = \begin{cases} -\infty, & r = 1, \\ A_1^{r-1}, & r = \overline{2, k+1} \end{cases}, \text{ где}$$

$$A_1^r = \begin{vmatrix} s \\ E^1 \dots E^k \end{vmatrix}^r, \quad r = \overline{1, k+1}; \quad (15)$$

$$B^r = \begin{cases} B_1^r, & r = \overline{1, k+1}, \\ \infty, & r = k+2 \end{cases}, \text{ где}$$

$$B_1^r = \begin{vmatrix} p \\ \tilde{G}^1 \dots \tilde{G}^k \end{vmatrix}^r, \quad (16)$$

получим окончательную формулу для динамического процесса  $y(t)$  на выходе трехвходового дизъюнктора  $H$ , являющемся также выходом заданного логического  $(n, 1)$ -полюсника (рис. 3, 4)

$$\begin{aligned} y(t) &= 0'_p \vee 1'_s \vee 1(E^1, \tilde{G}^1) 0(-, -) \dots 1(E^k, \tilde{G}^k) = \\ &= 0(B_1^1 \wedge A_1^1, A_1^1) 1(A_1^1, B_1^2 \wedge A_1^2) \dots 1(A_1^k, B_1^{k+1} \wedge A_1^{k+1}) 0(-, A_1^{k+1}). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь ЛО  $A_1^r, B_1^r$  определяются выражениями (14)–(16).

Выражения (13) и (17) аналогичны – оба они содержат последовательность  $k+2$  единичных импульсов (в (17) первый импульс начинается в момент  $t = -\infty$ , а последний заканчивается в момент  $t = +\infty$ ). Поэтому формулы (13) и (17) можно отнести к одному классу однородных формул, описываемых единым мультиграфом, как это делалось выше.



## ЛОГИКА И ТВОРЧЕСТВО В ФОРМИРОВАНИИ КУЛЬТУРЫ МЫШЛЕНИЯ БУДУЩИХ СПЕЦИАЛИСТОВ

*В. И. Левин*

Формирование культуры мышления будущего специалиста имеет огромное значение для его профессиональной деятельности. Это формирование традиционно происходило и происходит при подавляющем влиянии науки логики, поскольку большинство специалистов традиционно считают логическое мышление синонимом правильного (эффективного, успешного и т.д.) мышления. На самом деле это не совсем так, поскольку логическое мышление позволяет только получать истинные выводы из истинных посылок, используя для этого логически правильные (соответствующие законам логики) умозаключения. Все остальные приемы нахождения истины лежат за пределами логики (проверка истинности посылок, генерирование гипотез с их последующей проверкой на истинность, использование эвристик для получения истинного суждения, непосредственное постижение истины и многое другое).

Сказанное относится как к каждодневной жизни, так и к науке, даже к математике, где роль логики в нахождении истины особенно велика. Как сказал выдающийся математик XX века Ричард Беллман «Математика – это не только логика, а логика плюс процесс созидания». Именно поэтому процесс формирования культуры мышления студентов вузов должен строиться не на основе одной только логики и других дисциплин логического цикла (теория аргументации, критическое мышление и др.), а, по возможности, в рамках подготовки к научно-исследовательской работе, которая, как известно, характерна чередованием формальных этапов (применение логических, математических и других формальных методов) с неформальными (применение эвристических, поисковых и других неформальных методов, генерирование гипотез, обращение к интуиции, прозрение и др.) [1].

Хороший пример такого подхода приведен в [2]. В нем рассказано, как венгерские студенты-юристы, изучая статью закона «Об ответственности за уничтожение и повреждение собственности», должны были решить, следует ли осудить по этому закону человека, бросившего из мести чужой перстень в реку, но разошлись во мнениях – ведь перстень остался не уничтоженным и даже не поврежденным. И лишь один студент дал правильный ответ, поддержанный профессором, сказав, что человека следует осудить, хотя он не уничтожил и не повредил перстень, т.е. формально не нарушил закон. Мотивировка студента была проста: ведь закон имеет в виду не только физическое уничтожение или повреждение собственности, но и стоимостное, которое и произошло в данном случае – ведь владелец перстня лишился его собственности – он не мог его продать, заложить и т.д. В этих условиях неосуждение злоумышленника



означало бы искажение смысла статьи закона, т.е. нарушение логического закона тождества. Однако данный подход к формированию культуры мышления учащихся требует преподавателей очень высокого уровня, которые хорошо владеют дисциплинами формально-логического цикла (логика, теория аргументации, критическое мышление и др.), дисциплинами неформально-интуиционистского цикла (эвристика, поиск, принятие решений и др.) и вдобавок способны красочно преподнести всю эту разнородную кладез знаний слушателям. В настоящее время таких преподавателей почти нет.

Низкая культура мышления нынешних студентов российских вузов и сильный недостаток высококвалифицированных преподавателей, способных поднять эту культуру, имеют вполне реальные исторические корни. В гимназиях царской России развитие формально-логического мышления считалось высшей целью обучения, а в университетах на всех факультетах курс логики был обязательным и систематическим. После Октябрьской революции на логику как предмет преподавания и объект исследования Советская власть наложила «табу», справедливо опасаясь возможности появления вполне логичных по форме, но нежелательных по содержанию выводов. Однако со временем жизнь потребовала свое, и в 1941 году, незадолго до начала Великой Отечественной войны, по личной инициативе Сталина было принято решение о «реабилитации логики». Война отодвинула реализацию этого решения. Но после войны, в 1946 году, было, наконец, принято соответствующее постановление ЦК ВКП(б). Согласно нему, в программы старших классов средней школы вводились два новых предмета – логика и психология. Предмет «психология» был устоявшимся в вузах, и его введение в школу не вызвало особых проблем. Однако предмет «логика», после наложения на него запрета властями, подвергался в 1920-е – 1930-е годы резкой критике, как метафизическое учение, не совместимое с «материалистической ди-алектикой» и потому идеологически враждебное. Естественно, что предмет «логика» в СССР в 1941 г. находился в упадке. Постановление ЦК ВКП(б) 1946 г. вводило логику как учебный предмет в 10-м классе средней школы. Это предполагало быструю подготовку преподавателей логики. В результате логика в вузах стала обычным предметом обучения. Стали также разрабатываться связанные с ней теоретические и методические проблемы. В Московском университете повышенное внимание к логике выражалось в том, что лекции по ней читались дважды – сначала на первом курсе (вводный логический курс), затем на втором или третьем курсе (основной теоретический курс логики). Первые в стране кафедры логики были открыты в Москве в МГУ (1943 г., зав. кафедрой проф. П.С. Попов) и в Ленинграде в ЛГУ (1947 г., зав. кафедрой проф. И.Я. Чупахин). Естественно, что обучение велось вначале по учебникам, созданным еще до революции. Однако учебно-методическая работа на вновь созданных кафедрах уже началась, и появление первых советских учебников логики было уже не за горами!

