

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Научно-методический совет по математике МОН РФ

Российская академия естественных наук

Средневолжское математическое общество

Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании

**Международная научно-техническая конференция
(г. Ульяновск, 28-30 апреля 2014 г.)**

Сборник научных трудов

Ульяновск
УлГТУ
2014

УДК 51 (04)
ББК 22 я43
М75

Рецензенты:

Д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой «Информационная безопасность и теория управления» Ульяновского государственного университета А. С. Андреев

Д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой «Прикладная математика»
Ульяновского государственного университета А. А. Бутов

Редакционная коллегия:

Ответственный редактор – П. А. Вельмисов (г. Ульяновск)

Ответственный секретарь – А. В. Анкилов (г. Ульяновск)

Члены редколлегии: П. С. Геворкян (г. Москва), С. П. Грушевский (г. Краснодар), С. Н. Дворяткина (г. Липецк), А. М. Захаров (г. Саратов), Г. М. Ильмушкин (г. Димитровград), М. В. Ладошкин (г. Саранск), В. А. Лазарев (г. Москва), Т. В. Мальцева (г. Тюмень), М. А. Mkrtchyan (г. Ереван, Армения), С. М. Муряева (г. Саранск), В. А. Соколов (г. Ярославль), Л. А. Сухарев (г. Саранск), П. А. Шаманаев (г. Саранск), М. А. Родионов (г. Пенза), С. А. Розанова (г. Москва), О. А. Савина (г. Липецк), Г. И. Саранцев (г. Саранск), Н. Г. Тактаров (г. Саранск), В. А. Тестов (г. Вологда), А. М. Шелехов (г. Тверь), И. И. Чучаев (г. Саранск), Н. Г. Ярушкина (г. Ульяновск).

УДК 51(04)

Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании : Международная научно-техническая конференция (г. Ульяновск, 28-30 апреля 2014 г.) : сборник научных трудов. – Ульяновск : УлГТУ, 2014. – 332 с.

В сборнике (выпуск 3) представлены статьи, посвященные применению математических методов и математического моделирования в научных исследованиях. Часть работ посвящена проблемам математического образования.

Для специалистов в области прикладной математики, физики, механики, математического образования.

Статьи печатаются в авторской редакции.

ISBN 978-5-9795-1353-9

© Колл. авторов, 2014
© Оформление. УлГТУ, 2014

Международная научно-техническая конференция
**«Математические методы и модели: теория, приложения
и роль в образовании»**

Ульяновский государственный технический университет

Ульяновский государственный университет

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Научно-методический совет по математике Минобрнауки РФ

Средневолжское математическое общество

28-30 апреля 2014 г.

Место проведения: г. Ульяновск (УлГТУ)

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

Председатель:

П. А. Вельмисов (г. Ульяновск, УлГТУ)

Сопредседатели:

П. С. Красильников (г. Москва, МАИ), А. С. Андреев (г. Ульяновск, УлГУ)

Секретарь:

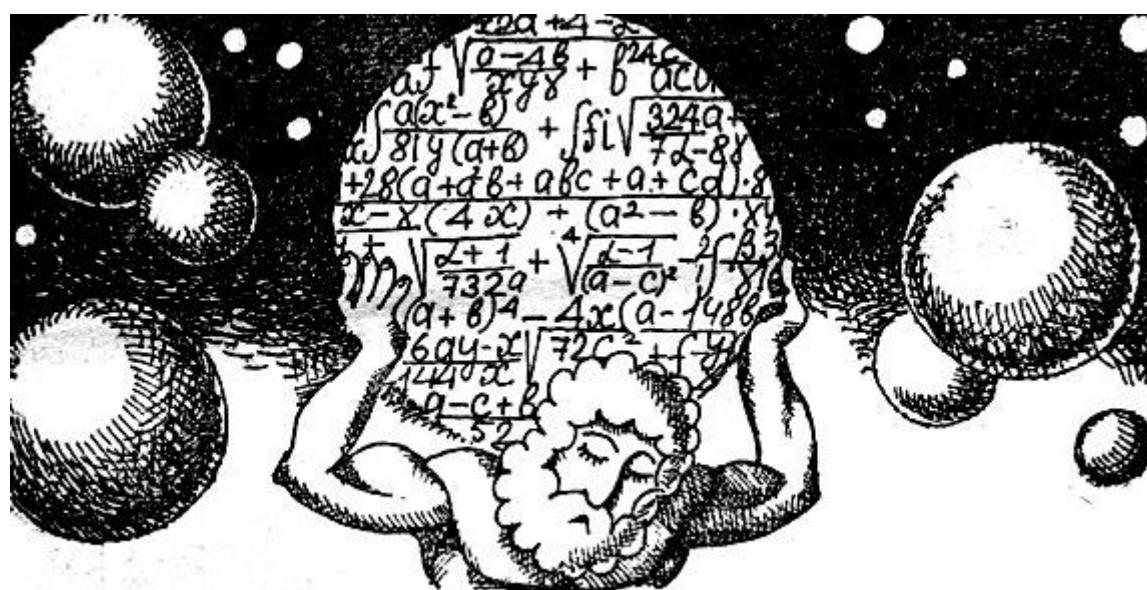
А. В. Анкилов (г. Ульяновск, УлГТУ)

Члены организационного комитета:

А. А. Андреев (г. Самара), В. И. Астафьев (г. Самара), Ю. А. Блинков (г. Саратов), И. В. Бойков (г. Пенза), С. А. Бурнос (г. Цюрих, Швейцария), А. А. Бутов (г. Ульяновск), К. К. Васильев (г. Ульяновск), М. А. Волков (г. Ульяновск), П. К. Волков (г. Ханты-Мансийск), П. С. Геворкян (г. Москва), В. К. Горбунов (г. Ульяновск), С. П. Грушевский (г. Краснодар), Ю. П. Гупало (г. Москва), В. А. Гуркин (г. Ульяновск), Ю. Н. Дерюгин (г. Саров), А. Г. Егоров (г. Казань), Р. В. Жалнин (г. Саранск), А. Н. Зарубин (г. Орел), А. М. Захаров (г. Саратов), Г. М. Ильмушкин (г. Димитровград), Л. И. Каанджулов (г. София, Болгария), А. В. Карапетян (г. Москва), Р. А. Каюмов (г. Казань),

М. М. Константинов (г. София, Болгария), Л. Ю. Коссович (г. Саратов),
В. Р. Крашенинников (г. Ульяновск), В. А. Кудинов (г. Самара),
В. А. Лазарев (г. Москва), В. Н. Латышев (г. Москва), В. Л. Леонтьев
(г. Ульяновск), Б. В. Логинов (г. Ульяновск), Т. В. Мальцева (г. Тюмень),
В. К. Манжосов (г. Ульяновск), С. И. Мартынов (г. Ханты-Мансийск),
С. П. Мищенко (г. Ульяновск), Л. И. Могилевич (г. Саратов), Ю. Н. Радаев
(г. Москва), В. П. Радченко (г. Самара), О. А. Репин (г. Самара),
М. А. Родионов (г. Пенза), С. А. Розанова (г. Москва), Ю. Н. Санкин
(г. Ульяновск), Ю. Э. Сеницкий (г. Самара), Е. П. Семенова (г. Базель,
Швейцария), В. А. Сергеев (г. Ульяновск), А. П. Солдатов (г. Белгород),
Л. А. Сухарев (г. Саранск), В. Ф. Тишкун (г. Москва), М. Д. Тодоров
(г. София, Болгария), А. Р. Тюхова (г. Цюрих, Швейцария), В. В. Учайкин
(г. Ульяновск), О. П. Филатов (г. Самара), Д. Я. Хусаинов (г. Киев),
О. И. Череватенко (г. Ульяновск), Б. И. Чешанков (г. София, Болгария),
И. И. Чучаев (г. Саранск), П. А. Шаманаев (г. Саранск), А. М. Шелехов
(г. Тверь), Ф. Г. Шигабутдинов (г. Казань), Г. П. Шиндяпин (г. Саратов),
А. Г. Ягола (г. Москва), Ю. Е. Якубовский (г. Тюмень), Н. Г. Ярушкина
(г. Ульяновск).

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В НАУКЕ, ТЕХНИКЕ, ЕСТЕСТВОЗНАНИИ И ЭКОНОМИКЕ



Н. А. Андриянов (г. Ульяновск)

ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ИЗМЕНЕНИЯ ИНТЕРВАЛА КОРРЕЛЯЦИИ

Рассмотрены модели авторегрессий, получаемые на каждом шаге с использованием коэффициента корреляции, преобразованного из случайной последовательности интервалов корреляции.

В настоящее время хорошо известен класс авторегрессионных уравнений [1, 2], применение которых в математическом моделировании объясняется простотой реализации, а также возможностью вывода аналитических выражений для таких моделей. AR-последовательности широко используются, например, для описания экономических процессов и их прогнозирования. С помощью авторегрессий.

Перенос авторегрессионных последовательностей на двумерный случай позволяет моделировать изображения, на многомерный – многомерные изображения [1,2,4]. В работе [3] рассмотрены модели дважды стохастических изображений, где поля корреляционных параметров являются реализациами других СП. Однако дисперсия таких полей очень невелика в силу условия стационарности.

Рассмотрим авторегрессионную модель первого порядка:

$$x_i = \rho x_{i-1} + \xi_i, \quad (1)$$

где ρ – коэффициент корреляции, ξ – гауссовская случайная добавка с математическим ожиданием $M\{\xi_i\} = 0$ и дисперсией $M\{\xi_i^2\} = \sigma_x^2(1 - \rho^2)$.

Пусть коэффициент корреляции ρ не является постоянной величиной. Он может быть получен путем преобразования случайной последовательности интервалов корреляции:

$$k_i = rk_{i-1} + \sqrt{\sigma_k^2(1 - r^2)}\zeta_i, \quad (2)$$

где r – постоянный коэффициент корреляции.

Будем выводить значения ρ_i , исходя из условия:

$$k_i = \frac{1}{1 - \rho_i}. \quad (3)$$

При этом предварительно все k будут преобразованы в положительные числа.

Реализация процесса (2) представлена на рис. 1 $\sigma_k^2 = 30$, $r = 0.9$.



Рис. 1. СП интервалов корреляции

На рис. 2 и рис. 3 показаны различные реализации последовательности x и соответствующие графики ковариационных функций.



Рис. 2. Реализация дважды стохастической модели
 $(1 - \sigma_k^2 = 1000, 2 - \sigma_k^2 = 2000, 3 - \sigma_k^2 = 3000)$

Исследования показывают, что полученные модели являются стационарными. При этом можно сравнить относительные значения коэффициентов корреляции и длины интервала корреляции, согласно формуле (3). Например, значению $k = 5$, соответствует коэффициент корреляции $\rho = 0.8$. Если после преобразования, применяемого для того, чтобы сделать все k_i положительными, среднее значение процесса (2) уже не равно нулю, а может быть оценено как $M^* \{k_i\} \approx 3\sigma_k$. Для случая 3 $M^* \{k_i\} \approx 165$. Тогда среднее значение коэффициента корреляции $M^* \{\rho_i\} \approx 0.99$, что и позволяет получить достаточно гладкие процессы.

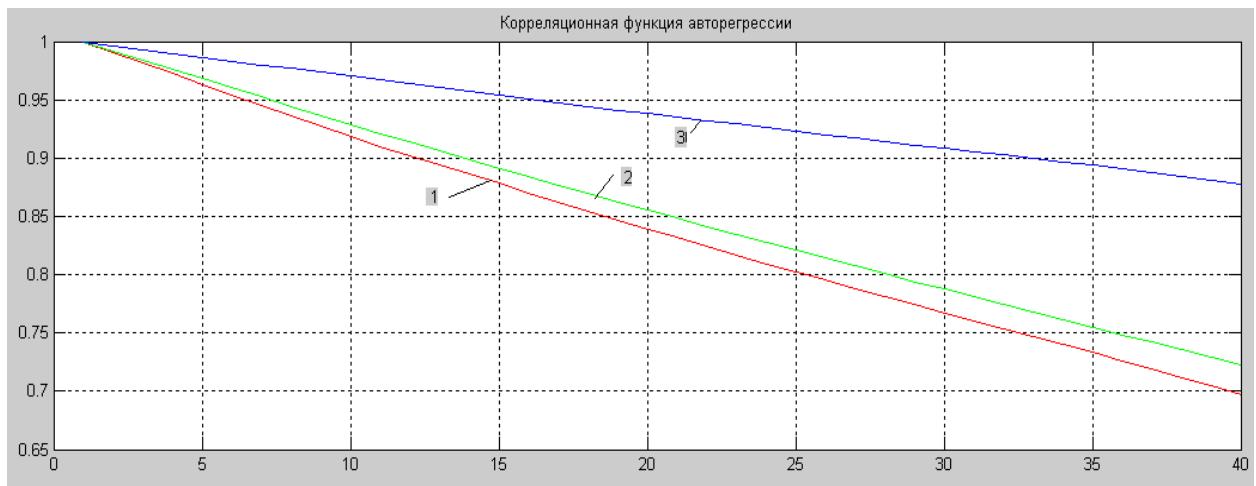


Рис. 3. Ковариационные функции дважды стохастической модели

$$(1 - \sigma_k^2 = 1000, 2 - \sigma_k^2 = 2000, 3 - \sigma_k^2 = 3000)$$

Анализ кривых последнего рисунка показывает, что предложенные модели по своим корреляционным свойствам схожи с простыми авторегрессионными моделями, однако корреляция в них уменьшается медленнее при больших σ_k^2 , и они позволяют формировать неоднородности в последовательности. Чем больше значение σ_k^2 , тем больше среднее значение коэффициента корреляции ρ , поэтому при больших σ_k^2 ковариационные связи сохраняются на протяжении больших интервалов.

Таким образом, рассмотренная методика позволяет формировать дважды стохастические модели на основе изменяемого интервала корреляции. Это может быть в дальнейшем использовано для многомерных случаев, а сами модели могут использоваться для решения таких задач, как фильтрация, сегментация, обнаружение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Прикладная теория случайных процессов и полей / К. К. Васильев, Я. П. Драган, В. А. Казаков, В. Р. Крашенинников, Ю. П. Кунченко, В. А. Омельченко, А. П. Трифонов, А. А. Спектор; под ред. Васильева К. К. и Омельченко В. А. – Ульяновск: УлГТУ, 1995 – 256 с.
2. Васильев К. К., Дементьев В. Е. Авторегрессионные модели многомерных изображений // Наукоемкие технологии, 2013. – Т. 14, № 15. – С. 12-15.
3. Vasiliev K., Dementiev V., Andriyanov N. Twice stochastic models of images // The 11th International Conference «PATTERN RECOGNITION and IMAGE ANALYSIS: NEW INFORMATION TECHNOLOGIES» (PRIA-11-2013). – Samara, Russian Federation, 2013. – V. 1. – P. 334-337.
4. Васильев К. К., Ташлинский А. Г., Крашенинников В. Р. Статистический анализ последовательностей многомерных изображений // Наукоемкие технологии, 2013. – № 5. – С. 5-11.

A. B. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев (г. Ульяновск)

К ВОПРОСУ О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТРУБОПРОВОДА

Рассмотрены задачи динамической устойчивости трубопровода – полого стержня, внутри которого протекает жидкость (газ). На основе построенных функционалов типа Ляпунова сформулированы теоремы устойчивости и получены аналитические условия устойчивости для параметров механической системы.

Ключевые слова: упругий трубопровод, динамика, устойчивость, функционал, уравнения с частными производными.

Рассмотрим плоскую задачу аэрогидроупругости о колебаниях, возникающих при протекании жидкости через трубопровод. Ранее задачи о динамике и устойчивости трубопровода рассматривались в работах [1]-[8], [10]-[15].

Пусть на плоскости xOy трубопроводу соответствует на оси Ox отрезок $[0, l]$. Скорость жидкости равна U и имеет направление, совпадающее с направлением оси Ox .

1. Исследование устойчивости в линейном приближении. В линейном приближении колебания вязкоупругого стержня, связанного с упругим основанием, описываются модельным уравнением для прогиба $w(x, t)$

$$Dw''' + (m_0 + m_*)\ddot{w} + (N + m_*U^2)w'' + 2Um_*\dot{w}' + \xi\dot{w} + \theta w + \psi\ddot{w}''' - \phi\ddot{w}'' = 0. \quad (1)$$

Коэффициенты m_0, m_*, D вычисляются по формулам:

$$m_0 = \rho_*\pi(R_*^2 - R_0^2), m_* = \rho_*\pi R_0^2, D = \frac{\pi E}{4}(R_*^4 - R_0^4), R_* = R_0 + h_0.$$

Здесь $w(x, t)$ – деформация (прогиб) в сечении x в момент времени t ; D – изгибная жесткость трубы; E – модуль упругости, U, m_*, ρ_* – скорость, масса жидкости (газа) на единицу длины и плотность жидкости (газа); l – длина трубы между шарнирными опорами; R_*, R_0, h_0 – внешний и внутренний радиусы трубопровода и толщина; θ – коэффициент жесткости основания; m_0, ρ_0 – масса металла на единицу длины трубы и его плотность; N – сжимающая (растягивающая) сила; ξ, ψ – коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования соответственно; коэффициент ϕ учитывает инерцию вращения сечений. Все коэффициенты, входящие в уравнение, постоянные, точка сверху обозначает производную по времени t , а штрих – производную по координате x .

Умножая уравнение (1) на $\dot{w}(x, t)$, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} D(w'')^2 + \frac{1}{2} (m_0 + m_*) \dot{w}^2 - \frac{1}{2} (N + m_* U^2) (w')^2 + \frac{1}{2} \theta w^2 + \frac{1}{2} \phi(\dot{w}')^2 \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[D(\dot{w} w''' - \dot{w}' w'') + (N + m_* U^2) \dot{w} w' + U m_* \dot{w}^2 + \psi(\dot{w} w''' - \dot{w}' \dot{w}'') - \phi \dot{w} \ddot{w}' \right] + \\ & + \xi \dot{w}^2 + \psi(\dot{w}'')^2 = 0. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение функционал:

$$J(t) = \frac{1}{2} \int_0^l [D(w'')^2 + (m_0 + m_*) \dot{w}^2 - (N + m_* U^2) (w')^2 + \phi(\dot{w}')^2 + \theta w^2] dx.$$

Найдем производную $\frac{dJ}{dt}$

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} = & - \int_0^l [D(\dot{w} w''' - \dot{w}' w'') + (N + m_* U^2) \dot{w} w' + U m_* \dot{w}^2 + \psi(\dot{w} w''' - \dot{w}' \dot{w}'') - \\ & - \phi \dot{w} \ddot{w}'] dx - \xi \dot{w}^2 - \psi(\dot{w}'')^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим некоторые виды закрепления концов трубопровода:

а) Шарнирное закрепление концов трубопровода

$$w(0, t) = w(l, t) = 0, \quad w''(0, t) = w''(l, t) = 0;$$

б) Жесткое закрепление концов трубопровода

$$w(0, t) = w(l, t) = 0, \quad w'(0, t) = w'(l, t) = 0;$$

в) Один конец (любой) закреплен шарнирно, другой – жестко.

Для указанных типов закреплений

$$\frac{dJ}{dt} = -\xi \dot{w}^2 - \psi(\dot{w}'')^2 < 0.$$

Тогда $J(t) < J(0)$, то есть

$$\begin{aligned} & \int_0^l [D(w'')^2 + (m_0 + m_*) \dot{w}^2 - (N + m_* U^2) (w')^2 + \phi(\dot{w}')^2 + \theta w^2]_{t=0} dx \leq \\ & \leq \int_0^l [D(w'')^2 + (m_0 + m_*) \dot{w}^2 - (N + m_* U^2) (w')^2 + \phi(\dot{w}')^2 + \theta w^2]_{t=0} dx. \end{aligned} \tag{2}$$

Имеет место неравенство Релея [9]

$$\int_0^l (w'')^2 dx \geq \lambda_1 \int_0^l (w')^2 dx,$$

где λ_1 – наименьшее собственное значение соответствующей краевой задачи для уравнения $\psi''' + \lambda \psi'' = 0, \lambda > 0$. Например, для закрепления концов типа «шарнир-шарнир» краевая задача имеет вид

$$\psi''' + \lambda \psi'' = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0, \quad \psi''(0) = \psi''(l) = 0.$$

Общее решение дифференциального уравнения определяется выражением $\psi(x) = c_1 + c_2x + c_3 \sin \sqrt{\lambda}x + c_4 \cos \sqrt{\lambda}x$. Удовлетворяя граничным условиям, получим $c_1 = c_2 = c_4 = 0$, $\psi(x) = c_3 \sin \sqrt{\lambda_n}x$, $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, где λ_n – собственные значения, а $\sin \sqrt{\lambda_n}x$ – собственные функции, при этом $\min_n(\lambda_n) = \lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2}$.

С учетом неравенства Релея согласно (2) получаем:

$$\begin{aligned} & \int_0^l [(D\lambda_1 - N - m_*U^2)(w')^2 + (m_0 + m_*)\dot{w}^2 + \phi(\dot{w}')^2 + \theta w^2]_{t=0} dx \leq \\ & \leq \int_0^l [D(w'')^2 + (m_0 + m_*)\dot{w}^2 - (N + m_*U^2)(w')^2 + \phi(\dot{w}')^2 + \theta w^2]_{t=0} dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Из последнего неравенства следует теорема

Теорема 1. Если $N < D\lambda_1 - m_*U^2$, то малым значениям начальных данных $w(x,0), \dot{w}(x,0), w'(x,0), w''(x,0), \dot{w}'(x,0)$ (прогиба, скорости, угла поворота, кривизны, угловой скорости) будут соответствовать малые (в среднем, в интегральном смысле) $w(x,t), \dot{w}(x,t), w'(x,t), \dot{w}'(x,t)$ в любой момент времени $t > 0$.

Таким образом, условие устойчивости для закрепления типа «шарнир-шарнир» имеет вид:

$$N < \frac{\pi^2}{l^2} D - m_*U^2.$$

Заметим, что это достаточное (но не необходимое) условие устойчивости.

Изобразим область устойчивости на плоскости (N, U) (рис. 1).

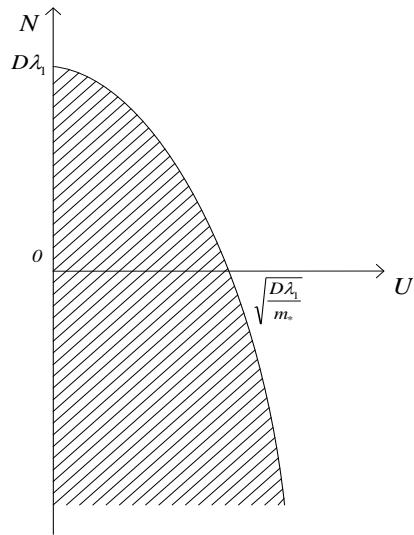


Рис. 1. Область устойчивости

Для точек, расположенных ниже параболы $N = \frac{\pi^2}{l^2}D - m_*U^2$, имеет

место устойчивость.

Имеет место неравенство, являющееся следствием неравенства Коши-Буняковского:

$$w^2(x,t) \leq l \int_0^l w'^2(x,t) dx.$$

Тогда согласно (3) получим

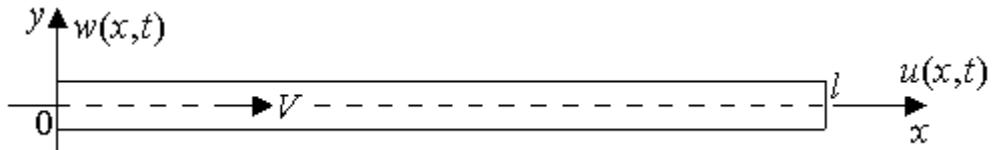
$$\begin{aligned} & \frac{1}{l}(D\lambda_1 - N - m_*U^2)w^2(x,t) + \int_0^l [(m_0 + m_*)\dot{w}^2 + \phi(\dot{w}')^2 + \theta w^2]_{t=0} dx \leq \\ & \leq \int_0^l [D(w'')^2 + (m_0 + m_*)\dot{w}^2 - (N + m_*U^2)(w')^2 + \phi(\dot{w}')^2 + \theta w^2]_{t=0} dx. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует равномерная устойчивость для $w(x,t)$ для $\forall x \in [0, l]$. А именно малым значениям начальных данных $w(x,0), \dot{w}(x,0), w'(x,0), w''(x,0), \dot{w}'(x,0)$ будут соответствовать малые значения $w(x,t)$ для $\forall x \in [0, l]$.

Аналогичным образом исследовалась устойчивость колебаний трубопровода на основе нелинейной модели, которая описывается уравнением

$$(m_0 + m_*)\ddot{w} + \xi\dot{w} + \psi\dot{w}''' + 2Um_*\dot{w}' + Dw'''' + Nw'' + \theta w + m_*U^2w'' - \frac{1}{2}w'' \left[k \int_0^l (w')^2 dx - \alpha \left(\int_0^l (w')^2 dx \right)^{\bullet} \right] = 0. \quad (4)$$

2. Исследование устойчивости в рамках двухстепенной модели. Рассмотрим данную задачу с учетом также колебаний в направлении оси Ox . Введем обозначения: $w(x,t)$ и $u(x,t)$ – упругие перемещения точки оси стержня в направлении осей Oy и Ox соответственно (рис. 2).



Rис. 2. Трубопровод

Перемещения удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} -EF \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right)' + M\ddot{u} = 0, \\ -EF \left[w' \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) \right]' + EJw'''' + M\ddot{w} + m_*V^2w'' + 2m_*V\dot{w}' = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь и в дальнейшем E будет обозначать модуль упругости; F – площадь поперечного сечения стержня; EJ – изгибная жесткость стержня; V – скорость жидкости.

Границные условия на конце стержня при $x=0$ или $x=l$ могут иметь вид:

1) жесткое закрепление (рис. 3а):

$$w(x,t)=w'(x,t)=u(x,t)=0; \quad (6a)$$

2) шарнирное закрепление (рис. 3б):

$$w(x,t)=w''(x,t)=u(x,t)=0; \quad (6b)$$

3) жесткое закрепление с отсутствием внешней силы (рис. 3в):

$$w(x,t)=w'(x,t)=u'(x,t)=0; \quad (6v)$$

4) шарнирное закрепление с отсутствием внешней силы (рис. 3г):

$$w(x,t)=w''(x,t)=u'(x,t)+\frac{1}{2}w'^2(x,t)=0; \quad (6g)$$

5) свободная заделка (рис. 3д):

$$w'(x,t)=w'''(x,t)=u(x,t)=0; \quad (6d)$$

6) свободное закрепление с отсутствием внешней силы (рис. 3е):

$$w'(x,t)=w'''(x,t)=u'(x,t)=0; \quad (6e)$$

7) жесткое закрепление при действии внешней силы $P(t)$ (рис. 3ж):

$$w(x,t)=w'(x,t)=EFu'(x,t)+P(t)=0; \quad (6j)$$

8) шарнирное закрепление при действии внешней силы $P(t)$ (рис. 3з):

$$w(x,t)=w'(x,t)=EF\left(u'(x,t)+\frac{1}{2}w'^2(x,t)\right)+P(t)=0; \quad (6z)$$

9) свободное закрепление при действии внешней силы (рис. 3и):

$$w(x,t)=w'(x,t)=EFu'(x,t)+P(t)=0. \quad (6i)$$

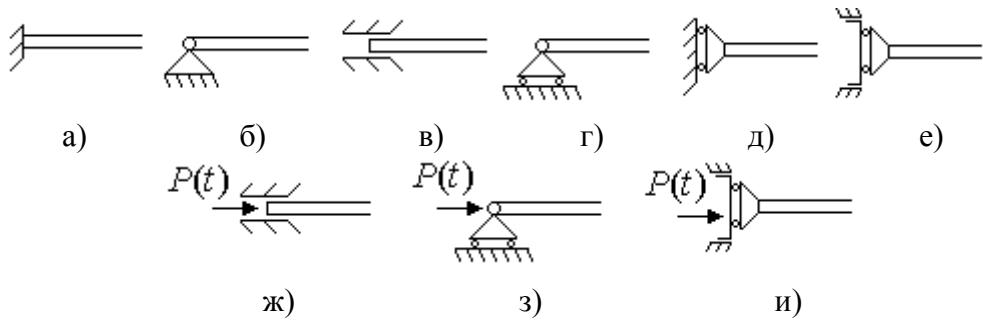


Рис. 3. Способы закреплений

Получим достаточные условия устойчивости решений системы дифференциальных уравнений (5) по отношению к возмущениям начальных условий. Введем функционал

$$\Phi(t) = \int_0^l \left\{ M(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) - m_* V^2 w'^2 + EJ w''^2 + EF \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 \right\} dx. \quad (7)$$

Найдем производную от Φ по t

$$\dot{\Phi}(t) = \int_0^l \left\{ 2M(\ddot{u}\ddot{w} + \dot{w}\ddot{w}) - 2m_*V^2 w' \dot{w}' + 2EJw'' \dot{w}'' + 2EF \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) (\dot{u}' + w' \dot{w}') \right\} dx. \quad (8)$$

Для функций $w(x,t)$ и $u(x,t)$, являющимися решениями системы уравнений (5), равенство (8) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = & 2 \int_0^l \left\{ EF \dot{u} \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right)' + EF \dot{w} \left[w' \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) \right]' - EJ \dot{w} w''' - m_*V^2 \dot{w} w'' - \right. \\ & \left. - 2m_*V \dot{w} \dot{w}' + m_*V^2 w' \dot{w}' + EJw'' \dot{w}'' + EF \dot{u}' \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) + EF w' \dot{w}' \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) \right\} dx. \end{aligned} \quad (9)$$

I. Пусть граничные условия на левом конце при $x=0$ имеют один из типов (6а)-(6г), а на правом при $x=l$ – (6а)-(6е). Тогда, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^l \dot{w} w''' dx &= \dot{w} w''' \Big|_0^l - \int_0^l \dot{w}' w''' dx = -\dot{w}' w'' \Big|_0^l + \int_0^l \dot{w}'' w'' dx = \int_0^l \dot{w}'' w'' dx, \\ \int_0^l \dot{w} w'' dx &= \dot{w} w' \Big|_0^l - \int_0^l \dot{w}' w' dx = -\int_0^l \dot{w}' w' dx, \\ \int_0^l \dot{u} \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right)' dx &= \dot{u} \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) \Big|_0^l - \int_0^l \dot{u}' \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) dx = -\int_0^l \dot{u}' \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) dx, \\ \int_0^l \dot{w} \left[w' \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) \right]' dx &= \dot{w} w' \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) \Big|_0^l - \int_0^l \dot{w}' w' \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) dx = \\ &= -\int_0^l \dot{w}' w' \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) dx, \quad \int_0^l \dot{w} \dot{w}' dx = \frac{1}{2} \dot{w}^2 \Big|_0^l = \frac{1}{2} \dot{w}^2(l, t), \end{aligned}$$

Подставляя эти равенства в (9), получим

$$\dot{\Phi}(t) = -m_*V \dot{w}^2(l, t) \leq 0.$$

Интегрируя от 0 до t , получим

$$\Phi(t) \leq \Phi(0). \quad (10)$$

Учитывая выражение для функционала (7), оценим правую и левую части неравенства (10)

$$\Phi(t) \geq \int_0^l \left\{ EJw''^2 - m_*V^2 w'^2 + EF \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right)^2 \right\} dx, \quad (11)$$

$$\Phi(0) = \int_0^l \left\{ M(\dot{u}_0^2 + \dot{w}_0^2) - m_*V^2 w_0'^2 + EJw_0''^2 + EF \left(u'_0 + \frac{1}{2}w_0'^2 \right)^2 \right\} dx, \quad (12)$$

где введены обозначения $w_0 = w(x, 0)$, $\dot{w}_0 = \dot{w}(x, 0)$, $u'_0 = u'(x, 0)$, $\dot{u}_0 = \dot{u}(x, 0)$,

$$w'_0 = w'(x, 0), w''_0 = w''(x, 0).$$

Рассмотрим краевую задачу для уравнения $\psi''(x) = -\lambda \psi''(x)$, $x \in [0, l]$ с краевыми условиями: на левом конце при $x=0$ один из типов (6а)-(6г), на правом при $x=l$ – (6а)-(6е). Эта задача является самосопряженной и полностью определенной. Для функций $w(x, t)$ получим неравенство:

$$\int_0^l w''^2(x, t) dx \geq \lambda_1 \int_0^l w'^2(x, t) dx, \quad (13)$$

где λ_1 – наименьшее собственное значение рассматриваемой краевой задачи.

Далее, воспользовавшись неравенством Буняковского, будем иметь

$$w^2(x, t) \leq l \int_0^l w'^2(x, t) dx, \quad (14)$$

$$u^2(x, t) \leq l \int_0^l u'^2(x, t) dx. \quad (15)$$

Воспользовавшись (13), из (11) получим

$$\Phi(t) \geq \int_0^l \left\{ (EJ\lambda_1 - m_*V^2)w'^2 + EF \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right)^2 \right\} dx. \quad (16)$$

Предполагая, что

$$EJ\lambda_1 > m_*V^2, \quad (17)$$

и, учитывая (14), из (16) получим

$$\Phi(t) \geq \frac{EJ\lambda_1 - m_*V^2}{l} w^2(x, t).$$

С другой стороны, учитывая (13), находим

$$\Phi(t) \leq \Phi(0) = \int_0^l \left\{ M(\dot{u}_0^2 + \dot{w}_0^2) + (EJ - m_*V^2\lambda_1^{-1})w''_0^2 + EF \left(u'_0 + \frac{1}{2}w'^2_0 \right)^2 \right\} dx.$$

Таким образом, получим неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{EJ\lambda_1 - m_*V^2}{l} w^2(x, t) \leq \\ & \leq \int_0^l \left\{ M(\dot{u}_0^2 + \dot{w}_0^2) + (EJ - m_*V^2\lambda_1^{-1})w''_0^2 + EF \left(u'_0 + \frac{1}{2}w'^2_0 \right)^2 \right\} dx. \end{aligned} \quad (18)$$

Из этого неравенства следует теорема

Теорема 2. Пусть выполнено условие (17). Тогда решение $w(x, t)$ системы уравнений (5) устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений $\dot{w}_0, w'_0, w''_0, \dot{u}_0, u'_0$, если функция $w(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям: на левом конце при $x=0$ один из типов (6а)-(6г), на правом при $x=l$ – (6а)-(6е).

Если дополнительно выполняется условие $|w'(x,t)| < 1$, то $w'^2(x,t) > w'^4(x,t)$. Тогда, учитывая (16), получим

$$\Phi(t) \geq \int_0^l \left\{ (EJ\lambda_1 - m_*V^2)w'^4 + EF \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right)^2 \right\} dx.$$

Используя условия (15), (17) запишем это неравенство в виде

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\geq \int_0^l \left\{ \left(EJ\lambda_1 - m_*V^2 + \frac{EF}{4} \right) \left(w'^2 + \frac{2EF}{4EJ\lambda_1 - 4m_*V^2 + EF} u' \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4EF(EJ\lambda_1 - m_*V^2)}{4EJ\lambda_1 - 4m_*V^2 + EF} u'^2 \right\} dx \geq \int_0^l \frac{4EF(EJ\lambda_1 - m_*V^2)}{4EJ\lambda_1 - 4m_*V^2 + EF} u'^2 dx \geq \\ &\geq \frac{4EF(EJ\lambda_1 - m_*V^2)}{l(4EJ\lambda_1 - 4m_*V^2 + EF)} u^2(x,t). \end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$\begin{aligned} &\frac{4EF(EJ\lambda_1 - m_*V^2)}{l(4EJ\lambda_1 - 4m_*V^2 + EF)} u^2(x,t) \leq \\ &\leq \int_0^l \left\{ M(\dot{u}_0^2 + \dot{w}_0^2) + (EJ - m_*V^2\lambda_1^{-1})w_0'^2 + EF \left(u'_0 + \frac{1}{2}w_0'^2 \right)^2 \right\} dx. \end{aligned} \tag{19}$$

Из неравенств (18), (19) следует теорема

Теорема 3. Пусть выполнено условие (17). Тогда при $|w'(x,t)| < 1$ решение $w(x,t), u(x,t)$ системы уравнений (5) устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений $\dot{w}_0, w'_0, w''_0, \dot{u}_0, u'_0$, если $w(x,t), u(x,t)$ удовлетворяют краевым условиям: на левом конце при $x=0$ одно из условий (б_а)-(б_г), на правом при $x=l$ – одно из условий (б_а)-(б_е).

II. Пусть на правом конце стержня выполняется одно из краевых условий (б_ж)-(б_и), а на левом – (б_а)-(б_г), тогда в отличие от случая I, получим

$$\begin{aligned} EF \int_0^l \dot{u} \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right)' dx &= EF \dot{u} \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) \Big|_0^l - EF \int_0^l \dot{u}' \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) dx = \\ &= EF \dot{u}(l,t) \left(u'(l,t) + \frac{1}{2}w'^2(l,t) \right) - EF \int_0^l \dot{u}' \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) dx = -\dot{u}(l,t)P(t) - \\ &\quad - EF \int_0^l \dot{u}' \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Подставляя в (9), получим

$$\dot{\Phi}(t) = -\dot{u}(l,t)P(t) - m_*V\dot{w}^2(l,t).$$

Предполагая, что

$$-\dot{u}(l,t)P(t) - m_*V\dot{w}^2(l,t) \leq 0, \quad (20)$$

аналогично теоремам 1 и 2 получим следующие теоремы

Теорема 4. Пусть выполнено условие (17) и функция $P(t)$ такова, что выполняется условие (20). Тогда решение $w(x,t)$ системы уравнений (5) устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений $\dot{w}_0, w'_0, w''_0, \dot{u}_0, u'_0$, если функция $w(x,t)$ удовлетворяет краевым условиям: на правом конце стержня при $x=l$ выполняется одно из краевых условий (бж)-(би), а на левом при $x=0$ – (ба)-(бг).

Теорема 5. Пусть выполнено условие (17) и функция $P(t)$ такова, что выполняется условие (20). Тогда при $|w'(x,t)| < 1$ решение $w(x,t), u(x,t)$ системы уравнений (5) устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений $\dot{w}_0, w'_0, w''_0, \dot{u}_0, u'_0$, если $w(x,t), u(x,t)$ удовлетворяют краевым условиям: на правом конце стержня при $x=l$ выполняется одно из краевых условий (бж)-(би), а на левом при $x=0$ – (ба)-(бг).

3. Исследование устойчивости с учетом запаздывания внешних воздействий. Для описания динамики трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий (реакции и демпфирования основания) можно предложить уравнение

$$\begin{aligned} Dw''' + (m_0 + m_*)\ddot{w} + (N + m_*u^2)w'' + 2um_*\dot{w}' + \xi^*\dot{w}(x,t) + \theta^*w(x,t) + \\ + \xi\dot{w}(x,t - \tau) + \theta w(x,t - \beta) + \psi\dot{w}''' - \varphi\ddot{w} - w'' \left[k \int_0^l (w')^2 dx + 2\alpha \int_0^l w'\dot{w}' dx \right] = (21) \\ = G(x,t, w(x,t), \dot{w}(x,t), w(x,t - \beta), \dot{w}(x,t - \tau)), \end{aligned}$$

где τ и β – параметры запаздывания демпфирования и реакции основания или какого-либо другого внешнего воздействия; G – нелинейная составляющая внешнего воздействия.

С учетом как поперечной, так и продольной деформации трубопровода, уравнения, описывающие его динамику с учетом запаздывания внешних воздействий, можно представить в виде

$$\begin{cases} -EF\left(u' + \frac{1}{2}w'^2\right)' + M\ddot{u} + \psi_0\dot{u}'' + \xi_0^*\dot{u}(x,t) + \theta_0^*u(x,t) + \xi_0\dot{u}(x,t - \tau_0) + \\ + \theta_0u(x,t - \beta_0) = H(x,t, u(x,t), \dot{u}(x,t), u(x,t - \beta_0), \dot{u}(x,t - \tau_0)), \\ -EF\left[w'\left(u' + \frac{1}{2}w'^2\right)\right]' + EJw''' + M\ddot{w} + m_*V^2w'' + 2m_*V\dot{w}' + \\ + \xi_1^*\dot{w}(x,t) + \theta_1^*w(x,t) + \xi_1\dot{w}(x,t - \tau_1) + \theta_1w(x,t - \beta_1) + \psi_1\dot{w}''' - \\ - \varphi\ddot{w} = G(x,t, w(x,t), \dot{w}(x,t), w(x,t - \beta_1), \dot{w}(x,t - \tau_1)). \end{cases} \quad (22)$$

где $\tau_0, \beta_0, \tau_1, \beta_1$ – параметры запаздывания демпфирования и реакции основания или какого-либо другого внешнего воздействия; G, H – нелинейные составляющие внешних воздействий.

На основе математических моделей (21), (22) можно составить функционалы, позволяющие исследовать динамическую устойчивость трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий.

В качестве примера исследуем устойчивость трубопровода в модели (21) с учетом запаздывания только реакции основания

$$Dw''' + (m_0 + m_*)\ddot{w} + (N + m_*u^2)w'' + 2um_*\dot{w}' + \xi\dot{w}(x, t) + \theta w(x, t - \tau) + \\ + \psi\dot{w}''' - \varphi\ddot{w}'' - w'' \left[k \int_0^l (w')^2 dx + 2\alpha \int_0^l w' \dot{w}' dx \right] = 0. \quad (23)$$

Получим достаточные условия устойчивости решений дифференциального уравнения (23) по отношению к возмущениям начальных условий. Введем функционал

$$\Phi(t) = \int_0^l \left[Dw'' + M\dot{w}^2 - (N + m_*u^2)w'^2 + \theta \int_{t-\tau}^t dt_1 \int_{t_1}^t \dot{w}^2(x, s) ds + \varphi\dot{w}'^2 + \theta w^2 \right] dx + \\ + \frac{k}{2} \left(\int_0^l w'^2 dx \right)^2. \quad (24)$$

Найдем производную от Φ по t

$$\dot{\Phi}(t) = \int_0^l \left[Dw''\dot{w}'' + 2M\dot{w}\ddot{w} - 2(N + m_*u^2)w'\dot{w}' + \theta\tau\dot{w}^2 - \theta \int_{t-\tau}^t \dot{w}^2(x, s) ds + \right. \\ \left. + 2\varphi\dot{w}'\ddot{w}' + 2\theta w\dot{w} \right] dx + 2k \left(\int_0^l w'^2 dx \right) \left(\int_0^l w' \dot{w}' dx \right). \quad (25)$$

Пусть концы трубопровода закреплены жестко или шарнирно. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$\int_0^l w''\dot{w}'' dx = \int_0^l \dot{w}w''' dx, \quad \int_0^l w'\dot{w}' dx = - \int_0^l \dot{w}w'' dx, \quad \int_0^l \dot{w}'\ddot{w}' dx = - \int_0^l \dot{w}\ddot{w}'' dx. \quad (26)$$

Для функции $w(x, t)$, являющейся решением уравнения (23), с учетом (26), равенство (25) принимает следующий вид:

$$\dot{\Phi}(t) = \int_0^l \left[-4um_*\dot{w}\dot{w}' - 2\xi\dot{w}^2 + 2\theta\dot{w} \int_{t-\tau}^t \dot{w}(x, s) ds - 2\psi\dot{w}w''' + \theta\tau\dot{w}^2 - \right. \\ \left. - \theta \int_{t-\tau}^t \dot{w}^2(x, s) ds \right] dx + 4\alpha \int_0^l \dot{w}w'' dx \int_0^l w' \dot{w}' dx. \quad (27)$$

Для указанных типов закрепления справедливы следующие равенства

$$\int_0^l \dot{w} w''' x = \int_0^l \dot{w}''^2 dx, \quad \int_0^l \dot{w} w'' dx = - \int_0^l \dot{w}' w' dx, \quad \int_0^l \dot{w} w' dx = 0. \quad (28)$$

Далее, воспользовавшись неравенством

$$2\dot{w}(x,t)\dot{w}(x,s) \leq \dot{w}^2(x,t) + \dot{w}^2(x,s), \quad (29)$$

и подставляя (28) в (27), получим следующую оценку для $\dot{\Phi}(t)$:

$$\dot{\Phi}(t) \leq \int_0^l [(-2\xi + \theta\tau)\dot{w}^2 - 2\psi\dot{w}''^2] dx. \quad (30)$$

Учитывая неравенство Релея:

$$\int_0^l \dot{w}''^2 dx \geq \mu_1 \int_0^l \dot{w}^2 dx, \quad (31)$$

где μ_1 – наименьшее собственное значение краевой задачи $w''' = \mu w$, получим

$$\dot{\Phi}(t) \leq \int_0^l [(-2\xi + 2\theta\tau - 2\psi\mu_1)\dot{w}^2] dx. \quad (32)$$

Таким образом, если выполняется условие

$$\xi - \theta\tau + \psi\mu_1 \geq 0, \quad (33)$$

то $\dot{\Phi}(t) \leq 0 \Rightarrow \Phi(t) \leq \Phi(0)$.

Оценим функционал, используя неравенство (31). Подставляя $\mu_1 = \frac{2}{l}$

получим

$$\Phi(t) \geq \int_0^l [(\lambda_1 D - N - m_* u^2) w'^2] dx. \quad (34)$$

Если выполняется условие

$$\lambda_1 D - N - m_* u^2 > 0, \quad (35)$$

то имеет место оценка для функционала

$$\Phi(t) \geq \frac{2(\lambda_1 D - N - m_* u^2)}{l} w^2(x,t). \quad (36)$$

Значение функционала в начальный момент времени определяется выражением

$$\Phi(0) = \int_0^l [Dw_0'' + M\dot{w}_0^2 - (N + m_* u^2)w_0'^2 + \varphi\dot{w}_0'^2 + \theta w_0'^2] dx + \frac{k}{2} \left(\int_0^l w_0'^2 dx \right)^2. \quad (37)$$

Следовательно, имеет место следующее неравенство

$$w^2(x,t) \leq \frac{l}{2(\lambda_1 D - N - m_* u^2)} \times \\ \times \left\{ \int_0^l [Dw''_0 + M\dot{w}_0^2 - (N + m_* u^2)w_0'^2 + \varphi\dot{w}_0'^2 + \theta w_0^2] dx + \frac{k}{2} \left(\int_0^l w_0'^2 dx \right)^2 \right\}. \quad (38)$$

Из неравенства (38) следует теорема 6.

Теорема 6. Пусть выполнено условие (35). Тогда решение $w(x,t)$ дифференциального уравнения (23) устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений $\dot{w}_0, w'_0, w''_0, \ddot{w}_0$, если функция $w(x,t)$ удовлетворяет краевым условиям: на левом конце при $x=0$ и на правом при $x=l$ шарнирный или жесткий тип закрепления.

4. Исследование устойчивости в линейной модели с учетом запаздывания.

$$Dw''' + (m_0 + m_*)\ddot{w} + (N + m_* U^2)w'' + 2U m_* \dot{w}' + \psi \dot{w}''' - \phi \ddot{w}'' + \\ + \sum_{k=1}^n \theta_k \dot{w}(x, t - \tau_k) + \sum_{k=1}^m \xi_k w(x, t - \beta_k) = 0. \quad (39)$$

Решение уравнения (39) можно искать в виде $w(x,t) = g(x)e^{\omega t}$, тогда для $g(x)$ получим однородное дифференциальное уравнение

$$(D + \psi\omega)g''' + (N + m_* U^2 - \phi\omega^2)g'' + 2U m_* \omega g' + \\ + \left[(m_0 + m_*)\omega^2 + \omega \sum_{k=1}^n \theta_k e^{-\omega\tau_k} + \sum_{k=1}^m \xi_k e^{-\omega\beta_k} \right] g = 0. \quad (40)$$

Добавляя граничные условия для функции $g(x)$, получим задачу на собственные значения. Например, при шарнирном закреплении левого конца $x=0$ и жестко защемленном правом конце $x=l$ условия имеют вид

$$g(0) = g''(0) = 0, \quad g(l) = g'(l) = 0. \quad (41)$$

Один из способов решения задачи может состоять в отыскании решения уравнения (40) в виде $g(x) = e^{\lambda x}$, для λ получим алгебраическое уравнение четвертого порядка. Восстановив по найденным значениям λ фундаментальную систему решений $g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x)$, общее решение уравнения (40) запишем в виде

$$g(x) = \sum_{k=1}^4 c_k g_k(x). \quad (42)$$

Удовлетворяя четырем однородным граничным условиям, получим систему уравнений для произвольных постоянных c_1, c_2, c_3, c_4 . При этом в процессе решений должны определиться возможные собственные значения ω .

Другой способ основан на методе Галеркина. В этом случае решение краевых задач для уравнения (40), например, краевой задачи (40)-(41), отыскивается в виде

$$g(x) = \sum_{k=1}^n a_k f_k(x). \quad (43)$$

где $\{f_k(x)\}_1^\infty$ – полная на отрезке $[0,l]$ система базисных функций, удовлетворяющая граничным условиям (41).

Третий способ состоит в применении метода Галеркина непосредственно к уравнению (39)

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) f_k(x). \quad (44)$$

Тогда для $w_k(t)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями аргумента t , решение которой можно находить аналитическими или численными методами.

Таким образом, в статье были рассмотрены некоторые задачи аэрогидроупругости о колебаниях, возникающих при протекании жидкости в трубопроводе. В первом случае учитывались только поперечные колебания, во втором во внимание принимались также и продольные колебания. Также был рассмотрен случай запаздывания реакции основания. Для задач приведены возможные типы граничных условий в зависимости от типа закрепления концов трубопровода и наличия внешней силы. На основе построенных функционалов типа Ляпунова был произведен анализ устойчивости решений дифференциальных уравнений, описывающих колебания, сформулированы теоремы устойчивости и получены аналитические условия для параметров механической системы.

Работа выполнена в рамках государственного задания №2014/232 Минобрнауки России и при поддержке гранта РФФИ № 15-01-08599.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Paidoussis M. P., Issid N. T. Dynamic stability of piped conveying fluid // J. Sound and Vibr., V. 33, № 3. – P. 267-294.
2. Vel'misov P. A., Garnefska L. V., Milusheva S. D. Investigation of the asymptotic stability of a pipeline in the presence of delay in time // Rev. Mat. Estat., São Paulo, 19: 2001. – P. 159-178.
3. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. О динамической устойчивости трубопровода // Математические методы и модели в науке, технике, естествознании и экономике: Труды международной конференции по

логике, информатике, науковедению – КЛИН-2007 (г. Ульяновск, 17-18 мая 2007 г.). – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т. 4. – С. 10-14.

4. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 339 с.

5. Вельмисов П. А., Логинов Б. В., Милушева С. Д. Исследование устойчивости трубопровода. // Приложение на математиката в техниката: Сб. доклади и научни съобщения. XXI национальная школа. – Болгария, Варна, 1995. – С. 299-304.

6. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. Исследование динамики трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий // Вестник ульяновского государственного технического университета. – Ульяновск: УлГТУ, 2004. – № 4. – С. 26-29.

7. Вельмисов П. А., Васильева А. А., Семенова Е. П. Математическое моделирование динамики упругих элементов при аэрогидродинамическом воздействии // Труды 7 Международной конференции «Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов (2-5 февраля 2009г., г. Ульяновск)». – Ульяновск: УлГУ, 2009. – С. 68-70.

8. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. О некоторых математических моделях механической системы «Трубопровод – датчик давления» // Вестник самарского государственного технического университета. Серия: технические науки. – Самара: СамГТУ, 2011. – № 1. – С. 137-144.

9. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968.

10. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., Горбоконенко В. Д. Математическое моделирование механической системы «Трубопровод – датчик давления». – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – 188 с.

11. Мовчан А. А. Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Прикладная математика и механика, 1965. – Вып. 4. – С. 760-762.

12. Светлицкий В. А. Механика трубопроводов и шлангов: Задачи взаимодействия стержней с потоком жидкости или воздуха. – М.: Машиностроение, 1982. – 280 с.

13. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 254 с.

14. Феодосьев В. И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инж. сб., Изд-во АН СССР, 1951. – Т. 10. – С. 169-170.

15. Челомей С. В. О динамике устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР, 1980. – Т. 252, № 2. – С. 307-310.

A. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Ю. А. Решетников (г. Ульяновск)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУСТОРОННЕГО БЕЗОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ СИСТЕМЫ ТРЕХ УПРУГИХ ПЛАСТИН ТИПА «ТАНДЕМ» ДОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Предложена математическая модель динамической системы трех упругих пластин типа «тандем», обтекаемых дозвуковым потоком газа (жидкости). Дано решение аэрогидродинамической части задачи, основанное на методах теории функций комплексного переменного. Получена связанная система уравнений, позволяющая исследовать динамику пластин.

1. Постановка задачи

Рассматривается плоская задача аэроупругости о малых колебаниях системы трех упругих пластин типа «тандем» (расположенных последовательно друг за другом вдоль одной линии) при дозвуковом обтекании их потоком идеального несжимаемого газа. Пусть в состоянии покоя пластинам в физической плоскости xOy соответствуют на оси Ox отрезки $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ и $[a_3, b_3]$, $a_2 > b_1$, $a_3 > b_2$ (рис. 1).

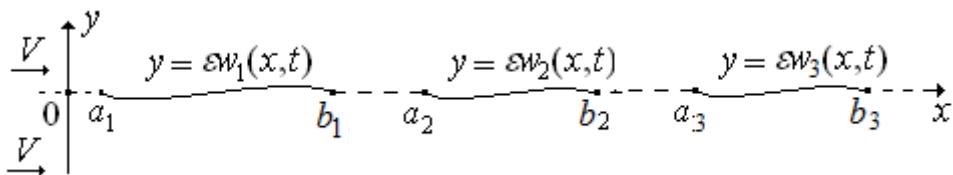


Рис. 1. Двустороннее безотрывное обтекание системы трех упругих пластин

В бесконечно удаленной точке скорость газа равна V и имеет направление, совпадающее с направлением оси Ox . Будем предполагать, что прогибы пластин и возмущение однородного потока малы, то есть $\bar{w}_k(x, t) = \varepsilon w_k(x, t)$, $\bar{\varphi}(x, y, t) = Vx + \varepsilon \varphi(x, y, t)$, $\varepsilon \ll 1$, $k = 1, 2, 3$. Здесь \bar{w}_1 , \bar{w}_2 , \bar{w}_3 и $\bar{\varphi}$ – соответственно прогибы и потенциал скоростей возмущенного потока газа.

Потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G = R^2 \setminus ([a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup [a_3, b_3]), \quad (1)$$

условию отсутствия возмущений в бесконечно удаленной точке

$$\left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2 \right)_\infty = 0 \quad (2)$$

и линеаризованным граничным условиям

$$\varphi_y^\pm = \dot{w}_k + Vw'_k, \quad x \in (a_k, b_k), \quad k = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где $\varphi_y^\pm = \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \varphi_y(x, y, t)$.

Линеаризуя интеграл Лагранжа-Коши, получим следующее выражение для реакции газа на пластины (ρ – плотность газа)

$$Q = \rho(\varphi_t^+ - \varphi_t^-) + \rho V(\varphi_x^+ - \varphi_x^-).$$

Аэродинамические воздействия на пластины, зависящие от поперечных составляющих их деформаций $w_1(x, t), w_2(x, t), w_3(x, t)$, выражаются через потенциал скорости $\varphi(x, y, t)$ по формулам

$$P_k(x, t) = \rho(\varphi_t^+ - \varphi_t^-) + \rho V(\varphi_x^+ - \varphi_x^-), \quad x \in (a_k, b_k), \quad k = 1, 2, 3, \quad y = 0. \quad (4)$$

Для примера рассмотрим линейную модель упругого тела:

$$\begin{aligned} M_k \ddot{w}_k(x, t) + D_k w_k'''(x, t) + N_k w_k''(x, t) + \beta_{0k} w_k(x, t) + \\ + \beta_{1k} \dot{w}_k(x, t) + \beta_{2k} \ddot{w}_k(x, t) = P_k(x, t), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (5)$$

2. Определение силового воздействия потока

Выражая потенциал $\varphi(x, y, t)$ через функции прогиба $w_k(x, t)$, запишем уравнения колебаний пластин (4), (5) относительно этих функций. С этой целью в области G введем комплексный потенциал $W = f(z, t) = \varphi + i\psi$, где $\psi = \psi(x, y, t)$ – функция тока, $z = x + iy$. Для функции скоростей $f_z(z, t) = \varphi_x - i\varphi_y$ согласно условиям (1), (3) имеем следующее интегральное представление [1, с. 52-54]

$$\begin{aligned} f_z(z, t) = \frac{1}{\pi \sqrt{h(z)}} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{\nu_1(\tau, t)}{\tau - z} \sqrt{h(\tau)} d\tau - \int_{a_2}^{b_2} \frac{\nu_2(\tau, t)}{\tau - z} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \right. \\ \left. + \int_{a_3}^{b_3} \frac{\nu_3(\tau, t)}{\tau - z} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \gamma_1(t)z + \gamma_2(t) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $h(z) = (z - a_1)(z - b_1)(z - a_2)(z - b_2)(z - a_3)(b_3 - z)$,

$\nu_k(\tau, t) = \dot{w}_k(\tau, t) + Vw'_k(\tau, t)$, $k = 1, 2, 3$; $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ – действительные функции, определяющие циркуляцию скорости газа вокруг каждой пластины. Ветвь корня в формуле (6) фиксирована условием

$$\sqrt{h(z)} = i\sqrt{(x - a_1)(x - b_1)(x - a_2)(x - b_2)(x - a_3)(x - b_3)}, \quad z = x > b_3. \quad (7)$$

Разложение функции $f_z(z, t)$ в окрестности $z = \infty$ начинается с члена порядка $1/z^4$, поэтому общая циркуляция равна нулю. Циркуляция вокруг каждой пластины может отличаться от нуля. Заметим также, что $(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)_\infty = 0$.