Успешное развитие логики как научной дисциплины и предмета обучения продолжалось в СССР до конца 1980-х годов. Однако в конце 1980-х – 1990-е годы по хорошо известным причинам нашу страну постигла серьезная катастрофа, повлекшая за собой массовый уход из сферы науки и образования наиболее активных и квалифицированных ученых и педагогов. По некоторым оценкам, число ушедших работников составило 80% от числа имевшихся (подробно см. [3]). Разумеется, катастрофа такого масштаба не могла не сказаться на качестве вузовского образования, в частности, на качестве преподавания логики и дисциплин логического цикла, равно как и других дисциплин, формирующих человеческое мышление. Это качество сегодня удручающе низко (конечно, всегда есть отдельные очень хорошие преподаватели, но они лишь подчеркивают общую печальную картину). Общий уровень, на котором ныне находится преподавание в вузах дисциплин, формирующих человеческое мышление, нетрудно оценить без всякого контроля процесса преподавания – достаточно полистать страницы журналов, где вузовские преподаватели этих дисциплин публикуют свои научные статьи. Эти журналы содержат потрясающее количество логических, фактологических и иных ошибок, а то и просто нелепостей. Чего же после этого можно требовать от студентов?

Ограничимся одним конкретным примером. В известном российском академическом журнале, посвященном вопросам истории естествознания и техники, в 2007 г. была опубликована статья, в которой обсуждается открытие применения логики в технике [4]. Вот маленький фрагмент из этой статьи (некоторые фамилии нами изменены):

«Лобов пишет, что работы Шестакова не повторяли работы Накашимы и Шеннона, а «дополняли и развивали их». Дополнять и развивать можно только нечто, что уже известно и от чего отталкиваешься. Труды Шестакова глубоко оригинальны. Наверняка, с публикациями Накашимы и Шеннона он знаком не был».

В этом крохотном фрагменте из четырех строк имеется целых пять логических ошибок (анализ этих и других ошибок в статье [4] см. в [5]).

1) Высказывание Лобова «Работы Шестакова не повторяли работы Накашимы и Шеннона» относится к работам, а высказывание автора статьи [4] «Дополнять и развивать можно только нечто, что уже известно и от чего отталкиваешься» – к авторам этих работ. Таким образом, здесь в статье [4] совершена подмена понятий (нарушение логического закона тождества), приведшая к ошибке. На самом деле, работа г-на Б может развивать и дополнять работу г-на А и в том случае, когда Б не знаком с работами А.

2) Свое высказывание «Труды Шестакова глубоко оригинальны» автор статьи [4], очевидно, рассматривает как аргумент против приведенного в рассматриваемом фрагменте утверждения Лобова. Однако это ошибка, поскольку слово «оригинальный» равносильно слову «не повторяющий», так

что на самом деле данное высказывание является аргументом в пользу утверждения Лобова (точнее, его первой части – «работы Шестакова не повторяли работы Накашимы и Шеннона»). Таким образом, здесь мы снова видим подмену понятий (нарушение логического закона тождества).

3) Приведенное в п. 2. высказывание автора статьи [4] ничем не аргументировано, что является нарушением логического закона достаточного основания.

4) Свое высказывание «Наверняка, с публикациями Накашимы и Шеннона он знаком не был» автор статьи [4], очевидно, рассматривает как аргумент в пользу его предыдущего высказывания из п. 2. Однако это ошибка, поскольку оригинальность результатов ученого А и его знакомство с публикациями ученых Б и Ц никак не связаны (А может знать результаты Б, Ц и сделать оригинальную работу, не повторяющую эти результаты, а может не знать эти результаты, но сделать работу, случайно повторяющую их). Т.е. здесь снова нарушен логический закон достаточного основания.

5) Приведенное в п. 4 высказывание автора статьи [4] ничем не аргументировано, что нарушает логический закон достаточного основания. На самом деле, это высказывание ошибочно: имеются свидетельские показания знакомых и родственников Шестакова, подтверждающие его знакомство с публикациями Шеннона, а анализ его публикаций говорит о его знакомстве со статьями Накашимы.

Фрагментов, подобных разобранным выше, в статье [4] насчитывается 20 (см. [5]). Автор статьи [4] – В.А. Бажанов, зав. кафедрой, доктор филос. наук, профессор, заслуж. деятель науки РФ, специалист по истории логики!

Современное положение в России в области формирования культуры мышления будущих специалистов и ученых кратко можно охарактеризовать следующим образом. Имеется достаточное число изданных хороших книг по логике и дисциплинам логического цикла – как зарубежных [6–11], так и отечественных [12–14] авторов. Ведется работа по переизданию лучших отечественных и зарубежных книг прошлых лет [15–18]. Вскоре впервые будет издан курс лекций по логике С.А. Яновской – вероятно, лучшего советского логика-педагога [19, 20]. Все это хорошо. Однако плохо то, что у нас слишком мало преподавателей, готовых и способных выбрать из этого моря книг самые важные и на этой основе создать учебные курсы, позволяющие фактически поднять культуру мышления слушателей. Плохо и то, что руководители отечественного образования не понимают важности науки логики для воспитания культуры мышления будущих специалистов и не вводят соответствующих обязательных курсов в программы обучения специалистов всех специальностей, более того, сокращают часы там, где такие курсы есть. Увы, эти руководители не понимают и многого другого, например, того, что «улучшение» контроля знаний в форме пресловутого ЕГЭ не есть улучшение самих знаний. Именно поэтому провозглашаемая в последние годы реформа

образования не идет и при нынешнем взгляде на вуз, школу как на сферу образовательных услуг не пойдет. Однако настоятельная необходимость повышения культуры мышления специалистов очевидна для многих думающих и небезразличных представителей научно-педагогической общественности. Что же в этих условиях делать?