Перейдем в (6) к пределу при $z \rightarrow x \pm i0$, $x \in (a_1, b_1)$. Согласно условию (7) имеем

$$\sqrt{h(z)} = \begin{cases} \mp\sqrt{h(x)}, z = x \pm i0, x \in (a_1, b_1), \\ \pm\sqrt{h(x)}, z = x \pm i0, x \in (a_2, b_2), \\ \mp\sqrt{h(x)}, z = x \pm i0, x \in (a_3, b_3). \end{cases} \quad (8)$$

Применяя формулы Сохоцкого [2] и учитывая (8), получим

$$\begin{aligned} \varphi_x^{\pm} - i\varphi_y^{\pm} &= \mp \frac{1}{\pi\sqrt{h(x)}} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau - \int_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \gamma_1(t)x + \gamma_2(t) \right) - iv_1(x, t), \quad x \in (a_1, b_1), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi_x^+ - \varphi_x^- &= -\frac{2}{\pi\sqrt{h(x)}} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau - \int_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{a_3}^{b_3} \frac{v_3(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \gamma_1(t)x + \gamma_2(t) \right), \quad x \in (a_1, b_1). \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично, при $z \rightarrow x \pm i0$, $x \in (a_2, b_2)$ и $x \in (a_3, b_3)$, находим

$$\begin{aligned} \varphi_x^+ - \varphi_x^- &= \frac{2}{\pi\sqrt{h(x)}} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau - \int_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{a_3}^{b_3} \frac{v_3(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \gamma_1(t)x + \gamma_2(t) \right), \quad x \in (a_2, b_2), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \varphi_x^+ - \varphi_x^- &= -\frac{2}{\pi\sqrt{h(x)}} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau - \int_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{a_3}^{b_3} \frac{v_3(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \gamma_1(t)x + \gamma_2(t) \right), \quad x \in (a_3, b_3). \end{aligned} \quad (11)$$

Для комплексного потенциала имеем следующее выражение

$$W = f(z, t) = \int_{a_1}^z f_z(z, t) dz + C(t), \quad (12)$$

где $C(t)$ – произвольная функция времени, $z \in G$. Так как G – трехсвязная область, то интеграл, вообще говоря, зависит от линии интегрирования. Следовательно, потенциал φ , а значит аэродинамические воздействия (4) однозначно не определяются. Подбреем функции $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ так, чтобы циркуляция вокруг каждой пластины равнялась нулю.

При обходе разреза $[a_k, b_k]$ против часовой стрелки циркуляция

$$\Gamma_k(t) = \int_{a_k}^{b_k} \varphi_x^- dx + \int_{b_k}^{a_k} \varphi_x^+ dx = \int_{a_k}^{b_k} (\varphi_x^- - \varphi_x^+) dx, \quad k=1,2,3. \quad \text{Воспользовавшись}$$

формулами (9) – (11), получим

$$\begin{aligned} \Gamma_1(t) &= \frac{2}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(\tau, t)}{x-\tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau - \frac{2}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(\tau, t)}{x-\tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_3}^{b_3} \frac{v_3(\tau, t)}{x-\tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \frac{2\gamma_1(t)}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{xdx}{\sqrt{h(x)}} + \frac{2\gamma_2(t)}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2(t) &= -\frac{2}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(\tau, t)}{x-\tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \frac{2}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(\tau, t)}{x-\tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau - \\ &- \frac{2}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_3}^{b_3} \frac{v_3(\tau, t)}{x-\tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau - \frac{2\gamma_1(t)}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} \frac{xdx}{\sqrt{h(x)}} - \frac{2\gamma_2(t)}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_3(t) &= \frac{2}{\pi} \int_{a_3}^{b_3} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(\tau, t)}{x-\tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau - \frac{2}{\pi} \int_{a_3}^{b_3} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(\tau, t)}{x-\tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{a_3}^{b_3} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_3}^{b_3} \frac{v_3(\tau, t)}{x-\tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \frac{2\gamma_1(t)}{\pi} \int_{a_3}^{b_3} \frac{xdx}{\sqrt{h(x)}} + \frac{2\gamma_2(t)}{\pi} \int_{a_3}^{b_3} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Покажем, что сумма циркуляций равна нулю. Согласно (13) - (15)

$$\begin{aligned} \Gamma_1(t) + \Gamma_2(t) + \Gamma_3(t) &= \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} v_1(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)} - \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)} + \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)} \right) + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} v_2(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)} - \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)} + \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)} \right) - \\ &- \frac{2}{\pi} \int_{a_3}^{b_3} v_3(\tau, t) \sqrt{h(\tau)} d\tau \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)} - \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)} + \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)} \right) + (16) \\ &+ \frac{2\gamma_1(t)}{\pi} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{xdx}{\sqrt{h(x)}} - \int_{a_2}^{b_2} \frac{xdx}{\sqrt{h(x)}} + \int_{a_3}^{b_3} \frac{xdx}{\sqrt{h(x)}} \right) + \\ &+ \frac{2\gamma_2(t)}{\pi} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} - \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} + \int_{a_3}^{b_3} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \right). \end{aligned}$$

В полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ рассмотрим аналитическую функцию $g_1(z) = 1/\sqrt{h(z)}$. В силу выбора ветви корня (7) на границе полуплоскости ($\operatorname{Im} z = y = 0$) имеем

$$\operatorname{Re}\{g_1(z)\} = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a_1) \cup (b_1, a_2) \cup (b_2, a_3) \cup (b_3, +\infty), \\ -1/\sqrt{h(x)}, & x \in (a_1, b_1), \\ 1/\sqrt{h(x)}, & x \in (a_2, b_2), \\ -1/\sqrt{h(x)}, & x \in (a_3, b_3). \end{cases}$$

Представим $g_1(z)$ с помощью интеграла Шварца [2]

$$g_1(z) = \frac{1}{\sqrt{h(z)}} = \frac{1}{\pi i} \left(- \int_{a_1}^{b_1} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - z)} + \int_{a_2}^{b_2} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - z)} - \int_{a_3}^{b_3} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - z)} \right). \quad (17)$$

При $z \rightarrow x \in (a_1, b_1)$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{h(x)}} = \frac{1}{\pi i} \left(\frac{\pi i}{\sqrt{h(x)}} - \int_{a_1}^{b_1} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - x)} + \int_{a_2}^{b_2} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - x)} - \int_{a_3}^{b_3} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - x)} \right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - x)} - \int_{a_2}^{b_2} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - x)} + \int_{a_3}^{b_3} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - x)} &= 0, \quad x \in (a_1, b_1), \text{ или} \\ \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x - \tau)} - \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x - \tau)} + \int_{a_3}^{b_3} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x - \tau)} &= 0, \quad \tau \in (a_1, b_1). \end{aligned} \quad (18)$$

Аналогично при $z \rightarrow x \in (a_2, b_2)$ и $z \rightarrow x \in (a_3, b_3)$ получим

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x - \tau)} - \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x - \tau)} + \int_{a_3}^{b_3} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x - \tau)} = 0, \quad \tau \in (a_2, b_2). \quad (19)$$

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x - \tau)} - \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x - \tau)} + \int_{a_3}^{b_3} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x - \tau)} = 0, \quad \tau \in (a_3, b_3). \quad (20)$$

Полагая в (17) $z = x > b_3$, будем иметь

$$\frac{\pi}{\sqrt{-h(x)}} = - \int_{a_1}^{b_1} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - x)} + \int_{a_2}^{b_2} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - x)} - \int_{a_3}^{b_3} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - x)}.$$

Умножим на x обе части этого равенства и перейдем к пределу при $x \rightarrow +\infty$. В результате получим

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}} - \int_{a_2}^{b_2} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}} + \int_{a_3}^{b_3} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}} = 0. \quad (21)$$

В полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ рассмотрим аналитическую функцию $g_2(z) = z/\sqrt{h(z)}$. В силу выбора ветви корня (7) на границе полуплоскости ($\operatorname{Im} z = y = 0$) имеем

$$\operatorname{Re}\{g_2(z)\} = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a_1) \cup (b_1, a_2) \cup (b_2, a_3) \cup (b_3, +\infty), \\ -x/\sqrt{h(x)}, & x \in (a_1, b_1), \\ x/\sqrt{h(x)}, & x \in (a_2, b_2), \\ -x/\sqrt{h(x)}, & x \in (a_3, b_3). \end{cases}$$

Представим $g_2(z)$ с помощью интеграла Шварца [2]

$$g_2(z) = \frac{z}{\sqrt{h(z)}} = \frac{1}{\pi i} \left(- \int_{a_1}^{b_1} \frac{\tau d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - z)} + \int_{a_2}^{b_2} \frac{\tau d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - z)} - \int_{a_3}^{b_3} \frac{\tau d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - z)} \right). \quad (22)$$

Полагая в (22) $z = x > b_3$, будем иметь

$$\frac{\pi x}{\sqrt{-h(x)}} = - \int_{a_1}^{b_1} \frac{\tau d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - x)} + \int_{a_2}^{b_2} \frac{\tau d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - x)} - \int_{a_3}^{b_3} \frac{\tau d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - x)}.$$

Умножим на x обе части этого равенства и перейдем к пределу при $x \rightarrow +\infty$. В результате получим

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{\tau d\tau}{\sqrt{h(\tau)}} - \int_{a_2}^{b_2} \frac{\tau d\tau}{\sqrt{h(\tau)}} + \int_{a_3}^{b_3} \frac{\tau d\tau}{\sqrt{h(\tau)}} = 0. \quad (23)$$

Из равенств (18) - (21), (23) следует, что $\Gamma_1(t) + \Gamma_2(t) + \Gamma_3(t) = 0$.

Положим $\Gamma_1(t) = 0, \Gamma_2(t) = 0$ и найдем функции $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$. Получим систему

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(\tau, t)}{x - \tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau - \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(\tau, t)}{x - \tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau +$$

$$+ \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_3}^{b_3} \frac{v_3(\tau, t)}{x - \tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \gamma_1(t) \int_{a_1}^{b_1} \frac{x dx}{\sqrt{h(x)}} + \gamma_2(t) \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} = 0,$$

$$\int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(\tau, t)}{x - \tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau - \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(\tau, t)}{x - \tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau +$$

$$+ \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_3}^{b_3} \frac{v_3(\tau, t)}{x - \tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \gamma_1(t) \int_{a_2}^{b_2} \frac{x dx}{\sqrt{h(x)}} + \gamma_2(t) \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} = 0. \quad (25)$$

Решая систему линейных уравнений (25), (26) относительно $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$, получим

$$\gamma_1(t) = \frac{1}{M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}} \left[M_{12} \left(\int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(\tau, t)}{x - \tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(\tau, t)}{x - \tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_3}^{b_3} \frac{v_3(\tau, t)}{x - \tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& -M_{22} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(\tau, t)}{x-\tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau - \right. \\
& \left. - \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(\tau, t)}{x-\tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_3}^{b_3} \frac{v_3(\tau, t)}{x-\tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau \right), \\
\gamma_2(t) = & \frac{1}{M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}} \left[M_{21} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(\tau, t)}{x-\tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau - \right. \right. \\
& \left. \left. - \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(\tau, t)}{x-\tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_3}^{b_3} \frac{v_3(\tau, t)}{x-\tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau \right) - \right. \\
& \left. - M_{11} \left(\int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(\tau, t)}{x-\tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau - \right. \right. \\
& \left. \left. - \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(\tau, t)}{x-\tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_3}^{b_3} \frac{v_3(\tau, t)}{x-\tau} \sqrt{h(\tau)} d\tau \right) \right], \tag{26}
\end{aligned}$$

где $M_{11} = \int_{a_1}^{b_1} \frac{xdx}{\sqrt{h(x)}}, M_{12} = \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}}, M_{21} = \int_{a_2}^{b_2} \frac{xdx}{\sqrt{h(x)}}, M_{22} = \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}}.$ Тогда из

равенств $\Gamma_1(t) = 0, \Gamma_2(t) = 0$ следует $\Gamma_3(t) = \Gamma_2(t) - \Gamma_1(t) = 0.$ В этом случае интеграл от функции $f_z(z, t)$ по любому замкнутому контуру, принадлежащему области $G,$ равен нулю. Отсюда следует, что значение потенциала $W,$ определяемое формулой (12), не зависит от линии интегрирования, соединяющей точки a_1 и $z.$ Поскольку

$$W = \varphi + i\psi = a_0(t) + \frac{a_1(t)}{z} + \dots$$

в окрестности $z = \infty,$ то функцию $C(t)$ в (12) можно подобрать так, чтобы выполнялось условие $(\varphi_t)_\infty = 0.$

Чтобы найти предельные значения $\varphi(x, y, t)$ на границе области $G,$ преобразуем каждый из интегралов в правой части формулы (6). Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}
f_z(z, t) = & \frac{1}{\pi\sqrt{h(z)}} \left[- \int_{a_1}^{b_1} \bar{v}_1(\tau, t) \left(\frac{\sqrt{h(\tau)}}{\tau - z} \right)' d\tau + \int_{a_2}^{b_2} \bar{v}_2(\tau, t) \left(\frac{\sqrt{h(\tau)}}{\tau - z} \right)' d\tau - \right. \\
& \left. - \int_{a_3}^{b_3} \bar{v}_3(\tau, t) \left(\frac{\sqrt{h(\tau)}}{\tau - z} \right)' d\tau + \gamma_1(t)z + \gamma_2(t) \right], \tag{27}
\end{aligned}$$

где $\bar{v}_k(\tau, t) = \int\limits_{a_k}^{\tau} v_k(x, t) dx$, $k = 1, 2, 3$.

Так как $\left(\frac{\sqrt{h(\tau)}}{\tau - z} \right)'_{\tau} = \frac{(\tau - z)h'(\tau) - 2h(\tau)}{2(\tau - z)^2 \sqrt{h(\tau)}}$, $\left(\frac{\sqrt{h(z)}}{\tau - z} \right)'_z = \frac{(\tau - z)h'(z) + 2h(z)}{2(\tau - z)^2 \sqrt{h(z)}}$,

то

$$\frac{\sqrt{h(z)}}{\sqrt{h(\tau)}} \left(\frac{\sqrt{h(z)}}{\tau - z} \right)'_z + \left(\frac{\sqrt{h(\tau)}}{\tau - z} \right)'_{\tau} = \frac{(\tau - z)(h'(\tau) + h'(z)) + 2(h(z) - h(\tau))}{2(\tau - z)^2 \sqrt{h(\tau)}}.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} h(z) &= (z - a_1)(z - b_1)(z - a_2)(z - b_2)(z - a_3)(b_3 - z) = \\ &= -z^6 + az^5 + bz^4 + cz^3 + dz^2 + ez + f, \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} h(z) - h(\tau) &= -(z^6 - \tau^6) + a(z^5 - \tau^5) + b(z^4 - \tau^4) + c(z^3 - \tau^3) + d(z^2 - \tau^2) + \\ &+ e(z - \tau) = (z - \tau)[-(z^3 + \tau^3)(z^2 + z\tau + \tau^2) + a(z^4 + z^3\tau + z^2\tau^2 + z\tau^3 + \tau^4) + \\ &+ b(z^2 + \tau^2)(z + \tau) + c(z^2 + z\tau + \tau^2) + d(z + \tau) + e], \\ (h'(\tau) + h'(z)) &= -6(z^5 + \tau^5) + 5a(z^4 + \tau^4) + 4b(z^3 + \tau^3) + \\ &+ 3c(z^2 + \tau^2) + 2d(z + \tau) + 2e, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} (\tau - z)(h'(\tau) + h'(z)) + 2(h(z) - h(\tau)) &= (\tau - z)[-6(z^5 + \tau^5) + 5a(z^4 + \tau^4) + \\ &+ 4b(z^3 + \tau^3) + 3c(z^2 + \tau^2) + 2d(z + \tau) + 2e] - \\ &- 2(\tau - z)[-(z^3 + \tau^3)(z^2 + z\tau + \tau^2) + a(z^4 + z^3\tau + z^2\tau^2 + z\tau^3 + \tau^4) + \\ &+ b(z^2 + \tau^2)(z + \tau) + c(z^2 + z\tau + \tau^2) + d(z + \tau) + e] = \\ &= (\tau - z)[-2(z - \tau)^2(z + \tau)(2z^2 + z\tau + 2\tau^2) + a(z - \tau)^2(3z^2 + 4z\tau + 3\tau^2) + \\ &+ 2b(z - \tau)^2(z + \tau) + c(z - \tau)^2] = (\tau - z)^3[-2(z + \tau)(2z^2 + z\tau + 2\tau^2) + \\ &+ a(3z^2 + 4z\tau + 3\tau^2) + 2b(z + \tau) + c] \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{h(z)}}{\sqrt{h(\tau)}} \left(\frac{\sqrt{h(z)}}{\tau - z} \right)'_z + \left(\frac{\sqrt{h(\tau)}}{\tau - z} \right)'_{\tau} = \\ &= \frac{(\tau - z)^3[-2(z + \tau)(2z^2 + z\tau + 2\tau^2) + a(3z^2 + 4z\tau + 3\tau^2) + 2b(z + \tau) + c]}{2(\tau - z)^2 \sqrt{h(\tau)}} = \\ &= \frac{(\tau - z)[-2(z + \tau)(2z^2 + z\tau + 2\tau^2) + a(3z^2 + 4z\tau + 3\tau^2) + 2b(z + \tau) + c]}{2\sqrt{h(\tau)}}. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\theta(z, \tau) = (\tau - z) \left[-2(z + \tau)(2z^2 + z\tau + 2\tau^2) + a(3z^2 + 4z\tau + 3\tau^2) + 2b(z + \tau) + c \right], \quad (28)$$

где $a = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$,

$$\begin{aligned} -b &= a_1b_1 + a_1a_2 + a_1b_2 + a_1a_3 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1b_2 + b_1a_3 + b_1b_3 + a_2b_2 + a_2a_3 + \\ &\quad + a_2b_3 + b_2a_3 + b_2b_3 + a_3b_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= a_1b_1a_2 + a_1b_1b_2 + a_1b_1a_3 + a_1b_1b_3 + a_1a_2b_2 + a_1a_2a_3 + a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 + a_1b_2b_3 + \\ &\quad + a_1a_3b_3 + a_2b_2a_3 + a_2b_2b_3 + a_2a_3b_3 + b_2a_3b_3. \end{aligned}$$

Поэтому, с учетом того, что

$$\left(\frac{\sqrt{h(\tau)}}{\tau - z} \right)'_{\tau} = -\frac{\sqrt{h(z)}}{\sqrt{h(\tau)}} \left(\frac{\sqrt{h(z)}}{\tau - z} \right)'_z - \frac{\theta(z, \tau)}{2\sqrt{h(\tau)}}, \quad (29)$$

имеем

$$\begin{aligned} f_z(z, t) &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{a_1}^{b_1} \frac{\bar{v}_1(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \left(\frac{\sqrt{h(z)}}{\tau - z} \right)'_z d\tau - \int_{a_2}^{b_2} \frac{\bar{v}_2(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \left(\frac{\sqrt{h(z)}}{\tau - z} \right)'_z d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{a_3}^{b_3} \frac{\bar{v}_3(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \left(\frac{\sqrt{h(z)}}{\tau - z} \right)'_z d\tau \right] + \frac{1}{\pi \sqrt{h(z)}} \left[\gamma_1(t)z + \gamma_2(t) + \int_{a_1}^{b_1} \bar{v}_1(\tau, t) \frac{\theta(z, \tau)}{2\sqrt{h(\tau)}} d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \int_{a_2}^{b_2} \bar{v}_2(\tau, t) \frac{\theta(z, \tau)}{2\sqrt{h(\tau)}} d\tau + \int_{a_3}^{b_3} \bar{v}_3(\tau, t) \frac{\theta(z, \tau)}{2\sqrt{h(\tau)}} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя (30) в (12), получим

$$\begin{aligned} W = \varphi + i\psi &= \frac{\sqrt{h(z)}}{\pi} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{\bar{v}_1(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - z} - \int_{a_2}^{b_2} \frac{\bar{v}_2(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - z} + \int_{a_3}^{b_3} \frac{\bar{v}_3(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - z} \right) + \\ &\quad + \frac{\gamma_1(t)}{\pi} \int_{a_1}^z \frac{z dz}{\sqrt{h(z)}} + \frac{\gamma_2(t)}{\pi} \int_{a_1}^z \frac{dz}{\sqrt{h(z)}} + \frac{1}{2\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\bar{v}_1(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_{a_1}^z \frac{\theta(z, \tau)}{\sqrt{h(z)}} dz - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{a_2}^{b_2} \frac{\bar{v}_2(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_{a_1}^z \frac{\theta(z, \tau)}{\sqrt{h(z)}} dz + \frac{1}{2\pi} \int_{a_3}^{b_3} \frac{\bar{v}_3(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_{a_1}^z \frac{\theta(z, \tau)}{\sqrt{h(z)}} dz + C(t). \end{aligned} \quad (31)$$

Отсюда при $z \rightarrow x \pm i0$, $x \in (a_1, b_1)$, находим

$$\begin{aligned} \phi^{\pm} + i\psi^{\pm} &= \frac{\mp\sqrt{h(x)}}{\pi} \left(\pm\pi i \frac{\bar{v}_1(x, t)}{\sqrt{h(x)}} + \int_{a_1}^{b_1} \frac{\bar{v}_1(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} - \int_{a_2}^{b_2} \frac{\bar{v}_2(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} + \int_{a_3}^{b_3} \frac{\bar{v}_3(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} \right) + \\ &\quad + \frac{\gamma_1(t)}{\pi} \int_{a_1}^x \frac{xdx}{\mp\sqrt{h(x)}} + \frac{\gamma_2(t)}{\pi} \int_{a_1}^x \frac{dx}{\mp\sqrt{h(x)}} + \frac{1}{2\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\bar{v}_1(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_{a_1}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\mp\sqrt{h(x)}} dx - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{a_2}^{b_2} \frac{\bar{v}_2(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_{a_1}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\mp\sqrt{h(x)}} dz + \frac{1}{2\pi} \int_{a_3}^{b_3} \frac{\bar{v}_3(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_{a_1}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\mp\sqrt{h(x)}} dz + C(t). \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi^+ - \varphi^- = & -\frac{2\sqrt{h(x)}}{\pi} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{\bar{v}_1(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} - \int_{a_2}^{b_2} \frac{\bar{v}_2(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} + \int_{a_3}^{b_3} \frac{\bar{v}_3(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} \right) - \\ & - \frac{2\gamma_1(t)}{\pi} \int_{a_1}^x \frac{xdx}{\sqrt{h(x)}} - \frac{2\gamma_2(t)}{\pi} \int_{a_1}^x \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} - \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\bar{v}_1(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_{a_1}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dx + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} \frac{\bar{v}_2(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_{a_1}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dz - \frac{1}{\pi} \int_{a_3}^{b_3} \frac{\bar{v}_3(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_{a_1}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dz, \quad x \in (a_1, b_1). \end{aligned} \quad (32)$$

Аналогичным образом, сначала интегрируя (30) от a_2 до z , затем переходя к пределу при $z \rightarrow x \pm i0$, $x \in (a_2, b_2)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi^+ - \varphi^- = & \frac{2\sqrt{h(x)}}{\pi} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{\bar{v}_1(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} - \int_{a_2}^{b_2} \frac{\bar{v}_2(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} + \int_{a_3}^{b_3} \frac{\bar{v}_3(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} \right) - \\ & - \frac{2\gamma_1(t)}{\pi} \int_{a_2}^x \frac{xdx}{\sqrt{h(x)}} - \frac{2\gamma_2(t)}{\pi} \int_{a_2}^x \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} - \frac{1}{\pi} \int_{a_2}^{b_1} \frac{\bar{v}_1(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_{a_2}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dx + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} \frac{\bar{v}_2(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_{a_2}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dz - \frac{1}{\pi} \int_{a_3}^{b_3} \frac{\bar{v}_3(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_{a_2}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dz, \quad x \in (a_2, b_2). \end{aligned} \quad (33)$$

Аналогично сначала интегрируя (30) от a_3 до z , затем переходя к пределу при $z \rightarrow x \pm i0$, $x \in (a_3, b_3)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi^+ - \varphi^- = & -\frac{2\sqrt{h(x)}}{\pi} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{\bar{v}_1(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} - \int_{a_2}^{b_2} \frac{\bar{v}_2(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} + \int_{a_3}^{b_3} \frac{\bar{v}_3(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} \right) - \\ & - \frac{2\gamma_1(t)}{\pi} \int_{a_3}^x \frac{xdx}{\sqrt{h(x)}} - \frac{2\gamma_2(t)}{\pi} \int_{a_3}^x \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} - \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\bar{v}_1(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_{a_3}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dx + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} \frac{\bar{v}_2(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_{a_3}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dz - \frac{1}{\pi} \int_{a_3}^{b_3} \frac{\bar{v}_3(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_{a_3}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dz, \quad x \in (a_3, b_3). \end{aligned} \quad (34)$$

Согласно формулам (9)-(11), (32)-(34) аэродинамические воздействия (4) принимают вид

$$\begin{aligned} (-1)^k P_k(x, t) = & \frac{2\rho\sqrt{h(x)}}{\pi} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{\tilde{v}_1(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} - \int_{a_2}^{b_2} \frac{\tilde{v}_2(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} + \int_{a_3}^{b_3} \frac{\tilde{v}_3(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} \right) - \\ & - \frac{2\rho\gamma'_1(t)}{\pi} \int_{a_k}^x \frac{xdx}{\sqrt{h(x)}} - \frac{2\rho\gamma'_2(t)}{\pi} \int_{a_k}^x \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} - \frac{\rho}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\tilde{v}_1(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_{a_k}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dx + \\ & + \frac{\rho}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} \frac{\tilde{v}_2(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_{a_k}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dz - \frac{\rho}{\pi} \int_{a_3}^{b_3} \frac{\tilde{v}_3(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_{a_k}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dz + \frac{2\rho V}{\pi\sqrt{h(x)}} \times \end{aligned} \quad (35)$$

$$\times \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau - \int_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \int_{a_3}^{b_3} \frac{v_3(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \gamma_1(t)x + \gamma_2(t) \right),$$

$$x \in (a_k, b_k), \quad k = 1, 2, 3. \quad \text{В (35)} \quad \tilde{v}_k(\tau, t) = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial t} = \int_{a_k}^{\tau} (\ddot{w}_k(x, t) + V \dot{w}_k'(x, t)) dx,$$

$\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ определяются формулами (26), $\theta(z, \tau)$ определяется равенством (28).

Таким образом, учитывая (6), получили связанную систему уравнений относительно функций прогиба $w_1(x, t)$ и $w_2(x, t)$:

$$\begin{aligned} (-1)^k (M_k \ddot{w}_k(x, t) + D_k w_k''(x, t) + N_k w_k''(x, t) + \beta_{0k} w_k(x, t) + \beta_{1k} \dot{w}_k(x, t) + \\ + \beta_{2k} \dot{w}_k''(x, t)) = \frac{2\rho \sqrt{h(x)}}{\pi} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{\tilde{v}_1(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} - \int_{a_2}^{b_2} \frac{\tilde{v}_2(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} + \int_{a_3}^{b_3} \frac{\tilde{v}_3(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} \right) - \\ - \frac{2\rho \gamma'_1(t)}{\pi} \int_{a_k}^x \frac{xdx}{\sqrt{h(x)}} - \frac{2\rho \gamma'_2(t)}{\pi} \int_{a_k}^x \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} - \frac{\rho}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\tilde{v}_1(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_{a_k}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dx + \\ + \frac{\rho}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} \frac{\tilde{v}_2(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_{a_k}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dz - \frac{\rho}{\pi} \int_{a_3}^{b_3} \frac{\tilde{v}_3(\tau, t)}{\sqrt{h(\tau)}} d\tau \int_{a_k}^x \frac{\theta(x, \tau)}{\sqrt{h(x)}} dz + \\ + \frac{2\rho V}{\pi \sqrt{h(x)}} \left(\int_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau - \int_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \right. \\ \left. + \int_{a_3}^{b_3} \frac{v_3(\tau, t)}{\tau - x} \sqrt{h(\tau)} d\tau + \gamma_1(t)x + \gamma_2(t) \right), \quad x \in (a_k, b_k), k = 1, 2. \end{aligned} \quad (36)$$

Работа выполнена в рамках государственного задания №2014/232 Минобрнауки России и при поддержке гранта РФФИ № 15-01-08599.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэrodинамики. – М.: Наука, 1980. – 448 с.
- Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.

B. A. Атряхин, М. С. Челышов, П. А. Шаманаев (г. Саранск)

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ РЕДУКЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МАТРИЦАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В статье описан численный метод ортогональной циклической редукции для решения систем линейных алгебраических уравнений с матрицами специального вида. Приведены результаты расчетов для матриц, состоящих из четырехмерных блоков.

При оценке неизвестных параметров обыкновенных дифференциальных уравнений одним из методов на условный экстремум возникает необходимость в решении систем линейных алгебраических уравнений с блочной матрицей специального вида [1]:

$$Ax = f, \quad (1)$$

где $A \in \Re^{n \cdot (N-1) \times (n \cdot N+1)}$ – постоянная блочная матрица, $x = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T, \theta]^T \in \Re^{n \cdot N+1}$, $x_l \in \Re^n$, $f \in \Re^{n \cdot (N-1)}$, $\theta \in \Re$, векторы x_1, x_N и параметр θ – известны.

Уравнение (1) в матричном представлении имеет вид:

$$\begin{bmatrix} D_1 & K_1 & & & & \\ & D_2 & K_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D_{N-2} & K_{N-2} & E_{N-2} \\ & & & & & D_{N-1} & K_{N-1} & E_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $D_l, K_l \in \Re^{n \times n}$, $E_l \in \Re^n$, $l = 1, \dots, N-1$.

Положим $N = 2^{k_{\max}} + 1$, где k_{\max} задается исходя из вычислительных возможностей.

Уравнение (2) запишем в следующем виде:

$$D_l x_l + K_l x_{l+1} + E_l \theta = f_l, \quad l = 1, \dots, N-1. \quad (3)$$

Рассмотрим коэффициенты и свободные члены уравнения (3) при $l-1$ и l , записав их в следующей форме:

$$\begin{bmatrix} D_{l-1}^{(0)} & K_{l-1}^{(0)} & 0 & E_{l-1}^{(0)} & f_{l-1}^{(0)} \\ 0 & D_l^{(0)} & K_l^{(0)} & E_l^{(0)} & f_l^{(0)} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $D_l^{(0)} = D_l$, $K_l^{(0)} = K_l$, $E_l^{(0)} = E_l$, $f_l^{(0)} = f_l$, $l = 1, \dots, N-1$.

Применим для решения системы (1) метод ортогональной циклической редукции [2].

Метод ортогональной циклической редукции состоит из прямого и обратного хода.

Прямой ход метода заключается в последовательном применении ортогональных преобразований к системе (4), так что на каждом этапе преобразований исключаются блоки с нечетными индексами l .

Ортогональная матрица преобразований имеет вид:

$$Q_l^{(k-1)} = \begin{bmatrix} -D_l^{(k-1)} \bar{K}_{l-1}^{(k-1)} - \bar{K}_{l-1}^{(k-1)} & I \\ -D_l^{(k)} \bar{K}_{l-1}^{(k)} & I \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, k_{\max}, \quad l = 2, \dots, \frac{N-1}{2^{k-1}}, \quad (5)$$

где $\bar{K} = K^{-1}$.

Применяя ортогональное преобразование (5) к (4), получим:

$$\begin{aligned} Q_l^{(k-1)} \begin{bmatrix} D_{l-1}^{(k-1)} & K_{l-1}^{(k-1)} & 0 & E_{l-1}^{(k-1)} & f_{l-1}^{(k-1)} \\ 0 & D_l^{(k-1)} & K_l^{(k-1)} & E_l^{(k-1)} & f_l^{(k-1)} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} V_l^{(k)} & -I & U_l^{(k)} & W_l^{(k)} & r_l^{(k)} \\ D_{l/2}^{(k)} & 0 & K_{l/2}^{(k)} & E_{l/2}^{(k)} & f_{l/2}^{(k)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

После последовательного применения преобразований k_{\max} раз получим уравнение:

$$D_1^{(k_{\max})} x_0 + K_1^{(k_{\max})} x_N + E_1^{(k_{\max})} \theta = f_1^{(k_{\max})}. \quad (7)$$

Обратный ход заключается в вычислении неизвестных x_l по формулам:

$$x_m = V_l^k x_{m-p} + U_l^k x_{m+p} + W_l^k \theta + r_l^k, \quad k = k_{\max}, \dots, 1, \quad l = 2, \dots, \frac{N-1}{2^{k-1}}, \quad (8)$$

где $p = 2^{k-1}$, $m = p \cdot (l-1) + 1$.

Приведем пример применения метода циклической ортогональной редукции для решения системы линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим систему вида (2), где $k_{\max} = 2$, $N = 5$, $n = 4$. Зададим:

$$D_l = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad K_l = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad E_l = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f_l = \begin{bmatrix} 15 \\ -15 \\ 15 \\ -15 \end{bmatrix}, \quad l = \overline{1,4},$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \theta = 3.$$

В результате применения метода ортогональной циклической редукции получим решение: $x_i = (1, -1, 1, -1)^T$, $i = 2, \dots, 4$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Zhengfeng Li, Michael R. Osborne, Tania Prvan Parameter estimation of ordinary differential equations // IMA Journal of Numerical Analysis, 2005. – № 25. – P. 264-285.
2. Michael R. Osborne Cyclic reduction, dichotomy, and the estimation of differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics, 1997. – № 86. – P. 271-286.

Т. В. Афанасьева, А. О. Козлов (г. Ульяновск)

ОБОБЩЕННАЯ РЕГРЕССИОННО-НЕЧЕТКАЯ МОДЕЛЬ СЕРВЕРА

В работе предлагается дополнить математическую модель поведения функционирования сервера предприятия, представленную временными рядами физических числовых параметров, моделью нечеткого оценивания тенденций изменения нагрузки на сервер, обусловленного изменением бизнес-процессов предприятия для получения более полных, информативных и достоверных данных, необходимых для раннего обнаружения ситуаций, приводящих к значительной потере работоспособности сервера.

Задача изменения нагрузки на отдельный сервер, приводящей к снижению или потере его работоспособности является актуальной, так как ее неадекватное решение может привести к потере ценной информации, непредвиденным и значительным материальным затратам в условиях активного перехода к интернет-экономике.

Следует учесть, что изменение нагрузки может возникнуть и в случае воздействия на сервер внешних трудно формализуемых факторов, а поэтому формулируемых экспертно лицами, принимающими решение, например, таких как увеличение объема решаемых задач, рост числа клиентов, изменение масштаба предприятия. Чтобы обеспечить раннее предупреждение о возможных в будущем нарушениях функционирования отдельного сервера и учесть эти риски при планировании развития ИТ-ресурсов предприятия целесообразно применять методы анализа временных рядов (ВР) физических параметров сервера, а также формализовать внешние экспертные оценки тенденций развития предприятия.

Для решения обозначенной задачи предлагается обобщенная модель состояния сервера, интегрирующая математические модели временных рядов его числовых параметров в виде адаптивных динамических регрессий [1], и нечеткие модели экспертного оценивания [2, 3].

В качестве числовых параметров сервера могут быть использованы временные ряды максимальных суточных значений числовых параметров сервера: «Загрузка центрального процессора», «Загрузка оперативной памяти», «Загрузка сети». В качестве нечеткой внешней экспертной оценки выбран прогноз тенденции развития предприятия.

Модель поведения сервера, интегрирующая числовые параметры и экспертные оценки, представим в виде

$$\tilde{S} = F(X, \tilde{Z}, \tilde{E}), \quad (1)$$

где F – некоторый метод, генерирующий комплексную прогнозную оценку состояния сервера; X – вектор числовых параметров, характеризующих

прогнозное техническое состояние сервера; $\tilde{Z} = Y(\tilde{X}, N_{Gt})$, где \tilde{Z} – вектор внутренних экспертных оценок числовых параметров X , например, «Недостаток загрузки», «Превышение загрузки», «Норма»; \tilde{X} – вектор экспертных оценок значений параметров X , например, «Очень низкий», «Низкий», «Ниже среднего», «Среднее», «Выше среднего», «Высокий», «Очень высокий»; N_{Gt} – вектор экспертных оценок тенденций изменения параметров X («Рост», «Падение», «Стабильность»); Y – некоторый метод определения внутренних экспертных оценок числовых параметров X ; \tilde{E} – экспертная оценка, характеризующая внешние факторы изменения предприятия и выражаемая в виде набора нечетких термов тенденций «Уменьшение нагрузки», «Стабильность», «Увеличение нагрузки»; \tilde{S} – прогнозное состояние сервера, задаваемое нечетким термом из множества значений: «Недостаток загрузки», «Норма», «Превышение загрузки».

Модель числовых параметров

$$X = \{x_i(t)\}, \quad t = t_1, \dots, t_n \quad (2)$$

представим в виде зависимостей, отражающих основные особенности их поведения:

$$x_i(t) = f_i(t) + \psi_i(t) + a_i(t) + e_i(t), \quad t = t_1, \dots, t_n, \quad (3)$$

где $f_i(t)$ – неслучайная функция полиномиального тренда

$$f_i(t) = \beta_{i,0} + \sum_{k=1}^m \beta_k t^k, \quad (4)$$

$\psi_i(t)$ – неслучайная периодическая функция:

$$\psi_i(t) = \sum_{k=1}^s A_{i,k} \sin\left(\frac{2\pi t}{T_{i,k}} + \varphi_{i,k}\right), \quad (5)$$

$a_i(t)$ – случайная с элементами регулярности функция, которая может включать в себя процессы APCC(p, q):

$$a_i(t) = \sum_{k=1}^p \beta_{i,k} a_i(t-k) + \sigma_i(t) + \sum_{s=1}^q \theta_{i,s} \sigma_i(t-s), \quad (6)$$

а также процесс GARCH(p, q):

$$\sigma_i^2(t) = \sum_{k=1}^p \gamma_{i,k} a_i^2(t-k) + \sum_{s=1}^q \delta_{i,s} \sigma_i^2(t-s), \quad (7)$$

$e_i(t)$ – нерегулярная случайная компонента.

Тогда модель прогноза каждого числового параметра сервера

$$\hat{x}_i(t+p) = f_i(t+p) + \psi_i(t+p) + a_i(t+p), \quad p = 1, \dots, n, \quad (8)$$

где p – горизонт прогноза.

Модель экспертной оценки числового параметра x_i сервера

представим в виде функций принадлежности $\tilde{x}_i = \{x, \mu_{\tilde{x}_i}(x)\}, x \in \tilde{X}, \tilde{x}_i \in \tilde{X}_i$,
 $i \in [1, m]$ терм-множества $\tilde{X} = \{\text{«Очень низкий», «Низкий», «Ниже среднего», «Среднее», «Выше среднего», «Высокий», «Очень высокий»}\}$:

$$\mu_{\tilde{x}_k}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{k-1}}{d}, & x \in [x_{k-1}, x_k], \\ 1 - \frac{x - x_k}{d}, & x \in [x_k, x_{k+1}], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (9)$$

где $k = 1, \dots, m$, $d = (X_{\max} - X_{\min}) / m$, $x_k = x_{k-1} + d$.

Модель экспертной оценки прогнозной нечеткой тенденции $\tilde{v}_{Gt,i} \in \tilde{N}_{Gt}$ изменения числового параметра на временном отрезке, состоящем из исходного и прогнозного ВР, определим в виде алгоритмически заданных операций ACL-шкалы [2]

$$\tilde{v}_{Gt,i} = GTend(\tilde{x}_i(t), \tilde{v}_i, \tilde{a}_i), \quad (10)$$

где

$$\tilde{x}_i = Fuzzy(x_j), x_j \in X, \tilde{x}_i \in \tilde{X}, \quad (11)$$

$$\tilde{x}_i = \tilde{x}_k, \text{ если } \tilde{x}_k(x_j) \geq \tilde{x}_s(x_t), \forall s = 1, 2, \dots, m,$$

$$\tilde{v}_i = TTend(\tilde{x}_i(t-1), \tilde{x}_i(t)), \tilde{x}_i(t-1) \in \tilde{X}, \tilde{x}_i(t) \in \tilde{X}, \quad (12)$$

$$\tilde{a}_i = RTend(\tilde{x}_i(t-1), \tilde{x}_i(t)), \tilde{x}_i(t-1) \in \tilde{X}, \tilde{x}_i(t) \in \tilde{X}. \quad (13)$$

Тогда обобщенная модель прогноза отдельного параметра сервера, может быть выражена в виде нечеткой модели логического вывода:

$$\tilde{Z}_i \in R(\tilde{x}_i, \tilde{v}_{Gt,i}), \quad (14)$$

где $\tilde{Z}_i \in \tilde{Z}$ – прогнозная лингвистическая оценка состояния отдельного параметра сервера: «Недостаток загрузки», «Норма», «Превышение загрузки»; R – набор правил для определения прогноза состояния отдельного параметра сервера; $\tilde{v}_{Gt,i} \in \tilde{N}_{Gt}$ – прогнозная лингвистическая оценка общей тенденции нечеткого временного ряда отдельного параметра сервера [3], $\tilde{x}_i \in \tilde{X}$ – это нечеткая оценка последнего спрогнозированного значения отдельного параметра сервера.

$$R = \begin{cases} R_1 : \text{Если } \tilde{x}_i(t) \text{ есть } \tilde{X}_{i,1} \text{ и } \tilde{v}_{Gt,i} \text{ есть } \tilde{V}_{i,1}, \text{ то } z_i \text{ есть } \tilde{Z}_1, \\ R_2 : \text{Если } \tilde{x}_i(t) \text{ есть } \tilde{X}_{i,2} \text{ и } \tilde{v}_{Gt,i} \text{ есть } \tilde{V}_{i,2}, \text{ то } z_i \text{ есть } \tilde{Z}_2, \\ \dots \\ R_k : \text{Если } \tilde{x}_i(t) \text{ есть } \tilde{X}_{i,k} \text{ и } \tilde{v}_{Gt,i} \text{ есть } \tilde{V}_{i,k}, \text{ то } z_i \text{ есть } \tilde{Z}_k. \end{cases} \quad (15)$$

Обобщенная нечеткая модель состояния сервера интегрирует внутренние нечеткие оценки состояния отдельных числовых параметров сервера и внешнюю экспертуенную оценку тенденции развития предприятия, задаваемую ЛПР, в виде

$$\tilde{S} = A(\tilde{Z}, \tilde{E}), \quad (16)$$

где \tilde{S} – итоговая прогнозная лингвистическая оценка состояния сервера: «Недостаток загрузки», «Норма», «Превышение загрузки»; \tilde{E} – экспертная оценка, характеризующая внешние факторы изменения предприятия и выражаемая в виде набора нечетких термов тенденций «Уменьшение нагрузки», «Стабильность», «Увеличение нагрузки»; \tilde{Z} – прогнозная лингвистическая оценка состояния отдельных характеристик сервера, получаемая по формулам (14), (15); A – набор правил определения прогнозной оценки состояния сервера:

$$A = \begin{cases} A_1 : \text{Если } \tilde{z}_1 \text{ есть } \tilde{Z}_{11} \text{ и } \tilde{z}_2 \text{ есть } \tilde{Z}_{12} \text{ и } \dots \tilde{z}_n \text{ есть } \tilde{Z}_{1n} \text{ и } \tilde{e}_{np} \text{ есть } \tilde{E}_1, \text{ то } \tilde{s} \text{ есть } \tilde{S}_1, \\ \dots \\ A_j : \text{Если } \tilde{z}_1 \text{ есть } \tilde{Z}_{j1} \text{ и } \tilde{z}_2 \text{ есть } \tilde{Z}_{j2} \text{ и } \dots \tilde{z}_n \text{ есть } \tilde{Z}_{jn} \text{ и } \tilde{e}_{np} \text{ есть } \tilde{E}_j, \text{ то } \tilde{s} \text{ есть } \tilde{S}_j, \\ \dots \\ A_m : \text{Если } \tilde{z}_1 \text{ есть } \tilde{Z}_{m1} \text{ и } \tilde{z}_2 \text{ есть } \tilde{Z}_{m2} \text{ и } \dots \tilde{z}_n \text{ есть } \tilde{Z}_{mn} \text{ и } \tilde{e}_{np} \text{ есть } \tilde{E}_m, \text{ то } \tilde{s} \text{ есть } \tilde{S}_m, \end{cases} \quad (17)$$

где $\tilde{z}_i(t) : i = 1, 2, \dots, n$ – лингвистический терм прогнозной оценки состояния отдельного параметра сервера, \tilde{e}_{np} – лингвистический терм прогнозной оценки тенденции развития предприятия.

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ 14-07-00247 Методология моделирования и прогнозирования локальных тенденций временных рядов в задачах анализа больших данных

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Валеев С. Г. Регрессионное моделирование при обработке наблюдений. – М.: Наука, 1991. – 272 с. – (второе издание, дополненное и переработанное: Валеев С. Г. Регрессионное моделирование при обработке данных. – Казань: ФЭН, 2001. – 296 с.)
2. Афанасьева Т. В. Модель ACL-шкалы для генерации лингвистических оценок в принятии решений // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В. И. Вернадского. Т.2. Серия «Технические науки». – Тамбов, ТГТУ, 2008. – № 4 (14). – С. 91-97.
3. Ярушкина Н. Г., Афанасьева Т. В., Перфильева И. Г. Интегральный метод нечеткого моделирования и анализа нечетких тенденций // Автоматизация процессов управления. – № 2 (20). – 2010. – С. 59-64.

П. А. Вельмисов, С. В. Киреев (г. Ульяновск), Т. Е. Бадокина (г. Саранск)

ИЗГИБНЫЕ ФОРМЫ ПЛАСТИНЫ-ПОЛОСЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ УПРУГОМ ЗАКРЕПЛЕНИИ

Рассматривается математическая модель задачи об изгибных формах пластины-полосы в сверхзвуковом потоке газа с нелинейной упругой связью на концах. Получены бифуркационные диаграммы, показывающие зависимость максимального прогиба пластины от скорости набегающего потока.

Решение задач о статической неустойчивости конструкций связано с теорией ветвления решения дифференциальных уравнений. Исследования в этом направлении проводились аналитическими и численными методами в работах Абботта Ж. П., Аткинсона К. Е., Бола Е., Крандалла М. Г., Рабиновича П. Х., Демулина М. Ж., Чена М., Холмеса П., Марсдена Ж., Кеенера Ж. П., Келлера Х. Б., Кубичека М., Марека М., Лангфорда В. Ф., Плаута Р. Х., Редиена Г. В., Зейдела Р., Стакгольда И., Вебера Х., Вайнберга М. М., Треногина В. А., Логинова Б. В., Вельмисова П. А., Сидорова Н. А. и др. В частности, результаты исследований устойчивости упругих элементов конструкций, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, приведены в работах Алгазина С. Д., Кийко И. А., Кудрявцева Б. Ю., Показеева В. В., Минасяна Д. М. [1–8], а также в работах авторов данной статьи [9–22].

Рассмотрим математическую модель задачи об изгибных формах пластины-полосы в сверхзвуковом потоке газа, описываемую безразмерным нелинейным интегро-дифференциальным уравнением

$$w^{(4)} + \frac{\alpha \ell^3}{D} w' + \frac{a_3 \ell^6}{D} w^3 - \frac{\theta \ell^3}{D} \int_0^1 (w')^2 dx = 0, \quad \alpha = \frac{\alpha_0 \rho_0 V^2}{\sqrt{M^2 - 1}}, \\ M = \frac{V}{a}, \quad \theta = \frac{EF}{2\ell(1 - \mu^2)}, \quad D = EJ \quad (1)$$

и нелинейными граничными условиями:

$$w''(0) = c_* w'^3(0), \quad w'''(0) = d_* w^3(0), \quad w'(1) = 0, \quad w(1) = 0, \quad c_* > 0, \quad d_* < 0, \quad (2)$$

соответствующих жесткому защемлению на конце $x=1$ и упругому защемлению с нелинейной реакцией на конце $x=0$ (изгибающий момент пропорционален кубу угла поворота, а перезывающая сила пропорциональна кубу прогиба; c_* , d_* – коэффициенты жесткости опоры, отнесенные к D). В (1),(2): D – изгибная жесткость пластины; V , ρ_0 , a –

скорость газа, плотность и скорость звука, соответствующие однородному потоку; M – число Маха; a_3 – коэффициент, характеризующий жесткость основания; интегральный член учитывает нелинейное воздействие продольного усилия; $\alpha w'$ – член, учитывающий аэродинамическое воздействие; $\alpha_0 = 1$ ($\alpha_0 = 2$) соответствует одностороннему (двустороннему) обтеканию пластины; $w(x)$ – прогиб пластины; E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; F – площадь поперечного сечения; J – момент инерции сечения. Все коэффициенты, входящие в уравнение и граничные условия, постоянные.

Линеаризованная система (1), (2) имеет вид

$$K(w) \equiv w^{(4)} + \lambda w' = 0, \quad \lambda = \frac{\alpha \ell^3}{D}, \quad (3)$$

$$w''(0) = 0, \quad w'''(0) = 0, \quad w(1) = 0, \quad w'(1) = 0.$$

Собственные числа $\lambda = s^3$ оператора $K(w)$ находятся из дисперсионного соотношения

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}s} + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) = 0, \quad s_1 \approx 1.85. \quad (4)$$

Решение уравнения (4) определяет точку ветвления $\lambda = s_0^3$. Собственным числам из (4) отвечает собственная функция $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = 2\sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{\pi}{3}\right) e^{\frac{s}{2}} + e^{-sx} - 2e^{\frac{s}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx + \frac{\pi}{6}\right). \quad (5)$$

Сопряженная задача определяется стандартными методами [23] и имеет вид

$$\begin{aligned} u^{(4)} - \lambda u' &= 0, \\ u'''(0) - \lambda u(0) &= 0, \quad u''(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad u'(1) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Задача (6) имеет те же собственные числа, определяемые из соотношения (4), что и задача (3), и собственную функцию $\psi(x)$ вида

$$\begin{aligned} \psi(x) &= e^{sx} + \left(1/2 + \sqrt{3}e^{3s/2} \sin(\sqrt{3}s/2)\right) e^{-\frac{s}{2}x} \cos(\sqrt{3}sx/2) + \\ &+ \left(\sqrt{3}/2 - e^{3s/2} \sin(\sqrt{3}s/2)\right) \cdot e^{-\frac{s}{2}x} \sin(\sqrt{3}sx/2) \end{aligned} \quad (7)$$

Полагая $\varepsilon = \lambda - s_0^3$ (s_0^3 – точка бифуркации), запишем уравнение (1) в виде системы

$$\tilde{K}(w) \equiv w^{(4)} + s_0^3 w' + \langle w, \gamma \rangle z = \xi z - \varepsilon w' + \frac{\theta \ell^3}{D} w'' \int_0^1 (w')^2 dx - \frac{a_3 \ell^6}{D} w^3, \quad (8)$$

$$\xi = \langle w, \gamma \rangle.$$

Применение методов теории ветвления к системе (8) затруднительно из-за несамосопряженности оператора $\tilde{K}(w)$ и наличия неоднородных краевых условий. Сделаем замену переменных

$$w(x) = v(x) + \frac{1}{2}(1-x)^2 c_* w'^3(0) + \frac{1}{6}(1-x)^2 x^3 d_* w^3(0). \quad (9)$$

Первое уравнение системы (8) примет вид

$$\begin{aligned} & v^{(4)} + (20x - 8)d_* w^3(0) + s_0^3 \left(v' - (1-x)c_* w'^3(0) - \frac{1}{3}(1-x)x^3 d_* w^3(0) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(1-x)^2 x^2 d_* w^3(0) \right) + \left\langle v + \frac{1}{2}(1-x)^2 c_* w'^3(0) + \frac{1}{6}(1-x)^2 x^3 d_* w^3(0), \gamma \right\rangle z = \\ & = \xi z - \varepsilon \left(v' - (1-x)c_* w'^3(0) - \frac{1}{3}(1-x)x^3 d_* w^3(0) + \frac{1}{2}(1-x)^2 x^2 d_* w^3(0) \right) + \\ & + \frac{\theta \ell^3}{D} \left(c_* w'^3(0) + \frac{1}{3}x^3 d_* w^3(0) - 2(1-x)x^2 d_* w^3(0) + (1-x)^2 x d_* w^3(0) + v'' \right) \times \\ & \times \int_0^1 \left(v' - (1-x)c_* w'^3(0) - \frac{1}{3}(1-x)x^3 d_* w^3(0) + \frac{1}{2}(1-x)^2 x^2 d_* w^3(0) \right)^2 dx - \\ & - \frac{a_3 \ell^6}{D} \left(v + (1-x)^2 c_* w'^3(0)/2 + (1-x)^2 x^3 d_* w^3(0)/6 \right)^3. \end{aligned} \quad (10)$$

Для $v(x)$ будем иметь однородные краевые условия

$$v''(0) = 0, \quad v'''(0) = 0, \quad v(1) = 0, \quad v'(1) = 0. \quad (11)$$

Задача (10), (11) не может быть решена точно из-за присутствия $w(0)$ и $w'(0)$. Разложим $v(x)$ и $w(x)$ в ряд по степеням ξ и ε :

$$v = \sum_{k+j \geq 1} v_{kj} \xi^k \varepsilon^j, \quad w = \sum_{k+j \geq 1} w_{kj} \xi^k \varepsilon^j, \quad (12)$$

где $w_{0j} = 0$, $v_{0j} = 0$, так как (1), (2) – задача о точке бифуркации.

В дальнейшем значения $w(0)$ и $w'(0)$, входящие в (10), заменяются на первое слагаемое из разложения (12): $w_{10} \equiv \varphi = v_{10}$. Для определения v_{kj} получаем рекуррентную систему:

$$\begin{aligned} v_{10} &= \varphi, \quad \tilde{K}v_{11} = -\varphi', \quad \tilde{K}v_{30} = -\frac{a_3 \ell^6}{D} \varphi^3 + \frac{\theta \ell^3}{D} \varphi'' \int_0^1 \varphi'^2 dx + (8 - 20x)d_* \varphi^3(0) - \\ & - s_0^3 \left(\frac{1}{2}(1-x)^2 x^2 d_* \varphi^3(0) - (1-x)c_* \varphi'^3(0) - \frac{1}{3}(1-x)x^3 d_* \varphi^3(0) \right) - \\ & - \left\langle \frac{1}{2}(1-x)^2 c_* \varphi'^3(0) + \frac{1}{6}(1-x)^2 x^3 d_* \varphi^3(0), \psi \right\rangle. \end{aligned}$$

Тогда второе уравнение системы (8) представляет собой уравнение

разветвления

$$L_{11}\xi\varepsilon + L_{30}\xi^3 + \dots = 0 \quad (13)$$

и дает асимптотику разветвляющихся решений

$$\nu(x) = \pm \sqrt{-\frac{L_{11}\varepsilon}{L_{30}}} \varphi + o(\sqrt{\varepsilon}), \quad \text{sign } \varepsilon = -\text{sign } L_{11}L_{30} \quad (14)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} L_{11} &= -\langle \phi', \psi \rangle = -\int_0^1 \phi' \psi dx, \\ L_{30} &= \left\langle -\frac{a_3 \ell^6}{D} \phi^3 + \frac{\theta \ell^3}{D} \phi'' \int_0^1 \phi'^2 dx + (8 - 20x) d_* \phi^3(0) - \right. \\ &\quad \left. - s_0^3 \left(\frac{1}{2} (1-x)^2 x^2 d_* \phi^3(0) - (1-x) c_* \phi'^3(0) - (1-x) x^3 d_* \phi^3(0) / 3 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left\langle (1-x)^2 c_* \phi'^3(0) / 2 + \frac{1}{6} (1-x)^2 x^3 d_* \phi^3(0), \psi \right\rangle \phi, \psi \right\rangle = \\ &= -\frac{a_3 \ell^6}{D} \int_0^1 \phi^3 \psi dx + \frac{\theta \ell^3}{D} \int_0^1 \phi'' \psi dx \int_0^1 \phi'^2 dx + (8 d_* \phi^3(0) + \\ &\quad + s_0^3 c_* \phi'^3(0) - \frac{1}{2} c_* \phi'^3(0)) \int_0^1 \psi dx + (-s_0^3 c_* \phi'^3(0) - 20 d_* \phi^3(0) + c_* \phi'^3(0)) \int_0^1 x \psi dx - \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} s_0^3 d_* \phi^3(0) + \frac{1}{2} c_* \phi'^3(0) \right) \int_0^1 x^2 \psi dx + \frac{7}{6} s_0^3 d_* \phi^3(0) \int_0^1 x^3 \psi dx - \\ &\quad - \frac{1}{2} s_0^3 d_* \phi^3(0) \int_0^1 x^4 \psi dx - \frac{1}{6} s_0^3 d_* \phi^3(0) \int_0^1 x^5 \psi dx = -\frac{a_3 \ell^6}{D} L_{30}^{(1)} + \frac{\theta \ell^3}{D} L_{30}^{(2)} + L_{30}^{(3)}. \end{aligned}$$

Коэффициенты L_{11} , $L_{30}^{(1)}$, $L_{30}^{(2)}$, $L_{30}^{(3)}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{3}{2} s + \sqrt{3} s e^{\frac{3}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} s\right), \\ L_{30}^{(1)} &= \frac{1523}{728s} - \frac{9595}{364s} e^s + \frac{279}{28s} e^{-s} - \frac{126}{7s} e^{2s} - \frac{2485}{364s} e^{-2s} + \frac{847}{728s} e^{-5s} + \\ &\quad + \frac{15\sqrt{3}}{14s} e^{\frac{s}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} s\right) - \frac{355\sqrt{3}}{364s} e^{-\frac{s}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} s\right) - \frac{22\sqrt{3}}{13s} e^{\frac{3}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} s\right) + \\ &\quad + \frac{6929\sqrt{3}}{2366s} e^{\frac{5}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} s\right) + \frac{9\sqrt{3}}{2} e^{\frac{5}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} s\right) + \frac{47\sqrt{3}}{104s} e^{-\frac{7}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} s\right), \\ L_{30}^{(2)} &= \frac{9}{4} s^3 e^{-2s} + 3\sqrt{3} s^2 e^{-\frac{s}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} s\right) \left(2 + \frac{1}{2} s\right) + \frac{9}{2} s^2 e^s \left(3 - \frac{1}{2} s\right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3\sqrt{3}s^2 e^{\frac{5}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) \left(1 - \frac{1}{2}s\right), \\
L_{30}^{(3)} = & d_* \left[\left(\frac{114\sqrt{3}}{s^2} + \frac{15\sqrt{3}}{4s} \right) e^{-\frac{7}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + \left(\frac{135}{s^2} - \frac{243}{2s} + 54 \right) e^s - \right. \\
& - \left(\frac{81}{4s^2} + \frac{135}{16s} \right) e^{-2s} + \left(\frac{180\sqrt{3}}{s^3} - \frac{315\sqrt{3}}{2s^2} - 9\sqrt{3} \right) e^{\frac{3}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) - \left(\frac{135}{2s^2} + 27 \right) e^{-5s} + \\
& + \frac{27\sqrt{3}}{s} e^{\frac{5}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) - \left(\frac{180\sqrt{3}}{s^3} + \frac{99\sqrt{3}}{s^2} - 9\sqrt{3} \right) e^{-\frac{3}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + \left(9 + \frac{72}{s^2} - \frac{180}{s^3} \right) e^{3s} + \\
& + \left(\frac{90}{s^3} - \frac{36}{s^2} - \frac{9}{2} \right) e^{-3s} + \left(- \frac{291\sqrt{3}}{2s^2} + \frac{447\sqrt{3}}{8s} - 81\sqrt{3} \right) e^{-\frac{s}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) + \frac{90}{s^3} + \frac{1395}{s^2} - \frac{9}{2} \Big] + \\
& + c_* \left[\frac{81}{16} s^4 e^{-2s} - \frac{27}{2} s^4 e^s - 27\sqrt{3} s^3 e^{\frac{3}{2}s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) - \frac{81}{2} s^3 \right].
\end{aligned}$$

Согласно (9) и (14)

$$w(x) = v(x) \pm \left(-\frac{L_{11}}{L_{30}} \varepsilon \right)^{3/2} \left(\frac{1}{2} (1-x)^2 c_* \varphi'^3(0) + \frac{1}{6} (1-x)^2 x^3 d_* \varphi^3(0) \right). \quad (15)$$

Для полученных асимптотических решений (15) с помощью программы Mathcad 2001i Professional построены бифуркационные диаграммы, показывающие зависимость максимального прогиба пластины от скорости набегающего потока.