Конечно, лучшим и полноценным решением проблемы было бы введение в качестве обязательного цикла логических дисциплин или хотя бы одного обстоятельного интегрального курса «Логическое мышление» для всех специальностей подготовки. Однако такое решение в ближайшие годы маловероятно – не только из-за непонимания проблемы руководителями российского образования, но и по другой, еще более серьезной причине: наша страна живет по понятиям, а в жизни по понятиям логика не нужна. Так что у нас фактически нет выбора и остается лишь одно – обучать студентов, аспирантов, молодых сотрудников вузов и НИИ логике мышления не посредством соответствующих традиционных логических спецкурсов, введенных «сверху» и проводимых логиками-профессионалами, а в рамках обычных общеобразовательных и профессиональных дисциплин, силами обычных преподавателей – математиков, физиков, химиков, осознающих важность решения проблемы. При этом, возможно, придется отказаться от пространного изложения теоретической логики, а излагать лишь ее основы, включая логические законы, после чего переходить к разбору возможных конкретных нарушений этих законов и следующих из них ошибочных утверждений, решений и действий в различных областях: в научных трудах, в социальной сфере, в государственном управлении, в политике и т.д. Естественно, что такое обучение следует проводить для студентов, аспирантов, сотрудников всех направлений – как естественников и инженеров, так и гуманитариев и общественников.

Возможна несколько иная, более эффективная и вдобавок более экономная версия предложенного пути, когда обучение логическому мышлению проводится в рамках общеобразовательных дисциплин в объединенных учебных потоках, включающих представителей самых разных специальностей. Возможность такого обучения базируется на том, что логика правильного мышления едина для всех специальностей. Такая система обучения практической логике мышления принята в Пензенской государственной технологической академии, в рамках предложенной нами системы образовательной подготовки молодых ученых [1].

При решении проблемы повышения культуры мышления российских ученых и специалистов необходимо учитывать и творчески воспринимать анналогичный зарубежный опыт. Мы здесь имеем в виду, в первую очередь, США, где уже с 1980-х годов в университетах гуманитариям читаются курсы «Теория аргументации», «Критическое мышление» и «Неформальная логика». Однако чрезмерно торопиться здесь не следует, поскольку содержание указанных курсов значительно отличается от традиционного курса логики. Так, в

центре внимания в этих курсах находится не истинность суждений, а оценка качества аргументации. Однако оценка аргументации, если она не привязана к требованию истинности суждения, означает, что аргумент не обязан быть доказательством. Но тогда названные курсы в значительной степени субъективны по содержанию, и польза от них для специалистов и ученых не очевидна [21–23].

Решение проблемы повышения культуры мышления будущих специалистов позволит значительно поднять их профессиональный и культурный уровень, способность логично мыслить, говорить, писать, а также умение отстаивать свою точку зрения, быть услышанным, работать в коллективе. Все это приведет к повышению конкурентоспособности наших специалистов, их востребованности. Однако для этого придется долго и серьезно работать. Я не знаю, найдется ли в стране нужное для этого количество и качество педагогов. Но надеюсь, что найдутся хотя бы те, кто будут действовать по принципу «Делай, что должно, и будь, что будет!». И этого для начала достаточно.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин В. И. О проблеме подготовки ученых // Вестник высшей школы. – 2007. – № 9. – С. 25–26.
2. Яковлева Е. Историко-педагогический аспект формирования логической культуры студентов // Там же. – С. 53–56.
3. Левин В. И. Утечка мозгов и современный научный потенциал России // Датчики и системы. – 2006. – № 1. – С. 65–71.
4. Бажанов В. А. Научные открытия и специфика их оценки и ассимиляции // Вопросы истории естествознания и техники. – 2007. – № 3. – С. 179–185.
5. Левин В. И. История науки – тоже наука. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. технол. академии, 2008. – 16 с.
6. Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. – М.: ИИЛ, 1947. – 650 с.
7. Тарский А. Введение в логику и методологию дедуктивных наук. – М.: ИИЛ, 1948. – 530 с.
8. Клини С. Введение в метаматематику. – М.: ИИЛ, 1957. – 720 с.
9. Черч А. Введение в математическую логику. – М.: ИИЛ, 1960. – 310 с.
10. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1971. – 250 с.
11. Клини С. Математическая логика. – М.: Наука, 1973. – 470 с.
12. Асмус В.Ф. Логика. – М.: ОГИЗ, 1947. – 360 с.
13. Новиков П.С. Элементы математической логики. – М.: Физматгиз, 1959. – 430 с.
14. Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. – М.: Наука, 1972. – 280 с.
15. Лейбниц Г.В. Сочинения. Т. 3. – М.: Мысль, 1984. – 736 с.



инженером проекта Специального КБ. Наконец, в 1993 г. он окончательно переместился в Ульяновск (на этот раз – по объективным причинам, так как, по его словам, «в независимой Эстонии квартплата стала больше зарплаты»). Здесь оставался до конца жизни, работая сначала заведующим родной кафедрой КПРА, а с 1999 г. – профессором кафедры измерительно-вычислительных комплексов и заведующим лабораторией науко-емкого инжиниринга.

Первые научные работы Л.И. Волгина были связаны с теорией и проектированием электронных вольтметров и аналоговых измерительных преобразователей параметров электрических сигналов и цепей. Они отражены в его книгах «Линейные электрические преобразователи для измерительных приборов и систем» (М.: Сов. Радио, 1971) и «Измерительные преобразователи переменного напряжения в постоянное» (М.: Сов. Радио, 1977). Продолжением этих работ были исследования по общей теории синтеза операционных преобразователей с малой методической погрешностью. Их результаты изложены в монографиях «Принципы построения, синтез и анализ аналоговых операционных преобразователей» (Таллин: НИПТИ, 1973), «Аналоговые операционные преобразователи для измерительных приборов и систем» (М.: Энергоатомиздат, 1983) и «Аналоговые интегрирующие и дифференцирующие операционные преобразователи» (Саратов: Изд-во СГУ, 1982).

Существенные результаты, полученные Л.И. Волгиным в общей теории синтеза активных электрических цепей. Ему, в частности, принадлежит формулировка «принципа совместности отрицательной и положительной обратной связи», упрощающего топологический синтез активных цепей с обратной связью. Им показано, что топологические преобразования электрических цепей позволяют алгоритмически выделять классы эквивалентных цепей, помогая машинному синтезу новых схем. Результаты работ Л.И. Волгина в области топологических преобразований и синтеза электрических цепей изложены в его книгах «Методы топологического преобразования электрических цепей» (Саратов: Изд-во СГУ, 1982) и «Топологические преобразования и синтез схем радиоэлектронных средств» (Тольятти: Изд-во ПТИС, 2000).

Работа Л.И. Волгина в Ин-те кибернетики АН Эстонии сопровождалась освоением новой предметной области – непрерывная логика (НЛ) в анализе и синтезе аналоговых схем. Первые итоги работ по синтезу НЛ-устройств, построенных в соответствующем базисе амплитудных селекторов, представлены в его совместной с В.И. Левиным книге «Непрерывная логика. Теория и применения» (Таллин: Изд-во АН Эстонии, 1990). Л.И. считал, что возможности непрерывной логики ограничены кругом синтезируемых схем, реализующих линейно-ломаные функции. В связи с этим он предложил другой логико-алгебраический аппарат (предикатная алгебра выбора и др.), позволяющий синтезировать схемы для реализации также линейно-

разрывных функций, причем этот аппарат, по мнению Л.И., включает как частный случай НЛ. В качестве элементного базиса нового аппарата был предложен новый элемент – релятор, на основе которого возможно построение различных аналоговых устройств – функциональных, логических, вычислительных и т.д. Результаты этих работ изложены в книгах Л.И. Волгина «Синтез устройств для обработки и преобразования информации в элементном базисе релято-ров» (Таллин: Валгус, 1989), «Элементный базис реляторной схемотехники» (Тольятти: Изд-во ПТИС, 1999) и др.

Кроме направлений, связанных с техникой, математикой и логикой, Л.И. интересовался также вопросами прикладной философии и социологии. Здесь его интересовала в первую очередь, проблема таланта и посредственности в науке. Он настаивал на обязательности таланта в науке, необходимости его всемерной поддержки, пресечении пути в науку для посредственностей. Он также разрабатывал некоторые вопросы морали и этики и даже сформулировал перечень морально-этических проблем, подлежащих первоочередному решению. В 2000-е годы Л.И. Волгин активно разрабатывал некоторые вопросы истории науки и техники. Главный его интерес составляла история открытия логического моделирования дискретных схем и роль русского ученого В.И. Шестакова в нем. Л.И. настаивал на том, что Шестаков был первооткрывателем логического моделирования дискретных схем, осуществившим это открытие раньше зарубежных ученых. Кроме того, он указывал на первенство Шестакова в применении логики к описанию аналоговых схем.

Помимо собственно научной работы, Л.И. Волгин вел обширную научно-общественную работу (президент Ульяновского отделения МАИ, председатель Ульяновского отделения РФО, председатель Оргкомитета научно-технической конференции «Континуальные алгебраические логики» и т.д.) и педагогическую деятельность (многолетний зав. кафедрой КПРА УлГТУ, постановка по новым учебным планам и чтение в УлГТУ курсов «Электрорадиоизмерения», «Электрорадиоэлементы», «Теоретические основы конструирования радиоаппаратуры», «Основы теории и расчета надежности РЭС» и др.).

Имя Л.И. Волгина фигурирует в целом ряде справочников, энциклопедий, словарей («Логика: биобиблиографический справочник». – СПб: Наука, 2001; «Кто есть кто в 21 веке: русское издание». – М.: Русская академия науки и искусств; «Элита информациологов мира: кто есть кто в МАИ». Т. 1. – М.: Информациология, 1998 и др.).



**Левин Виталий Ильич** – заслуженный деятель науки РФ, доктор технических наук, профессор, академик МАИ, ЕАИ, МАНЭБ, АСН РФ, Соросовский профессор, зав. кафедрой «Научные технологии» Пензенской государственной технологической академии.

Тел. (8412) 683283, e-mail: levin@pgta.ru



**ЛЕОНИД ИВАНОВИЧ ВОЛГИН**  
(27.12.1932 - 19.10.2008)



**Вехи жизни.** Леонид Иванович Волгин родился в г. Ялutorовске Тюменской области. В 1950 году семья из г. Бийска переезжает в г. Таллин. В 1951, после окончания школы Л.И. Волгин поступает учиться в Ленинградский институт авиационного приборостроения на радиофакультет. В 1957 году после окончания института по распределению был направлен на Таллиннский завод «Пунане РЭТ», где работал в должностях инженера-нормировщика, инженера-конструктора, старшего инженера и главного инженера.

В 1959 году он поступает и в 1961 году оканчивает факультет переподготовки дипломированных инженеров по специальности «Математические и счетно-решающие приборы и устройства» при Ленинградском политехническом институте, а в 1961 году оканчивает заочную аспирантуру Ленинградского НИИ электроаппаратуры (впоследствии переименован в НПО дальней связи).

В 1965 году он защищает кандидатскую диссертацию в Ленинградском институте авиационного приборостроения [1].