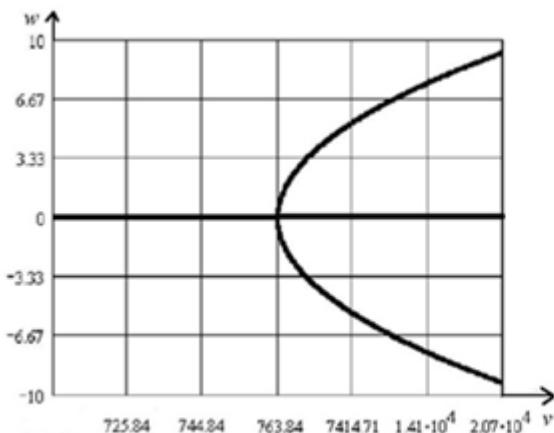


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма

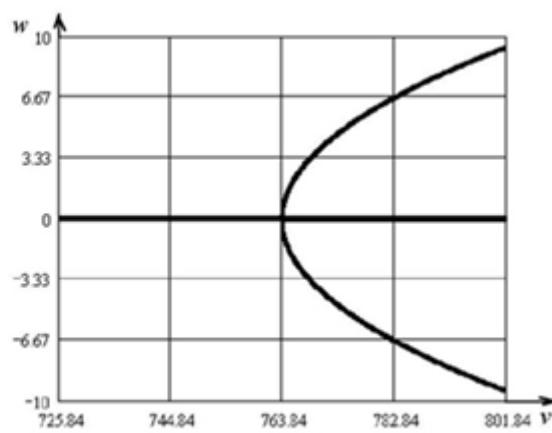


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма

На рис. 1 представлена бифуркационная диаграмма, соответствующая нелинейным граничным условиям (2), а на рис. 2 – бифуркационная диаграмма, отвечающая однородным граничным условиям из (3), соответствующим свободному и жестко защемленным концам. Таким образом, учет пропорциональности момента кубу угла поворота и

пропорциональности перерезывающей силы кубу прогиба в граничном условии уточняет бифуркационную диаграмму в сторону уменьшения максимального прогиба пластины. При этом одинаковые значения максимального прогиба при нелинейном упругом закреплении достигаются при больших значениях скорости. Диаграммы на рисунках 1 и 2 построены при $a_3 = 1 \text{ Н/м}^4$, $\theta = 1 \text{ Н/м}$, $\ell = 10 \text{ м}$, $\alpha_0 = 2$, $\rho_0 = 1 \text{ кг/м}^3$, $a = 330 \text{ м/с}$, $D = 10^8 \text{ Нм}^2$. Рассмотрим еще одну модель (толщина $h = 5 \text{ мм}$, $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\mu = 0.31$ (алюминий), $\ell = 1 \text{ м}$, $a = 330 \text{ м/с}$, $\alpha_0 = 2$, $a_3 = 1 \text{ Н/м}^4$, $\theta = 35 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$, $\rho_0 = 1.2 \text{ кг/м}^3$ (воздух), $D = 82.73 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2$). Для нее построены бифуркационные диаграммы, представленные на рисунках 3 и 4. На рис. 3 представлена бифуркационная диаграмма, соответствующая нелинейным граничным условиям (2), а на рис. 4 – бифуркационная диаграмма, отвечающая однородным граничным условиям из (3), соответствующим свободному и жестко защемленным концам.

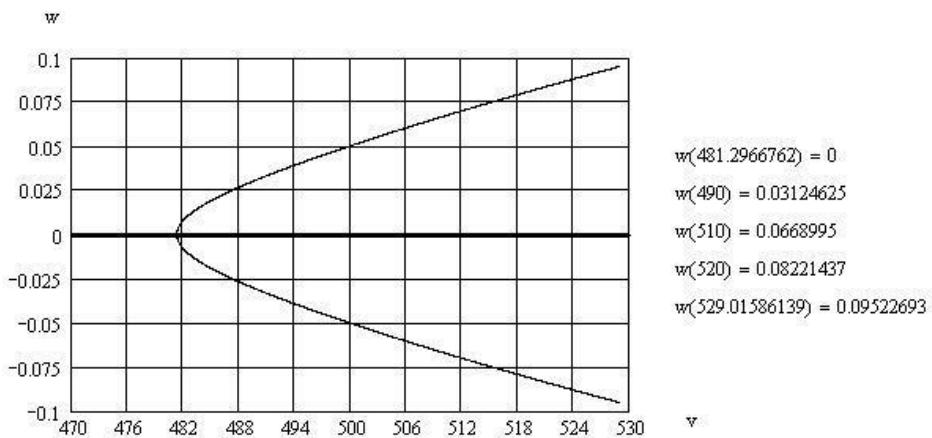


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма

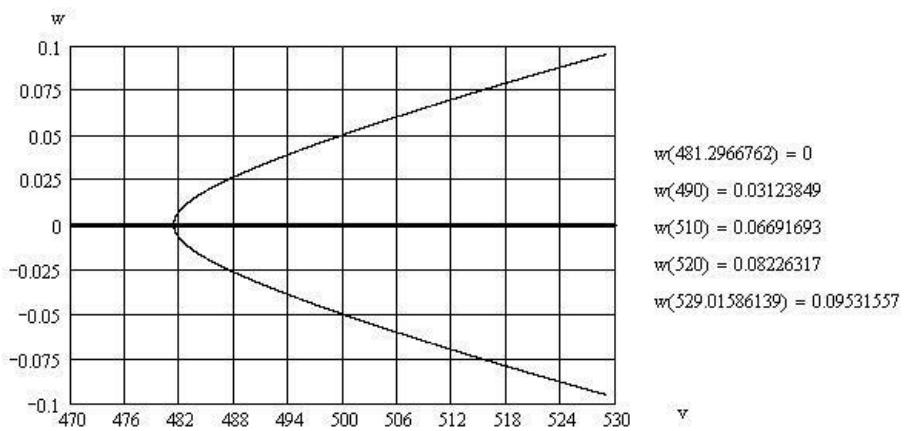


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма

На рисунке 5 представлены формы прогиба пластины для асимптотического решения.

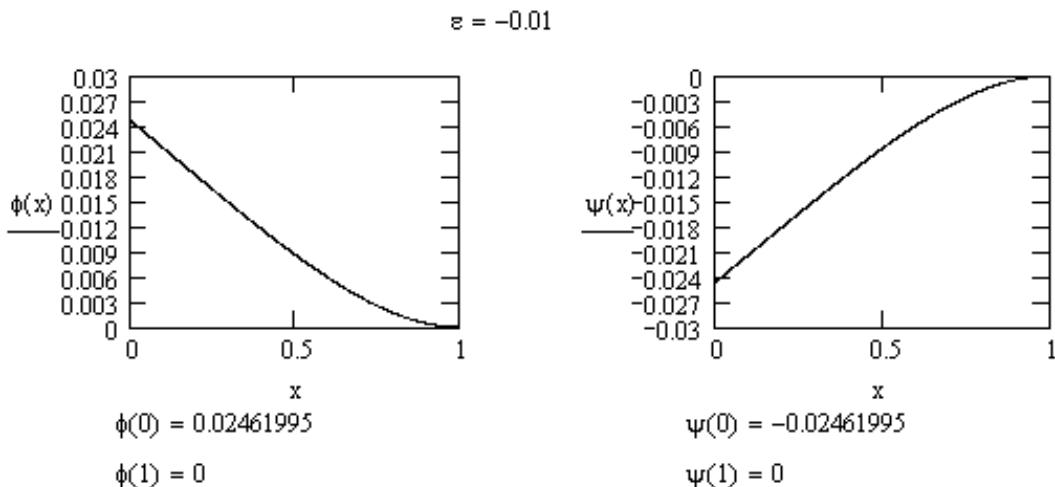


Рис. 5. Формы прогиба

Работа выполнена в рамках государственного задания №2014/232 Минобрнауки России и при поддержке гранта РФФИ № 15-01-08599.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алгазин С. Д., Кийко И. А. Численно-аналитические исследования флаттера пластины произвольной формы в плане // ПММ, 1997.– Т. 61, Вып. 1. – С. 171-174.
2. Алгазин С. Д., Кийко И. А. Численное исследование флаттера прямоугольной пластины // ЖПМТФ, 2003. – Т. 44, № 4. – С. 35–42.
3. Алгазин С. Д., Кийко И. А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука, 2006. – 246 с.
4. Кийко И. А., Кудрявцев Б. Ю. Нелинейные аэроупругие колебания прямоугольной пластины // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 2005. – №1. – С. 68-71.
5. Кийко И. А., Показеев В. В. Колебания и устойчивость вязкоупругой полосы в потоке газа // Докл. РАН, 2005. – Т. 401, № 3. – С. 342-348.
6. Кудрявцев Б. Ю. Флаттер упругой пластины, находящейся в потоке газа при умеренных сверхзвуковых скоростях // Изв. Тульск. гос. ун-та. Сер. мат. мех. информ., 2005. – Т. 11, Вып. 3. – С. 99-102.
7. Морозов В. И., Овчинников В. В. Нелинейные задачи аэроупругой устойчивости крыла при отрывном обтекании // Изв. РАН. МТТ, 2003. – № 6.– С. 158-170.
8. Минасян Д. М. Флаттер упругой пластинки при малых сверхзвуковых скоростях потока газа: Сравнительный анализ // Изв. АН Армении. Механика, 2001. – Т. 54, № 3. – С. 65–72.
9. Киреев С. В. Численный метод решения задачи о бифуркации пластины в сверхзвуковом потоке газа // Механика и процессы управления: сб. науч. тр. – Ульяновск : УлГТУ, 2004. – С. 30-36.
10. Киреев С. В. Численный эксперимент в задаче о статической неустойчивости пластины // Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроматематика в науке и технике. Труды международной конференции. –

Т. 4: Математические методы и модели в прикладных задачах науки и техники. – Ульяновск : УлГТУ, 2005. – С. 116-121.

11. Вельмисов П. А., Киреев С. В. Численный метод решения задачи о статической неустойчивости пластины в сверхзвуковом потоке газа // Труды Средневолжского математического общества, 2004. – № 1. – С. 166-170.

12. Вельмисов П. А., Киреев С. В. Численный метод решения задачи о бифуркации пластины в сверхзвуковом потоке газа // Вестник УлГТУ, 2004. – № 3. – С. 28-31.

13. Вельмисов П. А., Киреев С. В. Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии: монография. – Ульяновск : УлГТУ, 2011. – 200 с.

14. Velmisov P. A., Kireev S. V. Numerical solution of the bifurcation problem of the design elements subject to aerohydrodynamic effects // Romanian Society of Applied and Industrial Mathematics, ROMAI JOURNAL, 2006. – V. 2, № 2. – P. 195-203.

15. Velmisov P. A., Kireev S. V. Mathematical Modeling in Problems of Static Instability of Elastic Element of Constructions Upon Aero-Hydrodynamic Influence // Applications of Mathematics in Engineering and economics: Proceedings of the 32nd International Conference. – Sozopol, Bulgaria: Softtrade Sofia, 2007. – P. 50-65.

16. Velmisov P. A., Kireev S. V., Kuznetsov A. O. Stability and Bifurcation of a Plate in a Supersonic Gas Flow // Applications of Mathematics in Engineering: Proceedings of the XXIV Summer School. – Sozopol 98, Bulgaria: Heron Press, Sofia, 1999. – P. 41-46.

17. Velmisov P. A., Kireev S. V. Asymptotical solution of problem about plate stability in supersonic gas flow // Applications of Mathematics in Engineering: Proceedings of the XXVII Summer School. – Sozopol, Bulgaria: Heron Press, Sofia, 2002. – P. 188-196.

18. Вельмисов П. А., Киреев С. В. Математическое моделирование в задачах устойчивости упругих элементов конструкций при сверхзвуковом режиме обтекания // Автоматизация процессов управления, 2014. – № 1 (35). – С. 38-46.

19. Анкилов А. В., Вельмисов П.А., Казакова Ю. А. Устойчивость решений одной нелинейной начально-краевой задачи аэроупругости// Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – № 2 (31). – С. 120-126.

20. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Математическое моделирование динамики и устойчивости упругих элементов крыла // Вестник Самарского гос. техн. ун-та, 2009. – Т. 1, № 1. – С. 7-17.

21. Вельмисов П. А., Киреев С. В., Кузнецов А. А. Устойчивость пластины в сверхзвуковом потоке газа// Вестник УлГТУ, 1999. – № 1. – С. 44.

22. Анкилов А. В., Вельмисов П.А. Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии: монография. – Ульяновск : УлГТУ, 2009. – 219 с.

23. Найфэ А. Методы возмущений. – М: Мир, 1976. – 455с.

УДК 514.76

М. В. Глебова (г. Пенза)

ПРОДОЛЖЕНИЕ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ С ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЙ НА ИХ ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

В данной работе подробно описаны построения продолжений векторных полей, линейных дифференциальных форм с гладких многообразий в прямое произведение этих гладких многообразий. Далее подобными рассуждениями строятся естественные продолжения произвольных тензорных полей. Рассмотрены некоторые свойства построенных естественных продолжений векторных полей, линейных дифференциальных форм, тензорных полей.

Рассмотрим гладкие многообразия ${}^aM_{n_a}$ размерности n_a ($a=1,2$) класса C^∞ . Обозначим через $C^\infty({}^aM_{n_a})$ – алгебру гладких C^∞ -функций, заданных на ${}^aM_{n_a}$ ($a=1,2$). Стандартным образом строим прямое произведение ${}^1M_{n_1} \times {}^2M_{n_2}$ многообразий ${}^1M_{n_1}$ и ${}^2M_{n_2}$. Полученное многообразие имеет размерность n_1+n_2 . В дальнейшем это многообразие будем обозначать $M_n = {}^1M_{n_1} \times {}^2M_{n_2}$, где $n = n_1 + n_2$.

Рассмотрим естественные проекции ${}^a\pi: M_n \rightarrow {}^aM_{n_a}$, определенные условием: ${}^a\pi(p)={}^a p$, где $p=({}^1p, {}^2p) \in M_n$. Естественные проекции позволяют функции, заданные на ${}^aM_{n_a}$, поднять (продолжить) на M_n .

Пусть ${}^a f \in C^\infty({}^aM_{n_a})$.

Определение 1. Функция $({}^a f)_{(0)}$ на M_n , определенная условием $({}^a f)_{(0)}={}^a f \circ {}^a \pi$, называется естественным продолжением функции ${}^a f$ с ${}^aM_{n_a}$ на M_n ($a=1,2$).

Для любой точки $p \in M_n$ имеем:

$$({}^a f)_{(0)}(p) = ({}^a f \circ {}^a \pi)(p) = {}^a f({}^a \pi(p)) = {}^a f({}^a p).$$

Для упрощения записи иногда выражение $({}^a f)_{(0)}$ будем обозначать символом ${}^a f_{(0)}$.

Предложение 1. Для любых функций имеют место следующие равенства:

$$1) (^a f + ^a g)_{(0)} = ^a f_{(0)} + ^a g_{(0)},$$

$$2) (\lambda ^a f)_{(0)} = \lambda ^a f_{(0)},$$

$$3) (^a f ^a g)_{(0)} = ^a f_{(0)} ^a g_{(0)}.$$

Доказательство. (1) Для любой точки $p = (^1 p, ^2 p) \in M_n$ по определению 1 имеем:

$$\begin{aligned} (^a f + ^a g)_{(0)}(p) &= ((^a f + ^a g) \circ ^a \pi)(p) = (^a f + ^a g)(^a \pi(p)) = \\ &= ^a f(^a \pi(p)) + ^a g(^a \pi(p)) = ^a f_{(0)}(p) + ^a g_{(0)}(p). \end{aligned}$$

Доказательство равенств (2) и (3) – аналогично.

Введенное понятие продолжения функций на M_n можно обобщить на отображение многообразий ${}^a M_{n_a}$ в некоторое многообразие ${}^a \tilde{M}_{n_a}$.

Пусть ${}^a F : {}^a M_{n_a} \rightarrow {}^a \tilde{M}_{n_a}$.

Определение 2. Естественным продолжением отображения ${}^a F$ на ${}^a \tilde{M}_{n_a}$ называется отображение $({}^a F)_{(0)} : M_n \rightarrow {}^a \tilde{M}_{n_a}$, определенное условием $({}^a F)_{(0)} = {}^a F \circ {}^a \pi$.

Для любой точки $p \in M_n$ имеем:

$$({}^a F)_{(0)}(p) = ({}^a F \circ {}^a \pi)(p) = {}^a F({}^a \pi(p)) = {}^a F({}^a p) \in {}^a \tilde{M}_{n_a}.$$

В частности, если ${}^a \tilde{M}_{n_a} = R$, то вернемся к продолжениям функций на прямое произведение.

Свойства, справедливые для продолжений функций, справедливы и для продолжений отображений.

Теперь перейдем к построению естественного продолжения векторных полей сомножителей ${}^a M_{n_a}$ ($a = 1, 2$) на прямое произведение этих многообразий. Прежде всего докажем следующее предложение.

Предложение 2. Если X – векторное поле на M_n такое, что $X {}^a f_{(0)} = 0$ для любых функций ${}^a f \in C^\infty({}^a M_{n_a})$, то $X = 0$.

Доказательство. Пусть p – произвольная точка на M_n , $({}^1 U \times {}^2 U, ({}^1 x^i)_{(0)}, ({}^2 x^{\bar{\alpha}})_{(0)})$, $i = 1, \dots, n_1$, $\bar{\alpha} = 1, \dots, n_2$ – координатная окрестность, содержащая точку p . Тогда каждое векторное поле X , определенное в окрестности точки p , можно разложить по векторным полям $\frac{\partial}{\partial ({}^1 x^i)_{(0)}}$, $\frac{\partial}{\partial ({}^2 x^{\bar{\alpha}})_{(0)}}$:

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial({}^1x^i)_{(0)}} + \xi^{n_1+\bar{\alpha}} \frac{\partial}{\partial({}^2x^{\bar{\alpha}})_{(0)}}.$$

В силу произвольности функций 1f и 2f условие $X^a f_{(0)} = 0$ выполняется и для функций ${}^1x^i$, ${}^2x^{\bar{\alpha}}$.

$$\begin{aligned} X({}^1x^i)_{(0)}(p) &= \xi^j(p) \frac{\partial({}^1x^i)_{(0)}}{\partial({}^1x^j)_{(0)}}(p) + \xi^{n_1+\bar{\beta}}(p) \frac{\partial({}^1x^i)_{(0)}}{\partial({}^2x^{\bar{\beta}})_{(0)}}(p) = \\ &= \xi^j(p) \delta_j^i = \xi^i(p). \end{aligned}$$

Следовательно, $\xi^i(p) = 0$.

Аналогично находим, что

$$\begin{aligned} X({}^2x^{\bar{\alpha}})_{(0)}(p) &= \xi^j(p) \frac{\partial({}^2x^{\bar{\alpha}})_{(0)}}{\partial({}^1x^j)_{(0)}}(p) + \xi^{n_1+\bar{\beta}}(p) \frac{\partial({}^2x^{\bar{\alpha}})_{(0)}}{\partial({}^2x^{\bar{\beta}})_{(0)}}(p) = \\ &= \xi^{n_1+\bar{\beta}}(p) \delta_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} = \xi^{n_1+\bar{\alpha}}(p) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, векторное поле X , удовлетворяющее условию $X^a f_{(0)} = 0$, для любых функций ${}^a f \in C^\infty({}^a M_{n_a})$, является нулевым.
Доказано.

Предложение 3. 1. Существует единственное векторное поле X на M_n удовлетворяющее условиям:

$$X^1 f_{(0)} = ({}^1X^1 f)_{(0)}, \quad X^2 f_{(0)} = 0 \quad (1)$$

для любых функций ${}^a f \in C^\infty({}^a M_{n_a})$ ($a = 1, 2$).

2. Существует единственное векторное поле X на M_n удовлетворяющее условиям:

$$X^2 f_{(0)} = ({}^2X^2 f)_{(0)}, \quad X^1 f_{(0)} = 0$$

для любых функций ${}^a f \in C^\infty({}^a M_{n_a})$ ($a = 1, 2$).

Доказательство. Приведем подробное доказательство только первого предложения, так как доказательство второго предложения аналогичное.

Существование. Пусть 1X – произвольное векторное поле на ${}^1M_{n_1}$, ${}^1\xi^i$ – координаты этого векторного поля 1X на 1U , где $({}^1U, {}^1x^i)$ – карта на ${}^1M_{n_1}$. В области каждой карты $({}^1U \times {}^2U, ({}^1x^i)_{(0)}, ({}^2x^{\bar{\alpha}})_{(0)})$ ($i = 1, \dots, n_1$, $\bar{\alpha} = 1, \dots, n_2$) на M_n определим функции ξ^A ($A = 1, \dots, n_1 + n_2$) следующим образом:

$$\xi^A = \begin{cases} ({^1}\xi^i)_{(0)}, & \text{если } A = 1, \dots, n_1, \\ 0, & \text{если } A = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2. \end{cases} \quad (2)$$

Аналогичные функции

$$\xi^{A'} = \begin{cases} ({^1}\xi^{i''})_{(0)}, & \text{если } A' = 1, \dots, n_1, \\ 0, & \text{если } A' = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2, \end{cases}$$

получим в другой карте $(^1V \times ^2V, (^1x^{i''})_{(0)}, (^2x^{\bar{\alpha}'})_{(0)})$, где ${^1}\xi^{i''}$ – координаты векторного поля 1X на 1V .

Покажем, что функции ξ^A при переходе к другой карте преобразуются по следующему закону:

$$\xi^{A'} = \xi^B \frac{\partial x^{A'}}{\partial x^B}. \quad (3)$$

Если $A' \in \{1, \dots, n_1\}$ (положим $A' = i'$), то правая часть соотношения (3) примет вид

$$\xi^B \frac{\partial x^{A'}}{\partial x^B} = \xi^B \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^B} = \xi^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} + \xi^{n_1 + \bar{\beta}} \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{n_1 + \bar{\beta}}}.$$

Так как $\xi^{n_1 + \bar{\beta}} = 0$ на основании (2), то

$$\xi^B \frac{\partial x^{A'}}{\partial x^B} = \xi^j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = (^1\xi^j)_{(0)} \frac{\partial (^1x^{i''})_{(0)}}{\partial (^1x^j)_{(0)}} = (^1\xi^j)_{(0)} \left(\frac{\partial (^1x^{i''})}{\partial (^1x^j)} \right)_{(0)} = \left({^1}\xi^j \frac{\partial (^1x^{i''})}{\partial (^1x^j)} \right)_{(0)}.$$

Так как 1X – векторное поле на $^1M_{n_1}$, то имеют место равенства:

$${^1}\xi^{i'} = {^1}\xi^j \frac{\partial (^1x^{i'})}{\partial (^1x^j)}.$$

Тогда

$$\left({^1}\xi^j \frac{\partial (^1x^{i'})}{\partial (^1x^j)} \right)_{(0)} = (^1\xi^{i'})_{(0)} = \xi^{i'} = \xi^{A'}.$$

Если $A' \in \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}$, то $\xi^{A'} = 0$. Поэтому

$$\xi^B \frac{\partial x^{A'}}{\partial x^B} = \xi^j \frac{\partial x^{A'}}{\partial x^j} = 0 = \xi^{A'},$$

так как $\frac{\partial x^{A'}}{\partial x^j} = 0$.

Таким образом, показали справедливость соотношения (3).

Следовательно, задание функции вида (2) в каждой карте определяет на M_n векторное поле X , ограничение которого на координатную окрестность $^1U \times ^2U$ локально имеет вид

$$X = ({ }^1\xi^i)_{(0)} \frac{\partial}{\partial({ }^1x^i)_{(0)}}.$$

Покажем, что построенное векторное поле удовлетворяет условиям теоремы.

Для любых ${}^a f \in C^\infty({}^a M_{n_a})$ ($a=1,2$) имеем

$$\begin{aligned} X({ }^1 f)_{(0)} &= ({ }^1\xi^i)_{(0)} \frac{\partial({ }^1 f)_{(0)}}{\partial({ }^1 x^i)_{(0)}} = \left({ }^1\xi^i \frac{\partial{ }^1 f}{\partial{ }^1 x^i} \right)_{(0)} = ({ }^1 X^1 f)_{(0)}, \\ X({ }^2 f)_{(0)} &= ({ }^1\xi^i)_{(0)} \frac{\partial({ }^2 f)_{(0)}}{\partial({ }^1 x^i)_{(0)}} = 0. \end{aligned}$$

Единственность. Предположим, что существует другое векторное поле Y на M_n , удовлетворяющее условиям (1):

$$Y^1 f_{(0)} = ({ }^1 Y^1 f)_{(0)}, \quad Y^2 f_{(0)} = 0.$$

Тогда

$$X^1 f_{(0)} - Y^1 f_{(0)} = 0, \quad X^2 f_{(0)} - Y^2 f_{(0)} = 0.$$

Отсюда заключаем, что

$$(X - Y)^1 f_{(0)} = 0, \quad (X - Y)^2 f_{(0)} = 0.$$

Следовательно, на основании предложения 2 получили, что векторное поле $X - Y$ является нулевым. Значит, $X = Y$. Доказано.

Доказанное предложение позволяет ввести следующее определение.

Определение 3. Для каждого векторного поля ${}^a X$ единственное векторное поле ${}^a X^{(0)}$ на M_n , удовлетворяющее условиям:

$${}^a X^{(0)}({ }^b f)_{(0)} = \begin{cases} ({ }^a X {}^a f)_{(0)}, & \text{если } a = b, \\ 0, & \text{если } a \neq b. \end{cases}$$

для любых функций ${}^b f$ ($b=1,2$), называется естественным продолжением векторного поля ${}^a X$ с многообразия ${}^a M_{n_a}$ на многообразие $M_n = {}^1 M_{n_1} \times {}^2 M_{n_2}$.

Предложение 4. Имеют место тождества:

- 1) $({}^a X + {}^a Y)^{(0)} = {}^a X^{(0)} + {}^a Y^{(0)}$,
- 2) $[{}^a X, {}^a Y]^{(0)} = [{}^a X^{(0)}, {}^a Y^{(0)}]$.

Доказательство первого тождества легко получить прямыми вычислениями. Подробнее остановимся на доказательстве второго тождества.

Для любой функции ${}^b f \in C^\infty({}^b M_{n_b})$ имеем: если $a=b$, то

$$\begin{aligned} [{}^a X, {}^a Y]^{(0)} a f_{(0)} &= {}^a X^{(0)} ({}^a Y^{(0)} a f_{(0)}) - {}^a Y^{(0)} ({}^a X^{(0)} a f_{(0)}) = \\ &= {}^a X^{(0)} ({}^a Y {}^a f)_{(0)} - {}^a Y^{(0)} ({}^a X {}^a f)_{(0)} = ({}^a X ({}^a Y {}^a f))_{(0)} - ({}^a Y ({}^a X {}^a f))_{(0)} = \\ &= ({}^a X ({}^a Y {}^a f) - ({}^a Y ({}^a X {}^a f)))_{(0)} = ([{}^a X, {}^a Y] a f)_{(0)} = [{}^a X, {}^a Y]^{(0)} a f_{(0)}, \end{aligned}$$

если $a \neq b$, то получаем так же верное равенство $(0=0)$. Доказано.

Теперь перейдем к построению естественного продолжения линейных дифференциальных форм сомножителей ${}^a M_{n_a}$ ($a=1,2$) на прямое произведение этих многообразий. Для этого сначала докажем предложение.

Предложение 5. Если ω – линейная форма на M_n такая, что

$$\omega({}^1 X^{(0)}) = 0, \omega({}^2 X^{(0)}) = 0 \quad (4)$$

для любых ${}^a X$ ($a=1,2$), то $\omega = 0$.

Доказательство. Пусть p – произвольная точка на M_n , $({}^1 U \times {}^2 U, ({}^1 x^i)_{(0)}, ({}^2 x^{\bar{\alpha}})_{(0)})$ – координатная окрестность, содержащая точку p . Тогда каждую форму ω в окрестности точки p можно разложить по координатным формам $d({}^1 x^i)_{(0)}, d({}^2 x^{\bar{\alpha}})_{(0)}$:

$$\omega = \omega_i d({}^1 x^i)_{(0)} + \omega_{n_1+\bar{\alpha}} d({}^2 x^{\bar{\alpha}})_{(0)}.$$

В силу произвольности векторных полей, условие (4) выполняется и для базисных векторных полей. Получаем, что

$$\begin{aligned} \omega(({}^1 \partial_j)^{(0)})(p) &= \omega_i(p) d({}^1 x^i)_{(0)} (({}^1 \partial_j)^{(0)}) + \omega_{n_1+\bar{\alpha}}(p) d({}^2 x^{\bar{\alpha}})_{(0)} (({}^1 \partial_j)^{(0)}) = \\ &= \omega_i(p) \delta_j^i = \omega_j(p). \end{aligned}$$

Следовательно, $\omega_j(p) = 0$.

Аналогично находим, что

$$\begin{aligned} \omega(({}^2 \partial_{\bar{\beta}})^{(0)})(p) &= \omega_i(p) d({}^1 x^i)_{(0)} (({}^2 \partial_{\bar{\beta}})^{(0)}) + \omega_{n_1+\bar{\alpha}}(p) d({}^2 x^{\bar{\alpha}})_{(0)} (({}^2 \partial_{\bar{\beta}})^{(0)}) = \\ &= \omega_{n_1+\bar{\alpha}}(p) \delta_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} = \omega_{n_1+\bar{\beta}}(p) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, линейная дифференциальная форма ω , удовлетворяющая условиям (4) – нулевая.

Данное предложение используем при доказательстве следующего предложения.

Предложение 6. 1. Существует единственная линейная дифференциальная форма ω на $M_n = {}^1M_{n_1} \times {}^2M_{n_2}$, удовлетворяющая условиям:

$$\omega({}^1X^{(0)}) = ({}^1\omega({}^1X))_{(0)}, \quad \omega({}^2X^{(0)}) = 0 \quad (5)$$

для любых ${}^aX \in F_0^1({}^aM_{n_a})$ ($a=1,2$).

2. Существует единственная линейная дифференциальная форма ω на $M_n = {}^1M_{n_1} \times {}^2M_{n_2}$, удовлетворяющая условиям:

$$\omega({}^2X^{(0)}) = ({}^2\omega({}^2X))_{(0)}, \quad \omega({}^1X^{(0)}) = 0$$

для любых ${}^aX \in F_0^1({}^aM_{n_a})$ ($a=1,2$).

Доказательство. Приведем подробное доказательство только первого предложения, так как доказательство второго предложения аналогичное.

Существование. Пусть ${}^1\omega$ – произвольная линейная форма на ${}^1M_{n_1}$, ${}^1\omega_i$ – координаты ${}^1\omega$ на 1U , где $({}^1U, {}^1x^i)$ – карта на ${}^1M_{n_1}$. В области каждой карты $({}^1U \times {}^2U, ({}^1x^i)_{(0)}, ({}^2x^{\bar{\alpha}})_{(0)})$ на M_n определим функции ω_A ($A = \overline{1, n_1 + n_2}$) следующим образом:

$$\omega_A = \begin{cases} ({}^1\omega_i)_{(0)}, & A = \overline{1, n_1}, \\ 0, & A = \overline{n_1 + 1, n}. \end{cases} \quad (6)$$

Рассмотрим другую карту $({}^1V \times {}^2V, ({}^1x^{i'})_{(0)}, ({}^2x^{\bar{\alpha}'})_{(0)})$. Тогда в ней по формуле (6) определены функции

$$\omega_{A'} = \begin{cases} ({}^1\omega_{i'})_{(0)}, & A = \overline{1, n_1}, \\ 0, & A = \overline{n_1 + 1, n}. \end{cases}$$

Покажем, что функции ω_A при переходе к другой карте преобразуются по закону:

$$\omega_{A'} = \omega_B \frac{\partial x^B}{\partial x^{A'}}. \quad (7)$$

Если $A' = \overline{1, n_1} = i'$, то из (6) получаем

$$\begin{aligned} \omega_B \frac{\partial x^B}{\partial x^{i'}} &= \omega_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} + \omega_{n_1 + \beta} \frac{\partial x^{n_1 + \beta}}{\partial x^{i'}} = \omega_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} = \\ &= ({}^1\omega_j)_{(0)} \frac{\partial ({}^1x^j)_{(0)}}{\partial ({}^1x_{i'})_{(0)}} = ({}^1\omega_j)_{(0)} \left(\frac{\partial {}^1x^j}{\partial {}^1x^{i'}} \right)_{(0)} = ({}^1\omega_j)_{(0)} \left(\frac{\partial {}^1x^j}{\partial {}^1x^{i'}} \right)_{(0)}. \end{aligned}$$

Так как ${}^1\omega$ – форма на 1M , то имеют место равенства: ${}^1\omega_{i'} = {}^1\omega_j \frac{\partial {}^1x^j}{\partial {}^1x^{i'}}$.

Поэтому, $({}^1\omega_j \frac{\partial {}^1x^j}{\partial {}^1x^{i'}})_{(0)} = ({}^1\omega_{i'})_{(0)} = \omega_{i'} = \omega_{A'}$.

Значит, соотношение (7) верно для $A' = \overline{1, n_1}$.

Если $A' = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}$ (положим $A' = n_1 + \bar{\alpha}$), то $\omega_{A'} = 0$.

Рассмотрим правую часть соотношения (7)

$$\omega_B \frac{\partial x^B}{\partial x^{A'}} = \omega_B \frac{\partial x^B}{\partial x^{n_1 + \bar{\alpha}}} = \omega_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{n_1 + \bar{\alpha}}} + \omega_{n_1 + \bar{\beta}} \frac{\partial x^{n_1 + \bar{\beta}}}{\partial x^{n_1 + \bar{\alpha}}}$$

Так как $\frac{\partial x^j}{\partial x^{n_1}} = 0$ и на основании (6) $\omega_{n_1 + \bar{\beta}} = 0$, то $\omega_B \frac{\partial x^B}{\partial x^{A'}} = 0$.

Следовательно, соотношение (7) верно при $A' = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}$.

Таким образом, показали справедливость равенства (7) при любых значениях индексов.

Следовательно, функции вида (6) задают на M_n дифференциальную форму ω , ограничение которой на координатную окрестность ${}^1U \times {}^2U$ локально имеет вид: $\omega = ({}^1\xi_i)_{(0)} d({}^1x^i)_{(0)}$.

Форма ω , заданная в каждой карте функциями вида (6), удовлетворяет условиям теоремы:

$$\begin{aligned}\omega({}^1X)^{(0)} &= ({}^1\omega_i)_{(0)} d({}^1x^i)_{(0)} ({}^1X)^{(0)} = ({}^1\omega_i d {}^1x^i)_{(0)} = ({}^1\omega {}^1X)_{(0)}, \\ \omega({}^2X)^{(0)} &= ({}^1\omega_i)_{(0)} d({}^1x^i)_{(0)} ({}^2X)^{(0)} = 0.\end{aligned}$$

Единственность. Предположим, что существует другая форма ϖ на M_n , удовлетворяющая условиям (5). Тогда

$$\omega({}^1X)^{(0)} - \varpi({}^1X)^{(0)} = 0, \quad \omega({}^2X)^{(0)} - \varpi({}^2X)^{(0)} = 0.$$

Отсюда находим, что

$$(\omega - \varpi)({}^1X)^{(0)} = 0, \quad (\omega - \varpi)({}^2X)^{(0)} = 0.$$

Следовательно, на основании предложения 1 форма $\omega - \varpi$ является нулевой. Значит, $\omega = \varpi$.

Доказательство предложения (2) аналогичное. Доказано.

Доказанная теорема позволяет ввести следующее определение.

Определение 4. Дифференциальная форма $({}^a\omega)_{(0)}$ на M_n , удовлетворяющая условиям:

$$({}^a\omega)_{(0)}({}^bX)^{(0)} = \begin{cases} ({}^a\omega({}^aX))_{(0)}, & a = b, \\ 0, & a \neq b \end{cases}$$

для любых ${}^b X \in \mathbf{F}_0^1({}^b M_{n_b})$ ($b=1,2$), называется естественным продолжением формы ${}^a \omega$ с многообразия ${}^a M_{n_a}$ на многообразие M_n .

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:
 $({}^1 \partial_i)^{(0)} = \partial_i$, $({}^2 \partial_{\alpha})^{(0)} = \partial_{\alpha}$, $({}^1 \omega_i)_{(0)} = \omega_i$, $({}^2 \omega_{\alpha})_{(0)} = \omega_{\alpha}$.

Прямые вычисления позволяют доказать предложение.

Предложение 7. Имеют место тождества:

$$(1) \quad ({}^a \omega + {}^a \varpi)_{(0)} = ({}^a \omega)_{(0)} + ({}^a \varpi)_{(0)},$$

$$(2) \quad (\lambda {}^a \omega)_{(0)} = \lambda ({}^a \omega)_{(0)}, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

Доказательство. (1) Для любого векторного поля ${}^a X^{(0)} \in \mathbf{F}_0^1(M_n)$ по определению имеем:

$$\begin{aligned} ({}^a \omega + {}^a \varpi)_{(0)} ({}^a X^{(0)}) &= (({}^a \omega + {}^a \varpi) ({}^a X))_{(0)} = \\ &= ({}^a \omega ({}^a X) + {}^a \varpi ({}^a X))_{(0)} = ({}^a \omega ({}^a X))_{(0)} + ({}^a \varpi ({}^a X))_{(0)} = \\ &= {}^a \omega_{(0)} ({}^a X^{(0)}) + {}^a \varpi_{(0)} ({}^a X^{(0)}) = ({}^a \omega_{(0)} + {}^a \varpi_{(0)}) ({}^a X^{(0)}). \end{aligned}$$

Доказательство (2) – аналогичное. Доказано.

Подобными рассуждениями можно построить естественные продолжения произвольных тензорных полей.

Пусть ${}^a T$ – тензорное поле типа (r,s) на ${}^a M_{n_a}$, T – тензорное поле типа (r,s) на M_n .

Предложение 8. Если T – тензорное поле типа (r,s) на ${}^1 M_{n_1} \times {}^2 M_{n_2}$, удовлетворяющее условиям:

$$T({}^{a_1} X_1^{(0)}, {}^{a_2} X_1^{(0)}, \dots, {}^{a_r} X_r^{(0)}, {}^{a_1} \omega_{1(0)}, \dots, {}^{a_s} \omega_{s(0)}) = 0 \quad (a_{i_k} = 1,2)$$

на всевозможных векторных полях ${}^a X$ и линейных дифференциальных формах ${}^a \omega$, заданных на ${}^a M_{n_a}$ ($a=1,2$), то $T = 0$.

Доказательство аналогично доказательству предложений 2 и 5.

Предложение 9. Существует единственное тензорное поле T типа (r,s) на ${}^1 M_{n_1} \times {}^2 M_{n_2}$, удовлетворяющее условиям: для любых ${}^a X \in \mathbf{F}_0^1({}^a M_{n_a})$ и ${}^b \omega \in \mathbf{F}_1^0({}^b M_{n_b})$ ($a,b=1,2$), если $a_i = b_j = a$, то

$$T({}^{a_1} X_1^{(0)}, \dots, {}^{a_r} X_r^{(0)}, {}^{b_1} \omega_{1(0)}, \dots, {}^{b_s} \omega_{s(0)}) = ({}^a T({}^a X_1, \dots, {}^a X_r, {}^a \omega_1, \dots, {}^a \omega_s))_{(0)},$$

в остальных случаях значение тензорного поля T равно нулю.

Доказательство аналогично доказательству предложений 3 и 6.

Предложение 9 позволяет ввести следующее определение.

Определение 5. Тензорное поле ${}^aT^{(0)}$ на ${}^1M_{n_1} \times {}^2M_{n_2}$, удовлетворяющее условиям предложения 9, называется естественным продолжением тензорного поля aT с многообразия ${}^aM_{n_a}$ ($a=1,2$) на многообразие ${}^1M_{n_1} \times {}^2M_{n_2}$.

Прямыми вычислениями, аналогично предложениям 4 и 7, можно доказать следующее предложение.

Предложение 10. Имеют место тождества:

- 1) $({}^aT + {}^a\tilde{T})^{(0)} = {}^aT^{(0)} + {}^a\tilde{T}^{(0)}$,
- 2) $L_{({}^aX)^{(0)}}({}^aY)^{(0)} = (L_a X {}^aY)^{(0)}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Базылев В. Т. Геометрия дифференцируемых многообразий. – М.: Высшая школа, 1989. – 223 с.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, Т. I. – М.: Наука, 1981. – 344 с.

K. P. Джукашев, A. M. Шелехов (г. Тверь)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЭЛАСТИЧНЫХ ТРИ-ТКАНЕЙ С ТЕНЗОРОМ КРУЧЕНИЯ РАНГА 1.

Рассматриваются многомерные эластичные три-ткани E , у которых производная алгебра от алгебры, определяемой тензором кручения, является одномерной. Доказано их существование, найдены структурные уравнения таких тканей и уравнения в локальных координатах для одного класса таких тканей.

Введение.

K -ткань, образованная k гладкими слоениями на гладком многообразии, – традиционный объект изучения в дифференциальной геометрии. Тканям посвящено много работ, в которых рассматриваются их свойства, проводится классификация и т.п. В. Бляшке первым выделил как объект специального рассмотрения инцидентностные свойства тканей, то есть начал рассматривать ткани с точностью до локальных диффеоморфизмов. Этой проблематикой занимались его ученики и коллеги, в частности, С. Черн, которому принадлежит первое изложение дифференциально-топологической теории многомерных три-тканей, образованных тремя слоениями λ_α , $\alpha=1,2,3$, размерности r на $2r$ -мерном многообразии X . Эта теория получила развитие в трудах М.А. Акивиса и его учеников. Детальное изложение основных результатов по теории три-тканей впервые было дано в [1], там же имеется обширная библиография. В книге [2] этих же авторов добавлены новые результаты, полученные в течение последних двух десятилетий.

Наиболее обширное и важное приложение теории тканей – изотопически инвариантная теория квазигрупп и луп. Связь между этими объектами состоит в том, что каждому тождеству в квазигруппе или лупе отвечает замыкание конфигураций определенного типа на три-ткани. Основные классы тканей связаны с простейшими тождествами – коммутативностью и различными вариантами ассоциативности. Эти классы детально описаны, и для них найдены адекватные тензорные характеристики. Исключение составляют так называемые эластичные ткани или ткани E , которым соответствует тождество эластичности $x(yx)=(xy)x$. Этим тканям посвящены всего две работы [3] и [4]. В первой доказано, что ткани E образуют собственный подкласс средних тканей Бола и проведена полная классификация шестимерных тканей E . В [4] доказано, что соотношения, определяемые тождеством эластичности в пятой дифференциальной окрестности, вытекают из соотношений,

связывающих тензоры четвертой дифференциальной окрестности этой ткани.

В настоящей статье методом Картана-Лаптева исследуются ткани E , у которых производная алгебра A' от алгебры A , определяемой тензором кручения ткани E , является одномерной. Доказывается, что у таких тканей тензор кривизны также имеет ранг 1, причем одномерная производная алгебра B' от определяемой им тернарной алгебры B задана на том же пространстве, что и алгебра A' . Найдены структурные уравнения исследуемого класса тканей E в некотором специальном адаптированном репере.

1. Пусть три-ткань W образована тремя слоениями λ_a , $a=1,2,3$, размерности r на $2r$ -мерном многообразии X . Согласно [1], зададим слоения λ_a , $a=1,2,3$, вполне интегрируемыми системами форм Пфаффа $\omega_1^i = 0$, $\omega_2^i = 0$ и $\omega_1^i + \omega_2^i = 0$, $i=1,\dots,r$, где формы ω_1^i и ω_2^i образуют кобазис на многообразии X . Тогда структурные уравнения три-тканей имеют вид [1]:

$$d\omega_1^i = \omega_1^j \wedge \omega_j^i + a_{jk}^i \omega_1^j \wedge \omega_1^k, \quad (1)$$

$$d\omega_2^i = \omega_2^j \wedge \omega_j^i - a_{jk}^i \omega_2^j \wedge \omega_2^k, \quad (2)$$

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + b_{jkl}^i \omega_1^k \wedge \omega_2^l \quad (3)$$

Внешнее дифференцирование структурных уравнений приводит к дифференциальным уравнениям на тензоры кручения и кривизны $a = (a_{jk}^i)$ и $b = (b_{jkl}^i)$:

$$\nabla a_{jk}^i = b_{[j|l|k]}^i \omega_1^l + b_{[j|k]l}^i \omega_2^l, \quad (4)$$

$$\nabla b_{jkl}^i = c_{1 jklm}^i \omega_1^m + c_{2 jklm}^i \omega_2^m, \quad (5)$$

причем тензоры a , b , c и т.д. связаны некоторыми соотношениями, а ∇ – дифференциальный оператор, определяемый формулой [1]:

$$\nabla a_{jk}^i \stackrel{\text{def}}{=} da_{jk}^i + a_{jk}^m \omega_m^i - a_{mk}^i \omega_j^m - a_{jm}^i a_k^m.$$

Эластичной три-тканью или тканью называется три-ткань, в координатных лупах которой выполняется тождество эластичности:

$$(xy)x = x(yx), \quad (6)$$

где xy – операция в координатной лупе ткани [1].

В [2] доказано, что ткани E образуют подкласс средних тканей Бола и их основные тензоры связаны соотношением

$$b(x, y, [xy]) = 0. \quad (7)$$

Так как ткани являются средними тканями Бола, то их тензоры связаны следующими соотношениями [1]:

$$b(x, y, z) = -b(x, z, y), \quad (8)$$

$$b(x, y, z) + b(y, z, x) + b(z, x, y) = 2([xy]z + [yz]x + [zx]y), \quad (9)$$

$$b(x, y, [zt]) - b(y, x, [zt]) + b([xy], z, t) = [zb(y, z, t) - [yb(x, z, t)]], \quad (10)$$

$$\underset{1}{c}(x, y, z, t) - \underset{2}{c}(x, y, z, t) = -b(x, [zt], y) + b(x, [yz], t) + b(x, [yt], z). \quad (11)$$

Для тканей Бола уравнения (4) и (5) примут следующий вид [1]:

$$\nabla a_{jk}^i = -b_{[jk]l}^i (\omega_1^l - \omega_2^l), \quad (12)$$

$$\nabla b_{jkl}^i = c_{jklm}^i (\omega_1^m - \omega_2^m), \quad (13)$$

где обозначено $c = -\underset{1}{c} = \underset{2}{c}$.

Будем записывать умножение в алгебре A , определяемой тензором кручения, в виде $z=[xy]$. Тогда равенство (7) можно переписать в виде: $b(x,y,z)=0$, где $z=[xy]$ – элемент производной алгебры A' . Ввиду этого имеет смысл классифицировать эластичные три-ткани по размерности алгебры A' .

В данной работе мы изучим эластичные три-ткани, для которых $\dim A' = 1$. Будем говорить в этом случае, что тензор кручения имеет ранг 1.

Выберем семейство адаптированных реперов ткани таким образом, чтобы пространство A' определялось базисным вектором e_1 , тогда

$$a_{jk}^{\hat{i}} = 0, \text{ где } \hat{i} \neq 1. \quad (14)$$

2. Рассмотрим соотношение (7). Перепишем его в координатной форме:

$$b_{jkp}^i a_{lm}^p + b_{jmp}^i a_{lk}^p + b_{lkp}^i a_{jm}^p + b_{lmp}^i a_{jk}^p = 0. \quad (15)$$

Ввиду (14) данное равенство запишется в виде:

$$b_{jk1}^i a_{lm}^1 + b_{jm1}^i a_{lk}^1 + b_{lk1}^i a_{jm}^1 + b_{lm1}^i a_{jk}^1 = 0. \quad (16)$$

1) Полагая в (16) $j=l, k=m$, получим:

$$b_{jk1}^i a_{jk}^1 = 0 \text{ (тензоры не суммируются).} \quad (17)$$

Т.к. мы рассматриваем ткань ранга 1, то найдутся такие j, k , что $a_{jk}^1 \neq 0$, следовательно, $b_{jk1}^i = 0, \forall i$.

2) Положим в (16) $j=l$, получим:

$$b_{jk1}^i a_{jm}^1 + b_{jm1}^i a_{jk}^1 = 0. \quad (18)$$

Т.к. $a_{jk}^1 \neq 0, b_{jk1}^i = 0$, то $b_{jm1}^i = 0, \forall i, m$.

3) Положим в (16) $k=m$:

$$b_{jk1}^i a_{lk}^1 + b_{lk1}^i a_{jk}^1 = 0. \quad (19)$$

Т.к. $a_{jk}^1 \neq 0$, $b_{jk1}^i = 0$, то $b_{lk1}^i = 0, \forall i, l$.

4) Рассмотрим (16):

$$b_{jk1}^i a_{lm}^1 + b_{jm1}^i a_{lk}^1 + b_{lk1}^i a_{jm}^1 + b_{lm1}^i a_{jk}^1 = 0.$$

Т.к. $a_{jk}^1 \neq 0$, $b_{jm1}^i = 0$, $b_{lk1}^i = 0$, то $b_{lm1}^i = 0, \forall i, l, m$.

Таким образом, учитывая (8), приходим к следующему утверждению.

Предложение 1. Если тензор кручения эластичной ткани имеет структуру (14), то компоненты тензора кривизны связаны соотношениями

$$b_{jk1}^i = b_{jlk}^i = 0.$$

Подстановка полученного результата в (16) дает нам тождество. Таким образом, новых соотношений из (16) мы не получим.

Рассмотрим равенства (9), записанные в координатной форме:

$$b_{jkl}^i + b_{klj}^i + b_{ljk}^i = 2a_{jk}^m a_{ml}^i + 2a_{kl}^m a_{mj}^i + 2a_{lj}^m a_{mk}^i. \quad (20)$$

Положив здесь $j=1$ и используя (14), получим:

$$b_{1kl}^i + b_{kl1}^i + b_{l1k}^i = 2a_{1k}^1 a_{1l}^i + 2a_{kl}^1 a_{11}^i + 2a_{l1}^1 a_{1k}^i. \quad (21)$$

Используя предложение 1 и соотношение (8), придем к равенствам

$$b_{1kl}^i = 0. \quad (22)$$

Доказано

Предложение 2. Если тензор кручения эластичной ткани имеет структуру (14), то для тензора кривизны этой ткани выполняются соотношения $b_{llm}^i = 0$.

Таким образом, из соотношений (9) свелись к следующим:

$$b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^i + b_{\hat{k}\hat{l}\hat{j}}^i + b_{\hat{l}\hat{j}\hat{k}}^i = 2a_{\hat{j}\hat{k}}^1 a_{\hat{l}\hat{l}}^1 + 2a_{\hat{k}\hat{l}}^1 a_{\hat{1}\hat{j}}^1 + 2a_{\hat{l}\hat{j}}^1 a_{\hat{1}\hat{k}}^1, \quad (23)$$

$$b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^i + b_{\hat{k}\hat{l}\hat{j}}^i + b_{\hat{l}\hat{j}\hat{k}}^i = 0. \quad (24)$$

Рассмотрим соотношения (10), записанные в координатной форме:

$$b_{jpk}^i a_{lm}^p - b_{kpj}^i a_{lm}^p = a_{jk}^p b_{plm}^i - a_{pk}^i b_{jlm}^p - a_{jp}^i b_{klm}^p. \quad (25)$$

Преобразуем их при помощи соотношений (14) с учетом предложений 1 и 2. Получим

$$a_{kp}^i b_{jlm}^p = a_{jp}^i b_{klm}^p. \quad (26)$$

Найдем значение ковариантной производной тензора кривизны. Для этого воспользуемся формулой (11):

$$c_{jklm}^i = -b_{jpk}^i a_{lm}^p + b_{jpm}^i a_{kl}^p + b_{jpl}^i a_{km}^p. \quad (27)$$

Учитывая (14), получаем:

$$c_{jklm}^i = -b_{j1k}^i a_{lm}^1 + b_{j1m}^i a_{kl}^1 + b_{j1l}^i a_{km}^1. \quad (28)$$

В силу предложения 1 имеем $c_{jklm}^i = 0$. Доказано

Предложение 3. Если тензор кручения эластичной ткани имеет структуру (14), то тензор кривизны является ковариантно постоянным.

3. Рассмотрим структурные уравнения рассматриваемой три-ткани. С учётом найденных ограничений на компоненты тензоров эти уравнения примут вид:

$$d\omega_1^1 = \omega_1^j \wedge \omega_j^1 + a_{jk}^1 \omega_1^j \wedge \omega_1^k, \quad (29)$$

$$d\omega_1^{\hat{i}} = \omega_1^j \wedge \omega_{\hat{j}}^{\hat{i}}, \quad (30)$$

$$d\omega_2^1 = \omega_2^j \wedge \omega_j^1 - a_{jk}^1 \omega_2^j \wedge \omega_2^k, \quad (31)$$

$$d\omega_2^{\hat{i}} = \omega_2^j \wedge \omega_{\hat{j}}^{\hat{i}}, \quad (32)$$

$$d\omega_1^i = \omega_1^k \wedge \omega_k^i, \quad (33)$$

$$d\omega_{\hat{j}}^i = \omega_{\hat{j}}^k \wedge \omega_k^i + b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^i \omega_1^{\hat{k}} \wedge \omega_2^{\hat{l}}, \quad (34)$$

где $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k} \neq 1$. Уравнение (33) означает, что система пфаффовых уравнений $\omega_1^i = 0$ является вполне интегрируемой. Следовательно, можно сузить семейство реперов положив в структурных уравнениях $\omega_1^i = 0$. Получим:

$$d\omega_1^1 = \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^1 + a_{jk}^1 \omega_1^j \wedge \omega_1^k, \quad (35)$$

$$d\omega_1^{\hat{i}} = \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^{\hat{i}}, \quad (36)$$

$$d\omega_2^1 = \omega_2^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^1 - a_{jk}^1 \omega_2^j \wedge \omega_2^k, \quad (37)$$

$$d\omega_2^{\hat{i}} = \omega_2^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^{\hat{i}}, \quad (38)$$

$$d\omega_{\hat{j}}^i = \omega_{\hat{j}}^{\hat{k}} \wedge \omega_k^i + b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^i \omega_1^{\hat{k}} \wedge \omega_2^{\hat{l}}. \quad (39)$$

Рассмотрим дифференциальные уравнения (12). С учетом найденных соотношений они примут вид:

$$\nabla a_{1\hat{k}}^1 = da_{1k}^i - a_{1\hat{m}}^1 \omega_1^{\hat{m}} = 0, \quad (40)$$

$$\nabla a_{\hat{j}\hat{k}}^1 = da_{\hat{j}\hat{k}}^1 - a_{m\hat{k}}^1 \omega_j^m - a_{\hat{j}m}^1 \omega_k^m = -b_{[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}^1 (\omega_1^{\hat{l}} - \omega_2^{\hat{l}}), \quad (41)$$

$$0 = -b_{[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}^1 (\omega_1^{\hat{l}} - \omega_2^{\hat{l}}). \quad (42)$$

Т.к. формы $\omega_1^{\hat{l}}$ и $\omega_2^{\hat{l}}$ являются линейно независимыми, то $b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^{\hat{i}} = b_{\hat{k}\hat{j}\hat{l}}^{\hat{i}}$.