В периоды с 1962 по 1964 и с 1966 по 1969 годы работал в Таллинском конструкторском бюро радиоэлектроники в должности старшего инженера. С 1969 по 1975 годы он работает в должности старшего научного сотрудника в Научно-исследовательском и проектно-технологическом институте систем планирования и управления в электропромышленности (впоследствии - Таллинский электротехнический институт НПО «Электротехника») [3].

В 1974 году он защищает докторскую диссертацию [4, 5] в Киевском политехническом институте.

В 1975 году Л.И. Волгин переходит в Ульяновский политехнический институт [6], где возглавляет кафедру «Конструирование и производство радиоаппаратуры».

В 1981 году ему присваивается ученое звание профессора.

С 1984 года Л.И. Волгин работает в специальном конструкторском бюро Института кибернетики Академии наук Эстонии [7] в должности главного конструктора проекта.

В 1993 году он возвращается в Ульяновский государственный технический университет (УлГТУ) [6] и продолжает работать заведующим кафедрой «Конструирование и производство радиоаппаратуры».

В 1995 году ему присваивается почетное звание «Заслуженный деятель науки и техники Российской Федерации».

С 2000 по 2008 годы Л.И. Волгин работает профессором кафедры «Измерительно-вычислительные комплексы» и заведующим научно-исследовательской лабораторией наукоемкого инжиниринга УлГТУ.

**Научная деятельность.** Первые научные публикации Л.И. Волгина были посвящены вопросам теории и проектирования электронных вольтметров и аналоговых измерительных преобразователей параметров электрических сигналов и цепей. Итоги этих работ отражены в [8, 9].

Логическим продолжением исследований в области аналоговых измерительных преобразователей является цикл работ по развитию общей теории синтеза операционных преобразователей с малой методической погрешностью. Идея объединения различных по назначению преобразователей по признаку «операционности» позволила свести проблему повышения качества широкой номенклатуры аналоговых измерительных и вычислительных преобразователей (решающие усилители, линейные преобразователи параметров электрических цепей в напряжение, интегрирующие и дифференцирующие устройства, масштабирующие преобразователи, управляемые источники тока, измерительные усилители, преобразователи частотно-временной группы, трехполюсные эквиваленты индуктивности и др.) к задаче уменьшения методической погрешности операционных преобразователей. Итоги этих работ изложены в монографиях [10-12].

Другой цикл работ посвящен структурным методам повышения точности измерительных преобразователей. В этой области Л.И. Волгину принадлежит ряд работ по развитию итерационных и комбинационных методов повышения статической точности измерительных преобразователей, позволяющих строить высокоточные устройства на обычной элементной базе [13].

Существенным является вклад Л.И. Волгина в развитие общей теории синтеза активных электрических цепей [14-18]. Им сформулированы «принцип совместности отрицательной и положительной обратных связей» и «принцип усиления дуального сигнала», являющиеся эффективным средством

топологического синтеза и уменьшения погрешности статизма активных цепей с обратной связью. Им показано, что топологические преобразования электрических цепей являются перспективным научным направлением в области синтеза электрических схем и структур, позволяют алгоритмическим путем размножать и расширять классы эквивалентных электрических цепей. Это создает предпосылки для машинного синтеза новых схем и алгоритмического поиска оптимального схемного варианта.

Предложенные Л.И. Волгиным топологические преобразования (путем переноса узла или сумматора в замкнутых структурах, путем поворота активного трехполюсника, переносом источника входного сигнала, переносом нагрузки и др.) совместно с другими типами топологических преобразований позволяют решать следующие задачи: доказательство полноты заданного класса электрических схем с целью выбора (обоснования) оптимального схемного варианта; топологический синтез новых схем, обладающих заданными свойствами или более высокими характеристиками; размыкание активных электрических цепей с обратной связью (преобразование цепей с обратной связью в эквивалентные цепи без обратной связи); изменение средств достижения заданного качества электрических цепей; изменение типа обратной связи путем топологического преобразования цепей с отрицательной обратной связью в цепи с положительной обратной связью и обратно; изменение активной элементной базы без изменения функций цепи; изменение типа электрических цепей путем топологических преобразований потенциальных, токовых, импедансных и адмитансных цепей в токовые, потенциальные, адмитансные и импедансные цепи; выбор оптимального топологического варианта при разработке гибридно-пленочных микросхем и др.

Эффективность методов топологического преобразования для оптимального синтеза активных электрических цепей (прежде всего для наиболее распространенных классов схем повторителей напряжения) показана в ряде статей и монографии [13].

Работа Л.И. Волгина в Институте кибернетики АН Эстонии и в УлГТУ связана с разработкой и развитием новой предметной области - релятор и реляторная схемотехника. Предыдущие работы [19 и др.] показали, что бесконечнозначная (непрерывная, нечетная) логика является эффективным средством для решения задач анализа и синтеза аналоговых нелинейных и логических преобразователей. Итоги работ по синтезу непрерывно-логических устройств, построенных в элементном базисе амплитудных селекторов, изложены в книгах [20, 21].

Однако возможности бесконечнозначной логики как математического аппарата для синтеза электрических цепей в элементном базисе амплитудных селекторов ограничены кругом задач, описываемых линейно-изломными функциями. Более широкими возможностями обладает разработанный Л.И.

Волгиным логико-алгебраический аппарат (комплементарная алгебра и ее частная реализация - предикатная алгебра выбора) [22], который позволяет решать задачи, описываемые как линейно-изломными, так линейно-разрывными функциями. Существенно, что предикатная алгебра выбора (ПАВ) включает в себя как частный случай бесконечнозначную логику.

В качестве элементного базиса ПАВ Л.И. Волгиным предложены реляторы - аналоговые логические элементы, воспроизводящие элементарные операции комплементарной алгебры, ПАВ и бесконечнозначной логики. Релятор является универсальным схемным элементом с широкими функциональными возможностями. Л.И. Волгиным показано, что в элементном базисе реляторов возможно построение широкой номенклатуры аналоговых функциональных, логических, коммутационных, измерительных, вычислительных и управляющих преобразователей, аналоговых процессоров ситуационной, позиционной, порядковой и ранговой обработки сигналов без промежуточных преобразований в цифровой код, а также генераторов предикатных, аргументных, предикатно-аргументных и непрерывно-логических функций, систем сжатия и обработки аналоговой информации. Итоги работ по разработке логико-математического аппарата и реляторной схемотехники отражены в изданиях [19, 22-25]. Логическим продолжением «реляторного» направления Л.И. Волгина являются его работы по моделированию и синтезу нейронных моделей и сетей в элементном базисе реляторов [24, 26, 27 и др.]. Реляторная парадигма моделей нейронных сетей эффективно работает при построении различных нейротехнических систем.

Л.И. Волгиным подготовлено семь кандидатов и три доктора наук.

Л.И. Волгин был инициатором и организатором ряда международных, всесоюзных и республиканских научно-технических конференций и семинаров. Наиболее известные из них «Вопросы теории и проектирования измерительных преобразователей параметров электрических сигналов и цепей», «Аналоговые измерительные преобразователи», «Проблемы обработки аналоговой информации», «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке и технике (КЛИН)». Конференция со звонкой аббревиатурой КЛИН проводилась ежегодно более десяти лет. Именно она положила начало изданию настоящего сборника.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ялуторовск / Составитель Н.Зубарев. – Изд-во газеты «Тюменская правда», 1966. – 68 с.

2. Волгин Л.И. Исследование и разработка методов и аппаратуры для измерения эффективного значения напряжений произвольной формы: Автореф. дис... канд. техн. наук. – Л.: Ленинградский ин-т авиаприборостроения, 1964. – 24 с.

3. Научно-исследовательский институт ПО «ТЭЗ им. М.И. Калинина». – Таллин: Валгус, 1983. – 56 с.
4. Волгин Л.И. Принципы построения, синтез и анализ аналоговых измерительных преобразователей параметров электрических сигналов и цепей: Автореф. дис... докт. техн. наук. – Киев: Киевский политехнический институт, 1974. – 66 с.
5. Новые доктора наук. Леонид Волгин // Вечерний Таллин. – 1974. – 3 августа.
6. Ульяновский государственный технический университет. – Ульяновск: Изд-во УлГТУ, 1994. – 48 с.
7. Институт кибернетики Академии наук Эстонии. – Таллин: Валгус, 1990. – 60 с.
8. Волгин Л.И. Линейные электрические преобразователи для измерительных приборов и систем. – М.: Сов. Радио, 1971. – 334 с.
9. Волгин Л.И. Измерительные преобразователи переменного напряжения в постоянное. – М.: Сов. Радио, 1977. – 240 с.
10. Волгин Л.И. Принципы построения и сравнительный анализ аналоговых измерительных преобразователей. – Таллин: Научно-исследовательский и проектно-технологический ин-т систем планирования и управления в электропромышленности, 1973. – 53 с.
11. Волгин Л.И. Аналоговые интегрирующие и дифференцирующие операционные преобразователи. – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1982. – 128 с.
12. Волгин Л.И. Аналоговые операционные преобразователи для измерительных приборов и систем. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 208 с.
13. Волгин Л.И. Высокостабильные усилительные устройства: Методы построения, схемотехника. – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1985. – 128 с.
14. Волгин Л.И. Методы топологического преобразования электрических цепей. – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1982. – 108 с.
15. Волгин Л.И. Топологические преобразования и синтез схем радиоэлектронных средств. – Тольятти: Изд-во Поволжского технологического ин-та сервиса. 2000. – 173 с.
16. Волгин Л.И. Топологические модели усилителей электрических сигналов. – Тольятти: Поволжский технологический ин-т сервиса, 2002. – 90 с.
17. Волгин Л.И., Королев Ф.А., Филаретов В.В. Схемно-алгебраический анализ и принципы построения аналоговых операционных преобразователей: учебное пособие. – Ульяновск: УлГТУ, 2005. – 88 с.
18. Волгин Л.И., Королев Ф.А., Филаретов В.В. Схемно-алгебраический анализ и топологические преобразования моделей электронных цепей. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – 354 с.

19. Волгин Л.И. Синтез устройств для обработки образования и преобразования информации в элементном базисе реляторов. – Таллин: Валгус, 1989. – 180 с.

20. Волгин Л.И., Левин В.И. Непрерывная логика: теория и применения. – Таллин: АН Эстонии, 1990. – 210 с.

21. Волгин Л.И. Непрерывная логика и ее схемотехнические применения: Пять лекций по курсу «Логические основы и модели нейронных сетей». – Ульяновск: УлГТУ, 1996. – 108 с.

22. Волгин Л.И. Комплементарная алгебра и предикатная алгебра выбора: Три лекции по курсу «Логические основы и модели нейронных сетей». – Ульяновск: УлГТУ, 1996. – 68 с.

23. Волгин Л.И. Свойства и структуры функций осреднения. – Таллин: АН Эстонии, 1992. – 72 с.

24. Волгин Л.И. Реляторные генераторы предикатных, аргументных и непрерывно-логических функций. – Таллин: АН Эстонии, 1992. – 65 с.

25. Волгин Л.И. Векторная комплементарная алгебра и ее применения: Две лекции по курсу «Логические основы и модели нейронных сетей». – Ульяновск; УлГТУ, 1996. – 52 с.

26. Волгин Л.И. Реляторные нейропроцессоры и коммутационно-логические преобразователи аналоговых сигналов с кодированием номера канала: Три лекции по курсу «Логические основы и модели нейронных сетей». – Ульяновск: УлГТУ, 1996. – 74 с.