А поскольку $b_{jkl}^i = -b_{kjl}^i$, то $b_{jkl}^{\hat{i}} = 0$, т.к.

$$b_{jkl}^{\hat{i}} = b_{kjl}^{\hat{i}} = -b_{klj}^{\hat{i}} = -b_{lkj}^{\hat{i}} = b_{ljk}^{\hat{i}} = b_{jlk}^{\hat{i}} = -b_{jkl}^{\hat{i}}.$$

Теорема 1. Если эластичная три-ткань E имеет тензор кручения ранга 1, то найдется такой адаптированный репер, в котором тензор кривизны ткани E также имеет ранг 1, причем производные алгебры от алгебр, определяемых этими тензорами, определены на одном и том же одномерном пространстве.

С учетом полученных соотношений структурные уравнения рассматриваемой ткани E принимают вид:

$$d\omega_1^1 = \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^1 + a_{jk}^1 \omega_1^j \wedge \omega_1^k, \quad (43)$$

$$d\omega_1^{\hat{i}} = \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^{\hat{i}}, \quad (44)$$

$$d\omega_2^1 = \omega_2^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^1 - a_{jk}^1 \omega_2^j \wedge \omega_2^k, \quad (45)$$

$$d\omega_2^{\hat{i}} = \omega_2^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^{\hat{i}}, \quad (46)$$

$$d\omega_{\hat{j}}^1 = \omega_{\hat{j}}^{\hat{k}} \wedge \omega_{\hat{k}}^1 + b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 \omega_{\hat{k}}^{\hat{l}} \wedge \omega_{\hat{l}}^1, \quad (47)$$

$$d\omega_{\hat{j}}^{\hat{i}} = \omega_{\hat{j}}^{\hat{k}} \wedge \omega_{\hat{k}}^{\hat{i}}. \quad (48)$$

Уравнение (48) показывает, что система уравнений $\omega_{\hat{j}}^{\hat{i}} = 0$ является вполне интегрируемой. Значит, можно сузить семейство адаптированных реперов, положив $\omega_{\hat{j}}^{\hat{i}} = 0$. В результате структурные уравнения ткани E принимают вид:

$$d\omega_1^1 = \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^1 + a_{jk}^1 \omega_1^j \wedge \omega_1^k, \quad (49)$$

$$d\omega_1^{\hat{i}} = 0, \quad (50)$$

$$d\omega_2^1 = \omega_2^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^1 - a_{jk}^1 \omega_2^j \wedge \omega_2^k, \quad (51)$$

$$d\omega_2^{\hat{i}} = 0, \quad (52)$$

$$d\omega_{\hat{j}}^1 = b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 \omega_{\hat{k}}^{\hat{l}} \wedge \omega_{\hat{l}}^1. \quad (53)$$

Дифференциальные уравнения на тензор кручения (41)-(42) примут вид:

$$\nabla a_{1\hat{k}}^1 = da_{1k}^i = 0, \quad (54)$$

$$\nabla a_{\hat{j}\hat{k}}^1 = da_{\hat{j}\hat{k}}^1 - a_{1\hat{k}}^1 \omega_{\hat{j}}^1 - a_{\hat{j}1}^1 \omega_{\hat{k}}^1 = -b_{[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}^1 (\omega_{\hat{l}}^{\hat{l}} - \omega_{\hat{2}}^{\hat{l}}). \quad (55)$$

Из первого уравнения следует $a_{1k}^i = \text{const.}$

Из дифференциальных уравнений на тензор кривизны остаются следующие:

$$\nabla b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 = db_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 = 0.$$

Из них следует, что $b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 = 0.$

4. Проверим полученную систему структурных уравнений на замкнутость. Очевидно, что внешнее дифференцирование уравнений (50), (52)-(53) приводит к тождествам. Рассмотрим уравнение (49), переписанное в следующей форме:

$$d\omega_1^1 = \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^1 + 2a_{1\hat{k}}^1 \omega_1^1 \wedge \omega_{\hat{k}}^1 + a_{\hat{j}\hat{k}}^1 \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{k}}^1. \quad (56)$$

Продифференцируем его внешним образом, получим:

$$0 = d\omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^1 - \omega_1^{\hat{j}} \wedge d\omega_{\hat{j}}^1 + 2a_{1\hat{k}}^1 d\omega_1^1 \wedge \omega_{\hat{k}}^1 - 2a_{1\hat{k}}^1 \omega_1^1 \wedge d\omega_{\hat{k}}^1 + \\ + da_{\hat{j}\hat{k}}^1 \wedge \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{k}}^1 + a_{\hat{j}\hat{k}}^1 d\omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{k}}^1 - a_{\hat{j}\hat{k}}^1 \omega_1^{\hat{j}} \wedge d\omega_{\hat{k}}^1.$$

Используя структурные уравнения, находим:

$$0 = -\omega_1^{\hat{j}} \wedge b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 \omega_{\hat{k}}^1 \wedge \omega_{\hat{l}}^1 + 2a_{1\hat{k}}^1 (\omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^1 + 2a_{1\hat{j}}^1 \omega_1^1 \wedge \omega_{\hat{j}}^1 + a_{\hat{j}\hat{p}}^1 \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{p}}^1) \wedge \omega_{\hat{k}}^1 + \\ + da_{\hat{j}\hat{k}}^1 \wedge \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{k}}^1.$$

После преобразований получаем

$$0 = -\omega_1^{\hat{j}} \wedge b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 \omega_{\hat{k}}^1 \wedge \omega_{\hat{l}}^1 + 2a_{1\hat{k}}^1 \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^1 \wedge \omega_{\hat{k}}^1 + 4a_{1\hat{k}}^1 a_{1\hat{j}}^1 \omega_1^1 \wedge \omega_{\hat{j}}^1 \wedge \omega_{\hat{k}}^1 + \\ + 2a_{1\hat{k}}^1 a_{\hat{j}\hat{p}}^1 \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{p}}^1 \wedge \omega_{\hat{k}}^1 + da_{\hat{j}\hat{k}}^1 \wedge \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{k}}^1.$$

Преобразуем далее:

$$0 = (-b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 \omega_{\hat{l}}^{\hat{l}} - 2a_{1\hat{k}}^1 \omega_{\hat{j}}^1 + 4a_{1\hat{k}}^1 a_{1\hat{j}}^1 \omega_1^1 - 2a_{1\hat{k}}^1 a_{\hat{j}\hat{p}}^1 \omega_{\hat{p}}^1 + da_{\hat{j}\hat{k}}^1) \wedge \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{k}}^1.$$

Значение найдём из уравнения (55):

$$da_{\hat{j}\hat{k}}^1 = a_{1\hat{k}}^1 \omega_{\hat{j}}^1 + a_{\hat{j}1}^1 \omega_{\hat{k}}^1 - b_{[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}^1 (\omega_{\hat{l}}^{\hat{l}} - \omega_{\hat{2}}^{\hat{l}}).$$

Подставляя в предыдущие равенства, получаем:

$$0 = (-b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 \omega_{\hat{l}}^{\hat{l}} - 2a_{1\hat{k}}^1 \omega_{\hat{j}}^1 + 4a_{1\hat{k}}^1 a_{1\hat{j}}^1 \omega_1^1 - 2a_{1\hat{k}}^1 a_{\hat{j}\hat{p}}^1 \omega_{\hat{p}}^1 + \\ + a_{1\hat{k}}^1 \omega_{\hat{j}}^1 + a_{\hat{j}1}^1 \omega_{\hat{k}}^1 - b_{[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}^1 (\omega_{\hat{l}}^{\hat{l}} - \omega_{\hat{2}}^{\hat{l}})) \wedge \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{k}}^1.$$

Далее альтернируем по j, k :

$$0 = (-b_{[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}^1 \omega_2^{\hat{l}} - 2a_{1[\hat{k}]}^1 \omega_{\hat{j}1}^1 + 4a_{1[\hat{k}]}^1 a_{1[\hat{j}]}^1 \omega_1^1 - 2a_{1[\hat{k}]}^1 a_{\hat{j}1\hat{l}}^1 \omega_1^{\hat{l}} + a_{1[\hat{k}]}^1 \omega_{\hat{j}1}^1 + a_{1[\hat{j}]}^1 \omega_{\hat{k}1}^1 - b_{1[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}^1 (\omega_1^{\hat{l}} - \omega_2^{\hat{l}})) \wedge \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_1^{\hat{k}}.$$

После упрощения получим:

$$0 = (-2a_{1[\hat{k}]}^1 a_{\hat{j}1\hat{l}}^1 \omega_1^{\hat{l}} - b_{1[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}^1 \omega_1^{\hat{l}}) \wedge \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_1^{\hat{k}},$$

$$0 = (2a_{1[\hat{k}]}^1 a_{\hat{j}1\hat{l}}^1 + b_{1[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}^1) \omega_1^{\hat{l}} \wedge \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_1^{\hat{k}}.$$

Теперь альтернируем по l, j, k :

$$0 = (-2a_{1[\hat{l}]}^1 a_{1[\hat{k}]}^1 + b_{1[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}^1) \omega_1^{\hat{l}} \wedge \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_1^{\hat{k}}.$$

Данное уравнение тождественно удовлетворяется в силу тождеств Якоби (23). Аналогично, уравнение (51) при дифференцировании дает тождество.

Таким образом, найденная нами система структурных уравнений (49)-(53) является замкнутой. Следовательно, рассматриваемые ткани E существуют.

5. Проинтегрируем полученную систему (49)-(53). Т.к. $b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 = 0$, то уравнение (26) примет вид:

$$a_{1k}^1 b_{jlm}^1 = a_{1j}^1 b_{klm}^1. \quad (57)$$

Далее будем рассматривать случай, когда все компоненты тензора $a_{1k}^1 = 0$ (ткани E_2^r). В этом случае равенство (57) удовлетворяется тождественно, а обобщенные тождества Якоби запишутся в следующей форме:

$$b_{1[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}^1 = 0. \quad (58)$$

Система структурных уравнений (49) – (55) для ткани E_2^r принимает вид:

$$\begin{aligned} d\omega_1^1 &= \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}1}^1 + a_{\hat{j}\hat{k}}^1 \omega_1^{\hat{j}} \wedge \omega_1^{\hat{k}}, \\ d\omega_1^{\hat{i}} &= 0, \\ d\omega_2^1 &= \omega_2^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}2}^1 - a_{\hat{j}\hat{k}}^1 \omega_2^{\hat{j}} \wedge \omega_2^{\hat{k}}, \\ d\omega_2^{\hat{i}} &= 0, \\ d\omega_{\hat{j}}^1 &= b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 \omega_1^{\hat{k}} \wedge \omega_2^{\hat{l}}, \\ \nabla a_{\hat{j}\hat{k}}^1 &= da_{\hat{j}\hat{k}}^1 = -b_{1[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}^1 (\omega_1^{\hat{l}} - \omega_2^{\hat{l}}). \end{aligned} \quad (59)$$

Непосредственно проверяется, что эта система при условии (58) замкнута относительно операции внешнего дифференцирования. Интегрируя второе, четвертое, пятое и шестое уравнения, находим:

$$\begin{aligned}\omega_1^{\hat{i}} &= du^{\hat{i}}, \\ \omega_2^{\hat{i}} &= d\psi^{\hat{i}}, \\ \omega_j^1 &= \frac{1}{2} b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 (u^{\hat{k}} d\psi^{\hat{l}} - \psi^{\hat{l}} du^{\hat{k}}) + d\varphi_j^1, \\ a_{j\hat{k}}^1 &= -b_{[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}^1 (u^{\hat{l}} - \psi^{\hat{l}}) + c_{j\hat{k}}^1.\end{aligned}$$

Далее подставляем найденные формы в первое уравнение системы (59), получим:

$$d\omega_1^1 = du^{\hat{j}} \wedge (\frac{1}{2} b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 (u^{\hat{k}} d\psi^{\hat{l}} - \psi^{\hat{l}} du^{\hat{k}}) + d\varphi_j^1) + (-b_{[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}^1 (u^{\hat{l}} - \psi^{\hat{l}}) + c_{j\hat{k}}^1) du^{\hat{j}} \wedge du^{\hat{k}},$$

или

$$\begin{aligned}d\omega_1^1 &= \frac{1}{2} b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 du^{\hat{j}} \wedge d(u^{\hat{k}} \psi^{\hat{l}}) + du^{\hat{j}} \wedge d\varphi_j^1 - b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 u^{\hat{l}} du^{\hat{j}} \wedge du^{\hat{k}} + \\ &\quad + c_{j\hat{k}}^1 du^{\hat{j}} \wedge du^{\hat{k}}.\end{aligned}\tag{60}$$

Рассмотрим форму $b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 u^{\hat{l}} du^{\hat{j}} \wedge du^{\hat{k}}$. В силу (58) ее внешний дифференциал равен нулю, поэтому, положим $b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 u^{\hat{l}} du^{\hat{j}} \wedge du^{\hat{k}} = d\theta(u)$.

Запишем форму $d\theta(u)$ в следующем виде:

$$d\theta(u) = \frac{1}{3} (b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 u^{\hat{l}} du^{\hat{j}} \wedge du^{\hat{k}} + b_{\hat{k}\hat{l}\hat{j}}^1 u^{\hat{j}} du^{\hat{k}} \wedge du^{\hat{l}} + b_{\hat{l}\hat{j}\hat{k}}^1 u^{\hat{k}} du^{\hat{l}} \wedge du^{\hat{j}}).$$

Используя тождество Якоби (58), далее получаем:

$$d\theta(u) = \frac{1}{3} (b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 u^{\hat{l}} du^{\hat{j}} \wedge du^{\hat{k}} + b_{\hat{k}\hat{l}\hat{j}}^1 u^{\hat{j}} du^{\hat{k}} \wedge du^{\hat{l}} - (b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 - b_{\hat{k}\hat{l}\hat{j}}^1) u^{\hat{k}} du^{\hat{l}} \wedge du^{\hat{j}})$$

или

$$d\theta(u) = \frac{1}{3} (b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 du^{\hat{j}} \wedge d(u^{\hat{k}} u^{\hat{l}}) - b_{\hat{k}\hat{l}\hat{j}}^1 du^{\hat{l}} \wedge d(u^{\hat{j}} u^{\hat{k}})) = -\frac{1}{3} b_{\hat{k}\hat{l}\hat{j}}^1 du^{\hat{l}} \wedge d(u^{\hat{j}} u^{\hat{k}}).$$

Интегрируя, находим форму $\theta(u)$:

$$\theta(u) = \frac{1}{3} b_{\hat{k}\hat{l}\hat{j}}^1 u^{\hat{j}} u^{\hat{k}} du^{\hat{l}} = \frac{1}{3} b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 u^{\hat{j}} u^{\hat{k}} du^{\hat{l}}.\tag{61}$$

В результате уравнение (60) запишется в виде:

$$d\omega_1^1 = \frac{1}{2} b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 du^{\hat{j}} \wedge d(u^{\hat{k}} \psi^{\hat{l}}) + du^{\hat{j}} \wedge d\varphi_j^1 - d\theta(u) + c_{j\hat{k}}^1 du^{\hat{j}} \wedge du^{\hat{k}}.$$

Интегрируя, получаем:

$$\omega_1^1 = -\frac{1}{2} b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 u^{\hat{k}} \psi^{\hat{l}} du^{\hat{j}} - \varphi_j^1 du^{\hat{j}} - \theta(u) + c_{j\hat{k}}^1 u^{\hat{j}} du^{\hat{k}} + du^1.\tag{62}$$

Второе уравнение системы (59) с учетом найденных соотношений принимает вид:

$$d\omega_2^1 = dv^{\hat{j}} \wedge (\frac{1}{2} b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 (u^{\hat{k}} dv^{\hat{l}} - v^{\hat{l}} du^{\hat{k}}) + d\varphi_j^1) + (-b_{[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}^1 (u^{\hat{l}} - v^{\hat{l}}) + c_{j\hat{k}}^1) dv^{\hat{j}} \wedge dv^{\hat{k}},$$

или

$$d\omega_2^1 = -\frac{1}{2} b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 dv^{\hat{j}} \wedge d(u^{\hat{k}} v^{\hat{l}}) + dv^{\hat{j}} \wedge d\varphi_j^1 - d\theta(v) + c_{j\hat{k}}^1 dv^{\hat{j}} \wedge dv^{\hat{k}}.$$

Интегрируя аналогично предыдущему уравнению, найдем:

$$\omega_2^1 = \frac{1}{2} b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 u^{\hat{k}} v^{\hat{l}} dv^{\hat{j}} - \varphi_j^1 dv^{\hat{j}} - \theta(v) - c_{j\hat{k}}^1 v^{\hat{j}} dv^{\hat{k}} + dv^1.$$

Далее находим уравнения слоений три-ткани E_2^r .

(1) Первое слоение задается уравнениями $\omega_1^1 = 0$ или

$$-\frac{1}{2} b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 u^{\hat{k}} v^{\hat{l}} du^{\hat{j}} - \varphi_j^1 du^{\hat{j}} - \theta(u) + c_{j\hat{k}}^1 u^{\hat{j}} du^{\hat{k}} + du^1 = 0,$$

$$du^{\hat{i}} = 0.$$

Интегрируя, находим:

$$u^i = x^i. \quad (63)$$

(2) Второе слоение задается уравнениями $\omega_2^1 = 0$ или

$$\frac{1}{2} b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 u^{\hat{k}} v^{\hat{l}} dv^{\hat{j}} - \varphi_j^1 dv^{\hat{j}} - \theta(v) - c_{j\hat{k}}^1 v^{\hat{j}} dv^{\hat{k}} + dv^1 = 0,$$

$$dv^{\hat{i}} = 0.$$

После интегрирования получим

$$v^i = y^i. \quad (64)$$

(3) Третье слоение задается уравнениями $\omega_1^1 + \omega_2^1 = 0$ или

$$-\frac{1}{2} b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 u^{\hat{k}} v^{\hat{l}} du^{\hat{j}} - \varphi_j^1 du^{\hat{j}} - \theta(u) + c_{j\hat{k}}^1 u^{\hat{j}} du^{\hat{k}} + \frac{1}{2} b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 u^{\hat{k}} v^{\hat{l}} dv^{\hat{j}} -$$

$$- \varphi_j^1 dv^{\hat{j}} - \theta(v) - c_{j\hat{k}}^1 v^{\hat{j}} dv^{\hat{k}} + du^1 + dv^1 = 0,$$

$$du^{\hat{i}} + dv^{\hat{i}} = 0.$$

После преобразований первое уравнение примет вид

$$-b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 u^{\hat{k}} v^{\hat{l}} du^{\hat{j}} - \theta(u) - \theta(v) + c_{j\hat{k}}^1 (u^{\hat{j}} + v^{\hat{j}}) du^{\hat{k}} + du^1 + dv^1 = 0,$$

а второе дает $u^{\hat{i}} + v^{\hat{i}} = z^{\hat{i}}$. В силу этих равенств первое уравнение преобразуется к виду

$$-b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 u^{\hat{k}} z^{\hat{l}} du^{\hat{j}} - \frac{1}{3} b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 z^{\hat{j}} z^{\hat{k}} du^{\hat{l}} + \frac{1}{3} b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 (z^{\hat{j}} u^{\hat{k}} + z^{\hat{k}} u^{\hat{j}}) du^{\hat{l}} + c_{j\hat{k}}^1 z^{\hat{j}} du^{\hat{k}} +$$

$$+ du^1 + dv^1 = 0. \quad (65)$$

Преобразуем первое слагаемое $\tau = b_{j\hat{k}\hat{l}}^1 u^{\hat{k}} z^{\hat{l}} du^{\hat{j}}$:

$$\begin{aligned}\tau = & \frac{1}{3}(b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 u^{\hat{k}} z^{\hat{l}} du^{\hat{j}} + b_{\hat{k}\hat{l}\hat{j}}^1 u^{\hat{l}} z^{\hat{j}} du^{\hat{k}} + b_{\hat{l}\hat{j}\hat{k}}^1 u^{\hat{j}} z^{\hat{k}} du^{\hat{l}}) = \frac{1}{3}(b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 u^{\hat{k}} z^{\hat{l}} du^{\hat{j}} + \\ & + b_{\hat{k}\hat{l}\hat{j}}^1 u^{\hat{l}} z^{\hat{j}} du^{\hat{k}} - (b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 + b_{\hat{k}\hat{l}\hat{j}}^1) u^{\hat{j}} z^{\hat{k}} du^{\hat{l}}) = \frac{1}{3}(b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 z^{\hat{l}} d(u^{\hat{k}} u^{\hat{j}}) + \\ & + b_{\hat{k}\hat{l}\hat{j}}^1 u^{\hat{l}} (z^{\hat{j}} du^{\hat{k}} + z^{\hat{k}} du^{\hat{j}})) = \frac{1}{3} b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 (z^{\hat{l}} d(u^{\hat{k}} u^{\hat{j}}) - u^{\hat{l}} (z^{\hat{k}} du^{\hat{j}} + z^{\hat{j}} du^{\hat{k}})).\end{aligned}$$

Подставляя форму τ обратно в уравнение (65), получим:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3} b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 z^{\hat{l}} d(u^{\hat{k}} u^{\hat{j}}) + \frac{1}{3} b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 u^{\hat{l}} (z^{\hat{j}} du^{\hat{k}} + z^{\hat{k}} du^{\hat{j}}) - \frac{1}{3} b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 z^{\hat{j}} z^{\hat{k}} du^{\hat{l}} + \\ + \frac{1}{3} b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 (z^{\hat{j}} u^{\hat{k}} + z^{\hat{k}} u^{\hat{j}}) du^{\hat{l}} + c_{\hat{j}\hat{k}}^1 z^{\hat{j}} du^{\hat{k}} + du^1 + dv^1 = 0.\end{aligned}$$

Интегрируя, находим первое уравнение третьего слоения, таким образом, третье слоение описывается системой:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3} b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 z^{\hat{l}} u^{\hat{k}} u^{\hat{j}} + \frac{1}{3} b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 u^{\hat{l}} (z^{\hat{j}} u^{\hat{k}} + z^{\hat{k}} u^{\hat{j}}) - \frac{1}{3} b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 z^{\hat{j}} z^{\hat{k}} u^{\hat{l}} + c_{\hat{j}\hat{k}}^1 z^{\hat{j}} du^{\hat{k}} + u^1 + v^1 = z^1, \\ u^{\hat{l}} + v^{\hat{l}} = z^{\hat{l}}.\end{aligned}$$

Преобразуя первое уравнение с помощью последних, и учитывая кососимметричность тензоров, придем к уравнениям:

$$\begin{aligned}u^1 + v^1 - (c_{\hat{j}\hat{k}}^1 + \frac{1}{3} b_{\hat{l}\hat{j}\hat{k}}^1 (u^{\hat{l}} - v^{\hat{l}})) u^{\hat{j}} v^{\hat{k}} = z^1, \\ u^{\hat{l}} + v^{\hat{l}} = z^{\hat{l}}.\end{aligned}\tag{66}$$

Найдем уравнения три-ткани E_2^r , для чего исключим из найденных уравнений слоений локальные координаты $u^{\hat{l}}$ и $v^{\hat{l}}$. После преобразований получим:

$$\begin{aligned}z^1 = x^1 + y^1 - (c_{\hat{j}\hat{k}}^1 + \frac{1}{3} b_{\hat{l}\hat{j}\hat{k}}^1 (x^{\hat{l}} - y^{\hat{l}})) x^{\hat{j}} y^{\hat{k}}, \\ x^{\hat{l}} + y^{\hat{l}} = z^{\hat{l}}.\end{aligned}\tag{67}$$

6. Теорема 2. Три-ткань E_2^r является эластичной тканью.

Доказательство. Необходимо показать, что тождество эластичности выполняется во всех координатных лупах ткани (см. [2]).

Обозначим операцию в координатной лупе ткани E_2^r через " \cdot ". Тогда условие замыкания конфигурации E равносильно так называемому условному тождеству: последнее из равенств

$$x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1,$$

$$x_1 \cdot y_3 = x_3 \cdot y_1,$$

$$x_3 \cdot y_2 = x_4 \cdot y_1,$$

$$x_2 \cdot y_3 = x_1 \cdot y_4,$$

$$x_4 \cdot y_3 = x_3 \cdot y_4,$$

должно следовать из четырех первых. В терминах уравнений (67) это означает, что из систем (68)-(69) должна следовать система (70), где

$$x_1^{\hat{i}} + y_2^{\hat{i}} = x_2^{\hat{i}} + y_1^{\hat{i}}, \quad x_1^{\hat{i}} + y_3^{\hat{i}} = x_3^{\hat{i}} + y_1^{\hat{i}}, \quad x_3^{\hat{i}} + y_2^{\hat{i}} = x_4^{\hat{i}} + y_1^{\hat{i}}, \quad x_1^{\hat{i}} + y_4^{\hat{i}} = x_2^{\hat{i}} + y_3^{\hat{i}}; \quad (68)$$

$$\begin{aligned} & x_1^1 + y_2^1 + \frac{1}{3} b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 y_2^{\hat{k}} x_1^{\hat{l}} (x_1^{\hat{j}} - y_2^{\hat{j}}) + c_{\hat{j}\hat{k}}^1 y_2^{\hat{j}} x_1^{\hat{k}} = x_2^1 + y_1^1 + \\ & + \frac{1}{3} b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 y_1^{\hat{k}} x_2^{\hat{l}} (x_2^{\hat{j}} - y_1^{\hat{j}}) + c_{\hat{j}\hat{k}}^1 y_1^{\hat{j}} x_2^{\hat{k}}, \\ & x_1^1 + y_2^1 + \frac{1}{3} b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 y_2^{\hat{k}} x_1^{\hat{l}} (x_1^{\hat{j}} - y_2^{\hat{j}}) + c_{\hat{j}\hat{k}}^1 y_2^{\hat{j}} x_1^{\hat{k}} = x_2^1 + y_1^1 + \\ & + \frac{1}{3} b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 y_1^{\hat{k}} x_2^{\hat{l}} (x_2^{\hat{j}} - y_1^{\hat{j}}) + c_{\hat{j}\hat{k}}^1 y_1^{\hat{j}} x_2^{\hat{k}}, \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} & x_1^1 + y_2^1 + \frac{1}{3} b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 y_2^{\hat{k}} x_1^{\hat{l}} (x_1^{\hat{j}} - y_2^{\hat{j}}) + c_{\hat{j}\hat{k}}^1 y_2^{\hat{j}} x_1^{\hat{k}} = x_2^1 + y_1^1 + \\ & + \frac{1}{3} b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 y_1^{\hat{k}} x_2^{\hat{l}} (x_2^{\hat{j}} - y_1^{\hat{j}}) + c_{\hat{j}\hat{k}}^1 y_1^{\hat{j}} x_2^{\hat{k}}, \\ & x_1^1 + y_2^1 + \frac{1}{3} b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 y_2^{\hat{k}} x_1^{\hat{l}} (x_1^{\hat{j}} - y_2^{\hat{j}}) + c_{\hat{j}\hat{k}}^1 y_2^{\hat{j}} x_1^{\hat{k}} = x_2^1 + y_1^1 + \\ & + \frac{1}{3} b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 y_1^{\hat{k}} x_2^{\hat{l}} (x_2^{\hat{j}} - y_1^{\hat{j}}) + c_{\hat{j}\hat{k}}^1 y_1^{\hat{j}} x_2^{\hat{k}}; \\ & x_3^1 + y_4^1 + \frac{1}{3} b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 y_4^{\hat{k}} x_3^{\hat{l}} (x_3^{\hat{j}} - y_4^{\hat{j}}) + c_{\hat{j}\hat{k}}^1 y_4^{\hat{j}} x_3^{\hat{k}} = x_4^1 + y_3^1 + \\ & + \frac{1}{3} b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 y_4^{\hat{k}} x_3^{\hat{l}} (x_3^{\hat{j}} - y_4^{\hat{j}}) + c_{\hat{j}\hat{k}}^1 y_4^{\hat{j}} x_3^{\hat{k}}, \end{aligned} \quad (70)$$

Последнее уравнение системы (70) можем получить, если сложить третье и четвертое уравнение системы (68) и вычесть из них первое уравнение. Повторим те же операции для системы (69) и покажем, что полученный результат в точности равен первому уравнению системы (70). Для этого необходимо показать, что:

$$P = (x_3 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 - x_1 \cdot y_2) - x_4 \cdot y_3 - ((x_4 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_4 - x_2 \cdot y_1) - x_3 \cdot y_4) = 0.$$

Подставляя уравнения из систем (68) и (69) получим:

$$\begin{aligned} P = & \frac{1}{3} b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 (y_1^{\hat{k}} (x_2^{\hat{l}} (x_2^{\hat{j}} - y_1^{\hat{j}}) - x_4^{\hat{l}} (x_4^{\hat{j}} - y_1^{\hat{j}})) + y_2^{\hat{k}} (x_3^{\hat{l}} (x_3^{\hat{j}} - y_2^{\hat{j}}) - x_1^{\hat{l}} (x_1^{\hat{j}} - y_2^{\hat{j}})) + \\ & + y_3^{\hat{k}} (x_4^{\hat{l}} (x_4^{\hat{j}} - y_3^{\hat{j}}) - x_2^{\hat{l}} (x_2^{\hat{j}} - y_3^{\hat{j}})) + y_4^{\hat{k}} (x_1^{\hat{l}} (x_1^{\hat{j}} - y_4^{\hat{j}}) - x_3^{\hat{l}} (x_3^{\hat{j}} - y_4^{\hat{j}}))) + \\ & + c_{\hat{j}\hat{k}}^1 (y_2^{\hat{j}} x_3^{\hat{k}} + y_4^{\hat{j}} x_1^{\hat{k}} - y_2^{\hat{j}} x_1^{\hat{k}} - y_1^{\hat{j}} x_4^{\hat{k}} - y_3^{\hat{j}} x_2^{\hat{k}} + y_1^{\hat{j}} x_2^{\hat{k}} - y_4^{\hat{j}} x_3^{\hat{k}} + y_3^{\hat{j}} x_4^{\hat{k}}). \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} R = & c_{\hat{j}\hat{k}}^1 (y_2^{\hat{j}} x_3^{\hat{k}} + y_4^{\hat{j}} x_1^{\hat{k}} - y_2^{\hat{j}} x_1^{\hat{k}} - y_1^{\hat{j}} x_4^{\hat{k}} - y_3^{\hat{j}} x_2^{\hat{k}} + y_1^{\hat{j}} x_2^{\hat{k}} - y_4^{\hat{j}} x_3^{\hat{k}} + y_3^{\hat{j}} x_4^{\hat{k}}) = \\ = & c_{\hat{j}\hat{k}}^1 (y_2^{\hat{j}} (x_3^{\hat{k}} - x_1^{\hat{k}}) + y_4^{\hat{j}} (x_1^{\hat{k}} - x_3^{\hat{k}}) + y_1^{\hat{j}} (x_2^{\hat{k}} - x_4^{\hat{k}}) + y_3^{\hat{j}} (x_4^{\hat{k}} - x_2^{\hat{k}})) = \\ = & c_{\hat{j}\hat{k}}^1 ((y_2^{\hat{j}} - y_4^{\hat{j}})(x_3^{\hat{k}} - x_1^{\hat{k}}) + (y_3^{\hat{j}} - y_1^{\hat{j}})(x_4^{\hat{k}} - x_2^{\hat{k}})). \end{aligned}$$

Из системы (68) следует, что $y_2^{\hat{j}} - y_4^{\hat{j}} = y_1^{\hat{j}} - y_3^{\hat{j}}$, $x_3^{\hat{k}} - x_1^{\hat{k}} = x_4^{\hat{k}} - x_2^{\hat{k}}$; подставляя найденные соотношения в выражение R , получим:

$$R = c_{\hat{j}\hat{k}}^1 ((y_2^{\hat{j}} - y_4^{\hat{j}})(x_4^{\hat{k}} - x_2^{\hat{k}}) + (y_4^{\hat{j}} - y_2^{\hat{j}})(x_4^{\hat{k}} - x_2^{\hat{k}})) = 0.$$

Рассмотрим теперь выражение

$$\begin{aligned} Q = & \frac{1}{3} b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 (y_1^{\hat{k}}(x_2^{\hat{j}} - y_1^{\hat{j}}) - x_4^{\hat{l}}(x_4^{\hat{j}} - y_1^{\hat{j}})) + y_2^{\hat{k}}(x_3^{\hat{l}}(x_3^{\hat{j}} - y_2^{\hat{j}}) - x_1^{\hat{l}}(x_1^{\hat{j}} - y_2^{\hat{j}})) + \\ & + y_3^{\hat{k}}(x_4^{\hat{l}}(x_4^{\hat{j}} - y_3^{\hat{j}}) - x_2^{\hat{l}}(x_2^{\hat{j}} - y_3^{\hat{j}})) + y_4^{\hat{k}}(x_1^{\hat{l}}(x_1^{\hat{j}} - y_4^{\hat{j}}) - x_3^{\hat{l}}(x_3^{\hat{j}} - y_4^{\hat{j}})). \end{aligned}$$

Преобразуем его, используя кососимметричность тензора b :

$$\begin{aligned} Q = & b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 ((y_4^{\hat{k}} - y_2^{\hat{k}})(x_1^{\hat{l}}x_1^{\hat{j}} - x_3^{\hat{l}}x_3^{\hat{j}}) - y_2^{\hat{k}}x_3^{\hat{l}}y_2^{\hat{j}} + y_2^{\hat{k}}x_1^{\hat{l}}y_2^{\hat{j}} - y_4^{\hat{k}}x_1^{\hat{l}}y_4^{\hat{j}} + y_4^{\hat{k}}x_3^{\hat{l}}y_4^{\hat{j}} + \\ & + (y_1^{\hat{k}} - y_3^{\hat{k}})(x_2^{\hat{l}}x_2^{\hat{j}} - x_4^{\hat{l}}x_4^{\hat{j}}) - y_1^{\hat{k}}x_2^{\hat{l}}y_1^{\hat{j}} + y_1^{\hat{k}}x_4^{\hat{l}}y_1^{\hat{j}} - y_3^{\hat{k}}x_4^{\hat{l}}y_3^{\hat{j}} + y_3^{\hat{k}}x_2^{\hat{l}}y_3^{\hat{j}}) = \\ = & b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 ((y_4^{\hat{k}} - y_2^{\hat{k}})(x_1^{\hat{l}}x_1^{\hat{j}} - x_3^{\hat{l}}x_3^{\hat{j}}) + (y_1^{\hat{k}} - y_3^{\hat{k}})(x_2^{\hat{l}}x_2^{\hat{j}} - x_4^{\hat{l}}x_4^{\hat{j}}) + \\ & + (x_1^{\hat{k}} - x_3^{\hat{k}})(y_4^{\hat{l}}y_4^{\hat{j}} - y_2^{\hat{l}}y_2^{\hat{j}}) + (x_4^{\hat{k}} - x_2^{\hat{k}})(y_3^{\hat{l}}y_3^{\hat{j}} - y_1^{\hat{l}}y_1^{\hat{j}})). \end{aligned}$$

Из системы (68) находим, что

$$y_2^{\hat{i}} - y_4^{\hat{i}} = x_1^{\hat{i}} - x_3^{\hat{i}} = y_1^{\hat{i}} - y_3^{\hat{i}} = x_2^{\hat{i}} - x_4^{\hat{i}} \equiv p^{\hat{i}}. \quad (71)$$

Поэтому выражение Q примет вид:

$$Q = -b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 p^{\hat{k}} (x_1^{\hat{l}}x_1^{\hat{j}} - x_3^{\hat{l}}x_3^{\hat{j}} - x_2^{\hat{l}}x_2^{\hat{j}} + x_4^{\hat{l}}x_4^{\hat{j}} - y_4^{\hat{l}}y_4^{\hat{j}} + y_2^{\hat{l}}y_2^{\hat{j}} + y_3^{\hat{l}}y_3^{\hat{j}} - y_1^{\hat{l}}y_1^{\hat{j}}).$$

Преобразуем сумму в скобках, заменив в ней некоторые переменные с помощью (71):

$$x_2^{\hat{i}} = p^{\hat{i}} + x_4^{\hat{i}}, \quad x_1^{\hat{i}} = p^{\hat{i}} + x_3^{\hat{i}}, \quad y_1^{\hat{i}} = p^{\hat{i}} + y_3^{\hat{i}}, \quad y_2^{\hat{i}} = p^{\hat{i}} + y_4^{\hat{i}}.$$

Подставляя в Q , после преобразований получим $Q = 0$.

Таким образом, $P = \frac{1}{3}Q + R = 0$ и утверждение доказано.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Akivis M. A., Shelekhov A. M. Geometry and Algebra of Multidimensional Three-webs // Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1992. – 375 р.
2. Акивис М. А., Шелехов А. М. Многомерные три-ткани и их приложения. – Тверь: Тверской государственный университет, 2010. – 308 с.
3. Шелехов А. М. О три-тканях с эластичными координатными лупами. – Калинин: Калининский гос. ун-т. – Деп. в ВИНИТИ 2.12.1987, №8465-В87.
4. Balandina G. A., Shelekhov A. M. On general theory of elastic webs // Webs and Quasigroups. – Tver: Tver State University, 1995. – P. 62-74.

В. И. Доманов, К. Е. Карпухин, А. В. Сергеев (г. Ульяновск)

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДУГОВОЙ СТАЛЕПЛАВИЛЬНОЙ ПЕЧИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Рассматриваются вопросы экспериментального исследования САУ ДСППТ и определения статистических характеристик шума силового тока. Предлагается численный метод анализа случайных сигналов, позволяющий оценить динамические и статистические свойства САУ ДСППТ.

Ключевые слова: система управления, ток дуги, статистические характеристики, случайный сигнал.

Управление дуговой сталеплавильной печью постоянного тока (ДСППТ) осуществляется трехуровневой системой, представленной на рис. 1. Здесь: I_r – задаваемый ток дуги; S – строб, передающий регулятору управление электродом; I_a – измеренный ток дуги.



Рис. 1. Блок-схема системы управления электродуговой печью

На первом уровне находится хост-компьютер, программа которого позволяет технологам конфигурировать систему управления и следить за процессом плавки, а также накапливать протоколы процессов управления с целью анализа и совершенствования технологических процессов.

На втором уровне находится контроллер логического управления (КЛУ), который выполняет мониторинг состояний подсистем электродуговой печи, отрабатывает команды, подаваемые с пульта управления, вырабатывает сигналы управления регулятором тока, формирует протоколы процессов управления и плавки. КЛУ связан с хост-компьютером интерфейсом Ethernet с пропускной способностью 10 Мбит/с.

Третий – оперативный уровень управления обеспечивает регулятор тока. Разделение функций управления собственно плавкой металла между

программой логического управления и регулятором организовано следующим образом.

Программа логического управления плавкой, исполняемая в КЛУ, вначале своей работы выполняет функции контроля и управления обеспечивающих систем (энергосистема, гидростанция, система охлаждения). После вывода параметров функционирования этих систем в допустимые диапазоны значений программа управления инициализирует вывод электрода, свода и пода в исходное положение. Если исходное положение достигнуто, то программа управления оказывается в состоянии готовности начать плавку.

В этом состоянии регулятор играет роль следящей системы управления, а программа логического управления обеспечивает формирование сигнала I_r , задающего ток регулирования в соответствии с расписанием. Расписание токов регулирования задается с точностью до секунды. Программа для текущей позиции расписания отслеживает завершение отрезка времени действия текущего значения I_r и в момент смены позиции расписания выводит новое значение тока в модуль ЦАП контроллера. В состоянии программного управления процессом плавки программа КЛУ выполняет мониторинг всех обеспечивающих систем, а также отслеживает состояние кнопки «Стоп» и ситуацию, когда требуется менять электрод. При нажатии кнопки «Стоп» или возникновении потребности сменить электрод КЛУ снимает строб S и выводит электрод из печи. Строб S снимается также в любой аварийной ситуации, порожденной отказом обеспечивающих систем.

Во время плавки выполняется постоянное измерение и протоколирование тока дуги I_a . Ограниченнная пропускная способность канала связи «Хост-компьютер – КЛУ» и СУБД PostgreSQL, используемой на хост-компьютере, а также особенности протокола Ethernet заставляют, во-первых, буферизовать все протокольные сообщения в кольцевом буфере, а во-вторых, ограничивать частоту съема данных с датчика тока. Одна протокольная запись формируется один раз в 128 миллисекунд. Для ее формирование используется усреднение результатов нескольких измерений с целью фильтрации высокочастотной составляющей тока дуги.

Коэффициент передачи измерительного канала тока дуги и настройки соответствующего АЦП выбраны таким образом, чтобы в диапазоне допустимых входных значений АЦП был представлен ток до 4000 ампер, что позволяет фиксировать выбросы тока, возникающие при технологических коротких замыканиях.

По имеющимся протоколам тока были построены соответствующие диаграммы и распределения токов (рис. 2 – 5) для одноконтурной системы управления и системы управления с упреждающей коррекцией [1].

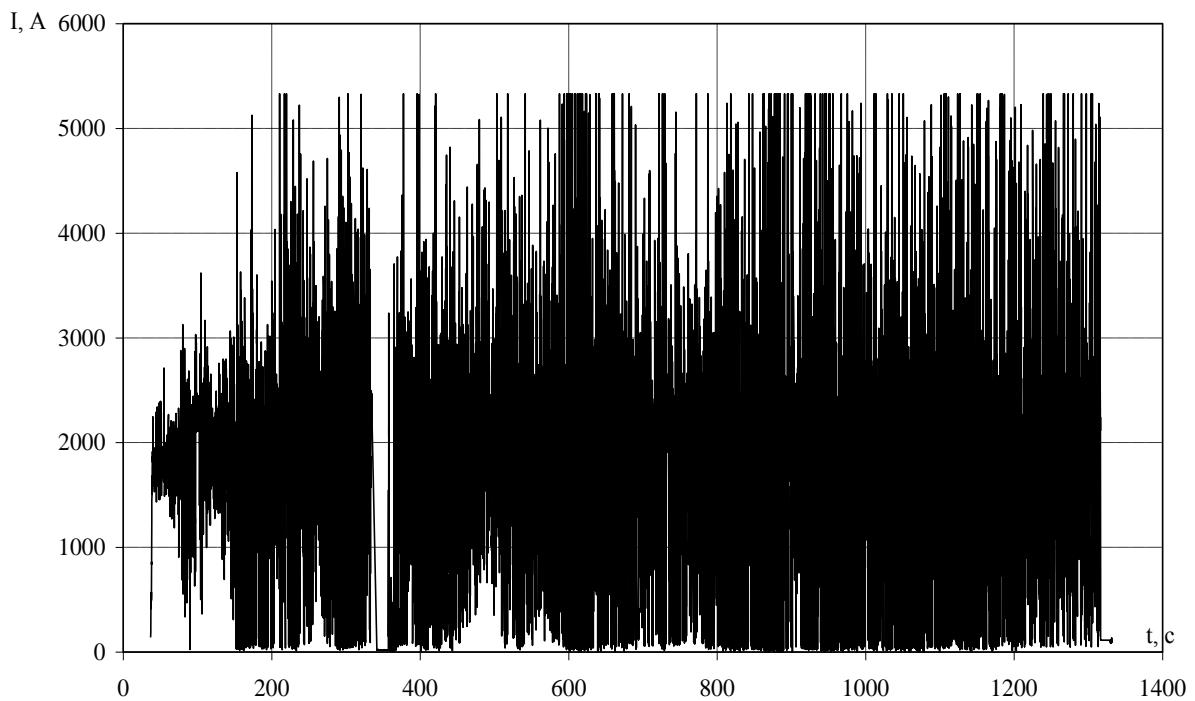


Рис. 2. Диаграмма тока дуги в одноконтурной системе

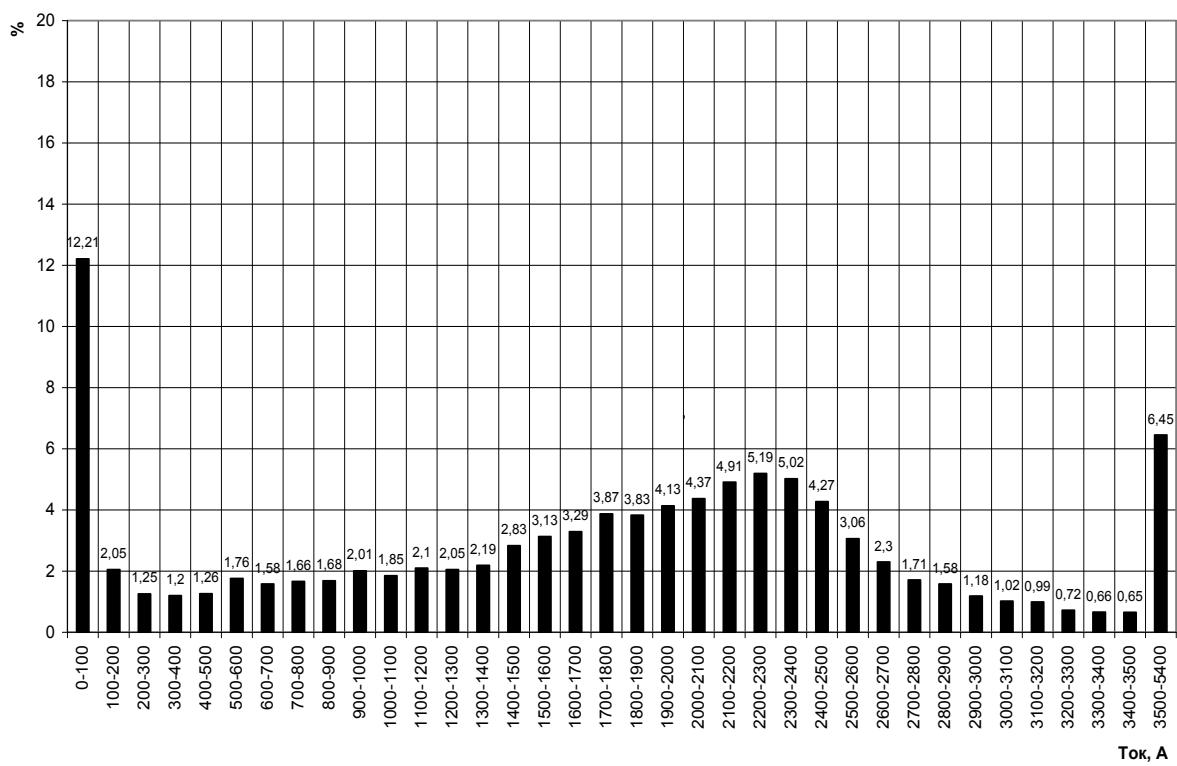


Рис. 3. График распределения тока дуги в одноконтурной системе

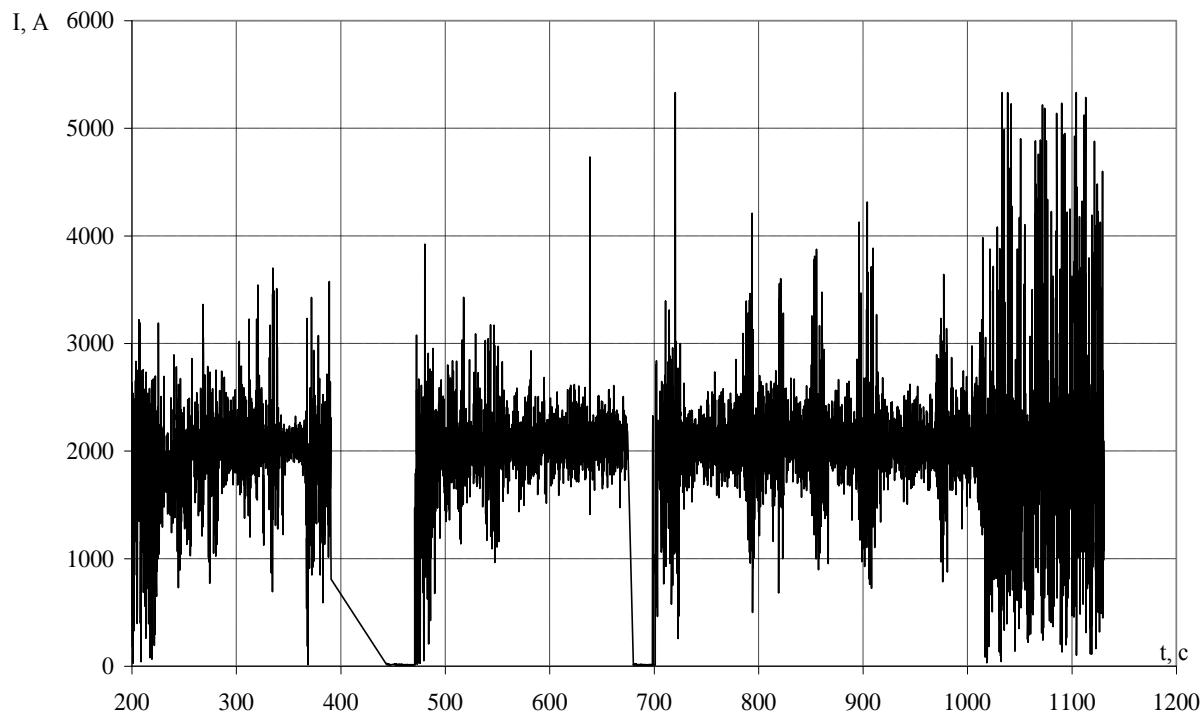


Рис. 4. Диаграмма тока дуги в системе с упреждающей коррекцией

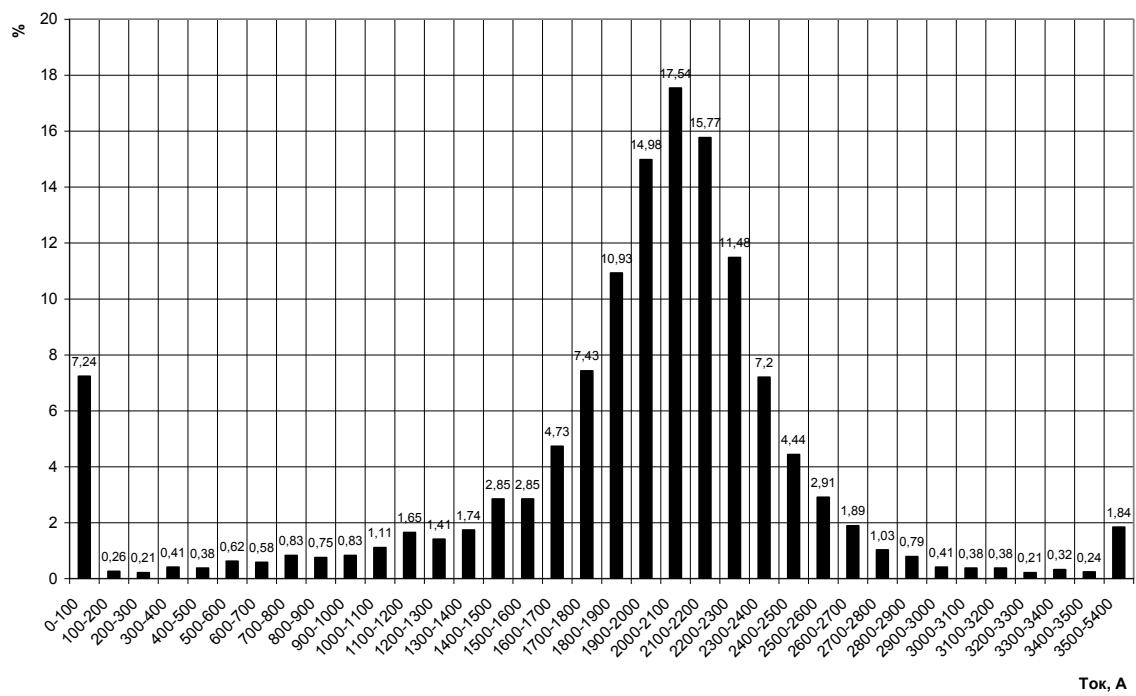


Рис. 5. График распределения тока дуги в системе с упреждающей коррекцией

Анализ графиков показывает, что распределение токов (без учета режимов КЗ и обрыва дуги) близок к нормальному закону распределения, который имеет место в тех случаях, когда случайная величина характеризует суммарный эффект большого числа независимых причин [2].

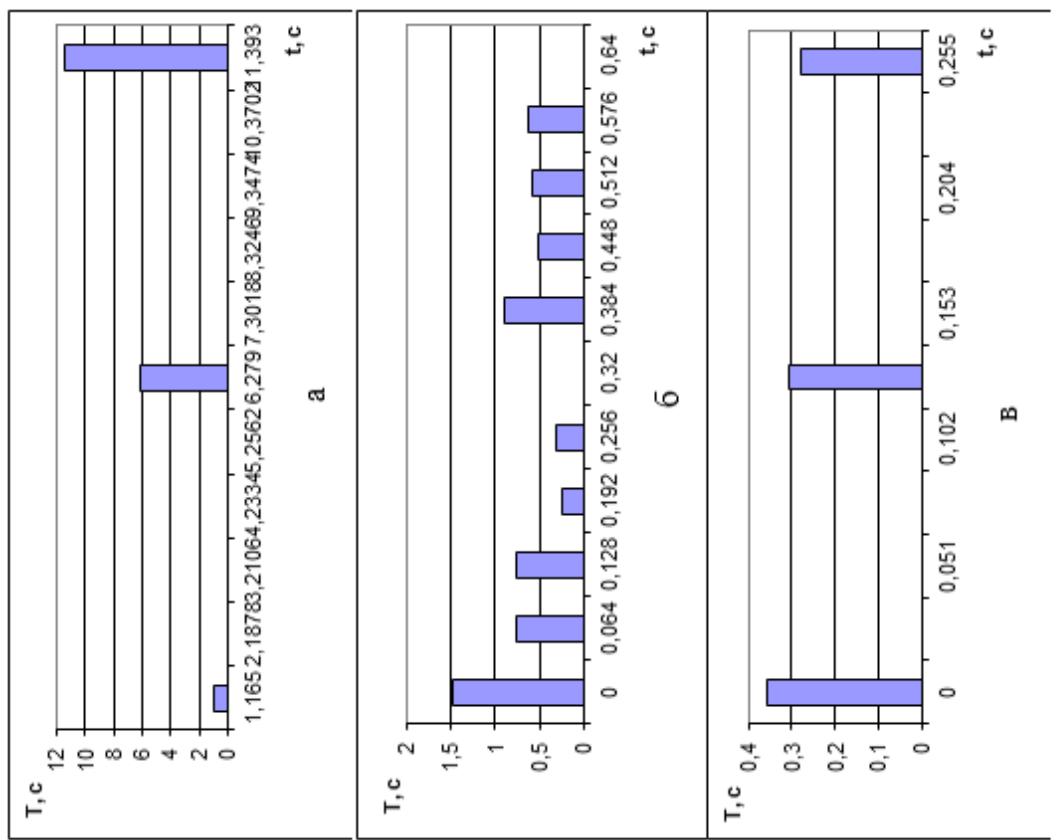
Для анализа статистических свойств случайных процессов наиболее часто используют функцию распределения, дисперсию и другие. В то же время более подробные характеристики случайного процесса можно получить за счет дополнительной обработки исходной информации численными методами. Отмечается [3], что такая информация содержится в частоте превышения случайных сигналов заданного уровня и распределение этих превышений по длительности. Однако определение этих характеристик не реализовано в известных специализированных программных средах (SpectraLAB, LabVIEW и др.). В работе [4] представлен алгоритм расчета указанных характеристик. Непрерывный шумовой сигнал путем аналого-цифрового преобразования заменяется его дискретными отсчетами $I_k \equiv I_k(k\Delta t)$, которые производятся в моменты времени $k\Delta t$, где индекс k меняется от 0 до N , а N – общее число выборок в реализации. Полная длительность реализации при этом определяется выражением $T = N \cdot k$.

Расчет распределения выбросов шумовых сигналов по длительности организован в виде двух циклов. Во внешнем цикле задается опорный ток $I_j^{on} = I_{max} - j\Delta I$ начиная с $j=1$. Для более точного построения искомых характеристик необходимо уменьшать шаг ΔI по току. Однако, с уменьшением этого шага будет возрастать влияние погрешности дискретизации при аналого-цифровом преобразовании $I(t)$ на результат вычисления искомых характеристик. Поэтому существует некоторое оптимальное значение ΔI , при котором суммарные погрешности определения статистических параметров будут минимальными. Общее число шагов K по току выбирают из соображений информативности и достаточности. Шаг по току находим из размаха сигнала:

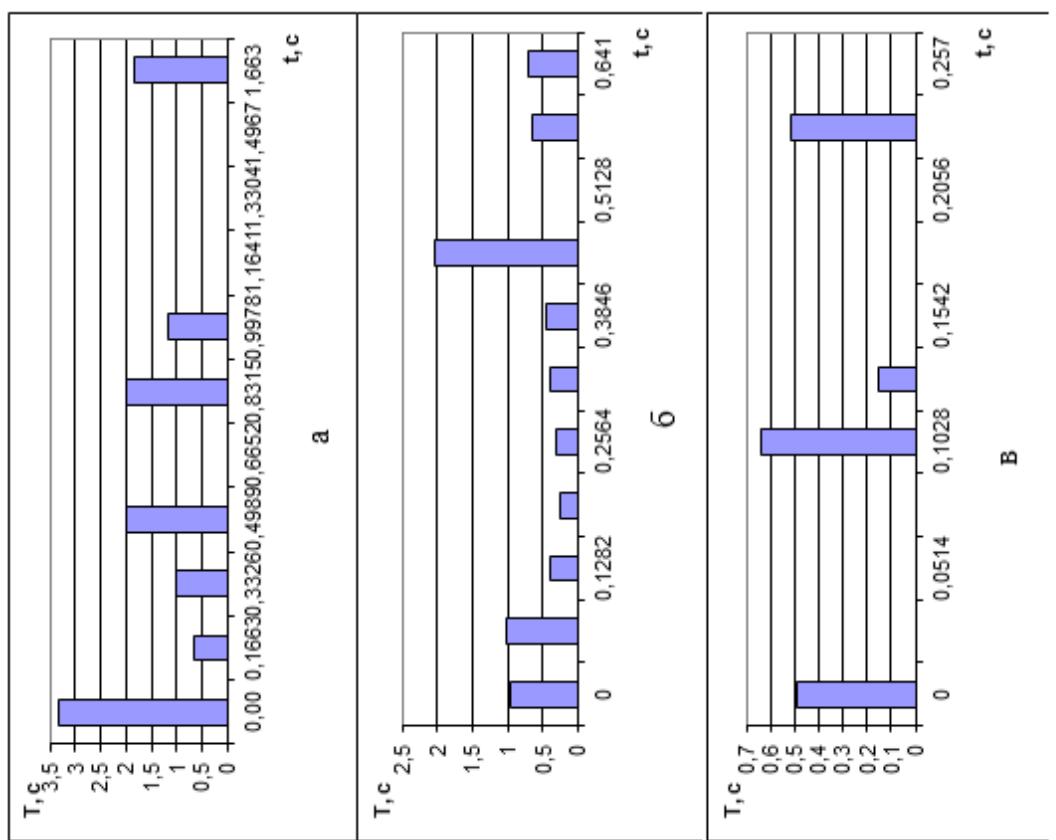
$$\Delta I = (I_{max} - I_{min}) / K.$$

Во внутреннем цикле значения $I_u(i\Delta t)$ поочередно сравниваются с I_j^{on} и при появлении s -го выброса, запускается счетчик числа отсчетов n_{js} для которых выполняется условие $I_u(i\Delta t) > I_j^{on}$. По окончании выброса число $\tau_{js} = n_{js}\Delta t$ запоминается, а перебор значений $I_u(i\Delta t)$ продолжается до $i=N$, и по окончании шумовой реализации формируется M_j -мерный вектор значений $\{\tau_{js}\}$. Далее опорное значение I_j^{on} уменьшается на ΔI и цикл повторяется до тех пор пока величина I_j^{on} не достигнет минимального значения сигнала в реализации $I_j^{on} = I_{min}$. По полученным значениям можно определить функцию распределения случайного сигнала:

$$F(I_j^{on}) = \frac{1}{T} \sum_{s=1}^{M_j} \tau_{js} = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{M_j} n_{js}.$$



САУ с упреждающей коррекцией
 Рис. б. Распределение длительностей выбросов тока в реальной системе
 а – первая выборка; б – вторая выборка; в – третья выборка



Поскольку значение M_j равно числу выбросов случайного процесса, превышающих заданный уровень за время T , то частота $\nu(I_j^{on})$ превышения этого уровня находится по формуле

$$\nu(I_j^{on}) = \frac{M_j}{T} = f_d \frac{M_j}{N},$$

где f_d – частота дискретизации.