27. Волгин Л.И. Комплементарная алгебра и моделирование нейронных структур. – Таллин: АН Эстонии, 1993. – 48 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>А. А. Аганин, А. И. Давлетишин, Д. Ю. Топорков</b> Взаимодействие газовых пузырьков в жидкости с учетом их малой несферичности .....	3
<b>В. Г. Анисимов</b> Использование диэлектрического резонатора в качестве датчика толщины диэлектрических пленок на проводящем основании .....	9
<b>А. В. Анкилов, В. А. Судаков</b> Оценка повторных интегралов с ядрами, имеющими логарифмическую особенность .....	11
<b>Г. Ф. Афанасьев, А. Ю. Ревенков, О. В. Афанасьева</b> Исследование сегмента комбинированного генератора на основе пьезоэлементов .....	15
<b>С. Г. Валеев, С. В. Куркина, А. Ю. Михеев, Д. В. Ведута</b> Автоматизированная система анализа экономической деятельности предприятия .....	18
<b>С. Г. Валеев, Л. Ф. Замалдинова, М. В. Юдкова</b> Модификация и интегрирование в спор 2.0 библиотеки робастных методов .....	21
<b>С. Г. Валеев, Т. В. Афанасьева, Е. В. Казаева, А. А. Ивахина, А. О. Козлов</b> Восстановление и прогнозирование нечетких временных рядов .....	26
<b>С. Г. Валеев, Г. В. Мурнаева</b> Решение задач контроля качества продукции на основе оптимальных регрессионных моделей технологического процесса .....	31
<b>С. Г. Валеев, Н. С. Монахова, Ю. В. Шищенко</b> Структурная идентификация на основе регулярного поиска .....	34
<b>С. Г. Валеев, Ю. Г. Антонова, Е. А. Унянина</b> Применение и анализ эффективности вейвлетов при обработке временных рядов .....	37
<b>С. Л. Вельмисова</b> Вариации составления задач на экстремум .....	42
<b>А. З. Камалов</b> Расчет цилиндрических покрытий, подкрепленных арками .....	46
<b>Р. А. Каюмов, И. Ш. Абдуллин, В. В. Хамматова, И. З. Мухамедова, Е. В. Кумпан</b> Влияние обработки тканей потоком холодной плазмы на ее жесткостные характеристики .....	51
<b>С. В. Киреев</b> Дивергенция трубопровода .....	54
<b>С. В. Киреев, А. В. Адрианова, Е. С. Шерстобитова</b> Анализ устойчивости коммерческой деятельности предприятия .....	59

<b>С. В. Киреев, В. М. Валеева, М. А. Одинкина</b> Решение оптимизационной задачи линейного программирования .....	65
<b>В. Н. Клячкин, А. Ю. Михеев</b> Обнаружение нарушений технологического процесса с использованием контрольных карт кумулятивных сумм .....	70
<b>В. Н. Клячкин, В. А. Сафин</b> Влияние систематической погрешности измерений на чувствительность контрольных карт к нарушениям технологического процесса .....	72
<b>В. Н. Клячкин, А. В. Узинский</b> Статистические модели контроля рассеяния в многопараметрическом технологическом процессе .....	74
<b>В. Н. Клячкин</b> Использование предупреждающих границ в контрольных картах регрессионных остатков .....	76
<b>И. В. Коноплева, А. В. Бойко</b> Асимптотика собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма-Лиувилля с внутренним полюсом .....	78
<b>Е. И. Константинова</b> Оценка эффективности статистического контроля в условиях нарушения нормальности распределения .....	81
<b>А. В. Кочулимов, В. Л. Леонтьев</b> Аппроксимирующие свойства действительных ортогональных финитных функций второй степени на треугольных сетках .....	83
<b>Б. В. Круглов</b> Параллельный алгоритм численного метода решения краевой задачи об изгибе треугольной пластины .....	86
<b>В. Л. Леонтьев</b> Смешанный вариационный принцип теории пластичности .....	92
<b>В. Л. Леонтьев, И. С. Михайлов</b> О математических моделях нанотрубок .....	93
<b>В. Г. Малинов</b> Об оптимальном пространственном развороте самолёта .....	96
<b>А. Р. Мангушева</b> Предельное состояние композитного материала .....	100
<b>П. К. Маценко</b> Об одном возмущении дифференциального оператора первого порядка ..	103
<b>П. К. Маценко, Т. Н. Маценко</b> Использование метода наименьших квадратов при решении нелинейных граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными .....	107



<b><i>Е. А. Михеева, Т. В. Шумейко</i></b> Геометрический метод построения сокращенной ДФН и его программная реализация .....	111
<b><i>Е. А. Михеева, А. Г. Янина</i></b> Построение сокращенной ДФН булевой функции методом Квайна с использованием векторной записи из метода Квайна-Мак-Класки .....	114
<b><i>Е. А. Михеева, А. К. Вахтина</i></b> Метод построения сокращенной ДФН по карте Карно, его программная реализация .....	117
<b><i>Е. А. Михеева</i></b> Представление фал нормальными формами .....	119
<b><i>Е. А. Михеева, Т. Е. Киреева</i></b> Построение сокращенной ДФН методом Блейка и его программная реализация .....	123
<b><i>Е. А. Михеева, В. С. Еремина</i></b> Построение сокращенной ДФН методом Нельсона и его программная реализация .....	125
<b><i>Е. А. Михеева, Д. Д. Шамочкин</i></b> Программная реализация полноты системы ФАЛ .....	127
<b><i>А. А. Молгачев, Т. И. Красько</i></b> Механическая аналогия турбулентности .....	130
<b><i>П. А. Новиков</i></b> Концепция неопределённости при возведении в дробную степень чисел и функций .....	134
<b><i>П. А. Новиков</i></b> Расчет несвободных рам по методу пропорциональности .....	143
<b><i>С. В. Поляков</i></b> Математическое моделирование виброактивной системы мостового крана-штабелера с переменными параметрами .....	154
<b><i>А. Ф. Похилько, А. А. Масляницын</i></b> Математическая модель типизации и повторного использования проектных процессов .....	161
<b><i>Т. Б. Распутько</i></b> Обобщенные резольвенты линейного оператора .....	171
<b><i>В. Н. Rogov, С. М. Степанов, Т. Н. Липатова</i></b> Методы оптимизации образовательного процесса .....	175
<b><i>В. Н. Rogov, С. М. Степанов, Т. Н. Липатова</i></b> Некоторые методы математического моделирования образовательного процесса .....	178

<b>С. В. Ромашков</b> Динамическая модель упругой системы автомобиля .....	182
<b>А. С. Семенов</b> Аналитический пример вариационной задачи оптимального управления с ограничением на фазовые координаты второго порядка .....	186
<b>А. С. Семенов, А. Р. Дегтярев</b> Аналитическое решение задачи оптимального управления детерминированной системы третьего порядка вариационным методом ...	188
<b>А. С. Семенов, С. А. Кондратьев</b> Решение задачи о брахистохроне со свободным концом на вертикальной прямой как задачи оптимального управления .....	190
<b>А. С. Семенов, А. В. Пономарев</b> Математическое решение одной задачи оптимального управления с интегральным функционалом методом вариационного исчисления .....	193
<b>А. С. Семенов, А. М. Кузнецов</b> Решение одной задачи оптимального быстрогодействия методом вариационного исчисления .....	195
<b>В. А. Сергеев, Д. К. Подымало</b> Методы оценки динамики инновационного развития региона на основе математических моделей инновационного потенциала и ранга .....	199
<b>В. А. Сергеев, А. М. Ходаков</b> Математическая модель неизотермического токораспределения в гетеропереходных светодиодных структурах .....	207
<b>А. Р. Сибирёва</b> Задача о зависимости качества образовательного процесса от уровня развития информационной среды в общеобразовательном учреждении ...	214
<b>А. М. Шакирова</b> Методика расчета жесткостных характеристик тканей при больших деформациях .....	217
<b>Ф. Г. Шигабутдинов, Р. З. Муртазин, Р. Ф. Мухутдинов</b> К вопросу распространения упругих продольно-поперечных волн, возникающих при продольном ударе абсолютно твердым телом по цилиндрической оболочке постоянной толщины .....	220
<b>И. И. Ефремов, Е. П. Лукашик</b> Колебания круглого диска на слое акустической среды .....	225
<b>П. А. Вельмисов, Ю. А. Казакова, А. А. Васильева</b> Некоторые классы решений уравнений газовой динамики .....	232
<b>П. А. Вельмисов, Ю. А. Решетников, Е. П. Семенова</b> О математических моделях системы «трубопровод – датчик давления» ....	243

<b><i>А. В. Синдяев</i></b>	
Применение модели параметрического задания функции спроса для нахождения излишек потребителя .....	250
<b><i>А. В. Синдяев</i></b>	
Использование мотивации к овладению профессией для повышения интереса к изучению студентами дисциплин «высшая математика» и «математическое моделирование» .....	253
<b><i>А. Ф. Ширялкин</i></b>	
О концептуальных основах формирования информационного качества производственной среды .....	255
<b><i>А. Ф. Ширялкин</i></b>	
Идеология классификационно-эволюционного подхода в технике .....	258
<b><i>А. Ф. Ширялкин</i></b>	
Концептуальные положения классификационно-эволюционного подхода в машиностроении .....	264
<b><i>С. А. Чернов</i></b>	
О численной реализации задачи расчета произвольной плоской стержневой системы .....	269
<b><i>В. В. Юдин, В. А. Сергеев</i></b>	
Адаптивное управление мощностью нагрева материалов и изделий в технологических процессах .....	274
<b><i>С. А. Сухов</i></b>	
Многоуровневая модель для решения задачи структурно-параметрического синтеза проектных решений .....	278
<b><i>Ю. В. Сафрошкин</i></b>	
Триадная модель системного аттрактора ноосферного будущего .....	284
<b><i>Ю. В. Сафрошкин</i></b>	
Системный аттрактор ноосферного будущего и его отражение в национальной идее России .....	291
<b><i>В. И. Левин</i></b>	
Логико-математическое моделирование динамики конечных автоматов ....	294
<b><i>В. И. Левин</i></b>	
Логика и творчество в формировании культуры мышления будущих специалистов .....	304
<b><i>В. И. Левин</i></b>	
Леонид Иванович Волгин. Фрагменты научной биографии .....	310
<b>О ЛЕОНИДЕ ИВАНОВИЧЕ ВОЛГИНЕ</b> .....	313

**Требования к оформлению**  
электронных текстов статей в сборник научных трудов  
«Математические методы и модели: теория, приложения и роль в  
образовании»

1. Объем текста статьи – до 15 страниц.
  2. Редактор – Microsoft Word 2000, 2003. Формат А4. Шрифт – Times New Roman (14). Межстрочный интервал – одинарный (Word). Поля – левое, правое, верхнее – 25 мм, нижнее – 30 мм. Отступ (красная строка) – 10 мм.
  3. Установки редактора формул: размеры: 14 – 11 – 9 – 16 – 11, стиль переменных и функций – курсив. Текст статьи может содержать рисунки и графики в графическом формате с подрисуночными названиями. Номера формул указываются в скобках с правой стороны, формулы центрируются. Выравнивание по ширине.
  4. С первой строки УДК работы (от левого края), далее пустая строка, И. О. Фамилия авторов (строчными буквами, от левого края, полужирный шрифт), далее пустая строка, НАЗВАНИЕ (прописными буквами, от левого края, полужирный шрифт), далее пустая строка, затем **обязательно краткая аннотация работы** до 10 строк (строчными буквами, по ширине, курсив, шрифт Times New Roman 12), далее пустая строка, затем текст статьи, далее пустая строка, затем СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.
  5. Дискету с файлами, содержащими текст статьи и сведения об авторах (научная степень, научное звание, должность, место работы, e-mail авторов) необходимо предоставить на кафедру «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета по адресу: г. Ульяновск, ул. Северный венец, 32, Вельмисову П. А. Файлы можно также выслать на электронный адрес [velmisov@ulstu.ru](mailto:velmisov@ulstu.ru)
  6. *Тексты статей, оформленные с нарушениями данных требований, не включаются в сборник научных трудов.*
- 

Научное издание  
**Математические методы и модели:**  
**теория, приложения и роль в образовании**  
Сборник научных трудов

Подписано в печать 09.12.2009. Формат 60x84/16.  
Бумага писчая. Усл. печ. л. 18,83. Тираж 150 экз. Заказ

Ульяновский государственный технический университет  
432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.  
Типография УлГТУ, 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.