Для исследуемых процессов были рассчитаны распределения длительностей выбросов шумов (рис.6), где под буквой «а» представлены распределения для первых выборок, соответствующих нижней границе силового тока; под буквой «б» представлены распределения для вторых выборок, соответствующих номинальному значению силового тока; под буквой «в» представлены распределения для третьих выборок, соответствующих верхней границе силового тока. По осям «х» отложены длительности выбросов, по осям «у» – суммарные продолжительности выбросов соответствующих длительностей.

Применение предложенного численного метода анализа случайных сигналов позволяет оценить их динамические свойства и эффективность используемой коррекции. Для этого сравниваются разницы значений первой и третьей выборки для каждого эксперимента (Σ_1 и Σ_3). Значение $\Delta\Sigma = \Sigma_1 - \Sigma_3$ показывает интервал времени нахождения тока между границами для первой и третьей выборки. Это является непосредственной характеристикой эффективности работы системы управления.

Анализ распределения второй выборки эксперимента позволяет оценить гармонический состав каждого процесса. Граница второй выборки соответствует заданному значению, поэтому распределение характеризует интенсивность соответствующих гармоник.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Доманов В. И., Доманов А. В., Карпухин К. Е. Влияние случайных сигналов на работу системы регулирования тока дуговой плавильной установки // Приводная техника, 2010. – № 6. – С. 16-19.
2. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1966.
3. Справочник по радиоэлектронным устройствам в 2-х томах. Т.2 / Под ред. Д. П. Линде. – М.: Энергия, 1978. – 328 с.
4. Сергеев В. А., Фролов И. В. Измерение некоторых вероятностных характеристик низкочастотного шума полупроводниковых изделий дискретным методом // Современные проблемы создания и эксплуатации радиотехнических систем: тр. Всерос. науч. техн. конф. (Ульяновск, 22-23 сентября 2009 г.). – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – С. 288-291.

A. И. Ивашикун (г. Ульяновск)

АНАЛИЗ ДЕФОРМАЦИОННОГО ПОВЕДЕНИЯ МОДЕЛЕЙ МАТЕРИАЛОВ В ANSYS

Приведены результаты анализа влияния моделей материалов, свойства которых описаны различными способами, на выходные данные при исследовании поведения конструкций в условиях напряженного состояния. Данный вопрос представляет интерес, так как возникает необходимость определения достоверной модели материала при выполнении расчетных циклов, требующих больших временных затрат.

Решение многих вопросов анализа прочности конструкций требует больших временных затрат при расчете механических систем. В настоящий момент на помощь исследователям в данной области приходят программные комплексы, позволяющие многократно сократить время расчета. Однако для большинства конструкционных материалов нет данных, описывающих зависимость напряжений в металле от величины пластической деформации. Поэтому зачастую возникает вопрос создания достоверной модели, характеризующей тот или иной материал. В данном разделе выполнен анализ следующих моделей задания материалов в программном комплексе Ansys в условиях статического нагружения:

- билинейная с изотропным упрочнением (Bilinear isotropic hardening, далее – BI);
- билинейная с кинематическим упрочнением (Bilinear kinematic hardening, далее – BK);
- мультилинейная с изотропным упрочнением (Multilinear isotropic hardening) с линейной зависимостью диаграммы «напряжение - деформация» (далее – модель MIL);
- мультилинейная с изотропным упрочнением (Multilinear isotropic hardening) резко возрастающая на начальном этапе (далее – модель MIUL);
- мультилинейная с изотропным упрочнением (Multilinear isotropic hardening) резко возрастающая на конечном этапе (далее – модель MILL);
- мультилинейная с кинематическим упрочнением (Multilinear kinematic hardening) с линейной зависимостью диаграммы «напряжение - деформация» (далее – модель MIK);
- мультилинейная с кинематическим упрочнением (Multilinear kinematic hardening) резко возрастающая на начальном этапе (далее – модель MKUL);
- мультилинейная с кинематическим упрочнением (Multilinear kinematic hardening) резко возрастающая на конечном этапе (далее - MKLL).

В литературе приводятся данные о недостаточном соответствии билинейной модели материала с кинематическим упрочнением реальному материалу при больших деформациях [1, 2]. В случае возникновения больших деформаций рекомендуется применять мультилинейную модель с кинематическим упрочнением. Мультилинейная модель с кинематическим упрочнением использует модель Бесселинга, называемую подуровневой или накладывающейся и учитывающую эффект Баушингера. Поэтому билинейные модели с изотропным и кинематическим упрочнением рассмотрим для оценки уровня расхождения результатов с мультилинейными моделями.

Исходными данными для задания билинейных моделей являются:

- модуль упругости первого рода;
- коэффициент Пуассона;
- предел текучести;
- угол наклона участка диаграммы «напряжение – относительная деформация» в пластической области.

Исходными данными для задания мультилинейных моделей материала являются:

- модуль упругости первого рода;
- коэффициент Пуассона;
- табличные значения точек диаграммы «напряжение – относительная деформация» в пластической области.

Таким образом, мультилинейные модели материала позволяют построить более точную модель при наличии экспериментальных данных диаграммы «напряжение - относительная деформация».

Поставленная цель исследования достигается путем решения следующих задач:

- сравнение моделей материала MIUL и MILL с моделью MIL;
- сравнение моделей материала MKUL и MKLL с моделью MKL;
- сравнение моделей материала BI, BK, MIL и MKL между собой.

Сравнение поведения моделей материала представляет собой определение абсолютных и относительных отклонений значений фиксируемых показателей (полная деформация и максимальные напряжения в рассматриваемой системе тел).

Под абсолютным отклонением понимается разница между значениями рассматриваемого параметра для различных условий:

$$\Delta_A = |A_i - A_j|,$$

где A_i, A_j – значения рассматриваемого параметра для различных условий.

Под относительным отклонением понимается отношение абсолютного отклонения к значению параметра, относительно которого выполнено рассмотрение:

$$\delta_A = \Delta_A/A_i,$$

где A_i – значение параметра, относительно которого выполнено рассмотрение.

Дополнительной задачей решаемой в рамках данного исследования является определение способа задания нагрузки, позволяющего получить закономерно изменяющиеся во времени результаты.

В качестве объекта анализа напряжено-деформированного состояния приняты цельные шары с различными диаметрами (30, 45, 60, 75 и 90 мм), изготовленные из алюминиевого сплава Д16Т ГОСТ 4784-97 и титанового сплава ОТ4 ГОСТ 19807-91. Механические характеристики указанных материалов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Механические характеристики сплавов ОТ4 и Д16 [3]

Материал	ρ , кг/м ³	E, ГПа	μ	$\sigma_{0,2}$, МПа	σ_b , МПа	δ , %
ОТ4	4550	115	0,33	600	800	15
Д16Т	2770	72	0,32	320	450	18

где ρ – плотность, E – модуль упругости первого рода, μ – коэффициент Пуассона, $\sigma_{0,2}$ – предел текучести, σ_b – предел кратковременной прочности, δ – относительное удлинение при разрыве.

Зависимость напряжения в материале объекта исследования от относительной деформации для сплавов ОТ4 и Д16Т приведены на рисунках 1 и 2.

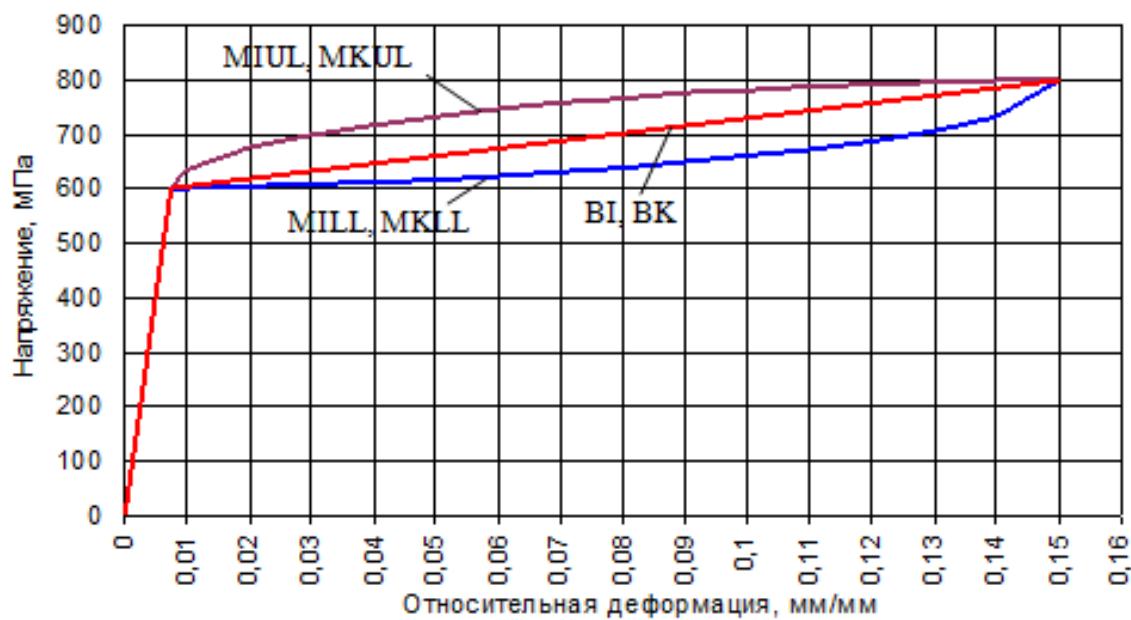


Рис. 1. Зависимость напряжения от значения относительной деформации сплава ОТ4

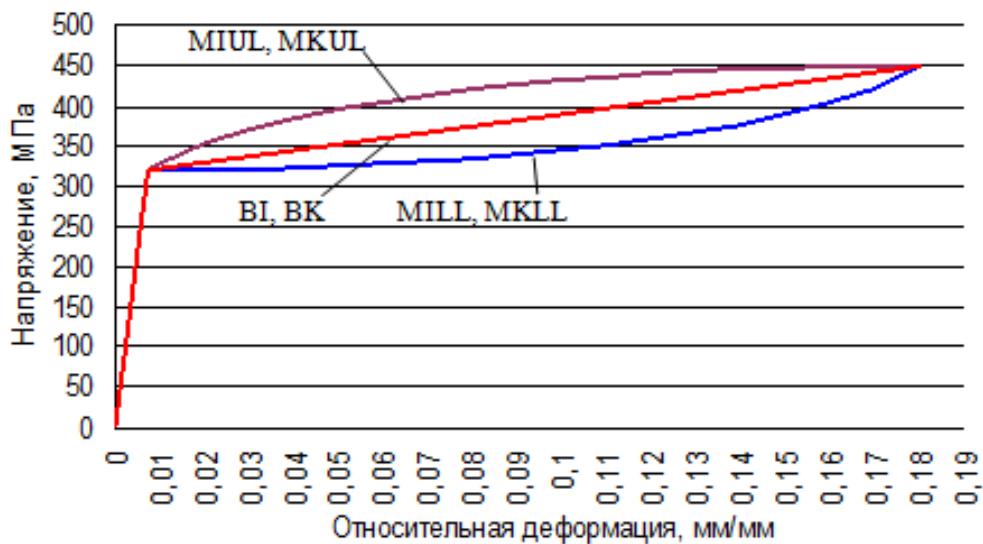


Рис. 2. Зависимость напряжения от значения относительной деформации сплава Д16

Для исследования моделей материала были приняты две схемы нагружения, представленные на рисунках 3 и 4.

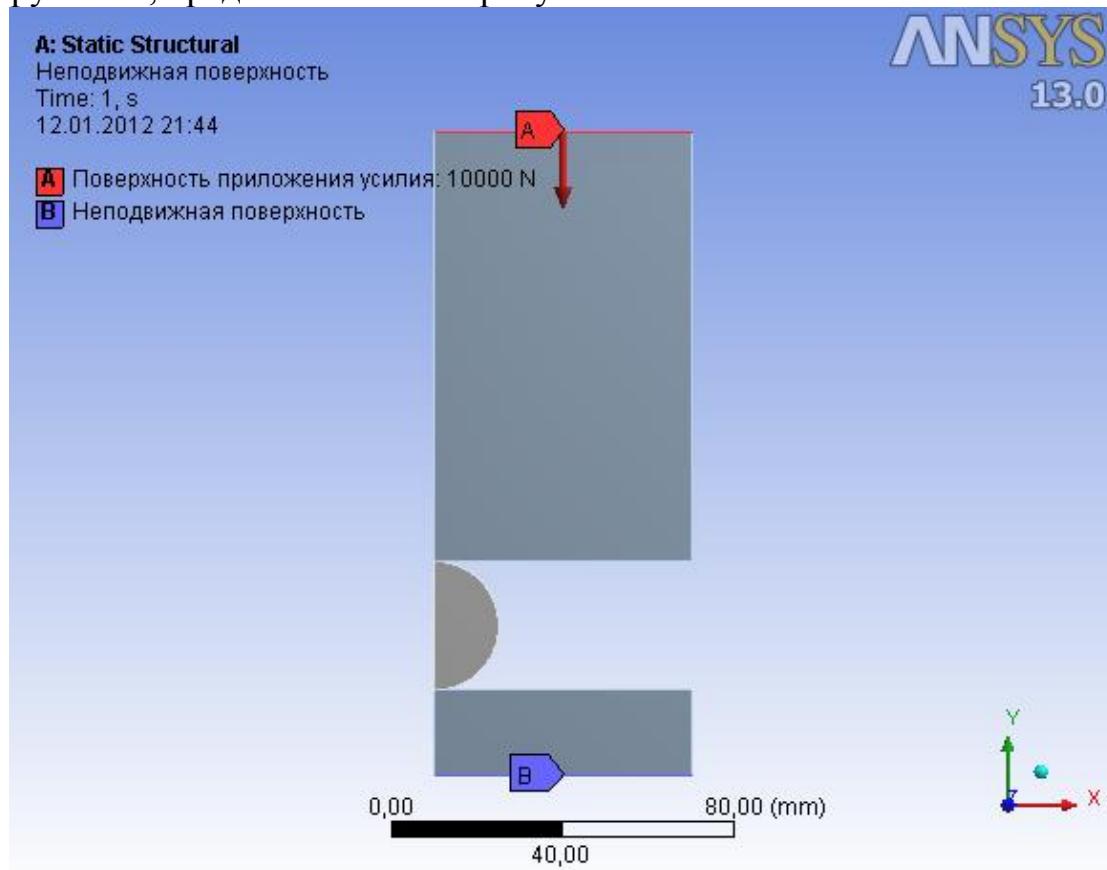


Рис. 3. Схема нагружения шара

Первая из них, приведенная на рисунке 3, представляет собой следующее:

- в начальный момент времени шар опирается на цилиндр высотой 20 мм, изготовленный из стали 45;

- далее шар сжимается цилиндром высотой 100 мм, изготовленным из стали 45, с силой 10 кН (действие нагрузки задается в один шаг с автоматическим разбиением на подшаги).

Вторая схема, приведенная на рисунке 4, аналогична первой и представляет собой следующее:

- в начальный момент времени шар опирается на цилиндр высотой 20 мм;
- далее шар сжимается цилиндром высотой 100 мм с силой 1 кН (действие нагрузки задается в десять шагов с автоматическим разбиением на подшаги).

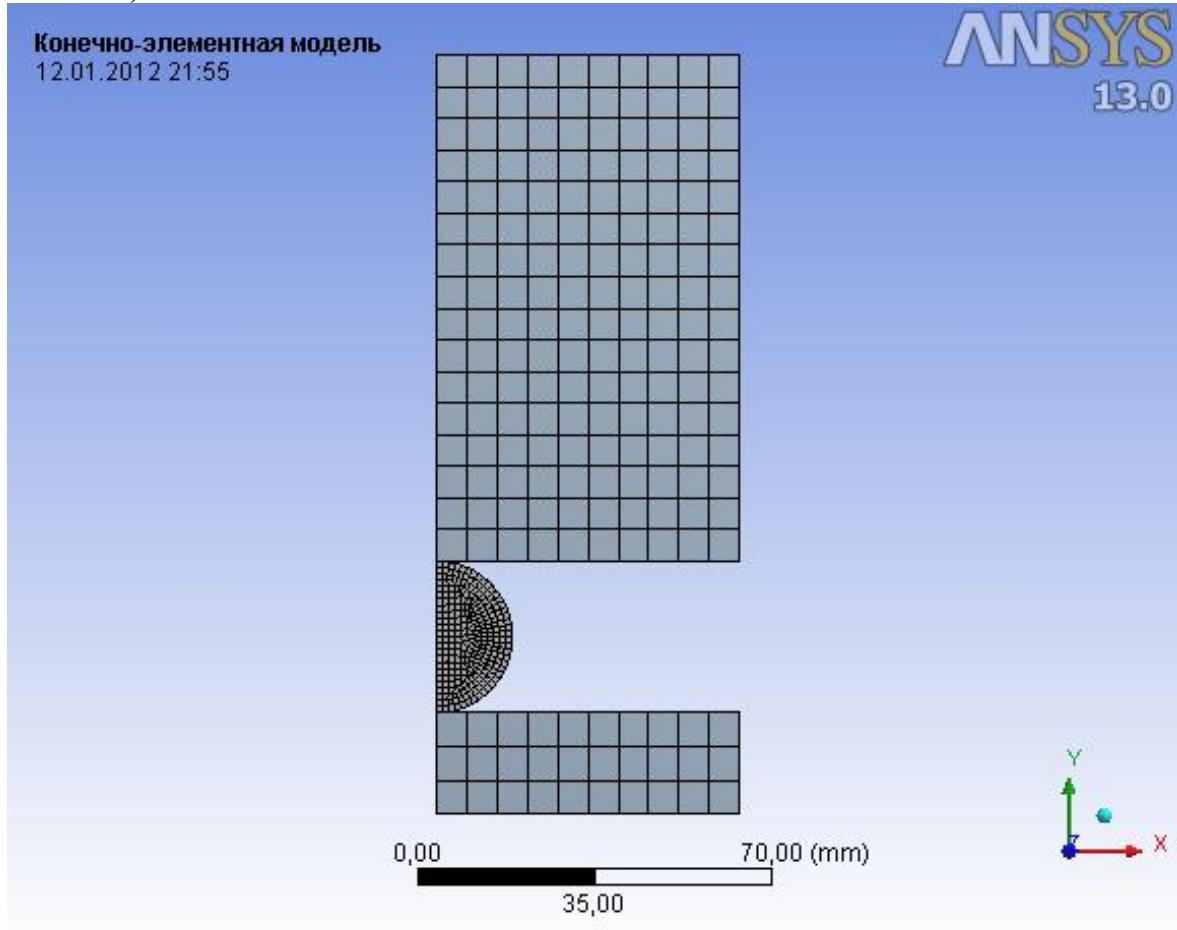


Рис. 4. Конечно-элементная модель рассматриваемой системы тел

Поскольку рассматриваемые тела являются телами вращения, то для экономии ресурсов средств автоматизации выполним решение задачи в осесимметричной постановке с последующей интерполяцией результатов на полноценную модель.

Конечно-элементная модель рассматриваемой механической системы тел представлена на рисунке 4 и состоит из 472 твердотельных элементов и 1555 узлов. Для анализа напряженно-деформированного состояния объекта исследования фиксировались значения полной деформации и

эквивалентного напряжения в теле шара. Под полной деформацией понимается максимальное перемещение верхнего цилиндра.

В таблице 2 приведены значения максимальных значений напряжений и деформаций, возникающих в результате нагружения шара силой 10 кН.

Таблица 2

Максимальные значения фиксируемых параметров для первой схемы нагружения

Диаметр шара, мм	Модель материала							
	BI	BK	MIL	MKL	MILL	MKLL	MIUL	MKUL
Напряжения для случая шара из сплава Д16Т, МПа								
30	381	380	365	380	362	363	392	387
45	350	359	348	359	329	320	353	353
60	340	342	325	342	315	313	346	345
75	334	328	323	328	312	313	338	339
90	311	338	332	338	320	317	337	334
Полные деформации для случая шара из сплава Д16Т, мм								
30	0,354	0,354	0,406	0,354	0,384	0,384	0,38	0,376
45	0,224	0,276	0,328	0,276	0,306	0,303	0,281	0,292
60	0,169	0,222	0,27	0,222	0,243	0,243	0,241	0,24
75	0,149	0,2	0,245	0,2	0,218	0,219	0,216	0,217
90	0,092	0,179	0,223	0,179	0,199	0,196	0,175	0,184
Напряжения для случая шара из сплава ОТ4, МПа								
30	651	650	646	645	615	615	705	705
45	609	609	605	608	602	603	598	598
60	611	611	605	605	601	601	619	614
75	608	608	599	578	600	588	574	554
90	494	494	413	412	414	412	405	404
Полные деформации для случая шара из сплава ОТ4, мм								
30	0,157	0,157	0,224	0,23	0,231	0,238	0,213	0,216
45	0,098	0,098	0,154	0,157	0,156	0,158	0,148	0,149
60	0,109	0,109	0,169	0,171	0,17	0,172	0,161	0,162
75	0,115	0,115	0,177	0,179	0,178	0,180	0,169	0,17
90	0,078	0,078	0,129	0,13	0,128	0,128	0,127	0,127

Для анализа адекватности модели задания материала необходимо сравнить данные согласно поставленным задачам.

В таблице 3 представлены значения абсолютного и относительного отклонения моделей материала MILL и MIUL относительно MIL, а также MKLL и MKUL относительно MKL (сплав Д16Т).

В таблице 4 представлены значения абсолютного и относительного отклонения моделей материала MILL и MIUL относительно MIL, а также MKLL и MKUL относительно MKL(сплав ОТ4).

Анализ полученных значений для первого случая нагружения позволяет сделать вывод о наличии относительных отклонений, не превышающих 11,2% для сплава Д16Т и 10% для сплава ОТ4.

Таблица 3

Сравнение моделей MILL, MIUL с MIL и MKLL, MKUL с MKL (сплав Д16Т)

Диаметр шара, мм	Δ_{MILL} , МПа или мм	δ_{MILL} , %	Δ_{MIUL} , МПа или мм	δ_{MIUL} , %	Δ_{MKLL} , МПа или мм	δ_{MKLL} , %	Δ_{MKUL} , МПа или мм	δ_{MKUL} , %
Отклонения напряжений для случая шара из сплава Д16Т								
30	3,79	1	26,9	7,4	16,4	4,3	7,29	1,9
45	19,5	5,6	4,2	1,2	38,8	10,8	5,67	1,6
60	9,82	3	21,4	6,6	28,3	8,3	3,25	1
75	10,7	3,3	15,4	4,8	15,2	4,6	10,2	3,1
90	12,3	3,7	4,36	1,3	20,2	6	3,67	1,1
Отклонения полных деформаций для случая шара из сплава Д16Т								
30	0,02	5,4	0,03	6,4	0,03	8,7	0,02	6,3
45	0,02	6,9	0,05	14,3	0,03	9,9	0,02	6
60	0,03	9,9	0,03	10,8	0,02	9,7	0,02	8,1
75	0,03	11,2	0,03	11,8	0,02	9,5	0,02	8,3
90	0,02	10,7	0,05	21,6	0,02	9,7	0,01	2,7

Примечания к таблице 3:

1. Δ_{MILL} – абсолютное отклонение параметров модели MILL относительно MIL.
2. δ_{MILL} – относительное отклонение параметров модели MILL относительно MIL.
3. Δ_{MIUL} – абсолютное отклонение параметров модели MIUL относительно MIL.
4. δ_{MIUL} – относительное отклонение параметров модели MIUL относительно MIL.
5. Δ_{MKLL} – абсолютное отклонение параметров модели MKLL относительно MIL.
6. δ_{MKLL} – относительное отклонение параметров модели MKLL относительно MIL.
7. Δ_{MKUL} – абсолютное отклонение параметров модели MKUL относительно MIL.
8. δ_{MKUL} – относительное отклонение параметров модели MKUL относительно MIL.
9. При рассмотрении отклонений напряжений абсолютное отклонение измеряется в МПа, при рассмотрении отклонений деформаций – в мм.

Таблица 4

Сравнение моделей материала MILL, MIUL с MIL и MKLL, MKUL с MKL (сплав OT4)

Диаметр шара, мм	Δ_{MILL} , МПа или мм	δ_{MILL} , %	Δ_{MIUL} , МПа или мм	δ_{MIUL} , %	Δ_{MKLL} , МПа или мм	δ_{MKLL} , %	Δ_{MKUL} , МПа или мм	δ_{MKUL} , %
Отклонения напряжений для случая шара из сплава OT4								
30	30,5	4,7	59,2	9,2	30,4	4,7	59,9	9,3
45	3,6	0,6	7,1	1,2	5,2	0,9	9,7	1,6
60	3,6	0,6	14,2	2,4	3,4	0,6	9,1	1,5
75	0,7	0,1	25,6	4,3	9,2	1,6	24	4,2
90	1,1	0,3	8	1,9	0,02	0,5	8,2	2
Отклонения полных деформаций для случая шара из сплава OT4								
30	0,008	3	0,012	5,1	0,008	3,5	0,014	6
45	0,001	0,8	0,007	4,4	0,002	1	0,008	5,2
60	0,001	0,6	0,008	4,5	0,001	0,8	0,008	4,9
75	0,001	0,4	0,008	4,6	0,001	0,5	0,008	4,9
90	0,002	1,3	0,002	1,6	0,002	1,4	0,002	1,7

Сравнение моделей материала ВІ, ВК, МІЛ и МКЛ между собой представлено в таблице 5.

Таблица 5

Относительные отклонения показателей моделей материала ВІ, ВК, МІЛ и МКЛ

Диаметр шара, мм	ВІ	ВК	МІЛ	МКЛ	Max	Min	$\delta, \%$
Напряжения для случая шара из сплава Д16Т, МПа							
30	381	380	365	380	381	365	4
45	350	359	348	359	359	348	2,9
60	340	342	325	342	342	325	4,9
75	334	328	323	328	334	323	3,5
90	311	338	332	338	338	311	8
Полные деформации для случая шара из сплава Д16Т, мм							
30	0,354	0,354	0,408	0,354	0,354	0,408	12,9
45	0,224	0,276	0,328	0,276	0,328	0,224	31,9
60	0,169	0,224	0,27	0,222	0,27	0,169	37,5
75	0,149	0,2	0,245	0,2	0,245	0,149	39
90	0,092	0,179	0,223	0,179	0,223	0,092	58,6
Напряжения для случая шара из сплава ОТ4, МПа							
30	651	650	646	645	651	651	8,6
45	609	609	605	608	609	605	0,7
60	611	611	605	605	611	605	2,3
75	608	608	599	578	609	578	4,8
90	494	494	413	412	494	412	16,6
Полные деформации для случая шара из сплава ОТ4, мм							
30	0,157	0,157	0,224	0,230	0,230	0,157	31,5
45	0,098	0,098	0,154	0,157	0,157	0,098	37,6
60	0,109	0,109	0,171	0,170	0,171	0,109	35,9
75	0,115	0,115	0,177	0,179	0,179	0,115	35,8
90	0,078	0,078	0,129	0,129	0,129	0,078	39,6

Анализ данных таблицы 5 позволяет сделать следующие выводы:

– расхождение в значениях напряжений практически во всех случаях не превышает 10% (кроме случая для шара диаметром 90 мм из сплава ОТ4);

– разница в значениях полной деформации практически во всех случаях не превышает 40% (исключением является случай для шара диаметром 90 мм из сплава Д16Т);

– поскольку максимальные напряжения реализуются во всех случаях в теле шара (см. рисунок 5), а полные деформации отражают максимальное перемещение цилиндра (см. рисунок 6), то в качестве основного критерия примем значения напряжений.

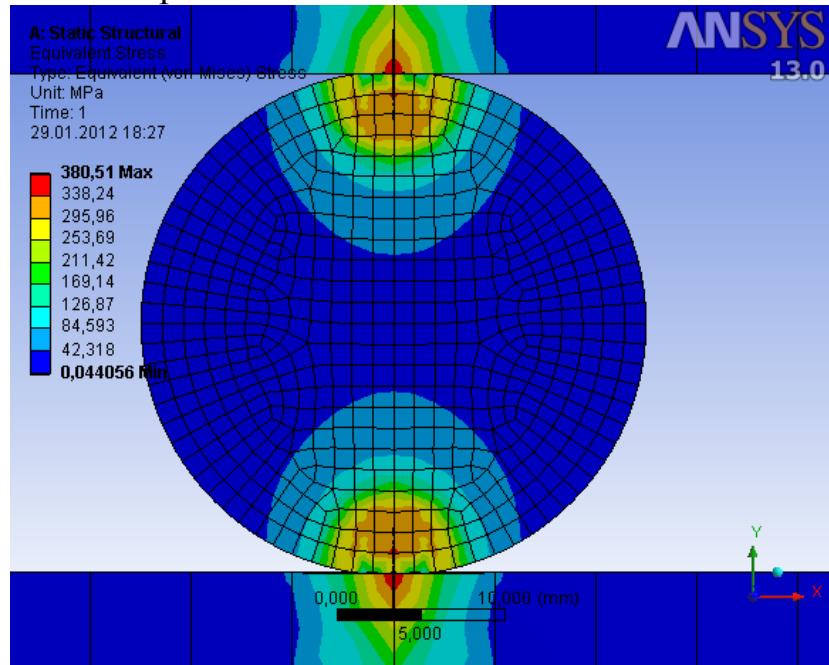


Рис. 5. Эквивалентные напряжения для шара диаметром 30 мм из сплава Д16Т
(модель материала BI)

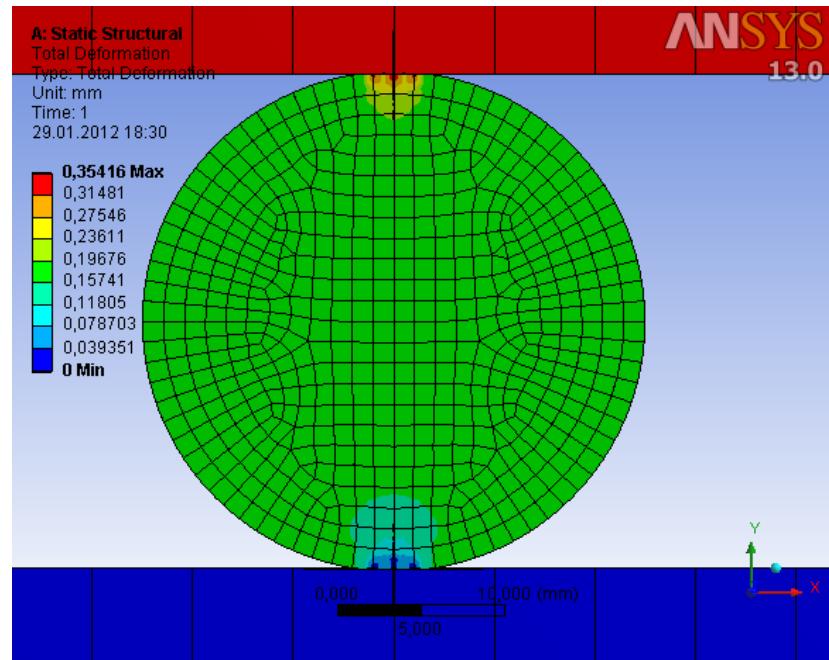


Рис. 6. Полная деформация для шара диаметром 30 мм из сплава Д16Т
(модель материала BI)

Распределения напряжений и полных деформаций для других случаев нагружения по первой схеме аналогичны, приведенным на рисунках 5 и 6.

Рассмотрение диаграмм, отражающих значения напряжений и полных деформаций в процессе нагружения, показывают наличие скачков, не являющихся закономерными для подобного нагружения. На рисунке 7 представлена диаграмма напряжений при нагружения шара диаметром 45 мм из сплава Д16Т.

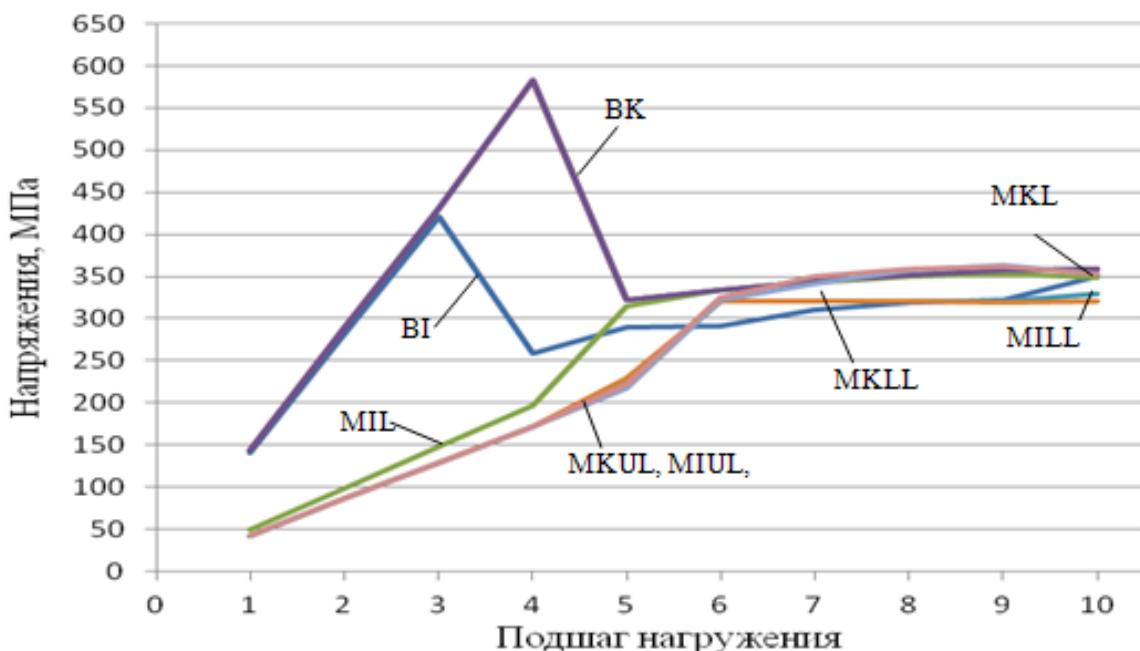


Рис. 7. Диаграмма напряжений при нагружении шара диаметром 45 мм из сплава Д16Т

Диаграммы напряжений и полных деформаций для других случаев нагружений по первой схеме (единовременным усилием 10 кН) имеют аналогичный характер. Следовательно возможной причиной полученных отклонений является автоматическое разбиение усилия на 10 подшагов.

Для изучения возможного влияния автоматического разбиения однократного нагружения на несколько подшагов рассмотрим вторую схему нагружения, описанную выше. В таблицах 6 и 7 приведены значения максимальных значений напряжений и деформаций, возникающих в результате нагружения шара (материал – сплав Д16Т и сплав ОТ4) силой 1 кН. Нагрузка задавалась за 10 шагов (от 0 до 1 кН с приращением 100 Н).

Данные, представленные в таблицах 6 и 7, показывают отличие значений контролируемых показателей моделей материала BI и BK от всех остальных приблизительно в 2 раза. Поскольку в обеих схемах нагружения (однократно 10 кН и 1 кН в десять шагов) шары из сплава ОТ4 работают в упругой области, то согласно закону Гука значения напряжений и полной деформации для первой схемы нагружения должны быть больше приблизительно в 10 раз соответствующих значений для второй схемы

нагружения. Полученные результаты для мультилинейных моделей практически в полном объеме соответствуют данному утверждению.

Таблица 6

Значения напряжений и деформаций при нагружении шара (сплав Д16Т)

Диаметр шара, мм	Модель материала							
	BI	BK	MIL	MKL	MILL	MKLL	MIUL	MKUL
Напряжения для случая шара из сплава Д16Т, МПа								
30	190	190	68	68	54,8	54,8	54,8	54,8
45	144	144	54,1	49,1	42,7	42,6	42,7	42,6
60	155	155	54,1	54,1	44,2	44	44,2	44
75	162	162	58,5	58,5	45,2	45,1	45,2	45,1
90	121	121	41,4	41,4	34,5	34,2	34,5	34,2
Полные деформации для случая шара из сплава Д16Т, мкм								
30	13,2	13,2	22,8	22,8	17	17	17	17
45	11,2	11,2	20,3	19,2	13,4	13,5	13,4	13,5
60	11,7	11,7	20,3	20,3	13,9	14	13,9	14
75	12,3	12,3	21,5	21,5	14,7	14,8	14,7	14,8
90	10,1	10,1	17,5	17,5	11,5	11,5	11,5	11,5

Таблица 7

Значения напряжений и деформаций при нагружении шара (сплав ОТ4)

Диаметр шара, мм	Модель материала							
	BI	BK	MIL	MKL	MILL	MKLL	MIUL	MKUL
Напряжения для случая шара из сплава ОТ4, МПа								
30	187	187	63,8	63,8	63,9	64	63,9	64
45	142	142	46,6	46,6	46,7	46,8	46,7	46,8
60	153	153	51,1	51,1	51,2	51,3	51,2	51,3
75	160	160	54,8	54,8	54,9	54,9	54,9	54,9
90	119	119	39,3	39,3	39,4	34,5	39,4	39,5
Полные деформации для случая шара из сплава ОТ4, мкм								
30	9,9	9,9	16,9	16,9	16,3	16,3	16,3	16,3
45	8,35	8,35	14,2	14,2	13,3	13,3	13,3	13,3
60	8,72	8,72	15	15	13,9	14	13,9	14
75	9,1	9,1	15,8	15,8	14,7	14,8	14,7	14,8
90	7,5	7,5	12,9	12,9	11,8	11,8	11,8	11,8

В таблицах 8 и 9 представлены значения абсолютного и относительного отклонения моделей материала MILL и MIUL относительно MIL, а также MKLL и MKUL относительно MKL для сплавов Д16Т и ОТ4.

Таблица 8

Сравнение моделей MILL, MIUL с MIL и MKLL, MKUL с MKL (сплав Д16Т)

Диаметр шара, мм	Δ_{MILL} , МПа или мкм	δ_{MILL} , %	Δ_{MIUL} , МПа или мкм	δ_{MIUL} , %	Δ_{MKLL} , МПа или мкм	δ_{MKLL} , %	Δ_{MKUL} , МПа или мкм	δ_{MKUL} , %
Отклонения напряжений для случая шара из сплава Д16Т								
30	0,1	0,5	0,1	0,49	0,12	0,54	0,12	0,54
45	0,13	0,6	0,13	0,6	0,18	0,8	0,17	0,8
60	0,11	0,5	0,11	0,5	0,14	0,58	0,14	0,6
75	0,07	0,3	0,07	0,3	0,1	0,34	0,1	0,35
90	0,1	0,3	0,1	0,36	0,14	0,46	0,14	0,45
Отклонения полных деформаций для случая шара из сплава Д16Т								
30	13	6,3	11	5,3	9	4,8	11	5,3
45	11	6	10	5,5	10	5,7	10	5,5
60	11	5,4	11	5,3	9	4,8	11	5,3
75	11	6	11	5,5	11	5,6	10	5,5
90	10	5,5	11	5,6	10	6	12	6,1

Таблица 9

Сравнение моделей материала MILL, MIUL с MIL и MKLL, MKUL с MKL (сплав OT4)

Отклонения напряжений для случая шара из сплава OT4								
30	0,1	0,2	0,1	0,16	0,14	0,22	0,14	0,22
45	0,13	0,3	0,13	0,3	0,18	0,4	0,17	0,4
60	0,11	0,2	0,11	0,21	0,14	0,27	0,14	0,26
75	0,07	0,1	0,07	0,12	0,1	0,19	0,1	0,18
90	0,1	0,3	0,1	0,26	0,14	0,36	0,14	0,35
Отклонения полных деформаций для случая шара из сплава OT4								
30	0,57	3,4	0,58	3,41	0,57	3,39	0,57	3,39
45	0,86	6	0,86	6,04	0,85	6,02	0,85	6,02
60	1	6,7	1	6,71	1	6,69	1	6,7
75	1,07	6,8	1,07	6,76	1,07	6,75	1,07	6,75
90	1,09	8,5	1,09	8,5	1,09	8,47	1,09	8,48
Примечание - при рассмотрении отклонений напряжений абсолютное отклонение измеряется в МПа, при рассмотрении отклонений деформаций – в мкм								

Анализ полученных значений для первого случая нагружения позволяет сделать вывод о наличии относительных отклонений не превышающих 6,1% для сплава Д16Т и 8,5% для сплава OT4.

Сравнение моделей материала BI, BK, MIL и MKL между собой для второй схемы нагружения в виде определения процентных соотношений по аналогии с первой схемой (см. таблицу 5) не имеет смысла; т. к. данные, представленные в таблицах 6 и 7, демонстрируют отличие в значениях билинейных и мультилинейных моделей приблизительно в 2 раза.

На диаграммах, отражающих значения напряжений и полных деформаций в течение нагружения, отсутствуют скачки аналогичные диаграммам первой схемы нагружения. На рисунке 8 представлена диаграмма напряжений для случая нагружения шара диаметром 45 мм из сплава Д16Т.

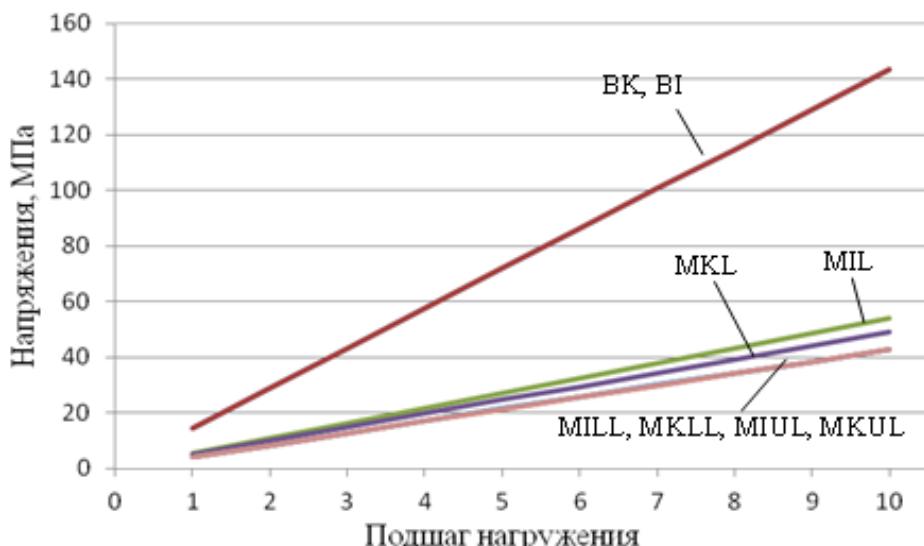


Рис. 8. Диаграмма напряжений для второй схемы нагружения шара диаметром 45 мм из сплава Д16Т

Данные, представленные на рисунке 8, демонстрируют возможность исключения непредсказуемых скачков путем «ручного» введения нескольких шагов нагружения.

Заключение

Анализ напряженно-деформированного состояния шаров в описанных выше условиях позволяет сделать следующие выводы:

- отклонения значений напряжений и полных деформаций шаров из сплавов Д16Т и ОТ4 для мультилинейных моделей материала не превышает 11,5 %;
- разница значений напряжений, возникающих в теле шара, для билинейных (BI и BK) и мультилинейных (MIL и MKL) моделей материала не превышает 10% в области пластической деформации;
- при моделировании деформирования тела в программном комплексе Ansys целесообразно применять «ручное» пошаговое нагружение;
- при выполнении сравнительного анализа поведения той или иной конструкции применение билинейных моделей материала позволяет получать достоверные результаты;

– при моделировании поведения реальной конструкции в условиях возможности возникновения пластической деформации рекомендуется применять мультилинейные модели материала.

Работа выполнена в рамках государственного задания №2014/232 Минобрнауки России.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Басов К. А. Ansys. Справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с.
2. Инженерный анализ в Ansys Workbench: Учеб. пособ. / В. А. Бруяка, В. Г. Фокин, Е. А. Солдусова, Н. А. Глазунова, И. Е. Адеянов. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – 271 с.
3. Физические величины: Справочник / А. П. Бабичев, Н. А. Бабушкина, А. М. Братковский и др.; Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.

C. V. Киреев (г. Ульяновск)

К ВОПРОСУ О ВЫБОРЕ ЗНАКА В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ УПРУГОЙ СВЯЗИ, В ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

Рассматривается задача о выборе знака в граничных условиях, соответствующих упругой связи. Решение задачи проводилось на основе уравнения, описывающего деформации стержня с распределенной нагрузкой.

Рассмотрим уравнение

$$Dw^{(4)} = q, \quad (1)$$

описывающее деформации стержня с распределенной нагрузкой q ($q = \text{const}$, $q > 0$) [1]. Проинтегрировав уравнение (1) четырежды, имеем

$$w(x) = \frac{q}{24D}x^4 + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3x + c_4.$$

Возьмем граничные условия

$$w(0) = 0, w'(0) = 0, w''(\ell) = 0, w'''(\ell) = cw(\ell), \quad (2)$$

соответствующие жесткой заделке слева и упругому элементу справа. Удовлетворяя граничным условиям (2), найдем коэффициенты c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , входящие в $w(x)$. После нахождения и подстановки их в выражение для $w(x)$, получим

$$w(x) = \frac{q}{24D}x^4 - \frac{q\ell}{48D} \frac{24 + 5c\ell^3}{3 + c\ell^3} x^3 + \frac{q\ell^2}{16D} \frac{12 + c\ell^3}{3 + c\ell^3} x^2. \quad (3)$$

Найдем значение прогиба на правом конце

$$w(\ell) = \frac{q\ell^4}{8D} \frac{3}{3 + c\ell^3}. \quad (4)$$

Так как на правом конце – упругая связь, то очевидно, что прогиб на этом конце будет меньше прогиба при отсутствии этой упругой связи (при $c = 0$). То есть

$$w(\ell)|_{c \neq 0} < w(\ell)|_{c=0}, \quad (5)$$

$$\frac{q\ell^4}{8D} \frac{3}{3 + c\ell^3} < \frac{q\ell^4}{8D} \Rightarrow c > 0. \quad (6)$$

Для граничных условий

$$w(\ell) = 0, w'(\ell) = 0, w''(0) = 0, w'''(0) = cw(0), \quad (7)$$

соответствующих жесткой заделке справа и упругому элементу слева, прогиб будет определяться формулой

$$w(x) = \frac{q}{24D}x^4 + c\frac{x^3}{48D}\frac{3q\ell^4}{3-cl^3} - \frac{q\ell^3}{96D}\frac{48+2cl^3}{3-cl^3}x + \frac{3q\ell^4}{8D(3-cl^3)}. \quad (8)$$

Найдем значение прогиба на левом конце

$$w(0) = \frac{3q\ell^4}{8D(3-cl^3)}.$$

Условие (5) будет иметь вид

$$w(0)|_{c \neq 0} < w(0)|_{c=0}, \quad (9)$$

$$\frac{3q\ell^4}{8D(3-cl^3)} < \frac{q\ell^4}{8D} \Rightarrow c < 0. \quad (10)$$

Для граничных условий

$$w(\ell) = 0, w'(\ell) = 0, w'(0) = 0, w'''(0) = cw(0), \quad (11)$$

соответствующих жесткой заделке справа и упругому элементу слева, прогиб будет определяться формулой

$$w(x) = \frac{q}{24D}x^4 + c\frac{x^3}{12D}\frac{q\ell^4}{12-cl^3} + \frac{x^2}{2}\left(-\frac{q\ell^2}{6D} - c\frac{q\ell^5}{4D}\frac{1}{12-cl^3}\right) + \frac{q\ell^4}{2D(12-cl^3)}. \quad (12)$$

Найдем значение прогиба на левом конце

$$w(0) = \frac{q\ell^4}{2D(12-cl^3)}.$$

Условие (5) будет иметь вид

$$w(0)|_{c \neq 0} < w(0)|_{c=0}, \quad (13)$$

$$\frac{q\ell^4}{2D(12-cl^3)} < \frac{q\ell^4}{24D} \Rightarrow c < 0. \quad (14)$$

Для граничных условий

$$w(0) = 0, w'(0) = 0, w''(\ell) = 0, w''(0) = cw'(0), \quad (15)$$

соответствующих жесткой заделке слева и упругому шарниру справа, прогиб будет определяться формулой

$$w(x) = \frac{q}{24D}x^4 - \frac{x^3q\ell}{6D} + \frac{x^2}{2}\left(\frac{q\ell^2}{6D}\frac{3-2cl}{1-cl^3}\right). \quad (16)$$

Найдем значение прогиба на правом конце

$$w(\ell) = \frac{q\ell^4}{24D}\left(1 + \frac{2}{1-cl}\right).$$

Условие (5) будет иметь вид

$$w(\ell)|_{c \neq 0} < w(\ell)|_{c=0}, \quad (17)$$

$$\frac{q\ell^4}{24D}\left(1 + \frac{2}{1-cl}\right) < \frac{q\ell^4}{8D} \Rightarrow c < 0. \quad (18)$$

Для граничных условий

$$w(\ell) = 0, \quad w'(\ell) = 0, \quad w''(0) = 0, \quad w''(0) = cw'(0), \quad (19)$$

соответствующих жесткой заделке справа и упругому шарниру слева, прогиб будет определяться формулой

$$w(x) = \frac{q}{24D}x^4 - c \frac{x^2 q \ell}{12D} \frac{1}{1+c\ell} - \frac{q \ell^3}{6D} \frac{1}{1+c\ell} x + \frac{q \ell^4}{24D} \frac{3+c\ell}{1+c\ell}. \quad (20)$$

Найдем значение прогиба на левом конце

$$w(0) = \frac{q \ell^4}{24D} \left(\frac{3+c\ell}{1+c\ell} \right).$$

Условие (5) будет иметь вид

$$w(0) \Big|_{c \neq 0} < w(0) \Big|_{c=0}, \quad (21)$$

$$\frac{q \ell^4}{24D} \left(\frac{3+c\ell}{1+c\ell} \right) < \frac{q \ell^4}{8D} \Rightarrow c > 0. \quad (22)$$

Для граничных условий

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w(\ell) = 0, \quad w''(\ell) = cw'(\ell), \quad (23)$$

соответствующих жесткой заделке слева и упругому шарниру справа, прогиб будет определяться формулой

$$w(x) = \frac{q}{24D}x^4 - c \frac{x^3 q \ell}{12D} \frac{c\ell - 5}{4 - c\ell} + - \frac{q \ell^2}{24D} \frac{6 - c\ell}{4 - c\ell} x^2. \quad (24)$$

Найдем значение прогиба в середине

$$w\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{q \ell^4}{384D} \left(\frac{8 - c\ell}{4 - c\ell} \right).$$

Условие (5) будет иметь вид

$$w\left(\frac{\ell}{2}\right) \Big|_{c \neq 0} < w\left(\frac{\ell}{2}\right) \Big|_{c=0}, \quad (25)$$

$$\frac{q \ell^4}{384D} \left(\frac{8 - c\ell}{4 - c\ell} \right) < \frac{q \ell^4}{192D} \Rightarrow c < 0. \quad (26)$$

Для граничных условий

$$w(\ell) = 0, \quad w'(\ell) = 0, \quad w(0) = 0, \quad w''(0) = cw'(0), \quad (27)$$

соответствующих жесткой заделке справа и упругому шарниру слева, прогиб будет определяться формулой

$$w(x) = \frac{q}{24D}x^4 + \frac{x^3}{6} \left(-\frac{q \ell}{3D} - \frac{q \ell}{6} \frac{1+c\ell}{4+c\ell} \right) + \frac{x^2}{24} \frac{cq \ell^3}{4+c\ell} + \frac{q \ell^3 x}{12(4+c\ell)}. \quad (28)$$

Найдем значение прогиба в середине

$$w\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{5q \ell^4}{1152D} + \frac{q \ell^4}{288D} \left(\frac{11 + 2c\ell}{4 + c\ell} \right).$$

Условие (5) будет иметь вид

$$w\left(\frac{\ell}{2}\right) \Big|_{c \neq 0} < w\left(\frac{\ell}{2}\right) \Big|_{c=0}. \quad (29)$$

$$-\frac{5q\ell^4}{1152D} + \frac{q\ell^4}{288D} \left(\frac{11+2c\ell}{4+c\ell} \right) < -\frac{5q\ell^4}{1152D} + \frac{q\ell^4}{288D} \left(\frac{11}{4} \right) \Rightarrow c > 0. \quad (30)$$

Итак [2], для упругих типов связей граничные условия имеют вид

$$w''(b) = \pm cw'(b), \quad w'''(b) = \pm cw(b), \quad b = 0, \quad b = \ell \quad (c > 0).$$

Знак (+) берется, если упругий шарнир слева, упругий элемент справа и знак (-), если упругий шарнир справа, упругий элемент слева, т. е.

$$w''(0) = c_2 w'(0),$$

$$w'''(0) = 0,$$

$$w''(\ell) = -c_2 w'(\ell), \quad c_2 > 0,$$

$$w'''(\ell) = 0,$$

$$w''(0) = c_2 w'(0),$$

$$w(0) = 0,$$

$$w''(\ell) = -c_2 w'(\ell), \quad c_2 > 0,$$

$$w(\ell) = 0,$$

$$w''(0) = 0,$$

$$w'''(0) = -c_1 w(0),$$

$$w''(\ell) = 0,$$

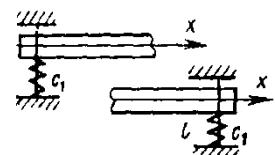
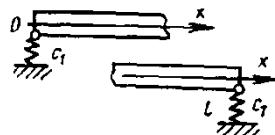
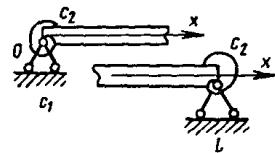
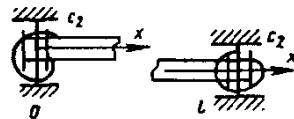
$$w'''(\ell) = c_1 w(\ell), \quad c_1 > 0,$$

$$w'(0) = 0,$$

$$w'''(0) = -c_1 w(0),$$

$$w'(\ell) = 0,$$

$$w'''(\ell) = c_1 w(\ell), \quad c_1 > 0.$$



Работа выполнена в рамках государственного задания №2014/232 Минобрнауки России и при поддержке гранта РФФИ № 15-01-08599.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
- Вельмисов П. А., Киреев С. В. Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – 200 с.

А.В. Корнеев, А.С. Семёнов (г. Ульяновск)

ОДНА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЕМ ПЛАТФОРМЫ ЭКСКАВАТОРА ПО МИНИМУМУ ПОТЕРЬ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА УПРАВЛЕНИЕ В ВИДЕ НЕРАВЕНСТВА

В работе, используя математическую модель поворота платформы экскаватора электродвигателем постоянного тока, рассматривается задача оптимального управления электродвигателя по минимуму потерь с ограничением на управление вида $|u(t)| \leq U_0$. Поставленная задача сведена к частному случаю задачи Майера-Больца и решена методом вариационного исчисления. Установлены интервалы значений параметра ограничения U_0 , зависящие от параметров модели электродвигателя, каждому из которых соответствует отличающийся от других вид оптимального кусочно-линейного управления.

I. Рассмотрим случай поворота платформы экскаватора электродвигателем постоянного тока. Предполагая магнитный поток постоянным, основное уравнение электродвигателя – уравнение равновесия моментов на валу – в безразмерном виде может быть записано так [1]

$$x'_1 = u_1 - \beta,$$

где $x_1(t)$ – угловая скорость, $x_1(t) \geq 0$; $u_1(t)$ – переменная, пропорциональная току в якоре электродвигателя; β – фиксированный момент сопротивления ($\beta > 0$). В начальный t_0 и конечный T моменты времени должны выполняться условия $x_1(t_0) = x_1(T) = 0$. Будем предполагать так же заданной величину углового перемещения платформы и обозначим её в относительных единицах через α ($\alpha > 0$). Тогда

$$\int_{t_0}^T x_1(t) dt = \alpha.$$

Поставим следующую задачу: требуется среди функций $x_1(t)$ и $u_1(t)$, удовлетворяющих на отрезке $[t_0, T]$ вышеприведённым соотношениям, и условию $|u_1(t)| \leq U_0$, (U_0 – заданный параметр, $U_0 > \beta$) найти такие, которые доставляют функционалу

$$J = \int_{t_0}^T u_1^2(t) dt \quad (1)$$

минимальное значение. Заметим, что функционал (1) определяет в относительных единицах тепловые потери в якоре электродвигателя.

Введя дополнительные функции $x_2(t)$ и $u_3(t)$ по формулам

$$x_2(t) = \int_{t_0}^t x_1(t) dt, u_3^2(t) = U_0^2 - u_1^2(t),$$

получаем следующий частный случай вариационной задачи Майера –

Больца [2]: среди непрерывных неотрицательных фазовых координат $x_1(t)$, $x_2(t)$ и кусочно-непрерывных управлений $u_1(t)$, $u_2(t)$, удовлетворяющих на отрезке $[t_0, T]$ дифференциальным уравнениям

$$x'_1 = u_1 - \beta, x'_2 = x_1 \quad (2)$$

и соотношению

$$u_1^2 + u_2^2 - U_0^2 = 0, \quad (3)$$

а на концах отрезка – условиям

$$t_0 = 0, \quad (4)$$

$$x_1(t_0) = 0, \quad x_2(t_0) = 0. \quad (5)$$

$$x_1(T) = 0, \quad x_2(T) = \alpha. \quad (6)$$

$$T = T_0, \quad (7)$$

найти такие, которые сообщают функционалу (1) минимальное значение.

II. Решаем задачу вариационным методом [2]. Строим функцию H , имеем

$$H = -u_1^2 + \lambda_1(u_1 - \beta) + \lambda_2 x_1 + \mu_1(u_1^2 + u_2^2 - U_0^2),$$

где $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\mu_1(t)$ – функциональные множители Лагранжа. Тогда из условий стационарности (правило множителей) получаем

$$\lambda'_1 = -\lambda_2, \quad \lambda'_2 = 0; \quad (8)$$

$$-2u_1 + \lambda_1 + 2\mu_1 u_1 = 0, \quad 2\mu_1 u_2 = 0, \quad (9)$$

причём в точках возможных разрывов непрерывности управлений сохраняется непрерывность фазовых координат, множителей λ_1 , λ_2 и функции H . Анализ соотношений (3), (8) и (9) показывает, что у экстремали (искомое оптимальное решение) могут быть участки следующих типов: 1) $\mu_1 = 0$, $u_2 \neq 0$, $|u_1| \leq U_0$;

$$2) \mu_1 \neq 0, \quad u_2 = 0, \quad u_1 = U_0;$$

$$3) \mu_1 \neq 0, \quad u_2 = 0, \quad u_1 = -U_0.$$

Принимая во внимание электромеханическую модель рассматриваемой оптимальной задачи, естественно предположить следующие возможные виды экстремалей:

1) экстремаль с единственным участком первого типа;

2) экстремаль с двумя последовательными участками второго и первого типа;

3) экстремаль с тремя последовательными участками второго, первого и третьего типа;

4) экстремаль с двумя последовательными участками второго и третьего типа.

Для первого вида экстремалей, предполагаем, что $U_0 > \beta$. Тогда, интегрируя систему дифференциальных уравнений (8), получаем $\lambda_1 = -C_1 t + C_2$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные интегрирования. Теперь, так как $\forall t \in [0; T_0]$: $\mu_1(t) = 0$, то из (9) следует, что

$$u_1 = \frac{1}{2}(-C_1 t + C_2).$$

Интегрируя систему дифференциальных уравнений (2) с начальными условиями (4), (5), имеем

$$x_1 = -\frac{1}{4}C_1 t^2 + \frac{1}{2}C_2 t - \beta t, \quad x_2 = -\frac{1}{12}C_1 t^3 + \frac{1}{4}C_2 t^2 - \beta t^2.$$

Удовлетворяя граничным условиям (6), для определения значений постоянных C_1, C_2 , получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -C_1 T_0 + 2C_2 = 4\beta, \\ -C_1 T_0^3 + 3C_2 T_0^2 = 12\alpha + 6\beta T_0^2. \end{cases}$$

Решая её, например, методом Крамера, получаем

$$C_1 = \frac{24\alpha}{T_0^3}, \quad C_2 = \frac{12\alpha}{T_0^2} + 2\beta.$$

Таким образом, экстремаль первого вида определяется формулами

$$u_1(t) = -\frac{12\alpha}{T_0^3}t + \frac{6\alpha}{T_0^2} + \beta, \quad x_1(t) = \frac{6\alpha}{T_0^2}t \left(1 - \frac{t}{T_0}\right).$$

Найдём при фиксированных значениях параметров α, β, T_0 допустимые значения параметра U_0 , при которых экстремаль первого вида является решением рассматриваемой оптимальной задачи. Так как

$$u_1(0) = \frac{6\alpha}{T_0^2} + \beta, \quad u_1(T_0) = -\frac{6\alpha}{T_0^2} + \beta$$

и $|u_1(0)| > |u_1(T_0)|$, то из линейности функции $u_1(t)$ следует, что $\forall t \in [0; T_0]: |u_1(t)| \leq \frac{6\alpha}{T_0^2} + \beta$. Значит, экстремаль первого вида является искомым решением, если выполняется условие $U_0 \geq \beta + \frac{6\alpha}{T_0^2} = U_1$.

Для второго вида экстремалей, предполагая, что $\beta < U_0 < \beta + \frac{6\alpha}{T_0^2}$ и

используя условия стационарности, последовательно получаем:

при $0 \leq t < t_1$: $u_1 = U_0$; $x_1 = (U_0 - \beta)t$;

при $t_1 \leq t \leq T_0$: $u_1 = -C_1(t - t_1) + C_2$. Тогда, из условия непрерывности функции H и, следовательно, непрерывности $u_1(t)$ при $t = t_1$, имеем $C_2 = U_0$ и $u_1 = -C_1(t - t_1) + U_0$. Теперь находим

$$x_1 = (U_0 - \beta)(t - t_1) - \frac{1}{2}C_1(t - t_1)^2 + C_3.$$

Из непрерывности в точке t_1 функции $x_1(t)$ следует $C_3 = (U_0 - \beta)t_1$.

Значит, $x_1 = (U_0 - \beta)t - \frac{1}{2}C_1(t - t_1)^2$. Для определения значений неизвестных t_1 и C_1 воспользуемся условиями $\int_{t_0}^T x_1(t) dt = \alpha$, $x_1(T_0) = 0$.

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (U_0 - \beta)T_0 - \frac{1}{2}C_1(T_0 - t_1)^2 = 0, \\ \frac{1}{2}(U_0 - \beta)T_0^2 - \frac{1}{6}C_1(T_0 - t_1)^3 = \alpha; \end{cases}$$

решением которой является пара

$$t_1 = \frac{3\alpha}{(U_0 - \beta)T_0} - \frac{1}{2}T_0, \quad C_1 = 2 \frac{(U_0 - \beta)T_0}{(T_0 - t_1)^2}. \quad (10)$$

Таким образом, экстремаль второго вида определяется формулами

$$u_1(t) = \begin{cases} U_0, & 0 \leq t < t_1; \\ U_0 - C_1(t - t_1), & t_1 \leq t \leq T_0; \end{cases}$$

$$x_1(t) = \begin{cases} (U_0 - \beta)t, & 0 \leq t < t_1; \\ (U_0 - \beta)t - \frac{1}{2}C_1(t - t_1)^2, & t_1 \leq t \leq T_0; \end{cases}$$

где значения t_1 и C_1 находятся по формулами (10).

Экстремаль второго вида будет искомым решением, если параметр U_0 удовлетворяет неравенству $u_1(T_0) \geq -U_0$, которое равносильно неравенству $U_0^2 + (\beta - \frac{6\alpha}{T_0^2})U_0 - 2\beta^2 \geq 0$. Решая его, получаем

$$U_0 \geq \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{6\alpha}{T_0^2} - \beta \right) + \sqrt{\left(\frac{6\alpha}{T_0^2} - \beta \right)^2 + 8\beta^2} \right\} = U_2.$$

Таким образом, решением рассматриваемой задачи оптимизации будет экстремаль второго вида, если выполняется неравенство $U_2 \leq U_0 < U_1$.

Для третьего вида экстремали предполагаем, что $\beta \leq U_0 < U_2$. Тогда, сопрягая, на основании условий стационарности, экстремальные участки второго и первого типа при $t = t_1$, а затем первого и третьего типа при $t = t_2$, последовательно получаем:

при $0 \leq t \leq t_1$ $u_1(t) = U_0$, $x_1(t) = (U_0 - \beta)t$;

при $t_1 < t \leq t_2$

$$u_1(t) = U_0 - \frac{2U_0}{t_2 - t_1}(t - t_1), \quad x_1(t) = (U_0 - \beta)t - \frac{U_0}{t_2 - t_1}(t - t_1)^2;$$

при $t_2 < t \leq T_0$ $u_1(t) = -U_0$, $x_1(t) = -(U_0 + \beta)t + U_0(t_2 + t_1)$.

Теперь для определения неизвестных t_1 , t_2 используя условия $\int_{t_0}^T x_1(t)dt = \alpha$, $x_1(T_0) = 0$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = T_0 \left(1 + \frac{\beta}{U_0} \right), \\ t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 = \frac{3}{2} T_0^2 \left(1 + \frac{\beta}{U_0} \right) - \frac{3\alpha}{U_0}. \end{cases}$$

Решая её, находим

$$t_1 = \frac{1}{2} T_0 \left\{ 1 + \frac{\beta}{U_0} - \sqrt{3} \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{U_0} \right)^2 - \frac{4\alpha}{U_0 T_0^2}} \right\},$$

$$t_2 = \frac{1}{2} T_0 \left\{ 1 + \frac{\beta}{U_0} + \sqrt{3} \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{U_0} \right)^2 - \frac{4\alpha}{U_0 T_0^2}} \right\}.$$

Очевидно, что экстремаль третьего вида, определяемая формулами

$$u_1(t) = \begin{cases} U_0, & 0 \leq t < t_1; \\ U_0 - \frac{2U_0}{(t_2 - t_1)}(t - t_1), & t_1 \leq t \leq t_2; \\ -U_0, & t_2 \leq t \leq T_0; \end{cases}$$

$$x_1(t) = \begin{cases} (U_0 - \beta)t, & 0 \leq t < t_1; \\ (U_0 - \beta)t - \frac{U_0}{(t_2 - t_1)}(t - t_1)^2, & t_1 \leq t < t_2; \\ -(U_0 + \beta)t + U_0(t_1 + t_2), & t_2 \leq t \leq T_0; \end{cases}$$

будет являться решением рассматриваемой задачи оптимизации, если выполняется неравенство $1 - \left(\frac{\beta}{U_0}\right)^2 - \frac{4\alpha}{U_0 T_0^2} > 0$ или равносильное ему неравенство $U_0^2 - \frac{4\alpha}{T_0^2} U_0 - \beta^2 > 0$. Решая последнее неравенство, находим

$$U_0 > \frac{2\alpha}{T_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\beta T_0^2}{2\alpha}\right)^2} \right) = U_3.$$

Таким образом, решением рассматриваемой задачи оптимизации будет экстремаль третьего вида, если выполняется неравенство $U_3 < U_0 < U_2$.

Для четвёртого вида экстремали предполагаем, что $\beta < U_0 \leq U_3$. Тогда, сопрягая, на основании условий стационарности, экстремальные участки второго и третьего типа при $t = t_3$, учитывая условие $x_1(T_0) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \begin{cases} U_0, & 0 \leq t < t_3; \\ -U_0, & t_3 \leq t \leq T_0; \end{cases} \\ x_1(t) &= \begin{cases} (U_0 - \beta)t, & 0 \leq t < t_3; \\ -(U_0 + \beta)t + 2U_0 t_3, & t_3 \leq t \leq T_0; \end{cases} \end{aligned}$$

где $t_3 = \frac{1}{2}T_0 \left(1 + \frac{\beta}{U_0} \right)$.

Экстремаль четвёртого вида будет решением рассматриваемой задачи оптимизации, если выполняется условие $\int_{t_0}^T x_1(t) dt = \alpha$, которое после интегрирования приводит к следующему уравнению относительно U_0

$$\frac{1}{2}(U_0 - \beta)t_3^2 - \frac{1}{2}((U_0 + \beta)(T_0^2 - t_3^2) + 2U_0 t_3(T_0 - t_3)) = \alpha.$$

Приведя его к равносильному уравнению $U_0^2 - \frac{4\alpha}{T_0^2} U_0 - \beta^2 = 0$, устанавливаем, что на множестве допустимых значений оно имеет единственное решение $U_0 = \frac{2\alpha}{T_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\beta T_0^2}{2\alpha}\right)^2} \right) = U_3$. Значит, решением рассматриваемой задачи оптимизации будет экстремаль третьего вида, если $U_0 = U_3$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Петров Ю. П. Вариационные методы оптимального управления. – М.-Л.: Энергия, 1977. – 250 с.
2. Троицкий В. А. Оптимальные процессы колебаний механических систем. – Л.: Машиностроение, 1976. – 246 с.

A. V. Кяшкин, Е. А. Мельникова (г. Тольятти)

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОДХОДОВ К ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ ПОСТРОЕНИЯ ДОПОЛНЕННОЙ РЕАЛЬНОСТИ НА ОСНОВЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

В статье проанализированы проблемы, с которыми сталкиваются разработчики систем дополненной реальности. Предложены некоторые подходы к оптимизации работы таких систем на основе распределенных вычислений и приведены некоторые результаты вычислительных экспериментов, подтверждающих уменьшение временных затрат при построении изображений за счет применения предложенных алгоритмов.

В настоящее время достаточно остро стоит проблема предоставления пользователю необходимой или актуальной для него информации в режиме реального времени. Одной из технологий, успешно решающих эту задачу, является дополненная реальность. Стоит отметить, что эта технология еще не достигла совершенства из-за неразвитой системы определения местоположения движущегося объекта с помощью камеры.

Дополненная реальность – понятие, используемое во всех проектах, направленных на дополнение реальности любыми виртуальными элементами [1]. Оно включает в себя добавление виртуальных объектов к видеоизображению в режиме реального времени, наложение вспомогательной информации на изображение объектов и окружающего пространства, и многое другое из того, что укладывается в концепцию дополнения реальности.

В разработанных к настоящему времени системах дополненной реальности можно выделить следующие недостатки.

- Невысокая степень надежности.
- Неудовлетворительное время отклика. Если совершается некоторое действие, а отклик на него получается спустя некоторое время, то невозможно эффективно осуществлять взаимодействие с пользователем в режиме реального времени, что является обязательным условием.
- Большой объем вычислений. Информация, поступающая на видоискатель, должна обрабатываться в реальном времени. При этом используется большое количество матричных преобразований и сложных алгоритмов распознавания, вследствие чего, особенно остро стоит проблема оптимизации вычислений.

Первым в России приложением дополненной реальности стало AlterGeo [2]. С его помощью пользователи получают информацию о

местоположении друзей и их любимых заведений, глядя сквозь камеру своего телефона – реальное изображение окружающего мира дополняется всплывающими информационными сообщениями. У такого подхода есть свои недостатки – это сильная ограниченность базы POI (place-of-interest), которую обрабатывает приложение; привязка к системе навигации и маркеров, которые в совокупности сильно ограничивают функциональность такой системы и в некоторых случаях дают существенные погрешности в определении положения объекта дополненной реальности.

Существуют два принципиальных подхода для создания дополненной реальности: с использованием заранее приготовленного маркера, который нужно распечатывать и без (рассмотрим далее – оптические системы). Оба подхода, используя алгоритмы “компьютерного зрения”, распознают объекты в кадре и дополняют их.

В теории, маркером может быть любая фигура (объект). Но на практике накладываются ограничения – разрешением веб-камеры (телефона), особенностями цветопередачи, освещением и вычислительной мощностью оборудования (все ведь происходит в реальном времени), а потому выбирается обычно черно-белый маркер простой формы. Как правило, это прямоугольник или квадрат с вписанным внутрь идентификатором-образом.

Алгоритм распознавания маркера состоит из следующих шагов:

- приведение цвета изображения к градациям серого;
- бинаризация изображения (порог);
- определение замкнутых областей;
- выделение контуров;
- выделение углов маркера;
- преобразование координат.

Для перевода цветного изображения в градации серого могут быть применены следующие алгоритмы:

- 1) освещенность (Lightness) - $GS = (\max(R,G,B) + \min(R,G,B))/2$,
- 2) светимость (Luminosity) - $GS = 0.21 \times R + 0.72 \times G + 0.07 \times B$,
- 3) среднее (Average) - $GS = (R + G + B) / 3$.

Для перевода изображения (бинаризации) в двухцветное состояние используется определенный порог. Вопрос в том, как и к чему этот порог применять. Самый простой способ – задать порог. Например, если имеется 256 цветов, то можно задать порог 128. Если немного усложнить – то можно выбрать порог, пользуясь гистограммой цвета. Вообще все методы превращения цветного изображения в черно-белое можно разделить на шесть больших групп [3]. Чаще всего используются методы на основе локальной адаптации [4]. Далее необходимо определить замкнутые области на белом фоне. Как правило, на этом шаге используется

комбинация алгоритмов, но в общем случае – как правило, применяют алгоритмы «заливки» белых областей и выделяют замкнутые области [5].

Для выделения контуров на изображении также существует несколько подходов. Внутри белых замкнутых областей ищутся контуры. В основном используются алгоритмы Кэнни и Собеля. Все методы основываются на одном из базовых свойств сигнала яркости – разрывности. Наиболее общим способом поиска разрывов является обработка изображения с помощью скользящей маски, называемой также фильтром, ядром, окном или шаблоном, которая представляет собой некую квадратную матрицу, соответствующую указанной группе пикселей исходного изображения. Элементы матрицы принято называть коэффициентами. Оперирование такой матрицей в каких-либо локальных преобразованиях называется фильтрацией или пространственной фильтрацией. Процесс основан на простом перемещении маски фильтра от точки к точке изображения; в каждой точке (x,y) отклик фильтра вычисляется с использованием предварительно заданных связей.

Выделив контур, его необходимо сопоставить с маркером. Может быть выделено много разных контуров на изображении, но в текущем контексте необходимо найти что-то «похожее» на четырехугольник. Для решения этой задачи можно применить алгоритм Дугласа-Пекера [6] (он же алгоритм Рамера-Дугласа-Пекера, алгоритм итеративной ближайшей точки, алгоритм разбиения и слияния), позволяющий уменьшить число точек кривой, аппроксимированной большей серией точек.

Таким способом получают координаты углов маркера, которые, по сути, в идеале являются перпендикулярными, а в реальности расположены под другим углом. Кроме того, и в идеале, и в реальности, стороны квадрата являются осями координат. Таким образом, можно определить положение «камеры» относительно нашего объекта, и точку отсчета начала координат. Идея заключается в том, что при изменении угла, с которого смотрит камера, изменяется размер проекции. Зная положение камеры и точки отсчета, можно нарисовать проекцию для 3D-модели. Если использовать квадрат с чистым полем в качестве маркера, то, ввиду его симметричности, распознать вращение можно только лишь частично. Иногда этого достаточно. Если же нет – то можно внести внутрь квадрата дополнительный маркер и получить в результате еще и угол поворота.

Но при использовании маркеров возникают сопутствующие проблемы – привязка к системе маркеров, которые сильно ограничивают функциональность системы, а также большой объем вычислений при обработке изображения, содержащего один единственный маркер. Альтернативным подходом являются оптические системы (на основе SLAM [7]). Далее рассмотрим основные принципы функционирования таких систем, а также предложения по их оптимизации.

Современные технологии дополненной реальности для взаимодействия с пользователем в основном используют карты местности, но, зачастую, построить такие карты для любого случая не представляется возможным. Другие используют множество сенсоров для фиксации каких-либо точек или маркеров – и тут тоже возникают свои ограничения, накладываемые диапазоном и качеством сенсора. Оптические же системы используют одну единственную камеру и не требуют заранее подготовленной карты окружающего мира. В самом начале осуществляется калибровка сенсора и инициализация какого-либо минимального участка пространства, которое является отправной точкой. Далее, в режиме реального времени, к этой начальной карте добавляются ранее неизвестные места, причем постоянное наличие отправной точки в фокусе является обязательным. Таким образом, мы получаем систему, которая «на ходу» строит и достраивает 3D-модель окружающего пространства. Весь процесс состоит из двух этапов: постоянное отслеживание положения снимающего устройства (трекинг) и создание карты местности (маппинг).

Для повышения эффективности работы систем дополненной реальности предлагается применение распределенных параллельных вычислений на этапах трекинга и маппинга. Если вычисления происходят в одном потоке, то все действия осуществляются последовательно, друг за другом в порядке очереди: получить кадр, обработать его дескриптором, определить местоположение камеры, на основании этих данных достроить карту и спроектировать на нее выделенные сущности, наложить на изображение виртуальный объект, вывести на экран. При параллельной обработке получаем два независимых потока, которые существенно оптимизируют систему, т.к. в этом случае им не обязательно иметь общие данные. В такой системе процессы накопления данных и их обработки происходят параллельно, при этом оба эти процессы производят вычисления парциально. Кроме того, большинство устройств, в том числе и мобильных, в настоящее время комплектуется многоядерным процессором, что позволяет легко распределять вычисления по ядрам. Освободившись от вычислительной нагрузки, которая вызвана необходимостью обновления карты после обработки каждого кадра, поток, который осуществляет трекинг, может выполнять более тщательную предобработку изображений, что также увеличивает производительность.

Применение параллельных вычислений обеспечивает еще один шаг на пути оптимизации систем. Т.к. маппинг и трекинг происходят в разных потоках независимо друг от друга, то появляется возможность не обрабатывать каждый кадр видео последовательно, что, в свою очередь, также обеспечивает немалый прирост эффективности.

Создание карты базируется на использовании кадров (фреймов), которые получаются за счет кадрирования видеопотока. Карта получается из стереопары, при этом новые точки добавляются на основании эпиполярного поиска [8]. Эти алгоритмы весьма успешно были реализованы лабораторией инженерной кафедры Оксфорда [9]. Маппинг в разработанной лабораторией системе осуществляется на основе SLAM-алгоритмов. Начальная калибровка занимает три секунды, при этом все, что нужно сделать пользователю – это провести камерой вдоль сцены, которая будет являться точкой инициализации, своеобразной «песочницей». Разработчики добились стабильной работы своей системы в небольшом замкнутом пространстве, при этом используя для съемки обыкновенную ручную камеру.

Но и эта разработка имеет недостатки. Во-первых, система работает только в небольших замкнутых пространствах со статическими объектами (например, кабинет). Во-вторых, требуются существенные вычислительные мощности для обработки входных данных. В-третьих, при определенных условиях система крайне неустойчива. В-четвертых, взаимодействие с окружающим миром ограничено построенной картой: виртуальный объект, который перекрывается реальным объектом, пока никак не обрабатывается.

В качестве возможных решений перечисленных проблем можно предложить следующие. Первая и вторая проблема решается заменой алгоритма поиска зависимостей между двумя кадрами на более надежный дескриптор изображений, который снижает объем ненужных, лишних вычислений при обработке кадров. Сложность вычислений снижается, и мы приходим к тому, что алгоритмы на основе SLAM могут выдавать достаточно высокий fps (frame-per-second – количество кадров в секунду) в режиме реального времени даже на открытых пространствах, работая при этом на двухядерном процессоре. Все основывается на том, что мы не используем каждый кадр видеоряда для маппинга, т.к. большинство из них содержит избыточную информацию, особенно когда камера статична и не двигается.

В то время, как обычные системы тратят свое время на повторную фильтрацию одних и тех же данных кадр за кадром, мы можем сосредоточиться на обработке меньшего количества *ключевых* кадров, содержащих для нас более полезную информацию. Полученные таким образом кадры уже не привязаны к ограничениям, накладываемым реальным временем (хотя обработка и должна быть закончена до того, как будет добавлен следующий ключевой кадр), что позволяет оперировать с картами большей размерности. Таким образом, мы пытаемся построить долгосрочные карты, в которых можем позволить себе дорогую, по затрачиваемым на нее ресурсам и времени, операцию оптимизации всей

карты. Третья проблема частично решается более тщательной калибровкой пользователем на шаге начальной инициализации. Для достижения стабильности, возможно повторение этой процедуры некоторое количество раз.

Таким образом, мы выделили некоторые проблемы, с которыми сталкиваются разработчики систем дополненной реальности и которые требуют эффективного решения. В настоящее время ведется работа по реализации предложенных подходов по оптимизации и оценки их эффективности. Было написано приложение для построения дополненной реальности, реализующее безмаркерную систему дополнения, под мобильное устройство на базе операционной системы iOS. Приведем некоторые результаты экспериментов.

Осуществляется съемка всей панорамы, чтобы обеспечить хороший обзор сцены, далее происходит более детальная съемка отдельных областей – с целью построения более детализированной карты. Далее осуществляется быстрое движение камеры вокруг сцены. На рисунке 1 показана зависимость времени, затрачиваемого на определение местоположения от количества кадров. График имеет резкий переход в том месте, где процесс трекинга оборвался, и была осуществлена попытка переопределения местоположения.

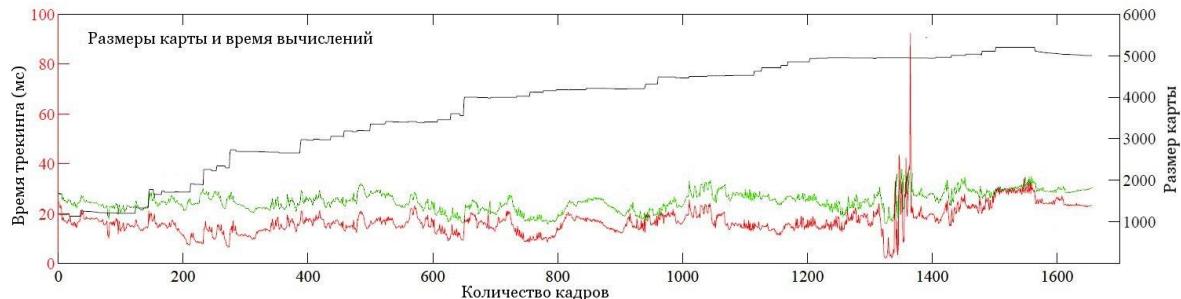


Рис. 1. Размер карты (правая шкала) и время трекинга (левая шкала)

Для большинства задач трекинг может быть завершен в пределах 20 мс, независимо от того, как быстро карта растет в размерах. На графике видно два исключения: трекинг обрывается на 1320 кадре и система пытается восстановить свое положение на нескольких кадрах, что, в свою очередь, занимает по 90 мс на каждый кадр. Также, на 1530 кадре трекинг занимает около 30 мс на кадр.

В таблице 1 показаны временные затраты для обработки обычного кадра. Подготовка кадра включает его захват, преобразование в серый цвет, построение пирамиды изображения и определение углов. Время на проецирование состоит из времени, затрачиваемого на проецирование всех точек на кадр, принятия решения об их видимости, и выборке тех из них, которые подвергнутся измерениям. Время, затрачиваемое на этом шаге,

растет линейно с размером карты, но также зависит и от того, какое количество точек находятся в прямой видимости камеры.

Таблица 1
Время выполнения трекинга

Подготовка ключевых кадров	2.2 мс
Проектирование	3.5 мс
Поиск областей	9.8 мс
Итеративное обновление позиции	3.7 мс
Всего	19.2 мс

Были произведены замеры времени работы системы с теми же данными, с внедренными оптимизациями. На рисунке 1 верхняя (зеленая) кривая соответствует системе на основе SLAM, а нижняя (красная) шкала – оптимизированной системе.

Система трекинга довольно хорошо масштабируется в зависимости от размера карты, но для потока, отвечающего за построение карты, это не так. Вычислить время для конкретного шага на этапе построения карты довольно сложно. Они сильно изменяются не только с размерами карты, но также сильно зависят и от структуры сцены. Поэтому приведем лишь «типичное» время выполнения:

Таблица 2
Блоchное уравнивание для карты различной размерности

Ключевые кадры	2-49	50-99	100-149
Локальное блочное уравнивание	170 мс	270 мс	440 мс
Глобальное блочное уравнивание	380 мс	1.7 с	6.9 с

В таблице приведены средние значения величин. Как только размеры карты превышают 100 ключевых кадров, глобальное блочное уравнивание не укладывается во временные рамки и почти всегда прерывается (исключение – когда камера статична). По сравнению с блочным уравниванием, время, затрачиваемое на эпиполярный поиск и уточнение данных достаточно мало. Обычно, все другие операции, требуемые для добавления нового ключевого кадра, занимают около 40 мс.

Таким образом, результаты экспериментов показывают, что предложенные подходы к оптимизации приложения, реализующего безмаркерную систему дополнения, позволяют уменьшить временные затраты на построение изображения. Дальнейшие исследования будут направлены на улучшение и стабилизацию написанной системы, портирование ее под iOS и ОС Android.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мамонтов Д. Обогащая реальность: Технология AG (Augmented Reality). – М.: Популярная механика, 2009.

2. Alter Geo Кросс-платформенный геосоциальный сервис. – <http://altergeo.ru/>
3. Sezgin M. Survey over image thresholding techniques and quantitative performance evaluation. – Journal of Electronic Imaging, 2004.
4. Fairchild M. Color appearance models. – Munsell Color Science Laboratory Rochester Institute of Technology, 2004.
5. Заполнение многоугольника и заливка области. – <http://program.rin.ru/razdel/html/888.html>
6. Алгоритм Дугласа-Пекера. – <http://geomalgorithms.com/>
7. Davison A., Reid I., Molton N., Stasse O. MonoSLAM: Real-time single camera SLAM to appear in IEEE Trans. – L.: Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007.
8. Roy S., Cox I. Direct Estimation of Rotation from Two Frames via Epipolar Search. – <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.38.1076>
9. Klein G., Murray D. Parallel Tracking and Mapping for Small AR Workspaces. – ISMAR, 2007.
10. Кяшкин А. В., Мельникова Е. А. Подходы к оптимизации систем построения дополненной реальности // Сборник статей I международной научно-практической конференции «Информационные системы и технологии: управление и безопасность». – Тольятти, 2012.

В. Л. Леонтьев (г. Ульяновск)

ОБ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ ФУНКЦИЯХ ФРАНКЛИНА, ОРТОНОРМИРОВАННЫХ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЯХ И О СВЯЗАННЫХ С НИМИ РЯДАХ ФУРЬЕ

Установлена связь классической ортонормированной системы функций Франклина с последовательностью ортонормированных финитных функций [1], показывающая возможность формирования рядов Фурье на основе ортонормированных финитных функций, предназначенных для их использования в алгоритмах численных методов. Обосновывается высокая степень универсальности процедуры ортогонализации [1], сохраняющей, в отличие от классических процедур ортогонализации, свойство финитности базисных функций.

Ортонормированная система функций Франклина (нефинитных) – исторически первый пример ортонормированного базиса пространства $C(0,1)$ непрерывных функций, была построена ортогонализацией системы функций Фабера-Шаудера с помощью процедуры Грама-Шмидта. Например, первые три функции Франклина имеют вид

$$F_1(x) = \sqrt{3}(2x-1) \quad \forall x \in [0,1]; \quad F_2(x) = \begin{cases} \sqrt{3}(4x-1), & x \in [0,1/2); \\ \sqrt{3}(3-4x), & x \in [1/2,1]; \end{cases}$$
$$F_3(x) = \begin{cases} (\sqrt{33}/11)(38x-5), & x \in [0, 1/4); \\ (\sqrt{33}/11)(11-26x), & x \in [1/4, 1/2); \\ (\sqrt{33}/11)(6x-5), & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Ортогонализация, также с помощью процедуры Грама-Шмидта, пяти функций (функций-шапочек) типа функций Фабера-Шаудера, взятых только из одного полного сеточного набора функций[1] на отдельной сетке, получаемой на втором шаге половинного деления отрезка $[0,1]$, приводит к пяти также нефинитным ортонормированным функциям, первые три из которых имеют вид

$$f_1(x) = \begin{cases} 2\sqrt{3}(1-4x), & x \in [0,1/4), \\ 0, & x \in [1/4, 1]; \end{cases}$$
$$f_2(x) = \begin{cases} 2\sqrt{3/7}(12x-1), & x \in [0,1/4), \\ 8\sqrt{3/7}(1-2x), & x \in [1/4, 1/2), \\ 0, & x \in [1/2, 1]; \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} -(2\sqrt{3}/\sqrt{91})(12x-1), & x \in [0, 1/4], \\ (2\sqrt{3}/\sqrt{91})(36x-11), & x \in [1/4, 1/2], \\ (14\sqrt{3}/\sqrt{91})(3-4x), & x \in [1/2, 3/4], \\ 0, & x \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

Эти функции являются линейными комбинациями функций Франклина и так же, как и пять первых функций Франклина, образуют базис в пятимерном подпространстве кусочно-линейных функций, возможно имеющих изломы только в узлах названной сетки. Установленная возможность формирования ортонормированных функций не на базе системы Фабера-Шаудера, а на базе последовательности полных сеточных наборов линейно-независимых финитных функций-шапочек, позволяет проводить ортогонализацию не только на основе процедуры Грама-Шмидта. Иной способ ортогонализации таких сеточных наборов, сохраняющий свойство финитности, имеющееся у исходных функций-шапочек, представлен в [1]. Таким образом, установлена высокая степень универсальности процедуры ортогонализации систем функций, предложенной в [1] и в статьях, опубликованных ранее. Ссылки на эти статьи даются в [1]. Таким образом, две классические процедуры ортогонализации систем функций: процедура Грама-Шмидта и продолжение на более длинный интервал, дополняются процедурой ортогонализации [1], отличающейся от названных классических процедур тем, что процедура ортогонализации [1] сохраняет свойство финитности функций, имеющее исключительно большое значение для вычислительной математики.

Формирование рядов Фурье на основе систем функций Фабера-Шаудера или Франклина осуществляется обычным образом. Ряды Фурье, связанные с ортогональными финитными функциями, на основе изложенных результатов строятся как предел последовательности частичных сумм, образованных последовательностями, полных в конечномерных подпространствах, наборов ортонормированных систем финитных функций, построенных на последовательности сгущающихся сеток.

Применение названных базисных систем функций приводит к эффективным алгоритмам численных методов исследования математических моделей - краевых или эволюционно-краевых задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Леонтьев В. Л. Ортогональные финитные функции и численные методы. – Ульяновск: УлГУ, 2003. – 178 с.

С. Б. Макаркин, Б. Ф. Мельников, М. А. Тренина (г. Тольятти)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТРИКИ ДЛЯ ПСЕВДОГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ВЕРСИИ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЁРА

Для псевдогеометрической версии задачи коммивояжёра приводятся различные метрики и изучаются её свойства. Приводится описание разработанного на базе этих метрик эвристического алгоритма локального поиска, а так же результаты численных экспериментов.

Нередко математическая модель, а также алгоритмы, основанные на данной модели, созданные для одной области, находят применение и во многих других предметных областях. Примером такой модели является задача коммивояжёра (ниже – ЗКВ, [1, 2, 3, 4] и мн. др.). Особенностью этой задачи является то, что при относительной простоте её постановки нахождение оптимального решения (оптимального маршрута) является весьма сложной проблемой и относится – причём как в обобщённой её постановке, так и для большинства её вариаций – к классу NP-полных. Более того, согласно классификации, приведённой в [3] и др., задача коммивояжёра является примером оптимизационной проблемы, входящей в самый сложный класс NPO(V): он содержит все оптимизационные задачи, для которых (при некотором дополнительном «естественному» предположении, например, $P = NP$) временная сложность всех возможных полиномиальных алгоритмов не может быть ограничена никакой полилогарифмической функцией. (Другим примером подобной задачи является проблема максимальной клики.) Приведём описание ЗКВ согласно [3].

Задача коммивояжёра

Вход: Взвешенный полный граф (G, c) , где $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ для некоторого $n \in N$, а так же функция $c: E \rightarrow N$.

Ограничения: Для каждого частного случая проблемы (G, c) множеством $M(G, c)$ включает все Гамильтоновы циклы графа G . Каждый Гамильтонов цикл может быть представлен в виде последовательности $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}, v_{i_1}\}$, где (i_1, i_2, \dots, i_n) – некая перестановка множества $(1, 2, \dots, n)$.

Стоимость: Для Гамильтонова цикла $H = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}, v_{i_1}\}$, $v_{i_j} \in M(G, c)$ полагаем

$$cost\left(\left(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}, v_{i_1}\right), (G, c)\right) = \sum_{j=1}^n c\left(\left\{v_{i_j}, v_{i_{(j \bmod n)+1}}\right\}\right), \quad (1)$$

т.е. стоимость Гамильтонова цикла равно сумме весов входящих в него рёбер.

Цель: minимум.

Среди множества различных версий (вариантов) ЗКВ одной из наиболее изученных является *геометрическая* (именуемая также *Евклидовой*, [3, 5] и мн. др.): стоимость маршрута равна расстоянию между точками на плоскости, вычисляемому как Евклидова метрика.

Однако основные исследования авторов данной статьи направлены на изучение не геометрической, а т. н. *псевдогеометрической* версии ЗКВ (см. [4, 5, 6] и др.).

Псевдогеометрическая версия ЗКВ, в которой ко входным данным добавляется вектор $K = \{k_1, \dots, k_n\}$: $k_i \in \mathbf{R}$, $n = |E|$ – н. о. р. с. в. с $\mu = 1$; функция $m: (u, v) \rightarrow \mathbf{N}$, $m(u, v) = m(v, u)$, и в качестве функции стоимости используется следующая:

$$c(\{u, v\}) = \begin{cases} k_{m(u,v)} \cdot \sqrt{\sum_i (u_i - v_i)^2}, & k_{m(u,v)} > 0, \\ 0, & k_{m(u,v)} \leq 0, \end{cases} \quad (2)$$

где u_i и v_i – i -я компонента вектора, задающего координаты точки u и v соответственно.

Важным отличием псевдогеометрического варианта ЗКВ от геометрического является возможность нарушения неравенства треугольника для некоторых троек городов. Также важно отметить, что геометрический вариант ЗКВ можно считать частным случаем псевдогеометрического (со значением $a = 0$).

Для решения псевдогеометрического варианта ЗКВ важную роль играет псевдовосстановление координат исходного множества точек. Для этого может быть использован следующий *эвристический алгоритм*:

Алгоритм 1 (алгоритм псевдооптимального размещения точек)

- *Вход.* Матрица с: $E \rightarrow \mathbf{N}_0$ (матрица весов рёбер полного взвешенного графа с вершинами $V = \{u_1, \dots, u_n\}$), некоторое число $N \in \mathbf{N}$.
- *Шаг 1.* $x_1 := 0$; $y_1 := 0$; $x_2 := 0$; $y_2 := c(u_1, u_2)$;
- *Шаг 2.* Для каждой точки $k = 3, \dots, n$ вычислить координаты (x_k, y_k) путём выполнения описанных далее шагов 3-7.
- *Шаг 3.* $M := \min\left(\frac{(k-1)(k-2)}{2}, N\right)$;
- *Шаг 4.* Для каждого значения $l = 1, \dots, M$ выполнить описанные далее шаг 5 и шаг 6.
- *Шаг 5.* Случайно выбрать равномерно распределённые значения $i, j \in \{1, \dots, k-1\}$, причём $i \neq j$. Будем i -ю точку называть также v , а j -ю – w , и, кроме того, обозначать $c_1 = c(u, v)$, $c_2 = c(u, w)$.

- Шаг 6. Если $c_1 + c_2 < c(v, w)$ (т. е. для точек u , v и w нарушается неравенство треугольника), то выбираем

$$x_u = \frac{c_1 x_w + c_2 x_v}{c_1 + c_2}, \quad y_u = \frac{c_1 y_w + c_2 y_v}{c_1 + c_2}$$

(в вырожденной ситуации, т. е. когда одновременно $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$, берём точку посередине отрезка $[v, w]$) – т.е. выбираем координаты между i -й и j -й точками пропорционально значениям соответствующих элементов матрицы стоимостей).

В противном случае (т.е. при $c_1 + c_2 > c(v, w)$):

- вычисляем 2 варианта пар x_k и y_k согласно системе

$$\begin{cases} (x - x_v)^2 + (y - y_v)^2 = (c(u, v))^2, \\ (x - x_w)^2 + (y - y_w)^2 = (c(u, w))^2; \end{cases}$$

- если $k = 3$, то выбираем произвольную пару координат, иначе выбираем пару по одной случайно выбранной точке среди точек с номерами $1, \dots, k-1$, отличными от i и j ;
- выбранную пару координат добавляем в коллекцию пар.

- Шаг 7. Вычисляем окончательные значения x_k и y_k как средние арифметические значений l соответствующих координат сформированной коллекции.

- Вход. Координаты $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.

В данном алгоритме применяется последовательное расположение точек u_1, \dots, u_n путем минимизации значения

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n |c(u_i, u_j) - \tilde{c}(u_i, u_j)|.$$

- u_i ($i = 1, \dots, n$) – точки; ниже координаты i -й точки будем обозначать (x_i, y_i) ;
- $c(u_i, u_j)$ – (i, j) -й элемент исходной матрицы расстояний;
- $\tilde{c}(u_i, u_j)$ – (i, j) -й элемент полученной матрицы расстояний.

Очевидно, что при восстановления координат городов, на основании матрицы расстояний, рассчитанные координаты каждого города зависят от выбранной последовательности предыдущих городов. Так как для n городов возможно определить $n!$ различных последовательностей этих городов, на основании одной матрицы расстояний мы можем получить $n!$ различных размещений. С помощью поворота и параллельного переноса мы можем максимально приблизить одну расстановку к другой без изменения матрицы расстояний. Таким образом, для повышения точности восстановления координат возможно усреднение координат городов нескольких размещений.

Пусть X – множество всех возможных размещений для данного частного случая псевдогеометрической версии ЗКВ. С помощью поворота на угол ϕ и параллельного переноса на вектор \vec{a} мы можем максимально приблизить одну псевдорасстановку к другой, не изменяя матрицы расстояний. Для каждой пары (φ, \vec{a}) вычислим расстояние между расстановками $x^i = \{(x_1^i, y_1^i), \dots, (x_n^i, y_n^i)\}$ и $x^j = \{(x_1^j, y_1^j), \dots, (x_n^j, y_n^j)\}$ по формуле:

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^i - x_k^j)^2 + (y_k^i - y_k^j)^2}.$$

Рассмотрим всевозможные пары (φ, \vec{a}) и для всех вычисленных значений r_{ij} выберем минимальное. Таким образом, для любых двух расстановок x^i и x^j введем функцию:

$$d(x^i, x^j) = \min_{(\varphi, \vec{a})} r_{ij} = \min_{(\varphi, \vec{a})} \left\{ \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^i - x_k^j)^2 + (y_k^i - y_k^j)^2} \right\}. \quad (3)$$

Проверим, удовлетворяет ли аксиомам метрики данная функция:

1. $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Первые две аксиомы очевидно выполняются. Для доказательства неравенства треугольника рассмотрим неравенства:

$$\sqrt{(x_k^i - x_k^j)^2 + (y_k^i - y_k^j)^2} \leq \sqrt{(x_k^i - x_k^l)^2 + (y_k^i - y_k^l)^2} + \sqrt{(x_k^l - x_k^j)^2 + (y_k^l - y_k^j)^2}, \quad (4)$$

где $k = 1, \dots, n$.

Полагая $x_k^i - x_k^l = a_1, y_k^i - y_k^l = a_2, x_k^l - x_k^j = b_1, y_k^l - y_k^j = b_2$, получим

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2},$$

которое следует из неравенства Коши-Буняковского:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

Просуммируем неравенства (4) по k от 1 до n

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^i - x_k^j)^2 + (y_k^i - y_k^j)^2} \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^i - x_k^l)^2 + (y_k^i - y_k^l)^2} + \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^l - x_k^j)^2 + (y_k^l - y_k^j)^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Неравенство (5) не зависит от пар (φ, \vec{a}) и выполняется для любых таких пар, следовательно, оно выполняется и для таких пар, при которых эти суммы минимизируются. Следовательно,

$$\min_{(\varphi, \vec{a})} \left\{ \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(x_k^i - x_k^j \right)^2 + \left(y_k^i - y_k^j \right)^2} \right\} \leq \min_{(\varphi, \vec{a})} \left\{ \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(x_k^i - x_k^l \right)^2 + \left(y_k^i - y_k^l \right)^2} \right\} + \\ + \min_{(\varphi, \vec{a})} \left\{ \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(x_k^l - x_k^j \right)^2 + \left(y_k^l - y_k^j \right)^2} \right\}.$$

Введенная функция удовлетворяет всем аксиомам метрики, следовательно (X, d) метрическое пространство.

Проанализируем, какими свойствами обладает метрика d и метрическое пространство (X, d) .

Приведём ряд определения согласно [8].

Открытым шаром $B(a, r)$ в метрическом пространстве R называется совокупность точек $x \in R$, удовлетворяющих условию $\rho(x, a) < r$.

Множество MR называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре.

Пусть x_1, x_2, \dots – последовательность точек в метрическом пространстве R . Говорят, что эта последовательность **сходится** к точке x , если каждая окрестность $O_\varepsilon(x)$ точки x содержит все точки x_n , начиная с некоторой, т. е. если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое число N_ε , что $O_\varepsilon(x)$ содержит все точки x_n с $x_n > N_\varepsilon$. Точка x называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$. Это определение можно, очевидно, сформулировать еще и следующим образом: последовательность $\{x_n\}$ сходится к x , если $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, x_n) = 0$.

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства R мы будем называть **фундаментальной**, если она удовлетворяет критерию Коши, т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число N_ε , что $\rho(x_{n'}, x_{n''}) < \varepsilon$ для всех $n' > N_\varepsilon, n'' > N_\varepsilon$.

Если в пространстве R любая фундаментальная последовательность сходится, то это пространство называется **полным**.

Любая последовательность расстановок $\{x_m\}$ данного метрического пространства является ограниченной, действительно, выберем в качестве центра шара a первый член последовательности x_1 , тогда в силу того, что эти расстановки получены для одной псевдогеометрической ЗКВ, выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{\left(x_k^i - x_k^1 \right)^2 + \left(y_k^i - y_k^1 \right)^2} \leq \\ \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{\max_{1 \leq i \leq n} c(u_i, u_1) - \min_{1 \leq i \leq n} c(u_i, u_1)}{2} \right)^2 + \left(\frac{\max_{1 \leq i \leq n} c(u_i, u_1) - \min_{1 \leq i \leq n} c(u_i, u_1)}{2} \right)^2} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \frac{\max_{1 \leq i \leq n} c(u_i, u_1) - \min_{1 \leq i \leq n} c(u_i, u_1)}{\sqrt{2}},$$

а расстояние между расстановками после преобразования (φ, \vec{a}) значительно уменьшится. Таким образом, существует число r такое, что $\rho(x_n, x_1) < r$ и все члены последовательности принадлежат шару $B(x_1, r)$.

Теорема 1. Пространство (X, d) полное.

Доказательство. Пусть последовательность расстановок $\{x_m\}$ фундаментальная, то есть она удовлетворяет условию Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер K_ε , начиная с которого для любых номеров p и m выполняется неравенство $\rho(x_p, x_m) < \varepsilon$.

$$\min_{(\varphi, \vec{a})} \left\{ \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^p - x_k^m)^2 + (y_k^p - y_k^m)^2} \right\} < \varepsilon,$$

т.е. существует такая пара (φ, \vec{a}) , для которой

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^p - x_k^m)^2 + (y_k^p - y_k^m)^2} &< \varepsilon \Rightarrow \sqrt{(x_k^p - x_k^m)^2 + (y_k^p - y_k^m)^2} < \varepsilon \Rightarrow \\ &\Rightarrow |x_k^p - x_k^m| < \varepsilon, \quad |y_k^p - y_k^m| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{6}$$

При этом, выше было сказано, что любая последовательность в этом метрическом пространстве ограничена, а из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$.

Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = a$, $a = \{(x_1^a, y_1^a), \dots, (x_n^a, y_n^a)\}$. Покажем, что и данная последовательность $\{x_m\}$ имеет предел равный a .

Исходя, из определения предела получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_ε , начиная с которого для любого номера m_k выполняется неравенство $\rho(a, x_{m_k}) < \varepsilon$.

$$\min_{(\varphi, \vec{a})} \left\{ \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^a - x_k^{m_k})^2 + (y_k^a - y_k^{m_k})^2} \right\} < \varepsilon,$$

т.е. существует такая пара (φ, \vec{a}) , для которой

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^a - x_k^{m_k})^2 + (y_k^a - y_k^{m_k})^2} &< \varepsilon \Rightarrow \sqrt{(x_k^a - x_k^{m_k})^2 + (y_k^a - y_k^{m_k})^2} < \varepsilon \Rightarrow \\ &\Rightarrow |x_k^a - x_k^{m_k}| < \varepsilon, \quad |y_k^a - y_k^{m_k}| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{7}$$

При $L = \max\{K_\varepsilon, N_\varepsilon\}$ для любого номера $m > L$ неравенства (6) и (7) выполняются одновременно и мы получаем

$$|x_k^m - x_k^a| = |x_k^m - x_k^{m_k} + x_k^{m_k} - x_k^a| \leq |x_k^m - x_k^{m_k}| + |x_k^{m_k} - x_k^a| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2n}} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2n}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}, \text{ при всех } k = 1, \dots, n.$$

Аналогично, $|y_k^m - y_k^a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}$. Следовательно,

$$\sqrt{(x_k^m - x_k^a)^2 + (y_k^m - y_k^a)^2} < \frac{\varepsilon}{n}, \text{ при всех } k = 1, \dots, n.$$

Просуммируем неравенства по k от 1 до n

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^m - x_k^a)^2 + (y_k^m - y_k^a)^2} < \varepsilon \Rightarrow \\ \min_{(\varphi, \vec{a})} \left\{ \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^m - x_k^a)^2 + (y_k^m - y_k^a)^2} \right\} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = a.$$

Значит, любая фундаментальная последовательность имеет предел и пространство (X, d) полное. Теорема доказана.

Теорема 2. Пространство (X, d) компактно.

Доказательство. Нами уже было доказано, что любая последовательность ограничена и в силу этого из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Исходя из теоремы о том, что метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда из любой последовательности точек можно выделить сходящуюся подпоследовательность получаем, что теорема доказана.

Основываясь на компактности метрического пространства (X, d) для разработки алгоритма последовательно оптимизации размещения точек, и, следовательно, последовательного улучшения полученного решения ЗКВ, получим следующий *эвристический алгоритм*:

Алгоритм 2

- *Вход.* Взвешенный полный граф (G, c) , где $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ для некоторого $n \in N$, а так же функция $c: E \rightarrow N$.
- *Шаг 1.* Применим алгоритм 1 для нахождения псевдооптимального размещения X_0 ;
- *Шаг 2.* На основе размещения X_0 найдём решение ЗКВ, используя «луковичный» алгоритм (onion peeling) [4]. Будем считать это решение S_0 оптимальным;
- *Шаг 3.* С помощью алгоритма 1 получим k размещений (X_1, \dots, X_k) , используя различный случайный порядок точек;
- *Шаг 4.* Выберем из (X_1, \dots, X_k) размещение X_i , с минимальным расстоянием от X_0 , в качестве функции расстояния используем (3);
- *Шаг 5.* На основе размещения X_i найдём решение ЗКВ используя «луковичный» алгоритм; если $cost(X_0) > cost(X_i)$ примем за оптимальное размещение X_i , иначе говоря $X_0 = X_i$.
- *Шаг 6.* Повторим шаги 3-5 m раз;

- *Выход.* Решение ЗКВ

$$X_0 = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}, v_{i_1}\}, v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n} \in V, i_1, i_2, \dots, i_n \in [0, n].$$

Рассмотрим еще один подход. Для каждого псевдоразмещения точек данной псевдогеометрической ЗКВ запишем преобразованную матрицу расстояний и в результате чего получим множество M всевозможных матриц расстояний геометрической версии данной псевдогеометрической ЗКВ. Для любых двух матриц $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ определим функцию

$$\rho(A, B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |a_{ij} - b_{ij}|.$$

Данная функция очевидным образом удовлетворяет первым двум аксиомам метрики. Проверим выполнение неравенства треугольника

$$|a_{ij} - b_{ij}| = |a_{ij} - c_{ij} + c_{ij} - b_{ij}| \leq |a_{ij} - c_{ij}| + |c_{ij} - b_{ij}| \text{ для } \forall i, j.$$

Просуммируем эти неравенства по i и j

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |a_{ij} - b_{ij}| &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |a_{ij} - c_{ij}| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |c_{ij} - b_{ij}| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $\rho(A, B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |a_{ij} - b_{ij}|$ удовлетворяет всем

аксиомам метрики и (M, ρ) – метрическое пространство.

Алгоритм псевдоразмещения точек разрабатывался исходя из минимизации невязки $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |c(u_i, u_j) - \tilde{c}(u_i, u_j)|$, тогда найдется некоторое число δ такое, что

$$|c(u_i, u_j) - \tilde{c}(u_i, u_j)| < \delta, \quad \text{для } \forall i, j.$$

Тогда

$$|a_{ij} - b_{ij}| \leq |a_{ij} - c(u_i, u_j) + c(u_i, u_j) - b_{ij}| \leq |a_{ij} - c(u_i, u_j)| + |c(u_i, u_j) - b_{ij}| < 2\delta.$$

Следовательно, $\rho(A, B) \leq n^2 \delta / 2$ для любых элементов A и B .

На основании выполнения данного неравенства, мы можем сделать вывод о том, что любая последовательность в метрическом пространстве (M, ρ) ограничена и из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Поэтому для пространства (M, ρ) аналогично выполняется следующая теорема.

Теорема 3. Пространство (M, ρ) компактное.

Теорема 4. Пространство (M, ρ) полное.

Доказательство. Пусть последовательность матриц $\{A_m\}$ фундаментальная, то есть она удовлетворяет условию Коши: для любого

$\varepsilon > 0$ найдется номер K_ε , начиная с которого для любых номеров p и m выполняется неравенство $\rho(A_p, A_m) < \varepsilon$.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}^m - b_{ij}^m| < \varepsilon \Rightarrow |a_{ij}^m - b_{ij}^m| < \varepsilon. \quad (8)$$

Любая последовательность в этом метрическом пространстве ограничена и из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{A_{m_k}\}$.

Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{m_k} = C$, $C = \|c_{ij}\|$. Покажем, что и данная последовательность $\{A_m\}$ имеет предел равный C .

Исходя, из определения предела получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_ε , начиная с которого для любого номера m_k выполняется неравенство $\rho(A_{m_k}, C) < \varepsilon$.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}^m - c_{ij}| < \varepsilon \Rightarrow |a_{ij}^m - c_{ij}| < \varepsilon. \quad (9)$$

При $L = \max\{K_\varepsilon, N_\varepsilon\}$ для любого номера $m > L$ неравенства (8) и (9) выполняются одновременно и мы получаем

$$|a_{ij}^m - c_{ij}| = |a_{ij}^m - a_{ij}^{m_k} + a_{ij}^{m_k} - c_{ij}| \leq |a_{ij}^m - a_{ij}^{m_k}| + |a_{ij}^{m_k} - c_{ij}| < \frac{\varepsilon}{n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2} = \frac{2\varepsilon}{n^2},$$

при всех $i = 1, \dots, n$, $j = i+1, \dots, n$.

Просуммируем неравенства по i и j

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}^p - a_{ij}^m| < \frac{n^2}{2} \cdot \frac{2\varepsilon}{n^2} = \varepsilon \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} A_m = C.$$

Значит, любая фундаментальная последовательность имеет предел и пространство (M, ρ) полное. Теорема доказана.

Для оценки эффективности предложенного подхода был проведён численный эксперимент, в ходе которого предложенный Алгоритм 2 сравнивался с алгоритмом, описанном в [9] (по сути, предложенный в настоящей работе алгоритм является «расширением» данного алгоритма). В ходе данного эксперимента 50 случайно сгенерированных частных случаев псевдогеометрической ЗКВ ($n=50$, $\mu=1$, $\sigma=0,03$) решались с помощью вышеуказанных алгоритмов, и сравнивалось качество найденных решений (т.е. длина маршрута). Как видно из полученных данных (рис. 1), разработанный авторами алгоритм во всех случаях показал лучший результат. Таким образом, применение описанных в настоящей работе метрик позволило повысить эффективность геометрического метода решения псевдогеометрической ЗКВ.

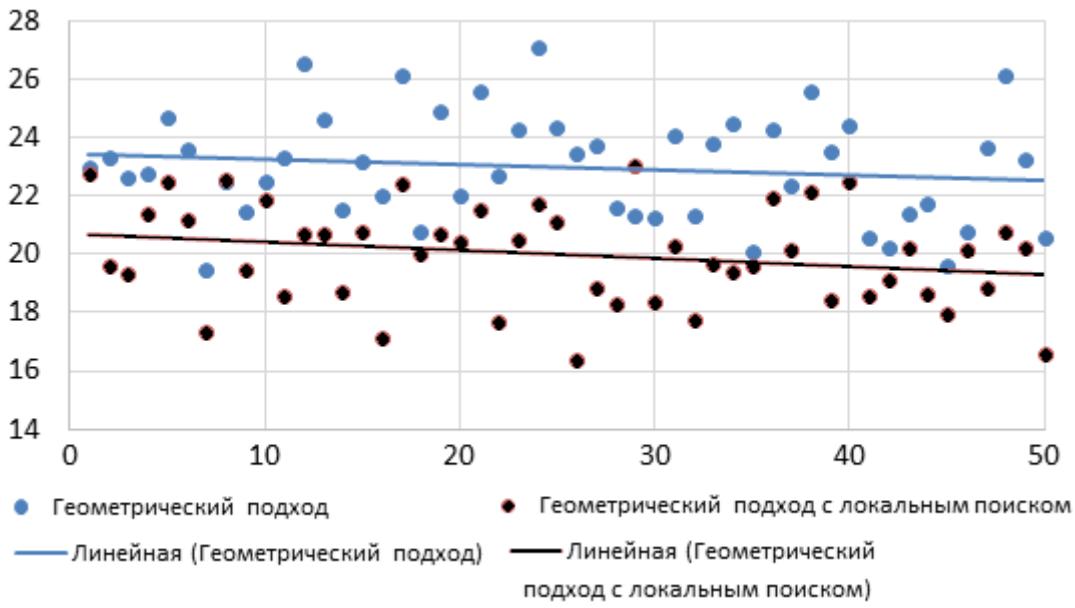


Рис. 1. Результаты численного эксперимента

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гэри М., Джонсон М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
2. Громкович Ю. Теоретическая информатика. Введение в теорию автоматов, теорию вычислимости, теорию сложности, теорию алгоритмов, рандомизацию, теорию связи и криптографию. – Пер. с нем. – СПб.: Изд-во БХВ-Петербург, 2010. – 326 с.
3. Hromkovic J. Algorithmics for Hard Problems. Introduction to Combinatorial Optimization, Randomization, Approximation, and Heuristics. – Springer, 2003. – 538 p.
4. Sing Liew. Introducing convex layers to the traveling salesman problem, CoRR abs/1204.2348 (2012).
5. Melnikov B. Multiheuristic approach to discrete optimization problems // Cybernetics and Systems Analysis, 2006. – V. 42, № 3. – P. 335-341.
6. Melnikov B., Radionov A., Gumayunov V. Some special heuristics for discrete optimization problems // Proc. of 8th International Conference on Enterprise Information Systems, ICEIS-2006. – P. 360-364.
7. Мельников Б., Романов Н. Ещё раз об эвристиках для задачи коммивояжёра // Теоретические проблемы информатики и ее приложений, 2001. – № 4. – С. 81-92.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – Изд. 7-е. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 570 с.
9. Макаркин С. Б., Мельников Б. Ф. Геометрические методы решения псевдогеометрической версии задачи коммивояжера // Стохастическая оптимизация в информатике, 2013. – Т. 9, № 2. – С. 54-72.

B. K. Манжосов, Т. Е. Петрова (г. Ульяновск)

ЗОНЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И БИФУРКАЦИИ КРИВОШИПНО-КОРОМЫСЛОВОГО МЕХАНИЗМА

Рассматривается модель движения плоского кривошипно-коромыслового механизма. Анализируется условие существования кривошипа, определяемого теоремой Грасгофа. При неидеальных связях условие существования кривошипа, требует ввода дополнительных условий, определяющих минимально допустимое значение угла передачи движения от шатуна к коромыслу. Рассмотрены зоны существования кривошипно-коромыслового механизма. Определены минимальное или максимальное значения межопорного расстояния, при которых обеспечивается функционирование кривошипно-коромыслового механизма.

Ключевые слова: передача движения, кривошипно-коромысловый механизм, теорема Грасгофа, условие существования кривошипа, угол давления, угол передачи движения, неидеальные связи.

Одна из проблем, возникающих при создании стержневых механизмов, связана с анализом особых положений, приводящих, как правило, к нарушению их функционирования, изменению структуры и прочим нежелательным явлениям. Таким, в частности, является кривошипно-коромысловый механизм.

Рассмотрена модель движения плоского кривошипно-коромыслового механизма, схема которого представлена на рис. 1. Вращательное движение кривошипа AB преобразуется в возвратно-вращательное движение коромысла CD . Механизм имеет одну степень свободы. Предполагается, что закон движения кривошипа задан: $\varphi_1 = \varphi_1(t)$.

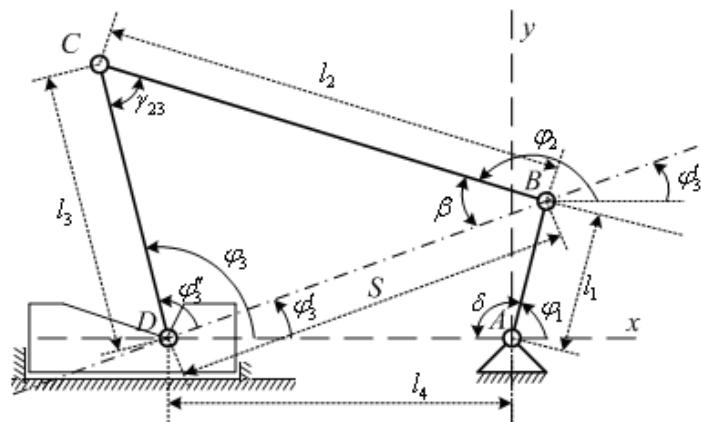


Рис. 1. Положение звеньев и углы механизма

Длина кривошипа l_1 , длина шатуна l_2 , длина коромысла l_3 . Расстояние AD между опорами кривошипа и коромысла равно l_4 .

Обозначим φ_2 – угол, определяющий положение шатуна BC ; φ_3 – угол, определяющий положение коромысла DC ($\varphi_3 = \varphi'_3 + \varphi''_3$); угол DCB как γ_{23} .

Анализ движения данного класса механизмов можно найти в работах [1, 2, 3, 4]. Соотношение между размерами l_1 , l_2 , l_3 и l_4 должно обеспечивать условие существования кривошипа, определяемое теоремой Грасгофа:

$$l_4 + l_1 < l_3 + l_2, \quad l_1 + l_2 < l_3 + l_4. \quad (1)$$

Из первого неравенства следует, что расстояние $AD = l_4$ между опорами кривошипа и коромысла не может превышать величины $(l_2 - l_1) + l_3$.

Из второго неравенства (1) следует, что расстояние $AD = l_4$ между опорами кривошипа и коромысла должна превышать величину $(l_2 + l_1) - l_3$.

Какие ограничения могут быть наложены на размеры звеньев механизма? Если обратиться к схеме механизма на рисунке 2, где штриховой линией обозначена траектория точки B кривошипа, то естественными становятся ограничение на положение точек D и C , которые должны находиться вне круга с радиусом l_1 и центром в точке A . Тогда вполне очевидны неравенства: $l_2 > 2l_1$, $l_4 > l_1$.

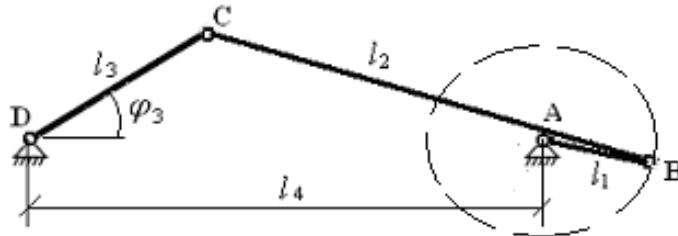


Рис. 2. Положение звеньев механизма при $\varphi_3 = (\varphi_3)_{\min}$

Из неравенств (1) следует, что линейный размер l_4 находится в диапазоне

$$(l_2 + l_1) - l_3 < l_4 < (l_2 - l_1) + l_3. \quad (2)$$

Из неравенства (2) следует, что

$$(l_2 + l_1) - l_3 < (l_2 - l_1) + l_3.$$

Если к обеим частям неравенства прибавить величину $(l_3 - l_2 + l_1)$, то получим

$$(l_3 - l_2 + l_1) + (l_2 + l_1) - l_3 < (l_2 - l_1) + l_3 + (l_3 - l_2 + l_1), \quad 2l_1 < 2l_3,$$

откуда следует, что длина коромысла $l_3 > l_1$.

От размерных величин l_1 , l_2 , l_3 и l_4 можно перейти к относительным, разделив все части неравенства (2) на l_1 :

$$(\tilde{l}_2 + 1) - \tilde{l}_3 < \tilde{l}_4 < (\tilde{l}_2 - 1) + \tilde{l}_3, \quad (3)$$

где $\tilde{l}_1 = l_1 / l_1 = 1$, $\tilde{l}_2 = l_2 / l_1 > 2$, $\tilde{l}_3 = l_3 / l_1 > 1$, $\tilde{l}_4 = l_4 / l_1 > 1$.

Для относительной длины коромысла ограничение снизу определяется неравенством $\tilde{l}_3 > 1$. Для определения ограничения сверху обратимся к неравенству (3), преобразовав его к виду

$$\tilde{l}_2 - \tilde{l}_3 < \tilde{l}_4 - 1 < (\tilde{l}_2 - 2) + \tilde{l}_3. \quad (4)$$

Так как $\tilde{l}_4 > 1$, то $\tilde{l}_4 - 1 > 0$ и левую часть неравенства (4) сверху ограничим значением $\tilde{l}_2 - \tilde{l}_3 \approx 0$. В этом случае величина \tilde{l}_3 будет находиться в диапазоне $1 < \tilde{l}_3 \leq \tilde{l}_2$.

Из неравенства (3) можно найти минимальное или максимальное значения \tilde{l}_4 , при которых обеспечивается функционирование кривошипно-коромыслового механизма.

$$(\tilde{l}_4)_{\min} = (\tilde{l}_2 + 1) - \tilde{l}_3 + (\Delta \tilde{l}_4)_{\min}, \quad (\tilde{l}_4)_{\max} = (\tilde{l}_2 - 1) + \tilde{l}_3 - (\Delta \tilde{l}_4)_{\max}, \quad (5)$$

где $(\Delta \tilde{l}_4)_{\min}$ – величина, определяющая то, насколько значение $(\tilde{l}_2 + 1) - \tilde{l}_3$ может быть меньше $(\tilde{l}_4)_{\min}$; $(\Delta \tilde{l}_4)_{\max}$ – величина, определяющая то, насколько значение $(\tilde{l}_2 - 1) + \tilde{l}_3$ может быть больше $(\tilde{l}_4)_{\max}$.

Если первое равенство (5) вычесть из второго, то диапазон изменения расстояния $((\tilde{l}_4)_{\max} - (\tilde{l}_4)_{\min})$, при котором обеспечивается существование кривошипно-коромыслового механизма, определится как

$$(\tilde{l}_4)_{\max} - (\tilde{l}_4)_{\min} = 2[\tilde{l}_3 - 1 - ((\Delta \tilde{l}_4)_{\max} + (\Delta \tilde{l}_4)_{\min}) / 2], \quad (6)$$

$$\tilde{l}_2 > 2, \quad 1 < \tilde{l}_3 < \tilde{l}_2, \quad (\tilde{l}_4)_{\min} = (\tilde{l}_2 + 1) - \tilde{l}_3 + (\Delta \tilde{l}_4)_{\min}.$$

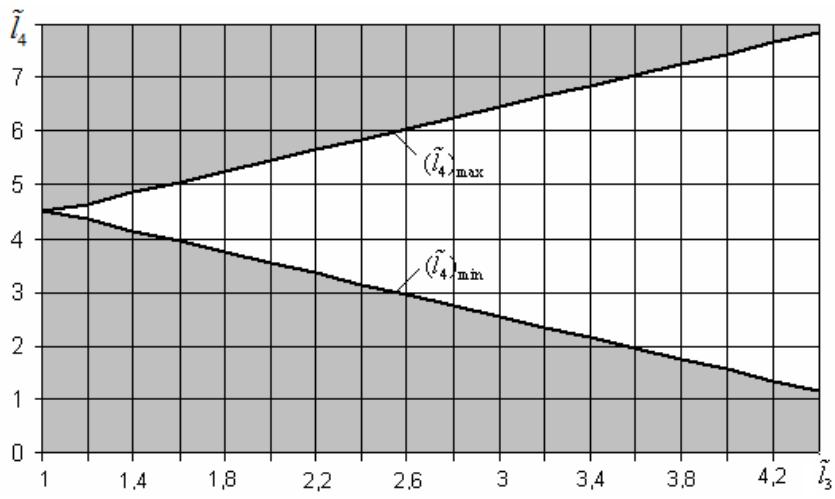
Например, при $\tilde{l}_2 = 4$, $\tilde{l}_3 = 2$, $(\Delta \tilde{l}_4)_{\min} = (\Delta \tilde{l}_4)_{\max} = 0,05$ величина $(\tilde{l}_4)_{\min} = 3,05$; $(\tilde{l}_4)_{\max} - (\tilde{l}_4)_{\min} = 1,9$. При $\tilde{l}_2 = 4$, $\tilde{l}_3 = 4$, $(\Delta \tilde{l}_4)_{\min} = (\Delta \tilde{l}_4)_{\max} = 0,05$ величина $(\tilde{l}_4)_{\min} = 1,05$; $(\tilde{l}_4)_{\max} - (\tilde{l}_4)_{\min} = 5,9$.

На рисунке 3 приведены диаграммы, определяющие значения $(\tilde{l}_4)_{\min}$ и $(\tilde{l}_4)_{\max}$ ($(\Delta \tilde{l}_4)_{\min} = (\Delta \tilde{l}_4)_{\max} = 0,05$) при изменении длины коромысла \tilde{l}_3 в диапазоне $1,05 \leq \tilde{l}_3 \leq \tilde{l}_2$ ($\tilde{l}_2 = 4,5; 4,0; 3,0$).

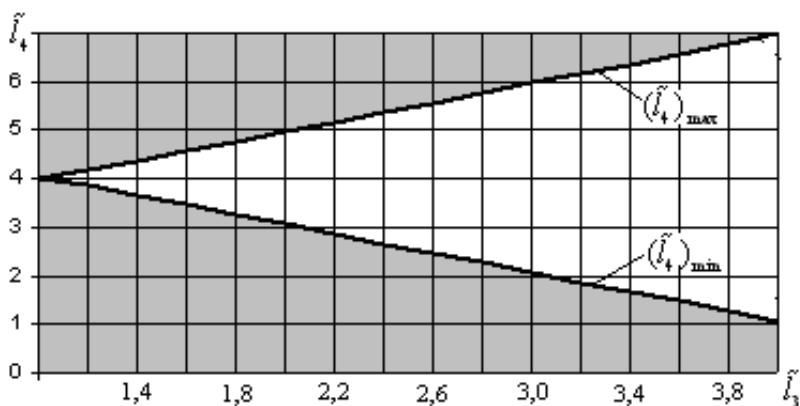
При уменьшении относительной длины шатуна \tilde{l}_2 уменьшается минимальное значение межпорного расстояния $(\tilde{l}_4)_{\min}$. Диапазон изменения межпорного расстояния $((\tilde{l}_4)_{\max} - (\tilde{l}_4)_{\min})$, при котором обеспечивается существование кривошипно-коромыслового механизма, не изменяется.

Чем меньше относительная длина коромысла \tilde{l}_3 , тем меньше при фиксированной длине шатуна \tilde{l}_2 разница ординат $(\tilde{l}_4)_{\max}$ и $(\tilde{l}_4)_{\min}$,

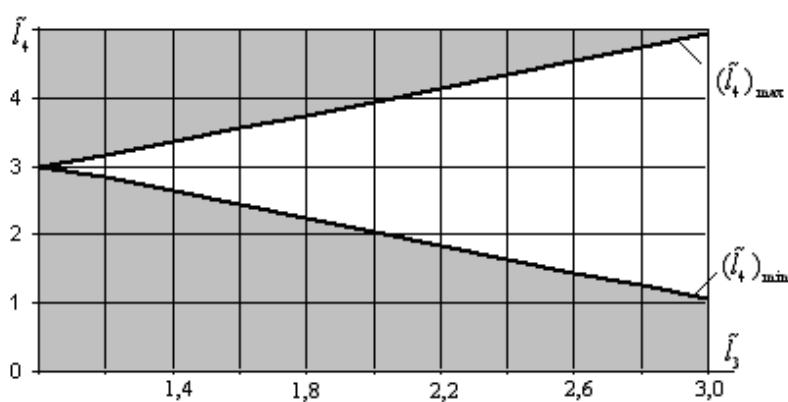
определяющая возможный диапазон изменения расстояния между опорами кривошипа и коромысла. В пределе при $\tilde{l}_3 \rightarrow 1$ расстояние между опорами кривошипа и коромысла \tilde{l}_4 стремится к значению \tilde{l}_2 .



a) для фиксированного значения $\tilde{l}_2 = 4,5$



б) для фиксированного значения $\tilde{l}_2 = 4,0$



в) для фиксированного значения $\tilde{l}_2 = 3,0$

Рис. 3. Диаграммы, определяющие значения $(\tilde{l}_4)_{\min}$ и $(\tilde{l}_4)_{\max}$ для фиксированных значений \tilde{l}_2 ($\tilde{l}_2 = 4,5; 4,0; 3,0$) при изменении длины коромысла $1 < \tilde{l}_3 \leq \tilde{l}_2$

Освещенная область на рисунке 3 – это область существования кривошипно-коромыслового механизма, а разница ординат $(\tilde{l}_4)_{\max}$ и $(\tilde{l}_4)_{\min}$ определяет возможный диапазон изменения расстояния между опорами кривошипа и коромысла для фиксированного значения \tilde{l}_3 .

При параметрах механизма, принадлежащих затененной области функционирования кривошипно-коромыслового механизма невозможна. Нарушение функционирования механизма для параметров затененной области возникает из-за нарушения условия сборки. Вблизи границ, разделяющих освещенную и затененную зоны, нарушение функционирования механизма может возникнуть из-за нарушения условий передачи движения.

Движение кривошипа через шатун передается коромыслу. Как только кривошип и шатун располагаются на одной прямой, коромысло занимает одно из крайних положений. Дальнейшее вращение кривошипа приводит к движению коромысла в обратном направлении.

Передача движения от кривошипа AB к коромыслу DC осуществляется через шатун BC (рис. 4). Угол α – угол давления (угол между направлением силы и направлением вектора скорости точки C), угол γ – угол передачи движения (угол $\gamma = \pi/2 - \alpha$), $\gamma_{23} = \varphi_2 - \varphi_3$ – угол между шатуном и коромыслом.

Если предположить, что шатун в процессе движения испытывает деформации растяжения или сжатия (пренебрегаем деформацией изгиба), то сила N_{23} , толкающая или тянувшая коромысло, направлена вдоль шатуна. Вектор этой силы расположен к горизонтальной оси x либо под углом φ_2 (толкающая сила, рис. 4, а), либо под углом $\varphi_2 - \pi$ (тянущая сила, рис. 4, б).

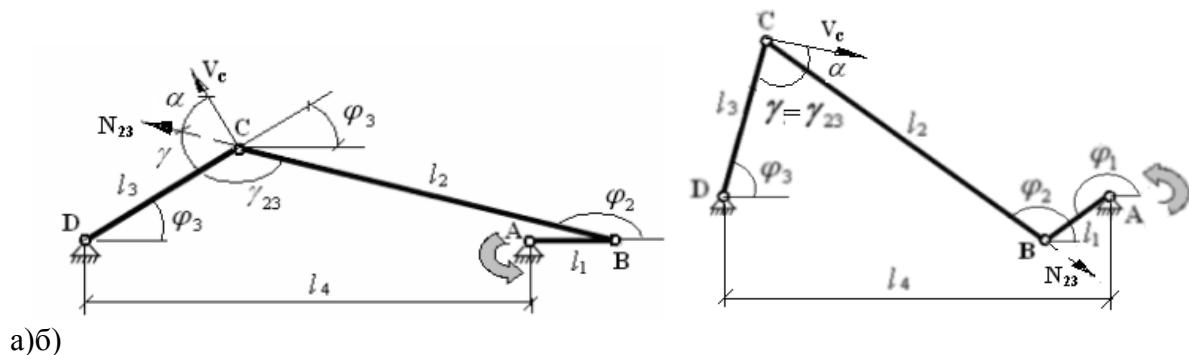


Рис. 4. Положение кривошипно-коромыслового механизма:

а) шатун толкает коромысло силой N_{23} ; б) шатун тянет коромысло силой N_{23}

Для движения коромысла необходимо чтобы угол передачи движения от шатуна к коромыслу γ был бы больше минимального γ_{\min} (γ_{\min} – угол, при котором невозможно осуществить передачу движения от шатуна к коромыслу).

Для определения угла γ воспользуемся схемой на рисунке 1 и зависимостями [5]:

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_{23}, & \text{если } \cos \gamma_{23} > 0, \gamma_{23} < \pi / 2, \\ \pi - \gamma_{23}, & \text{если } \cos \gamma_{23} < 0, \gamma_{23} > \pi / 2, \end{cases} \quad (7)$$

$$\cos \gamma_{23} = \frac{(l_3^2 + l_2^2) - (l_1^2 + l_4^2) - 2l_1 l_4 \cos \varphi_1}{2l_3 l_2},$$

$$\gamma_{23} = \arccos \frac{l_3^2 + l_2^2 - s^2}{2l_3 l_2}, \quad s = \sqrt{l_1^2 + l_4^2 - 2l_1 l_4 \cos \delta}, \quad \delta = \pi - \varphi_1. \quad (8)$$

Угол γ_{23} может быть определен также как

$$\gamma_{23} = \varphi_2 - \varphi_3, \quad \varphi_2 = \pi + \varphi'_3 - \beta, \quad \varphi_3 = \arcsin \left(\frac{l_1}{s} \sin \delta \right) + \arccos \frac{s^2 + l_3^2 - l_2^2}{2s l_3}, \quad (9)$$

$$\varphi'_3 = \arcsin \left(\frac{l_1}{s} \sin \delta \right), \quad \beta = \arcsin \left(\frac{l_3}{l_2} \sin \varphi''_3 \right), \quad \varphi''_3 = \arccos \frac{s^2 + l_3^2 - l_2^2}{2s l_3}.$$

Рассмотрим характер изменений угла поворота коромысла φ_3 и угла γ_{23} между шатуном и коромыслом в зависимости от угла поворота кривошипа φ_1 при изменении расстояния \tilde{l}_4 между опорами кривошипа и коромысла. Для этого примем фиксированные значения $\tilde{l}_2 = 4,5$; $\tilde{l}_3 = 1,5$. Если воспользоваться формулами (5), то при $(\Delta \tilde{l}_4)_{\min} = (\Delta \tilde{l}_4)_{\max} = 0,005$ $(\tilde{l}_4)_{\min} = (\tilde{l}_2 + 1) - \tilde{l}_3 + (\Delta \tilde{l}_4)_{\min} = 4,005$; $(\tilde{l}_4)_{\max} = (\tilde{l}_2 - 1) + \tilde{l}_3 - (\Delta \tilde{l}_4)_{\max} = 4,995$. (10)

Зададим диапазон изменения расстояния $4,0 \leq \tilde{l}_4 \leq 4,995$. Если обратиться к диаграммам $(\tilde{l}_4)_{\min}$ и $(\tilde{l}_4)_{\max}$ на рисунке 3, а, то заметим, что точка $\tilde{l}_4 = 4,0$ находится в затененной зоне, а точка $\tilde{l}_4 = 4,995$ находится на границе затененной и освещенной зон.

По формулам (7), (8) и (9) найдены значения угла φ_3 , определяющего положение коромысла, и угла γ_{23} между шатуном и коромыслом. Движение механизма рассмотрено в пределах одного оборота кривошипа, когда угол поворота φ_1 изменяется в диапазоне от 0 до 360° .

В таблице 1 приведены значения угла φ_3 в зависимости от угла φ_1 при различных значениях \tilde{l}_4 ($\tilde{l}_4 \in (4,8; 4,85; 4,9; 4,95; 4,995)$) и $\tilde{l}_2 = 4,5$; $\tilde{l}_3 = 1,5$.

На рисунке 5 приведены диаграммы изменения угла φ_3 в зависимости от угла φ_1 при различных значениях \tilde{l}_4 ($\tilde{l}_4 \in (4,8; 4,85; 4,9; 4,95; 4,995)$) и фиксированных значениях $\tilde{l}_2 = 4,5$; $\tilde{l}_3 = 1,5$. Из рисунка 5 видно, что угол φ_3 , определяющий положение коромысла, достигает максимальных значений при значениях φ_1 , близких к 165° . Минимальные значения угла

φ_3 возникают при значениях φ_1 , близких к 0 и 360° . Причем, чем ближе значение \tilde{l}_4 к $(\tilde{l}_4)_{\max} = 4,995$, тем меньше значение $\varphi_3 \rightarrow 0$.

Таблица 1

Угол, определяющий положение коромысла φ_3 в зависимости от угла φ_1

Угол φ_1		Угол, определяющий положение коромысла φ_3 , рад; $\tilde{l}_2 = 4,5; \tilde{l}_3 = 1,5$				
в град.	в рад.	$\tilde{l}_4 = 4,8$	$\tilde{l}_4 = 4,85$	$\tilde{l}_4 = 4,9$	$\tilde{l}_4 = 4,95$	$\tilde{l}_4 = 4,995$
0	0	0,453	0,391	0,318	0,224	0,0707
15	0,261667	0,530476	0,472094	0,405583	0,325221	0,226634
30	0,523333	0,65922	0,60888	0,554194	0,493399	0,430812
45	0,785	0,819174	0,776034	0,730738	0,682741	0,636594
60	1,046667	0,994364	0,956262	0,917081	0,87662	0,838906
75	1,308333	1,174563	1,139554	1,104023	1,067878	1,034737
90	1,57	1,352517	1,319061	1,285409	1,25151	1,220741
105	1,831667	1,521684	1,488535	1,455424	1,422308	1,392468
120	2,093333	1,674592	1,640715	1,60708	1,573646	1,543694
135	2,355	1,801455	1,766041	1,731084	1,696534	1,665746
150	2,616667	1,88921	1,851877	1,815235	1,779214	1,747273
165	2,878333	1,922434	1,883604	1,845671	1,80854	1,775741
180	3,14	1,888807	1,849911	1,811985	1,774925	1,742237
195	3,401667	1,788488	1,751366	1,715099	1,679595	1,648227
210	3,663333	1,637881	1,603657	1,57005	1,536993	1,507661
225	3,925	1,461191	1,4298	1,398776	1,36807	1,340669
240	4,186667	1,279141	1,2497	1,220406	1,19122	1,165017
255	4,448333	1,104551	1,075836	1,047069	1,018211	0,992131
270	4,71	0,943655	0,914332	0,884736	0,854817	0,827569
285	4,971667	0,798995	0,767626	0,735672	0,703045	0,673021
300	5,233333	0,67198	0,636909	0,600714	0,563198	0,528103
315	5,495	0,565046	0,524262	0,4813	0,435623	0,391564
330	5,756667	0,484054	0,435353	0,382316	0,323207	0,262219
345	6,018333	0,441025	0,383509	0,317901	0,238553	0,141274
360	6,28	0,453	0,391	0,318	0,224	0,0707

Следует отметить, что различие в значениях угла φ_3 в зависимости от межпорного расстояния \tilde{l}_4 становится существенным именно при значениях φ_1 , близких к 0 и 360° .

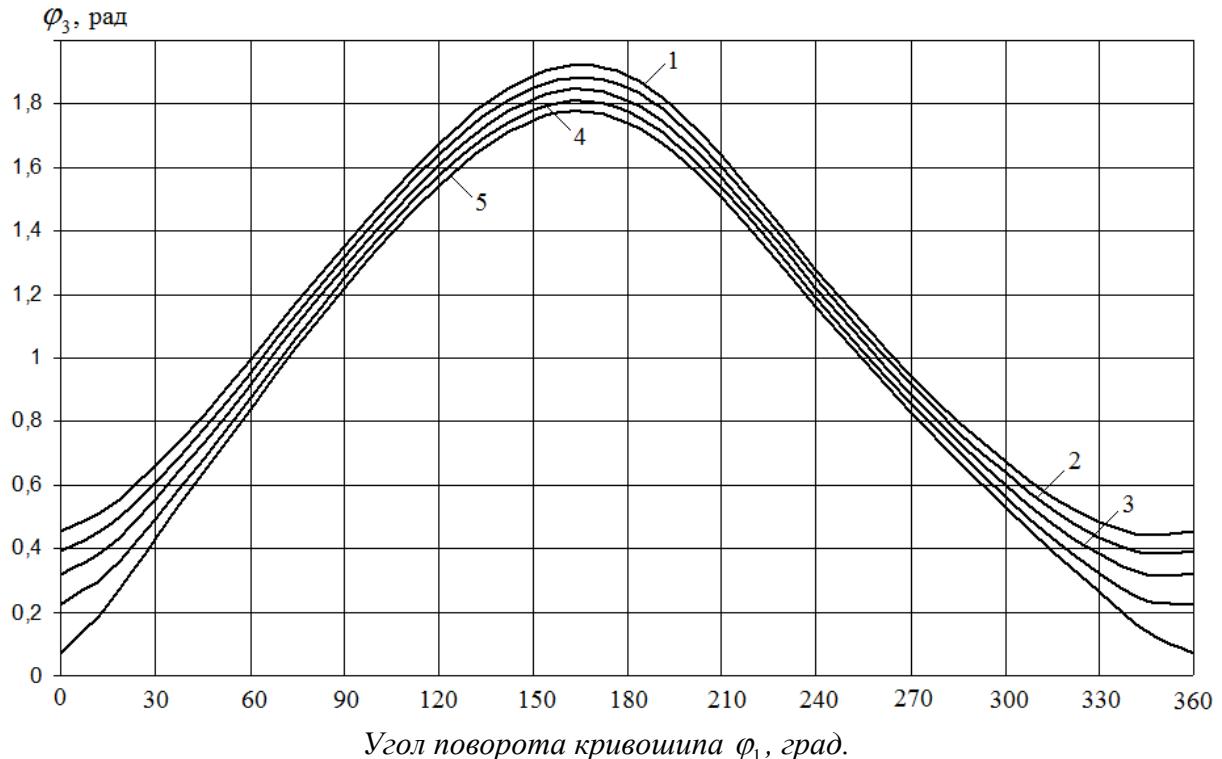


Рис. 5. Диаграммы изменения угла φ_3 в зависимости от угла φ_1 при $\tilde{l}_2 = 4,5$; $\tilde{l}_3 = 1,5$ и различных значениях \tilde{l}_4 : 1 - $\tilde{l}_4 = 4,8$; 2 - $\tilde{l}_4 = 4,85$; 3 - $\tilde{l}_4 = 4,9$; 4 - $\tilde{l}_4 = 4,95$; 5 - $\tilde{l}_4 = 4,995$

На рисунке 6 представлены последовательные положения звеньев кривошипно-коромыслового механизма с параметрами $\tilde{l}_1 = 1$; $\tilde{l}_2 = 4,5$; $\tilde{l}_3 = 1,5$; $\tilde{l}_4 = 4,995$ за один оборот кривошипа. При этих параметрах значение \tilde{l}_4 находится на границе затененной и освещенной зон (рис. 3, а) и существуют положения звеньев, при которых передача движения от кривошипа к коромыслу становится проблематичной.

Угол φ_3 , определяющий положение коромысла, имеет минимальное значение $\varphi_3 = 0,707$ рад при значениях $\varphi_1 = 0$ и 2π рад. В этих положениях угол γ_{23} между коромыслом и шатуном достигает максимальных значений, близких к 2π рад. Соответственно, угол передачи движения от шатуна к коромыслу γ в этих положениях имеет минимальные значения.

В таблице 2 приведены значения угла γ_{23} между коромыслом и шатуном в зависимости от угла φ_1 при различных значениях \tilde{l}_4 ($\tilde{l}_4 \in (4,8; 4,85; 4,9; 4,95; 4,995)$) и значениях $\tilde{l}_2 = 4,5$; $\tilde{l}_3 = 1,5$.

Заметим, что при значениях $\varphi_1 = 0$ и 2π рад и $\tilde{l}_4 = 4,995$ значения угла γ_{23} между коромыслом и шатуном равны 3,047. Эти значения близки к значению π , когда шатун и коромысло находятся на одной прямой линии.

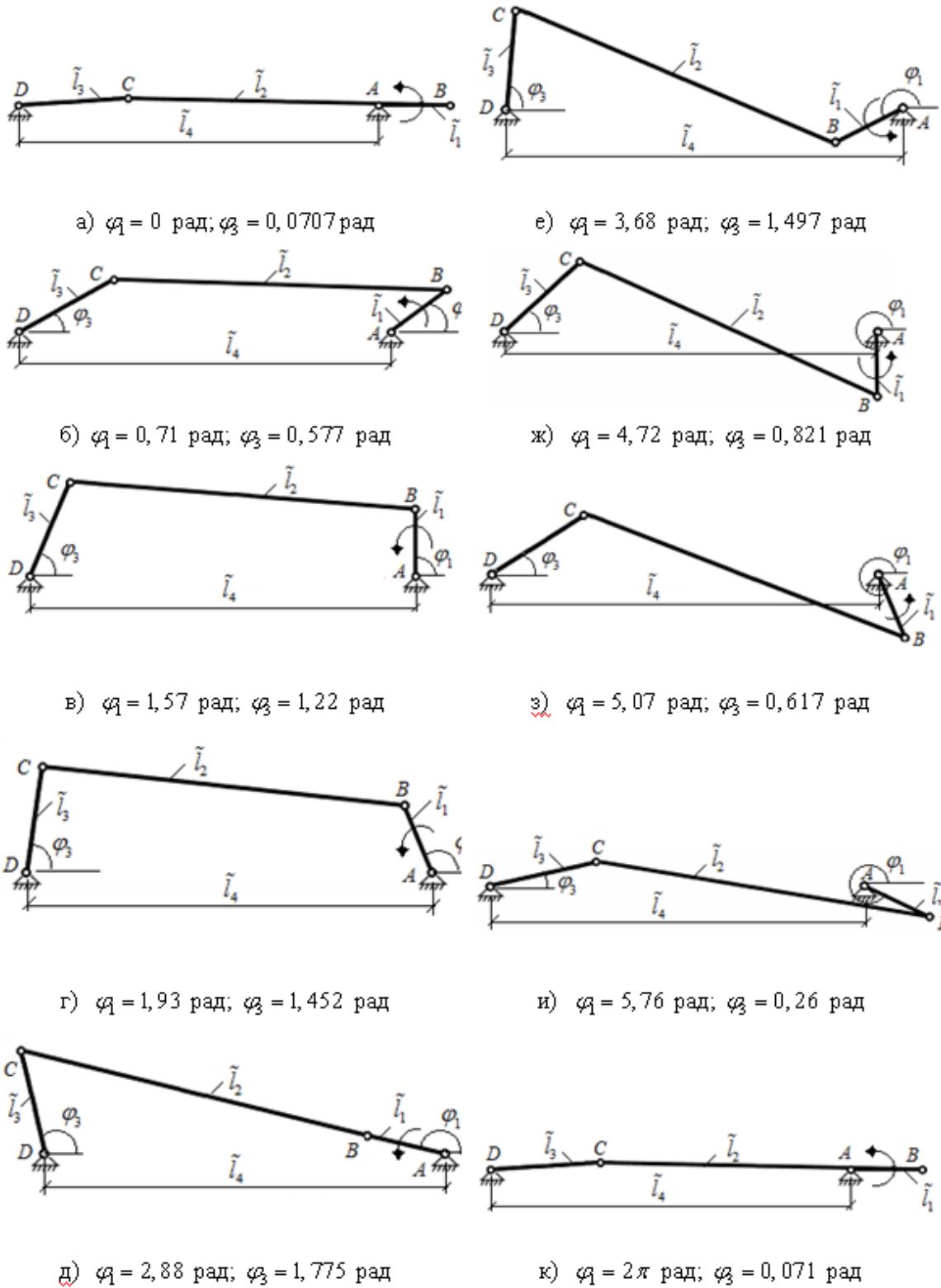


Рис. 6. Положения звеньев кривошипно-коромыслового механизма в зависимости от угла поворота кривошипа φ_1 ($\tilde{l}_1 = 1$; $\tilde{l}_2 = 4,5$; $\tilde{l}_3 = 1,5$; $\tilde{l}_4 = 4,995$)

Таблица 2

Угол между коромыслом и шатуном γ_{23} в зависимости от угла φ_1

Угол φ_1		Угол между коромыслом и шатуном γ_{23} , рад; $\tilde{l}_2 = 4,5$; $\tilde{l}_3 = 1,5$				
в град.	в рад.	$\tilde{l}_4 = 4,8$	$\tilde{l}_4 = 4,85$	$\tilde{l}_4 = 4,9$	$\tilde{l}_4 = 4,95$	$\tilde{l}_4 = 4,995$
0	0	2,541326	2,622628	2,718569	2,842964	3,047296
15	0,261667	2,499725	2,575262	2,66191	2,767332	2,897545
30	0,523333	2,389131	2,453039	2,522995	2,601362	2,682634
45	0,785	2,235856	2,289071	2,345407	2,405591	2,463905
60	1,046667	2,060038	2,105289	2,15223	2,201126	2,247078
75	1,308333	1,874	1,91372	1,954411	1,996189	2,034829
90	1,57	1,68569	1,721756	1,758399	1,795679	1,82983
105	1,831667	1,501404	1,535283	1,569491	1,604068	1,635537
120	2,093333	1,327578	1,360466	1,3935	1,426714	1,456788
135	2,355	1,172166	1,205049	1,237915	1,270799	1,300439
150	2,616667	1,045703	1,07928	1,112677	1,145939	1,175795
165	2,878333	0,961199	0,995661	1,029801	1,063678	1,093986
180	3,14	0,930995	0,965868	1,00036	1,034536	1,065072
195	3,401667	0,960484	0,994955	1,029103	1,062986	1,0933
210	3,663333	1,044394	1,077982	1,111388	1,144657	1,174518
225	3,925	1,170428	1,203316	1,236185	1,26907	1,298709
240	4,186667	1,325557	1,358439	1,391465	1,42467	1,454733
255	4,448333	1,499211	1,53307	1,567257	1,60181	1,633256
270	4,71	1,683409	1,719441	1,756046	1,793283	1,827392
285	4,971667	1,871707	1,911372	1,952003	1,993712	2,032283
300	5,233333	2,057815	2,102985	2,149834	2,198622	2,244462
315	5,495	2,233819	2,286921	2,343118	2,403131	2,461248
330	5,756667	2,387471	2,451235	2,520999	2,59909	2,679975
345	6,018333	2,498741	2,574152	2,660608	2,765673	2,895019
360	6,28	2,54132	2,622621	2,71856	2,842951	3,047257

В таблице 3 приведены значения угла передачи движения γ от шатуна к коромыслу в зависимости от угла φ_1 при различных значениях \tilde{l}_4 ($\tilde{l}_4 \in (4,8; 4,85; 4,9; 4,95; 4,995)$) и значениях $\tilde{l}_2 = 4,5$; $\tilde{l}_3 = 1,5$.

Наименьшие значения угол передачи движения γ от шатуна к коромыслу принимает в положениях кривошипа, когда угол φ_1 близок к значениям $0 \pm 2\pi$.

Таблица 3

Угол передачи движения γ в зависимости от угла φ_1

Угол φ_1		Угол передачи движения γ , рад; $\tilde{l}_2 = 4,5$; $\tilde{l}_3 = 1,5$				
в град.	в рад.	$\tilde{l}_4 = 4,8$	$\tilde{l}_4 = 4,85$	$\tilde{l}_4 = 4,9$	$\tilde{l}_4 = 4,95$	$\tilde{l}_4 = 4,995$
0	0	0,598674	0,517372	0,421431	0,297036	0,092704
15	0,261667	0,640275	0,564738	0,47809	0,372668	0,242455
30	0,523333	0,750869	0,686961	0,617005	0,538638	0,457366
45	0,785	0,904144	0,850929	0,794593	0,734409	0,676095
60	1,046667	1,079962	1,034711	0,98777	0,938874	0,892922
75	1,308333	1,266	1,22628	1,185589	1,143811	1,105171
90	1,57	1,45431	1,418244	1,381601	1,344321	1,31017
105	1,831667	1,501404	1,535283	1,570509	1,535932	1,504463
120	2,093333	1,327578	1,360466	1,3935	1,426714	1,456788
135	2,355	1,172166	1,205049	1,237915	1,270799	1,300439
150	2,616667	1,045703	1,07928	1,112677	1,145939	1,175795
165	2,878333	0,961199	0,995661	1,029801	1,063678	1,093986
180	3,14	0,930995	0,965868	1,00036	1,034536	1,065072
195	3,401667	0,960484	0,994955	1,029103	1,062986	1,0933
210	3,663333	1,044394	1,077982	1,111388	1,144657	1,174518
225	3,925	1,170428	1,203316	1,236185	1,26907	1,298709
240	4,186667	1,325557	1,358439	1,391465	1,42467	1,454733
255	4,448333	1,499211	1,53307	1,572743	1,53819	1,506744
270	4,71	1,456591	1,420559	1,383954	1,346717	1,312608
285	4,971667	1,268293	1,228628	1,187997	1,146288	1,107717
300	5,233333	1,082185	1,037015	0,990166	0,941378	0,895538
315	5,495	0,906181	0,853079	0,796882	0,736869	0,678752
330	5,756667	0,752529	0,688765	0,619001	0,54091	0,460025
345	6,018333	0,641259	0,565848	0,479392	0,374327	0,244981
360	6,28	0,59868	0,517379	0,42144	0,297049	0,092743

На рисунке 7 приведены диаграммы углов γ_{23} и γ в зависимости от угла φ_1 при различных значениях \tilde{l}_4 ($\tilde{l}_4 \in (4,8; 4,85; 4,9; 4,95; 4,995)$) и значениях $\tilde{l}_2 = 4,5$; $\tilde{l}_3 = 1,5$. Из рисунка 7 видно, что угол γ имеет минимальные значения при $\varphi_1 \approx 0^\circ$ и 360° . Причем, чем ближе значение

\tilde{l}_4 к $(\tilde{l}_4)_{\max} = 4,995$, тем меньше значение $\gamma \rightarrow 0$. Если минимальный угол передачи движения γ_{\min} будет ограничен величиной $\gamma_{\min} < 0,2$ рад(затененная зона на рисунке 7), то при $\tilde{l}_4 = 4,995$ угол γ становится меньше γ_{\min} и передача движения от кривошипа к коромыслу будет невозможна.

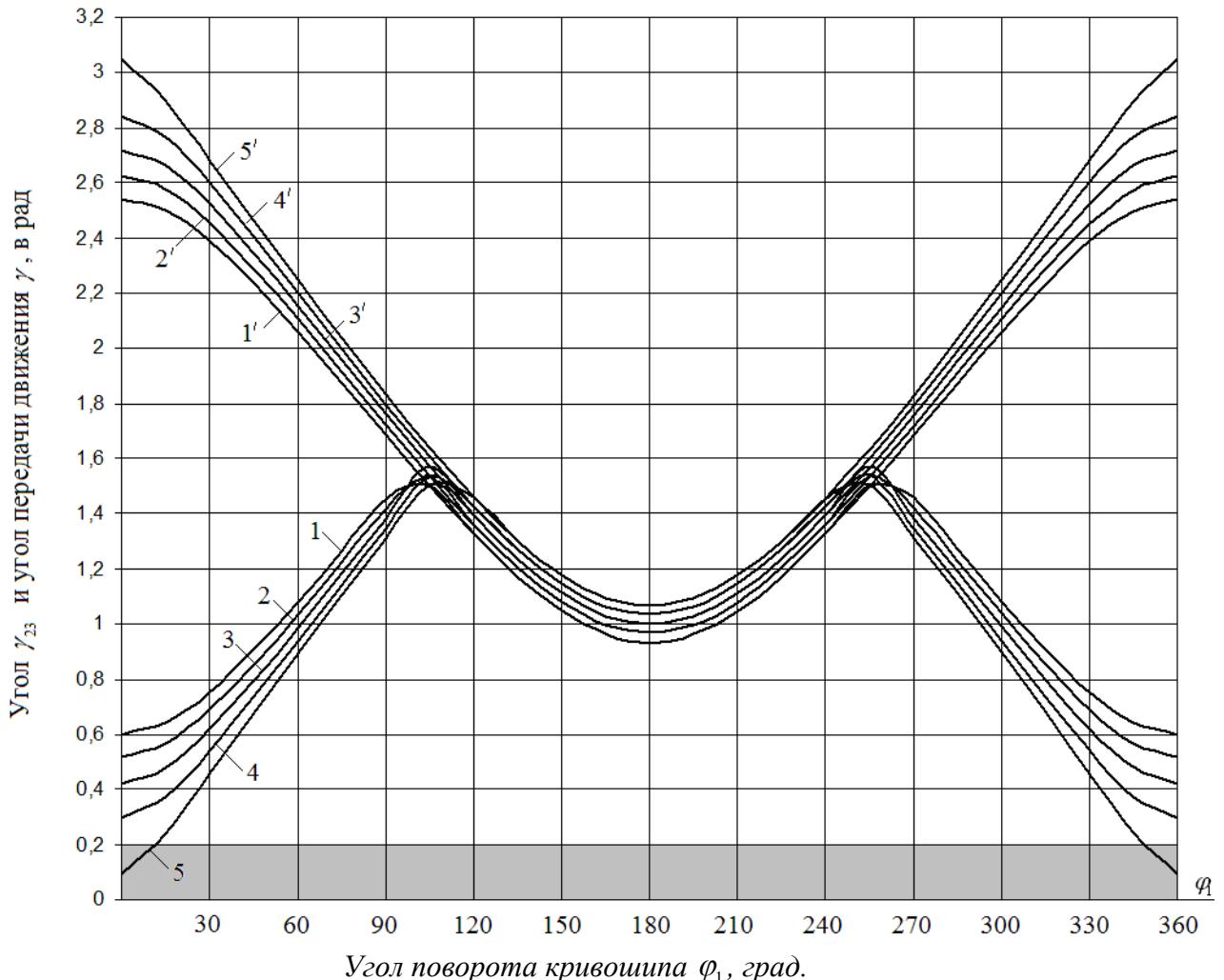


Рис. 7. Диаграммы угла γ_{23} (диаграммы 1', 2', 3', 4', 5') и угла γ (диаграммы 1, 2, 3, 4, 5) в зависимости от угла ϕ_1 при $\tilde{l}_2 = 4,5$; $\tilde{l}_3 = 1,5$ и различных значениях \tilde{l}_4 : 1, 1' - $\tilde{l}_4 = 4,8$; 2, 2' - $\tilde{l}_4 = 4,85$; 3, 3' - $\tilde{l}_4 = 4,9$; 4, 4' - $\tilde{l}_4 = 4,95$; 5, 5' - $\tilde{l}_4 = 4,995$

На рис. 8 показаны положения шатуна и коромысла, когда эти звенья расположены на одной прямой.

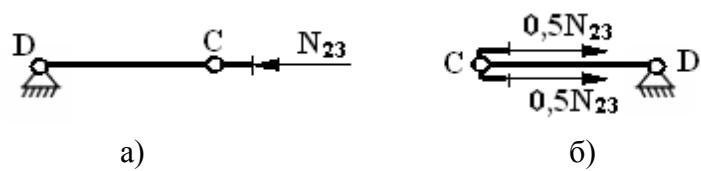


Рис. 8. Положения шатуна и коромысла, при котором передача движения от шатуна к коромыслу не реализуется: а) угол $\gamma_{23} = \pi$; б) угол $\gamma_{23} = 0$

Для передачи движения коромыслу необходимо, чтобы при действии силы N_{23} возникал момент этой силы относительно точки D .

Для положений шатуна и коромысла, представленных на рис. 8, момент силы N_{23} относительно точки D отсутствует. Передача движения от шатуна к коромыслу невозможна. Для идеальных связей, когда отсутствует трение в шарнирах C и D , это состояние равновесия неустойчиво. Однако при учете трения в шарнирах это состояние равновесия может быть устойчивым. Поэтому, чтобы обеспечить передачу движения от шатуна к коромыслу необходимо исключить их расположение на одной прямой.

Естественно, возникает вопрос: а каковы должны быть положения шатуна и коромысла друг относительно друга, чтобы обеспечивалась передача движения при неидеальных связях? На рис. 9 представлена схема сил, действующих на коромысло (пренебрегаем силой тяжести и силами инерции коромысла): сила N_{23} , толкающая коромысло, направленная вдоль шатуна; моменты сил трения $M_C = f_C \cdot N_{23} \cdot r_C$ и $M_D = f_D \cdot N_{23} \cdot r_D$ в шарнирах C и D (f_C и f_D – коэффициенты трения скольжения в шарнирах C и D ; r_C и r_D – радиусы шарниров C и D).

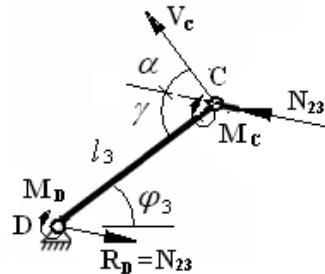


Рис. 9. Схема действия сил на коромысле при неидеальных связях

Движение коромысла будет обеспечено, если соблюдаются неравенства

$$N_{23} \sin \gamma \cdot l_3 \geq M_C + M_D, \quad \sin \gamma \geq f_C \cdot r_C / l_3 + f_D \cdot r_D / l_3,$$

$$\gamma \geq \arcsin(f_C \cdot r_C / l_3 + f_D \cdot r_D / l_3), \quad \gamma \geq \arcsin f_p, \quad f_p = f_C \cdot r_C / l_3 + f_D \cdot r_D / l_3, \quad (11)$$

где f_p – приведенный коэффициент трения.

При неидеальных связях условие существования кривошипа, определяемое теоремой Грасгофа, требует дополнительных условий, определяющих возможность передачи движения от шатуна к коромыслу.

На рисунке 10 показано положение механизма ($\varphi_1 = 0$) при относительных размерах звеньев ($\tilde{l}_1 = 1$; $\tilde{l}_2 = 4,5$; $\tilde{l}_3 = 1,5$; $\tilde{l}_4 = 4,995$).

При этих параметрах по теореме Грасгофа обеспечивается существование кривошипа: ($l_1 + l_2 < l_3 + l_4$; $l_4 + l_1 < l_3 + l_2$). Однако передать движение коромыслу в этом положении при неидеальных связях может оказаться проблематичным.

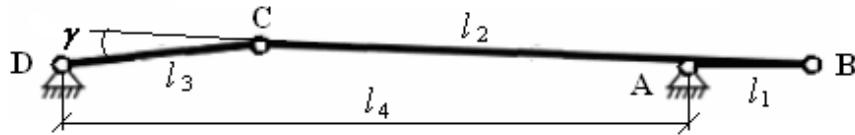


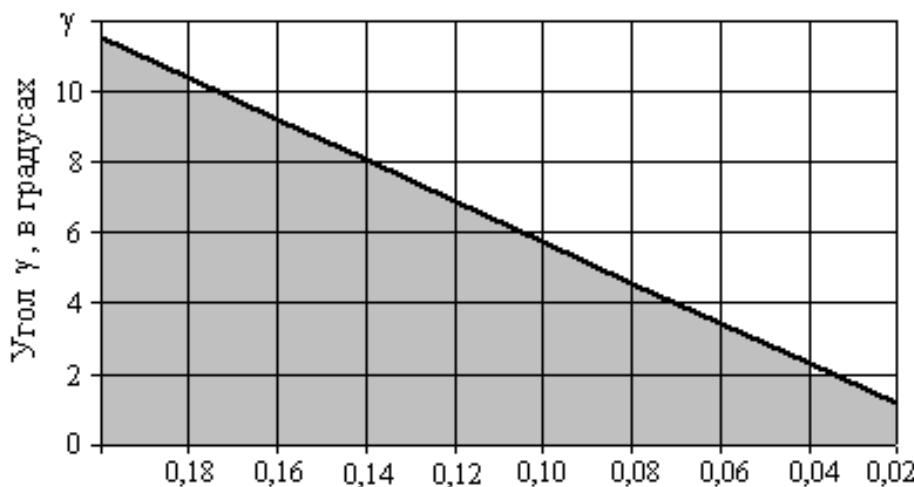
Рис. 10. Положение механизма при $\tilde{l}_1 = 1$; $\tilde{l}_2 = 4,5$; $\tilde{l}_3 = 1,5$; $\tilde{l}_4 = 4,995$ и $\varphi_1 = 0$

В таблице 4 приведены значения приведенного коэффициента трения f_p и соответствующие им минимальные углы передачи движения γ_{\min} для кривошипно-коромыслового механизма.

Таблица 4

Приведенный коэффициент трения f_p	Угол передачи движения $\gamma_{\min} = \arcsin f_p$, рад	Угол передачи движения $\gamma_{\min} = \arcsin f_p$, град.
0,2	0,201358	11,54281
0,18	0,180986	10,37502
0,16	0,160691	9,211566
0,14	0,140461	8,051928
0,12	0,12029	6,895598
0,1	0,100167	5,742081
0,08	0,080086	4,590893
0,06	0,060036	3,441557
0,04	0,040011	2,293606
0,02	0,020001	1,146573

На рис. 11 приведена диаграмма $\gamma = \arcsin f_p$, разделяющая две области значений углов передачи движения: затененная область, когда $\gamma < \arcsin f_p$ и передача движения от шатуна к коромыслу невозможна; освещленная область, когда $\gamma > \arcsin f_p$ и обеспечивается передача движения от шатуна к коромыслу.



Приведенный коэффициент трения f_p

Рис. 11. Диаграмма $\gamma_{\min} = \arcsin f_p$, разделяющая области значений углов γ

Для положения механизма (рис. 10) при $\varphi_1 = 0$ и относительных размерах звеньев $\tilde{l}_1 = 1$; $\tilde{l}_2 = 4,5$; $\tilde{l}_3 = 1,5$; $\tilde{l}_4 = 4,995$ угол передачи движения $\gamma = 0,092704$ рад. А из таблицы 4 видно, что даже при приведенном коэффициенте трения $f_p = 0,1$ минимальный угол передачи движения γ_{\min} должен составлять величину более 0,1.

Если приведенный коэффициент трения $f_p > 0,1$, то механизм, положение которого приведено на рис. 10, не обеспечивает передачи движения коромыслу, а, следовательно, не обеспечивает и существование кривошипа. Таким образом, неравенства (1), определяющие условие существования кривошипа по теореме Грасгофа, при неидеальных связях должны быть дополнены неравенствами (11).

При параметрах механизма, когда угол передачи движения γ становится меньше γ_{\min} , механизм попадает в зону бифуркации. Здесь возникает возможность перехода от структуры кривошипно-коромыслового механизма к структуре кривошипно-ползунного механизма, если опору коромысла выполнить в виде ползуна и обеспечить возможность перемещения этого звена. Такая идея реализована в работах [6–9].

На рисунке 12 представлена схема кривошипно-коромыслового механизма с подвижной опорой коромысла.

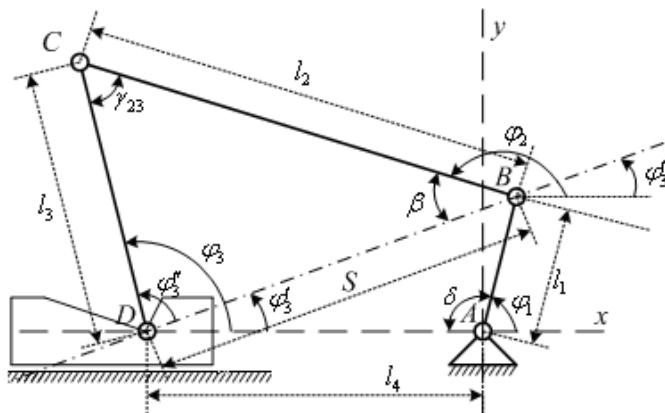


Рис. 12. Схема кривошипно-коромыслового механизма с подвижной опорой

Вращательное движение кривошипа AB преобразуется в возвратно-вращательное движение коромысла CD лишь до тех пор, пока угол передачи движения от шатуна коромыслу удовлетворяет условию $\gamma > \gamma_{\min}$. Механизм имеет одну степень свободы, если подвижная опора коромысла определенным образом зафиксирована.

Как только угол передачи движения от шатуна коромыслу станет меньше минимального значения, существование кривошипно-коромыслового механизма невозможно. Однако при подвижной опоре коромысла становится возможным переход от структуры кривошипно-

коромыслового механизма к структуре кривошипно-ползунного механизма и его дальнейшее функционирование как кривошипно-ползунного механизма.

На рисунке 13 представлены последовательные положения звеньев кривошипно-коромыслового механизма, полученные в результате моделирования его движения при $\tilde{l}_1 = 1$; $\tilde{l}_2 = 4,5$; $\tilde{l}_3 = 1,5$; $\tilde{l}_4 = 4,995$.

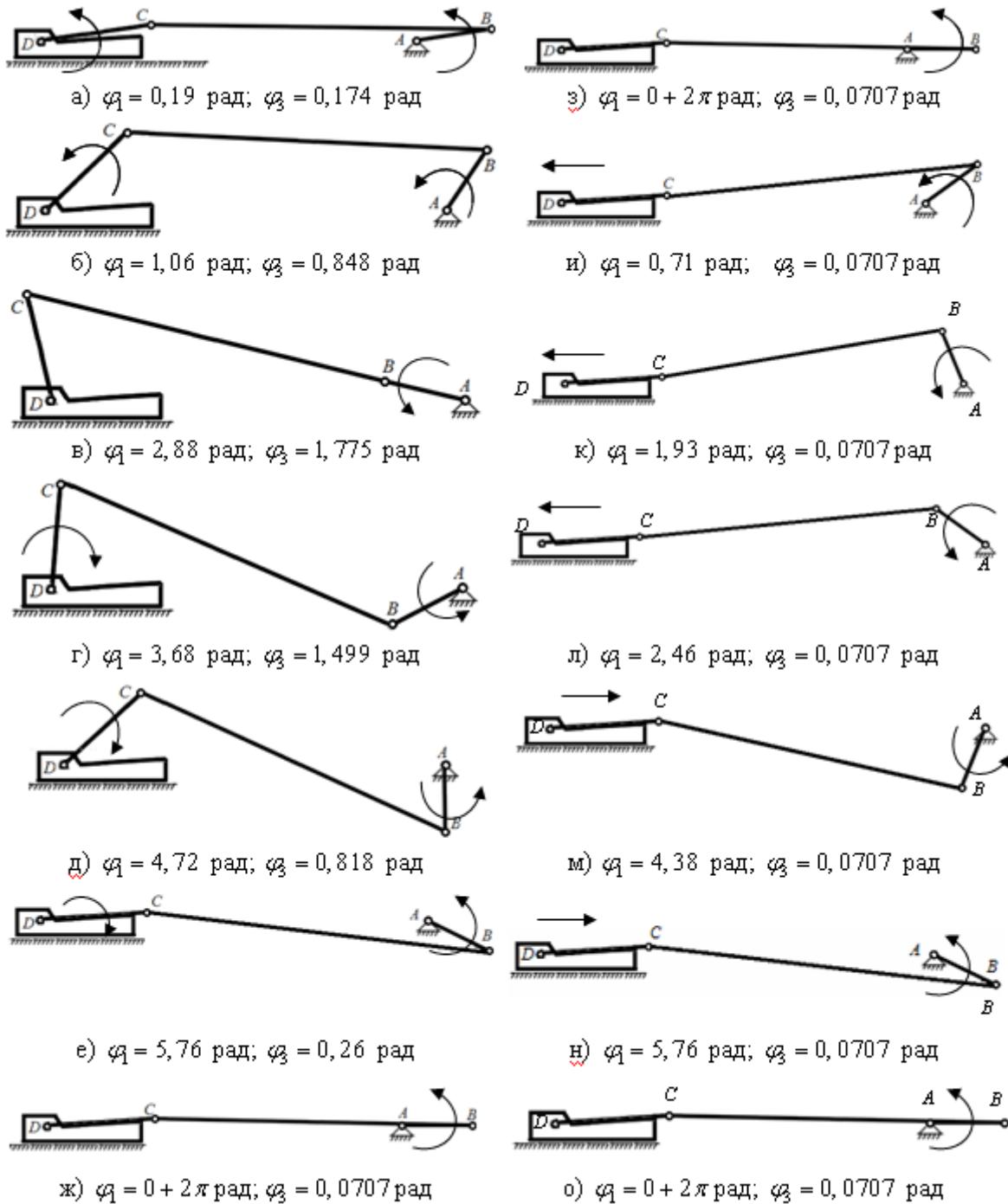


Рис. 13. Последовательные положения звеньев кривошипно-коромыслового механизма

Параметры механизма обеспечивают его функционирование как кривошипно-коромыслового лишь в диапазоне значений угла $0,19 < \varphi_1 < 2\pi$, пока не возникнет его особое положение при $\varphi_1 \approx 2\pi$. На рисунке 13 этой зоне соответствуют положения от *a* до *жс*.

Как только кривошип займет положение $\varphi_1 = 0 + 2\pi$ рад (рис. 13, *ж*, *з*), угол φ_3 имеет близкое к минимальному значение $\varphi_3 = 0,0707$ рад, а угол передачи движения от шатуна к коромыслу будет равен $\gamma = 0,092704$ рад.

Если приведенный коэффициент трения $f_p > 0,1$, то передача движения от шатуна к коромыслу отсутствует. Но при подвижной опоре коромысла возникает возможность передачи движения непосредственно подвижной опоре. Коромысло при этом занимает фиксированное положение относительно подвижной опоры-ползуна.

Коромысло *CD* и подвижная опора *D* коромысла становятся единым звеном – ползуном. Далее механизм начинает функционировать как кривошипно-ползунный механизм. На рис. 13 положения звеньев за полный оборот кривошипа показано на схемах от «з» до «о».

Выводы

- Соотношение между размерами звеньев l_1 , l_2 , l_3 и l_4 в кривошипно-коромысловом механизме ($l_1 + l_2 < l_3 + l_4$; $l_4 + l_1 < l_3 + l_2$), обеспечивающее условие существования кривошипа по теореме Грасгофа, является достаточным лишь при идеальных связях.

- При уменьшении относительной длины шатуна \tilde{l}_2 уменьшается минимальное значение межпорного расстояния $(\tilde{l}_4)_{\min}$. Диапазон изменения межпорного расстояния $((\tilde{l}_4)_{\max} - (\tilde{l}_4)_{\min})$, при котором обеспечивается существование кривошипно-коромыслового механизма, не изменяется.

- Чем меньше относительная длина коромысла \tilde{l}_3 , тем меньше при фиксированной длине шатуна \tilde{l}_2 разница ординат $(\tilde{l}_4)_{\max}$ и $(\tilde{l}_4)_{\min}$, определяющая возможный диапазон изменения расстояния между опорами кривошипа и коромысла. В пределе при $\tilde{l}_3 \rightarrow 1$ расстояние между опорами кривошипа и коромысла \tilde{l}_4 стремится к значению \tilde{l}_2 .

- При неидеальных связях условие существования кривошипа, определяемое теоремой Грасгофа, требует дополнительных условий, определяющих возможность передачи движения от шатуна к коромыслу.

- Движение коромысла будет обеспечено, если неравенства (1) дополнены неравенствами (7) и угол передачи движения от шатуна к

коромыслу (угол γ) будет равен величине, определяемой как $\gamma > \arcsin f_p$, где приведенный коэффициент трения $f_p = f_C \cdot r_C / l_3 + f_D \cdot r_D / l_3$.

6. При определенных параметрах механизма, когда угол передачи движения γ становится меньше γ_{\min} , механизм попадает в зону бифуркации. Возникает возможность перехода от структуры кривошипно-коромыслового механизма к структуре кривошипно-ползунного механизма, если опору коромысла выполнить в виде ползуна и обеспечить возможность перемещения этого звена.

Работа выполнена в рамках государственного задания №2014/232 Минобрнауки России и при поддержке гранта РФФИ № 15-01-08599.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1988.– 640 с.
2. Алимов О. Д., Манжосов В. К., Филипповский В. П. Механические импульсные генераторы с шарнирно-рычажным захватывающим устройством. – Фрунзе: Илим, 1975. – 148 с.
3. Абдраимов С., Джуматаев М. С. Шарнирно-рычажные механизмы переменной структуры. – Бишкек: Илим, 1993. – 177 с.
4. Алмаматов М. З. Новая концепция синтеза плоских рычажных механизмов. – Бишкек: Текник, 2005. – 150 с.
5. Манжосов В. К., Петрова Т. Е. Передача движения в кривошипно-коромысловом механизме // Вестник УлГТУ. – 2013. – № 1. – С. 20-23.
6. Алимов О. Д., Манжосов В. К., Филипповский В. П., Рябов В. А., Макуров Е. В. Ударный механизм // Авторское свидетельство № 560975. Зарегистр. в Государственном реестре изобретений СССР 23.07.1977 г.
7. Алимов О. Д., Манжосов В. К., Абдраимов С., Парышкура М. И. Механический пресс // Авторское свидетельство № 994303. Зарегистр. в Государственном реестре изобретений СССР 08.10.1982 г.
8. Алимов О. Д., Манжосов В. К., Абдраимов С., Парышкура М. И., Алмаматов М. З. Механический пресс // Авторское свидетельство № 1139051. Зарегистр. в Государственном реестре изобретений СССР 08.10.1984 г.
9. Манжосов В. К., Шишенин С. В., Сабиров Х. А., Парышкура М. И., Аванесов Г. И. Механический безмуфтовый пресс // Авторское свидетельство № 1279846. Зарегистрировано в Государственном реестре изобретений СССР 01.09.1986 г.

П. К. Маценко (г. Ульяновск)

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ, ПОРОЖДАЮЩИХ ИНВОЛЮЦИЮ

Получены необходимые и достаточные условия, при которых дифференцируемая на отрезке $[-1,1]$ функция является инволюцией. Приведены примеры построения инволюции.

В ряде задач гармонического анализа (см., например, [1]), важную роль играет инволюция – некоторая функция $f(x)$, взаимно однозначно отображающая множество D_f на себя так, что $f(f(x))=x$ для всех $x \in D_f$. В заметке приводятся условия, при которых произвольная дифференцируемая на отрезке $[-1,1]$ функция будет инволюцией, и указываются некоторые классы функций, порождающих инволюцию.

Сразу исключим из рассмотрения тривиальный случай: $f(x) \equiv x$. Ясно, что $f(x)$ является инволюцией на отрезке $[-1,1]$ тогда и только тогда, когда существует обратная функция $f^{-1}(x)$ и выполняется условие: $f^{-1}(x) = f(x)$. Поскольку инволюция и обратная к ней функция совпадают, график инволюции $y = f(x)$ симметричен относительно прямой $y = x$.

Теорема 1. Если дифференцируемая на отрезке $[-1,1]$ функция $f(x)$ является инволюцией, то $f(x)$ монотонно убывает на $[-1,1]$, причем $f(-1)=1$, $f(1)=-1$. Функция $F(t) = x\sqrt{2} - t$, где x – корень уравнения $f(x) - x + t\sqrt{2} = 0$, существует и является четной для $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, причем $F(\pm\sqrt{2}) = 0$.

Доказательство. Поскольку для $f(x)$ существует обратная функция, то $f(x)$ монотонна. Предположим, что $f(x)$ монотонно возрастает на $[-1,1]$. Выберем $x \in [-1,1]$ и вычислим $f(x)$. Так как $f(x) \neq x$, возможны два варианта. Если $f(x) < x$, то $f(f(x)) < f(x)$, т. е. $x < f(x)$, что противоречит предложению. Предположение: $f(x) > x$ аналогично ведет к противоречию. Значит, $f(x)$ монотонно убывает. Но так как областью значений $f(x)$ является отрезок $[-1,1]$, то $f(-1)=1$, $f(1)=-1$.

Докажем однозначную разрешимость уравнения $f(x) - x + t\sqrt{2} = 0$ для каждого $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Для $t = \pm\sqrt{2}$ утверждение очевидно. Для

$t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ утверждение следует из того, что функция $g(x) = f(x) - x + t\sqrt{2}$ монотонно убывает, поскольку $f(x)$ монотонно убывает, и $g(-1) \cdot g(1) = (2 + t\sqrt{2})(-2 + t\sqrt{2}) < 0$.

Докажем четность функции $F(x)$. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнений $f(x_1) - x_1 + t_1\sqrt{2} = 0$ и $f(x_2) - x_2 + t_2\sqrt{2} = 0$ соответственно, причем $t_2 = -t_1$. Обозначим $x_3 = x_2 + t_1\sqrt{2}$, тогда второе уравнение перепишется в виде: $f(x_3 - t_1\sqrt{2}) = x_3$. На обе части полученного уравнения подействуем функцией f , получим уравнение $x_3 - t_1\sqrt{2} = f(x_3)$. Это уравнение сложим с первым исходным и получим $f(x_1) - x_1 = f(x_3) - x_3$. Но так как $f(x) - x$ – монотонно убывающая функция, то $x_1 = x_3$, т. е. $x_1 = x_2 + t_1\sqrt{2}$. Теперь вычислим: $F(-t_1) = F(t_2) = x_2\sqrt{2} - t_2 = (x_1 - t_1\sqrt{2})\sqrt{2} - t_2 = x_1\sqrt{2} - 2t_1 - t_2 = x_1\sqrt{2} - t_1 = F(t_1)$. Четность $F(t)$ доказана.

Теорема 2. Если функция $F(t)$ четна и дифференцируема на отрезке $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, причем $F(-\sqrt{2}) = F(\sqrt{2}) = 0$ и $|F'(t)| < 1$, то функция $f(x) = x - t\sqrt{2}$, где t – корень уравнения $F(t) + t - x\sqrt{2} = 0$, является инволюцией на отрезке $[-1, 1]$.

Доказательство. Сначала докажем, что функция $G(t) = F(t) + t - x\sqrt{2}$ имеет единственный корень для любого $x \in [-1, 1]$. Для $x = \pm 1$ утверждение очевидно. Для $x \in (-1, 1)$ функция $G(t)$ монотонно возрастает на отрезке $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, так как $G'(t) = F'(t) + 1 > 0$, и на концах отрезка принимает разные по знаку значения: $G(-\sqrt{2}) = F(-\sqrt{2}) - \sqrt{2} - x\sqrt{2} = = (-1 - x)\sqrt{2} < 0$, $G(\sqrt{2}) = F(\sqrt{2}) + \sqrt{2} - x\sqrt{2} = (1 - x)\sqrt{2} > 0$. Значит, функция $f(x)$ определена на отрезке $[-1, 1]$.

Найдем область значений $f(x)$. Сначала определим знак ее производной. Так как $0 < F'(t) + 1 < 2$, то

$$f'(x) = 1 - t'(x)\sqrt{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{x'(t)} = 1 - \frac{2}{F'(t) + 1} < 0.$$

Значит, $f(x)$ монотонно убывает на отрезке $[-1, 1]$. Положим $x = -1$. Поскольку уравнение $F(t) + t + \sqrt{2} = 0$ имеет единственный корень $t = -\sqrt{2}$, то $f(-1) = 1$. Теперь положим $x = 1$. Уравнение $F(t) + t - \sqrt{2} = 0$ имеет единственный корень $t = \sqrt{2}$, и $f(1) = -1$. Значит, областью значений $f(x)$ является отрезок $[-1, 1]$.

Обозначим $f(x) = y$, тогда $y = x - t_x \sqrt{2}$, где t_x – корень уравнения $F(t_x) = x\sqrt{2} - t_x$. Пусть t_y – корень уравнения $F(t_y) = y\sqrt{2} - t_y$. Тогда $F(t_x) - F(t_y) = x\sqrt{2} - t_x - y\sqrt{2} + t_y = x\sqrt{2} - t_x - (x - t_x \sqrt{2})\sqrt{2} + t_y = t_x + t_y$. Отсюда с учетом четности $F(t)$ следует $F(-t_x) - t_x = F(t_y) + t_y$. Поскольку функция $F(t) + t$ монотонно растущая, из последнего равенства следует $t_y = -t_x$. Теперь для каждого $x \in [-1, 1]$ получаем

$$f(f(x)) = f(y) = x - t_x \sqrt{2} - t_y \sqrt{2} = x.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим два примера. 1. Пусть $F(t) = a(t^2 - 2)$, причем $8a^2 < 1$. Функция $F(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, значит, на ее основе можно построить инволюцию. Для каждого $x \in [-1, 1]$ решаем уравнение $a(t^2 - 2) + t - x\sqrt{2} = 0$. Если $a = 0$, то $t = x\sqrt{2}$. Тогда $f(x) = -x$; мы получили функцию, используемую в [1]. Если же $a \neq 0$, то уравнение имеет корень $t = \left(-1 + \sqrt{1 + 8a^2 + 4ax\sqrt{2}}\right)/(2a)$. В этом случае получаем инволюцию вида $f(x) = x + \left(1 - \sqrt{1 + 8a^2 + 4ax\sqrt{2}}\right)/(a\sqrt{2})$.

2. Рассмотрим функцию $F(t) = b - \operatorname{sgn}(b) \cdot \sqrt{a(t^2 - 2) + b^2}$, $b \neq 0$, где $\operatorname{sgn}(b) = 1$ для $b > 0$ и $\operatorname{sgn}(b) = 0$ для $b < 0$. Находим

$$\max_{-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}} |F'(t)| = \max_{-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}} \frac{|a| \cdot |t|}{\sqrt{a(t^2 - 2) + b^2}} = \frac{|a|\sqrt{2}}{|b|}.$$

Условие $|F'(t)| < 1$ будет выполнено, если $|a|\sqrt{2} < |b|$. В этом случае инволюцию можно построить по теореме 2. В частности, если $a = 1$, то $F(t) = b - \operatorname{sgn}(b) \cdot \sqrt{t^2 + b^2 - 2}$, причем, $|b| > \sqrt{2}$. Для каждого $x \in [-1, 1]$ решаем уравнение $b - \operatorname{sgn}(b) \cdot \sqrt{t^2 + b^2 - 2} + t - x\sqrt{2} = 0$ и находим $t = (bx\sqrt{2} - x^2 - 1)/(b - x\sqrt{2})$. Тогда инволюция $f(x)$ будет иметь вид

$$f(x) = x - \sqrt{2} \cdot \frac{bx\sqrt{2} - x^2 - 1}{b - x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - bx}{b - x\sqrt{2}}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кувардина Л. П., Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора с инволюцией // Известия вузов. Математика. – 2008. – №5. – С. 67-76.

П. К. Маценко, Е. С. Семенова (г. Ульяновск)

СПЕКТР ОДНОМЕРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОТРАЖЕНИЕМ В СТАРИШЕМ ЧЛЕНЕ

Получена асимптотика собственных значений оператора, являющегося одномерным возмущением функционально-дифференциального оператора первого порядка с отражением в старшем члене и периодическим краевым условием.

1. Рассматривается оператор, порожденный на отрезке $[-1,1]$ функционально-дифференциальным выражением

$$I[y] = a_1 y'(x) + a_2 y'(-x) + y'(0)\varphi(x) + q(x)y(x) \quad (1)$$

и краевым условием

$$y(1) - y(-1) = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что:

- a) функция $q(x)$ четна и непрерывно дифференцируема на $[-1,1]$,
- b) функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[-1,1]$,
- c) вещественные константы a_1, a_2 удовлетворяют условиям: $a_2 \neq 0$, $a_1^2 \neq a_2^2$, $a_1 + a_2 + \varphi(0) \neq 0$.

В случае $a_2 = 0$, $\varphi(x) \equiv 0$ оператор (1), (2) превращается в хорошо изученный обыкновенный дифференциальный. В случае $a_2 \neq 0$, $\varphi(x) \equiv 0$ оператор, подобный (1), (2), изучен в работе [1]. Пусть $y(x)$ – ненулевое решение уравнения $I[y] - \lambda y = 0$, удовлетворяющее краевому условию (2), где λ – произвольный комплексный параметр. Для $x \in [0,1]$ обозначим $y(x) = y_1(x)$, $y(-x) = y_2(x)$. Функции $y_1(x), y_2(x)$ являются решениями дифференциальной системы

$$\begin{cases} a_1 y'_1(x) - a_2 y'_2(x) + y'(0)\varphi(x) + q(x)y_1(x) - \lambda y_1(x) = 0, \\ -a_1 y'_2(x) + a_2 y'_1(x) + y'(0)\varphi(-x) + q(x)y_2(x) - \lambda y_2(x) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

и удовлетворяют краевым условиям

$$y_1(0) - y_2(0) = 0, \quad y_1(1) - y_2(1) = 0. \quad (4)$$

Обозначив

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad \Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi(-x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} a_2 & a_2 \\ a_1 - \alpha & a_1 + \alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha = \sqrt{a_1^2 - a_2^2}$, $\operatorname{Im}\alpha \geq 0$, перепишем систему (3) в виде

$$AY'(x) + y'(0)\Phi(x) + q(x)Y(x) - \lambda Y(x) = (0; 0)^T,$$

где $(.)^T$ – транспонированная строка $(.)$. Затем сделаем замену $Y(x) = HZ(x)$ и обе части полученной системы умножим слева на матрицу H^{-1} . В итоге для компонент $z_1(x), z_2(x)$ столбца $Z(x)$ получим распадающуюся систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha z'_1(x) + q(x)z_1(x) + y'(0)\psi_1(x) - \lambda z_1(x) = 0, \\ -\alpha z'_2(x) + q(x)z_2(x) + y'(0)\psi_2(x) - \lambda z_2(x) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

в которой

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\alpha a_2} [(\alpha + a_1)\varphi(x) - a_2\varphi(-x)],$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{2\alpha a_2} [(\alpha - a_1)\varphi(x) + a_2\varphi(-x)].$$

Далее, так как

$$y_1(0) - y_2(0) = (1; -1)HZ(0) = (\alpha - a_1 + a_2)z_1(0) - (\alpha + a_1 - a_2)z_2(0),$$

$$y_1(1) - y_2(1) = (1; -1)HZ(1) = (\alpha - a_1 + a_2)z_1(1) - (\alpha + a_1 - a_2)z_2(1),$$

то краевые условия (4) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} &(\alpha - a_1 + a_2)z_1(0) - (\alpha + a_1 - a_2)z_2(0) = 0, \\ &(\alpha - a_1 + a_2)z_1(1) - (\alpha + a_1 - a_2)z_2(1) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассматривая уравнения системы (5) как линейные дифференциальные относительно $z_1(x), z_2(x)$, преобразуем систему (5) к виду:

$$\begin{cases} z_1(x) = Q(-x) \exp\left(\frac{\lambda x}{\alpha}\right) \left\{ c_1 - \frac{1}{\alpha} \int_0^x y'(0) \exp\left(-\frac{\lambda t}{\alpha}\right) Q(t) \psi_1(t) dt \right\}, \\ z_2(x) = Q(x) \exp\left(-\frac{\lambda x}{\alpha}\right) \left\{ c_2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^x y'(0) \exp\left(\frac{\lambda t}{\alpha}\right) Q(-t) \psi_2(t) dt \right\}, \end{cases} \quad (7)$$

где c_1, c_2 – произвольные константы,

$$Q(x) = \exp\left(\frac{1}{\alpha} \int_0^x q(t) dt\right), \quad \exp(x) = e^x.$$

Преобразуем систему (7). Так как $Q(0) = 1$, то из уравнений системы (7) следует: $z_1(0) = c_1, z_2(0) = c_2$. Учитывая первое краевое условие (6), находим

$$\begin{aligned} y(0) &= y_1(0) = (1; 0)HZ(0) = a_2[z_1(0) + z_2(0)] = \\ &= a_2 \left[z_1(0) + \frac{\alpha - a_1 + a_2}{\alpha + a_1 - a_2} z_1(0) \right] = \frac{2\alpha a_2}{\alpha + a_1 - a_2} z_1(0) = \frac{2\alpha a_2}{\alpha + a_1 - a_2} c_1. \end{aligned}$$

Теперь из уравнения $I[y] - \lambda y = 0$ следует, что

$$y'(0) = \frac{\lambda - q(0)}{a_1 + a_2 + \varphi(0)} y(0) = \frac{2\alpha a_2 [\lambda - q(0)]}{[a_1 + a_2 + \varphi(0)] \cdot [\alpha + a_1 - a_2]} c_1.$$

Аналогично доказывается, что

$$y'(0) = \frac{2\alpha a_2 [\lambda - q(0)]}{[a_1 + a_2 + \varphi(0)] \cdot [\alpha - a_1 + a_2]} c_2.$$

Найденные представления для $y'(0)$ подставим в уравнения системы (7), получим общее решение системы (5)

$$\begin{cases} z_1(x) = c_1 Q(-x) \exp\left(\frac{\lambda x}{\alpha}\right) \left\{ 1 - m_1 [\lambda - q(0)] \cdot \int_0^x \exp\left(-\frac{\lambda t}{\alpha}\right) Q(t) \psi_1(t) dt \right\}, \\ z_2(x) = c_2 Q(x) \exp\left(-\frac{\lambda x}{\alpha}\right) \left\{ 1 + m_2 [\lambda - q(0)] \cdot \int_0^x \exp\left(\frac{\lambda t}{\alpha}\right) Q(-t) \psi_2(t) dt \right\}, \end{cases} \quad (8)$$

в котором

$$m_1 = \frac{2 a_2}{[a_1 + a_2 + \varphi(0)] \cdot [\alpha + a_1 - a_2]},$$

$$m_2 = \frac{2 a_2}{[a_1 + a_2 + \varphi(0)] \cdot [\alpha - a_1 + a_2]}.$$

2. Краевая задача (5), (6) имеет ненулевое решение только в том случае, когда параметр λ является корнем характеристического уравнения

$$\begin{aligned} & Q(1) \exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right) \left\{ 1 + m_2 [\lambda - q(0)] \cdot \int_0^1 \exp\left(\frac{\lambda t}{\alpha}\right) Q(-t) \psi_2(t) dt \right\} - \\ & - Q(-1) \exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) \left\{ 1 - m_1 [\lambda - q(0)] \cdot \int_0^1 \exp\left(-\frac{\lambda t}{\alpha}\right) Q(t) \psi_1(t) dt \right\} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Путем двукратного интегрирования по частям доказываются асимптотические при $|\lambda| \rightarrow \infty$ формулы:

$$\int_0^1 \exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}(1-t)\right) Q(t) \psi_1(t) dt = \frac{\alpha}{\lambda} \exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) \psi_1(0) - \frac{\alpha}{\lambda} Q(1) \psi_1(1) + O(|\lambda|^{-2}) \sigma(\lambda), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}(t-1)\right) Q(-t) \psi_2(t) dt = & -\frac{\alpha}{\lambda} \exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right) \psi_2(0) + \frac{\alpha}{\lambda} Q(-1) \psi_2(1) + \\ & + O(|\lambda|^{-2}) \sigma(-\lambda), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\sigma(\lambda) = 1 + \exp(\operatorname{Re}(\lambda/\alpha))$. Подставив (10), (11) в уравнение (9), преобразуем характеристическое уравнение к виду

$$Q(1)[1 - \alpha m_2 \psi_2(0)] \exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right) - Q(-1)[1 - \alpha m_1 \psi_1(0)] \exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) + \\ + \alpha[m_1 \psi_1(1) + m_2 \psi_2(1)] + B(\lambda) = 0,$$

причем

$$B(\lambda) = O(|\lambda|^{-1}) \cdot [\sigma(\lambda) + \sigma(-\lambda)] \quad \text{при } |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Обозначим:

$$b_1 = Q(1) \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + \varphi(0)}, \quad b_2 = Q(-1) \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + \varphi(0)}, \\ b_3 = \alpha[m_1 \psi_1(1) + m_2 \psi_2(1)]$$

Так как

$$\psi_1(0) = \frac{1}{2\alpha a_2} (\alpha + a_1 - a_2) \varphi(0), \quad \psi_2(0) = \frac{1}{2\alpha a_2} (\alpha - a_1 + a_2) \varphi(0),$$

то

$$1 - \alpha m_1 \psi_1(0) = 1 - \alpha m_2 \psi_2(0) = 1 - \frac{\varphi(0)}{a_1 + a_2 + \varphi(0)} = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + \varphi(0)}.$$

Поэтому

$$Q(1)[1 - \alpha m_2 \psi_2(0)] = Q(1) \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + \varphi(0)} = b_1, \\ Q(-1)[1 - \alpha m_1 \psi_1(0)] = Q(-1) \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + \varphi(0)} = b_2,$$

и характеристическое уравнение перепишется в виде

$$b_1 \exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right) - b_2 \exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) + b_3 + B(\lambda) = 0, \quad (13)$$

причем $b_1, b_2 \neq 0$.

Обозначим $\Delta_0(\lambda) = b_1 \exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right) - b_2 \exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) + b_3$. Пусть ξ_1, ξ_2 – корни

уравнения $b_1 \xi^2 + b_3 \xi - b_2 = 0$. Тогда

$$\Delta_0(\lambda) = b_1 \exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) \cdot \left(\exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right) - \xi_1 \right) \left(\exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right) - \xi_2 \right). \quad (14)$$

Из формулы (14) легко видеть, что функция $\Delta_0(\lambda)$ имеет две последовательности корней ($s = 1, 2$)

$$\lambda_k^{[s]} = 2\pi\alpha k i - \alpha \ln \xi_s, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (15)$$

При этом вне окрестностей точек $\lambda_k^{[s]}$ произвольного малого радиуса справедливы оценки

$$\left| \exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right) - \xi_s \right| \geq C_s \cdot \max\left(1, \exp\left(-\operatorname{Re}\frac{\lambda}{\alpha}\right)\right), \quad s=1,2, \quad (16)$$

в которых $C_s > 0$ – константы, величины которых зависят от радиуса окрестностей. В самом деле, если $\operatorname{Re}\frac{\lambda}{\alpha} \geq 0$, оценка (16) доказывается аналогично [2, с. 78]. Если же $\operatorname{Re}\frac{\lambda}{\alpha} < 0$, то

$$\left| \exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha}\right) - \xi_s \right| = |\xi_s| \exp\left(-\operatorname{Re}\frac{\lambda}{\alpha}\right) \cdot \left| \exp\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) - \xi_s^{-1} \right|,$$

и далее доказательство ведется аналогично [2, с. 78]. Теперь из формулы (14) с учетом оценки (16) следует оценка

$$|\Delta_0(\lambda)| \geq C_3 \cdot [\sigma(\lambda) + \sigma(-\lambda)], \quad (17)$$

справедливая вне окрестностей точек $\lambda_k^{[s]}$ произвольного малого радиуса; при этом $C_3 > 0$ – новая константа.

Вернемся к характеристическому уравнению (13). Его левую часть можно представить в виде: $\Delta_0(\lambda) + B(\lambda)$. На границах окрестностей точек $\lambda_k^{[s]}$ вследствие оценок (12), (17) при достаточно больших номерах $|k|$ выполняется неравенство $|B(\lambda)| < |\Delta_0(\lambda)|$. Значит, согласно теореме Руше при достаточно больших номерах $|k|$ внутри каждой окрестности точки $\lambda_k^{[s]}$ лежит по одному собственные значения краевой задачи (5), (6), причем вне окрестностей других собственных значений нет. Но так как собственные значения краевой задачи (5), (6) совпадают с собственными значениями оператора (1), (2), то нами доказана следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия а), б), с) работы, то оператор (1), (2) имеет две последовательности собственных значений $\{\mu_k^{[s]}\}$ ($s=1,2$), которые при достаточно больших $|k|$ простые и распределены по асимптотической формуле

$$\mu_k^{[s]} = 2\pi\alpha ki + O(1), \quad k = \pm p, \pm(p+1), \dots,$$

$p \gg 1$ – натуральное.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Хромов А. П. Смешанная задача для уравнения с инволюцией и потенциалом специального вида // Изв. Саратов. ун-та, 2010. Сер. Матем. Механ. Информ. – Вып. 4. – С. 17-22.
- Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

Б. Ф. Мельников, Е. Ф. Сайфуллина(г. Тольятти)

ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ПРОВЕРКИ ИЗОМОРФИЗМА ГРАФОВ С ПОМОЩЬЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ ИНВАРИАНТОВ

В статье описан предлагаемый подход к решению задачи проверки изоморфизма графов, представляющий последовательную проверку их инвариантов. Данный подход позволяет выбрать наиболее приемлемое решение этой задачи на основе предположения, которое было сделанного о применённом алгоритме генерации графов. Приводятся результаты вычислительных экспериментов для цепи Маркова, состоящей из пяти состояний, соответствующих алгоритмам генерации графов с заданным вектором степеней.

Отношением изоморфизма между двумя графами (неориентированными и не имеющими весов вершин и рёбер) называется биекция между множествами вершин графов, сохраняющая смежность вершин. При применении понятия изоморфизма к ориентированным или взвешенным графикам накладываются дополнительные ограничения на сохранение значений весов и ориентации дуг. Поскольку изоморфизм можно рассматривать как перенумерацию вершин графа, то любая количественная характеристика структуры графа остаётся неизменной при изоморфном отображении графа на другой граф.

Инвариантом графа называется любая его характеристика, равная для изоморфных графов.

Инвариант называется **полным**, если его равенство для двух графов возможно тогда и только тогда, когда графы изоморфны.

Задача проверки изоморфизма графов имеет широкое практическое применение и является важной проблемой в теории сложности алгоритмов. Самыми известными областями применения этой проблемы являются задачи автоматизации проектирования электронных схем (проверка различных представлений электронной схемы), некоторые проблемы математической химии и хемоинформатики [1], а также некоторые подзадачи оптимизации программ (например – выделение общих подвыражений).

Кроме того, задача определения изоморфизма графов имеет важное применение в криптологии. Важнейшей частью последней является криptoанализ – наука о методах расшифровки зашифрованной информации без предназначенного для такой расшифровки ключа. Одним из таких методов (протоколов) является протокол интерактивного

доказательства [2]. Суть этого протокола состоит в том, что доказывающий знает изоморфизм двух графов, и доказывает это проверяющему, не показывая при этом сам изоморфизм. Для практического применения очень важным свойством протокола является то, что алгоритм, с помощью которого доказывающий получил в качестве входа изоморфизм графов, работает за полиномиальное время.

Задача определения изоморфизма графов принадлежит классу NP [3], но неизвестно, принадлежит ли она классу P. Также нельзя сказать, является ли эта задача NP-полной, но известно, что NP-полной является задача поиска изоморфного подграфа в заданном графе. Таким образом, актуальными являются проводимые в настоящее время исследования, которые направлены на решение задачи проверки изоморфизма – как для произвольных графов, так и для графов специального вида.

Рассматриваемые в данной работе графы с заданным вектором степеней можно рассматривать в качестве конкретных вариантов моделей для многих сложных реальных задач. Среди них самую важную роль занимают сетевые модели, а среди конкретных сетей и сетевых моделей упомянем только несколько:

- Интернет и самые разные описывающие его функционирование математические модели [4];
- многочисленные социальные сети (и их модели) [5];
- одноранговые (пиринговые) сети [6];
- нейронные сети – биологические и искусственные.

Для анализа алгоритмов работы с графиками (в частности – с представлениями сетей в виде графов) и практической проверки программ, соответствующих этим алгоритмам, необходимы:

- либо заранее созданные базы данных – причём обычно очень больших размеров, соответствующие разным предметным областям и разным размерностям графа;
- либо алгоритмы генерации графов.

В предыдущих работах авторов [7, 8] рассматривалась задача *случайной генерации графов с заранее определённым вектором степеней*. В них были рассмотрены существующие алгоритмы и описаны разработанные новые алгоритмы, основанные на мультиэвристическом подходе, которые позволяют сгенерировать граф на основе заданного вектора степеней. Также было приведено обобщение данных работ на случай введенной новой характеристики графа – вектора степеней второго порядка.

В данной работе рассматриваются следующие инварианты графов:

- **Diameter**: Диаметр графа $\text{diam}(G)$ – длина кратчайшего пути (расстояние) между парой наиболее удаленных вершин.

– **WienerIndex**: Индекс Винера – величина $\omega = \sum_{\forall i,j} d(v_i, v_j)$, где $d(v_i, v_j)$ – минимальное расстояние между вершинами v_i и v_j .

– **RandichIndex**: Индекс Рандича – величина $r = \sum_{(v_i, v_j) \in V} \frac{1}{\sqrt{d(v_i)d(v_j)}}$.

– **Determinant**: Определитель матрицы смежности.

– **ConnectedComponents**: Число компонент связности графа $\kappa(G)$ (компоненты связности графа – это подмножество множества вершин графа, такое что для любых двух вершин этого множества существует путь из одной в другую, и при этом не существует пути из вершины этого множества в вершину не из этого множества).

– **CyclomaticNumber**: Цикломатическое число графа – минимальное число рёбер, которые надо удалить, чтобы граф стал ациклическим. Существует соотношение: $p_1(G) = p_0(G) + |E(G)| - |V(G)|$, где $p_1(G)$ – цикломатическое число, p_0 – число компонент связности графа, $|E(G)|$ – число рёбер, а $|V(G)|$ – число вершин).

– **ChromaticNumber**: Хроматическое число $g(G)$ (хроматическое число графа – минимальное количество цветов, требуемое для раскраски вершин графа, при которой любые вершины, соединенные ребром, раскрашены в разные цвета).

– **Vector2**. Вектор степеней второго порядка; Каждый элемент этого вектора представляет собой *список степеней вершин, смежных с данной вершиной*.

Предлагаемый подход к решению задачи проверки изоморфизма состоит в следующем: в ходе вычислительного эксперимента определим следующие последовательности проверки инвариантов:

1. Determinant -> Chromatic Number -> Diameter -> Wiener Index -> Randich Index -> Connected Components -> Cyclomatic Number -> Vector2
2. Vector2 -> Diameter -> Wiener Index -> Randich Index -> Connected Components -> Cyclomatic Number -> Determinant -> Chromatic Number
3. Connected Components -> Cyclomatic Number -> Wiener Index -> Randich Index -> Diameter -> Determinant -> Chromatic Number -> Vector2
4. Chromatic Number -> Diameter -> Wiener Index -> Randich Index -> Determinant -> Cyclomatic Number -> Connected Components -> Vector2
5. Wiener Index -> Randich Index -> Determinant -> Chromatic Number -> Diameter -> Vector2 -> Cyclomatic Number -> Connected Components
6. Diameter -> Wiener Index -> Determinant -> Randich Index -> Chromatic Number -> Cyclomatic Number -> Vector2 -> Connected Components
7. Randic Index -> Cyclomatic Number -> Wiener Index -> Connected Components -> Diameter -> Determinant -> Chromatic Number -> Vector2
8. Vector2 -> Determinant -> Diameter -> Chromatic Number -> Connected Components -> Cyclomatic Number -> Wiener Index -> Randic Index

Для проведения вычислительного эксперимента рассмотрим цепь Маркова, состоящую из пяти состояний, каждое из которых представляет один из алгоритмов генерации графов:

- Алгоритм, основанный на цепи Маркова и методе Монте-Карло.
- Последовательные алгоритмы для построения графов и деревьев с заданным вектором степеней.
- Алгоритм, разработанный Стегером и Вормалдом.
- Разработанный алгоритм генерации графа на основе вектора степеней
- Разработанный алгоритм генерации графа на основе вектора степеней второго порядка.

Вероятность перехода в каждое из состояний равна 0,2. Граф данной цепи Маркова описан на рисунке 1.

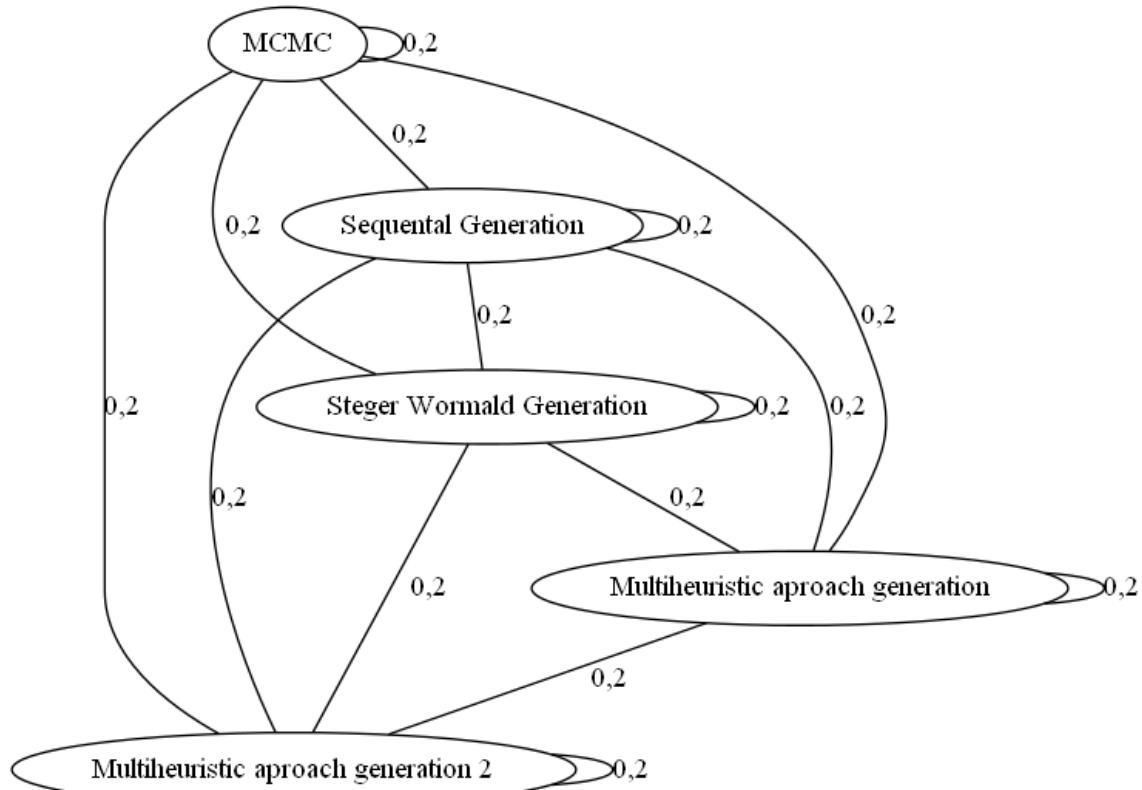


Рис. 1. Граф рассматриваемой цепи Маркова с 5 состояниями

Вход: размерность и функция распределения значений вектора 1-го порядка.

1. На основе размерности и функции распределения был сгенерирован вектор степеней 1-го порядка.
2. Алгоритмом, основанным на критерии Гавела-Хакими, был сгенерирован исходный граф, изоморфизм с которым мы будем проверять для других графов.
3. Алгоритмом, соответствующим текущему состоянию цепи Маркова был сгенерирован граф. Цепь Маркова запускалась 1000 раз. На

каждой итерации применялся один из 8 упомянутых ранее алгоритмов проверки изоморфизма (одна из последовательностей проверки инвариантов).

Выход: множество рёбер E .

Результаты вычислений представлены в таблицах 1–3 и на рисунках 2–4. Эти результаты показывают сравнительную эффективность *рассмотренных* алгоритмов и определяют возможные направления дальнейшей работы.

Таблица 1

Результаты вычислительного эксперимента. Распределение Пуассона

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 2.5, N = 21$$

	Время выполнения (msec)	Число указаний на неизоморфизм на 1000 итераций	Число указаний на ожидаемый изоморфизм на 1000 итераций	Среднее число проверенных инвариантов
Алгоритм 1	110297	1000	0	2,246
Алгоритм 2	831797	1000	0	1,326
Алгоритм 3	178328	1000	0	1,704
Алгоритм 4	201219	988	12	1,673
Алгоритм 5	168797	1000	0	1,007
Алгоритм 6	276141	1000	0	1,53
Алгоритм 7	254485	997	3	1,412
Алгоритм 8	2299875	1000	0	1,728

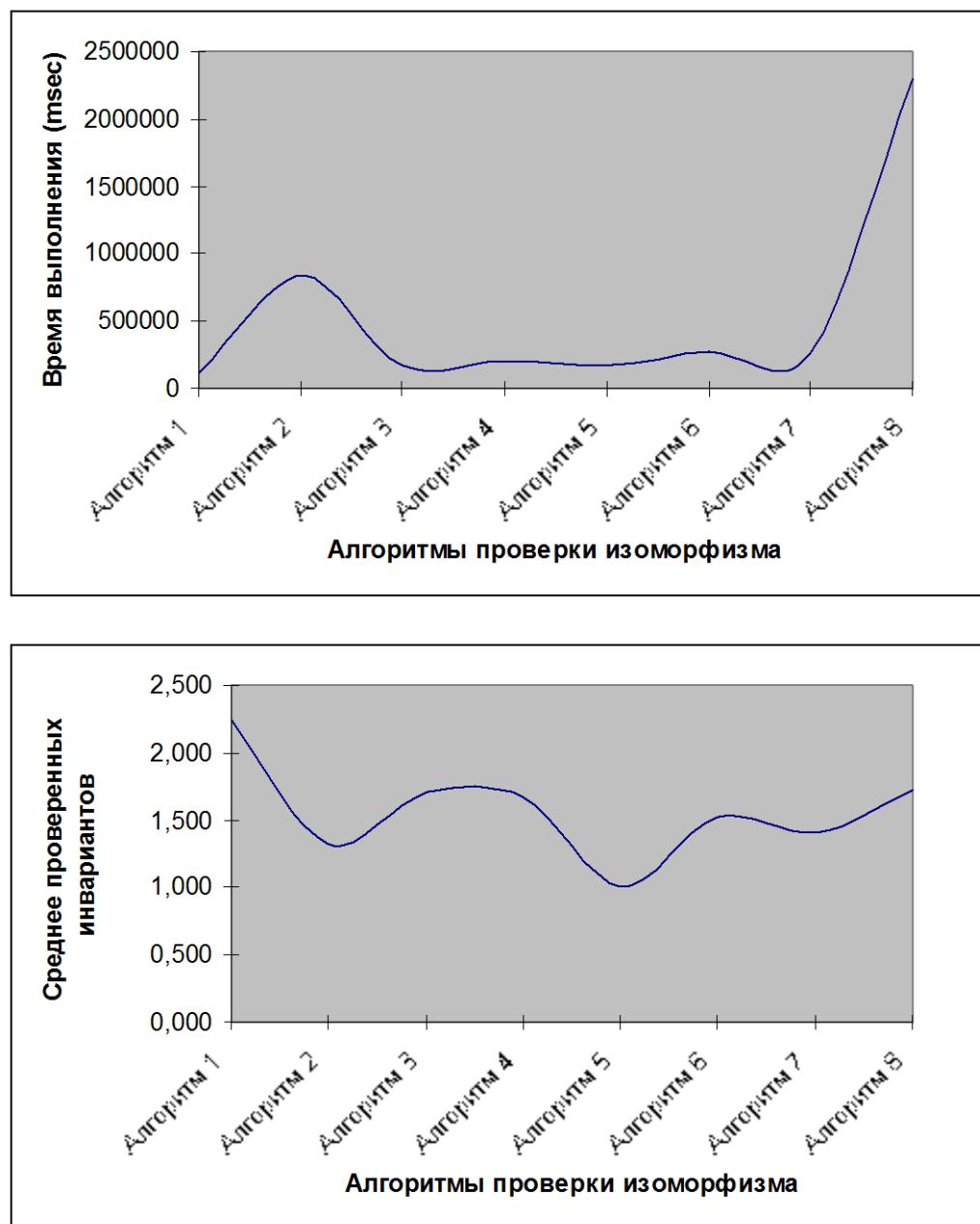


Рис. 2. Результаты вычислительного эксперимента. Распределение Пуассона

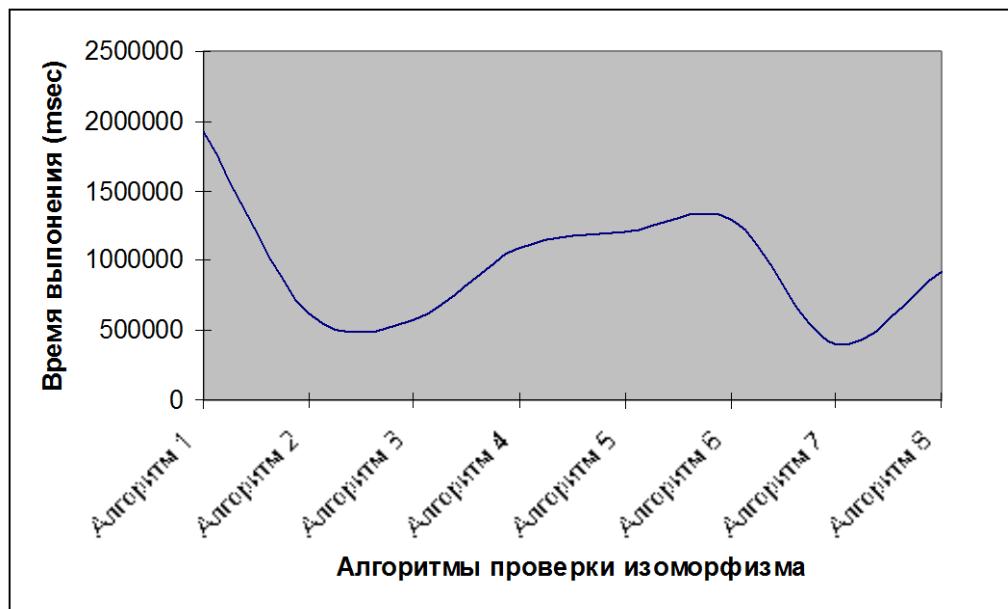
$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 2.5, N = 21$$

Таблица 2

Результаты вычислительного эксперимента. Биноминальное распределение

$$P(k) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}, p = 0.25, N=21$$

	Время выполнения (msec)	Число указаний на неизоморфизм на 1000 итераций	Число указаний на ожидаемый изоморфизм на 1000 итераций	Среднее число проверенных инвариантов
Алгоритм 1	1919203	1000	0	2,313
Алгоритм 2	611688	1000	0	1,062
Алгоритм 3	580969	1000	0	2,814
Алгоритм 4	1085922	1000	0	1,472
Алгоритм 5	1203422	1000	0	1,000
Алгоритм 6	1296891	1000	0	1,922
Алгоритм 7	403438	1000	0	1,000
Алгоритм 8	924313	1000	0	1,015



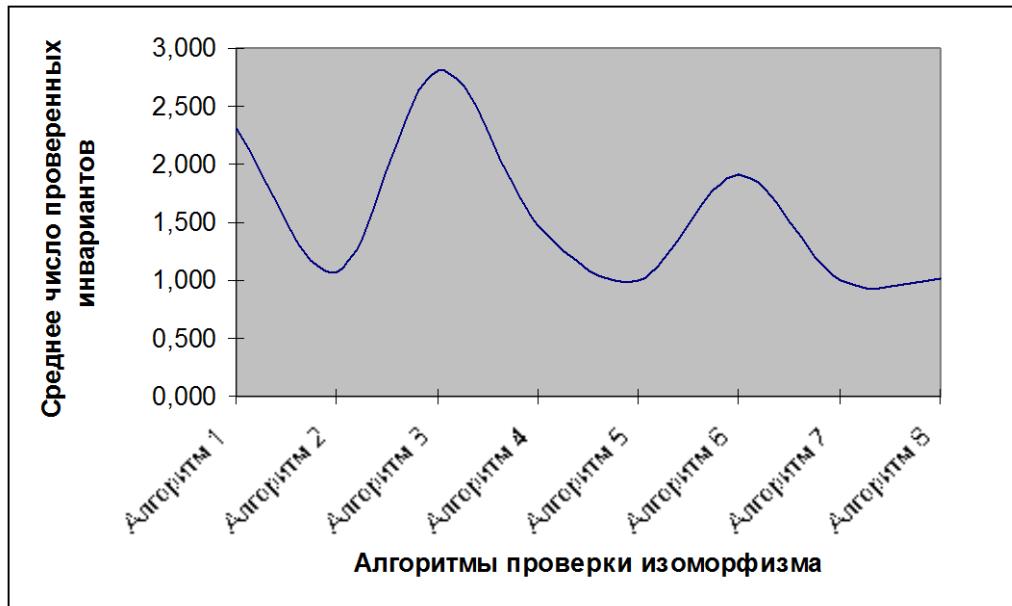


Рис. 3. Результаты вычислительного эксперимента. Биноминальное распределение

$$P(k) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}, p = 0.25, N=21$$

Таблица 3

Результаты вычислительного эксперимента. Распределение Цифа

$$f(k, s, N) = \frac{1/k^s}{\sum_{n=1}^N (1/n^s)}, \quad N = 21$$

$s = 2.5, N$ – размерность графа

	Время выполнения (msec)	Число указаний на неизоморфизм на 1000 итераций	Число указаний на ожидаемый изоморфизм на 1000 итераций	Среднее число проверенных инвариантов
Алгоритм 1	196281	999	1	3,307
Алгоритм 2	40203	981	19	2,132
Алгоритм 3	28812	625	375	4,956
Алгоритм 4	640984	996	4	2,137
Алгоритм 5	75875	798	202	2,415
Алгоритм 6	213062	1000	0	1,925
Алгоритм 7	126016	985	15	1,09
Алгоритм 8	110047	1000	0	1,605

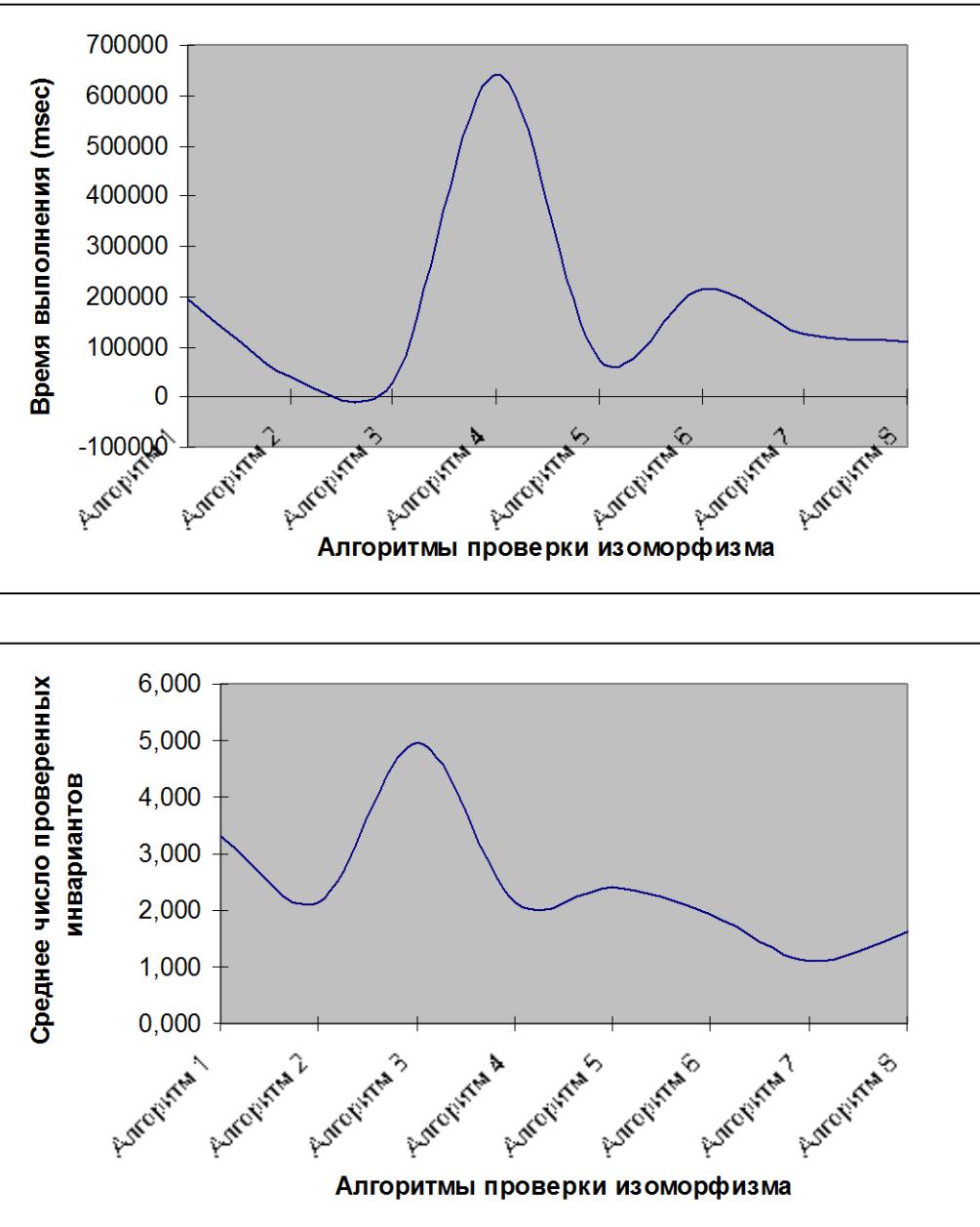


Рис. 4. Результаты вычислительного эксперимента. Распределение Ципфа

$$f(k, s, N) = \frac{1/k^s}{\sum_{n=1}^N (1/n^s)}, \quad N = 21$$

$s = 2.5$, N – размерность графа

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кинг Р. Химические приложения топологии и теории графов. – М.: Мир, 1987.
2. Запечников С. В. Криптографические протоколы и их применение в финансовой и коммерческой деятельности: Учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007.

3. Громкович Ю. Теоретическая информатика. Введение в теорию автоматов, теорию вычислимости, теорию сложности, теорию алгоритмов, рандомизацию, теорию связи и криптографию. – СПб.: БХВ-Петербург, 2010.
4. Райгородский А. Математические модели интернета // Квант. – 2012. – № 4. – С. 12-16.
5. Бреер В. Стохастические модели социальных сетей // Управление большими системами: сборник трудов, 2009. – № 27. – С. 169-204.
6. URL: <http://www.p2p13.org/> (дата обращения 20.04.2014).
7. Мельников Б. Ф., Сайфуллина Е. Ф. Применение мультиэвристического подхода для случайной генерации графа с заданным вектором степеней // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки, 2013. – № 3(27). – С. 70-83.
8. Сайфуллина Е. Ф. Алгоритм генерации графов по заданному вектору степеней второго порядка // Материалы научно-практической Internet-конференции: Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики: Сборник статей. (Тольятти, 18-19 июня 2013 г.). – Ульяновск, 2013. – С. 39-42.

И. В. Минин, О. В. Минин (г. Новосибирск)

АВТОМАТИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА НА ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ RELCOMXFDTD

Рассмотрен принцип построения программной системы, предназначенный для автоматизации вычислительного эксперимента с применением комплекса Relcom XFDTD. Разработанная программа позволяет строить двумерные разрезы электрической и магнитной напряженности поля, а также производить расчет интенсивности поля вдоль выбранных строк расчетной области. А так же позволяет в автоматическом режиме вычислять уровни побочных дифракционных максимумов, положение главного максимума и его геометрические размеры.

На сегодняшний день рынок предлагает программные продукты, реализующие метод FDTD, такие как: FIDELITY компании Zeland, QuickWave-3D компании QWED, EMPIRE компании IMST и XFDTD компании Remcom. Нами был использован FDTD метод, предложенный Кейном Йи в 1966 году, для прямоугольных, правильных сеток [1].

По сравнению с алгоритмами моделирования в частотной области типа метода моментов (МОМ) и метода конечных элементов (FEM), FDTD метод имеет простую программную реализацию. Принцип заключается в использовании конечных разностей для записи производных в уравнениях Максвелла. Для этого используется Yee-алгоритм [1], который позволяет объединить электрическое и магнитное поле в системе N алгебраических уравнений.

Последние версии программы Remcom XFDTD [2] опережают своих ближайших конкурентов по математике и удобству работы, количеству стандартных 3D объектов и структуре специализированных сеток для них [3].

1. Методика расчета на программе Remcom XFDTD

Моделирование в XFDTD начинается с черчения исследуемой конструкции. Далее выполняется выбор размеров ячеек, расчетных границ и выполняется разбивка расчетной области на ячейки (рис. 1, 2). После того, как пользователь задал структуру в виде набора объектов, XFDTD автоматически замыкает объекты контуром, чтобы создать определенную трехмерную координатную сетку. В программе используются граничные условия Liao и PLM, которые дают поглощение на границах области анализа, близкое к идеальному. Затем задается источник возбуждения: точечный или в виде плоской электромагнитной волны.

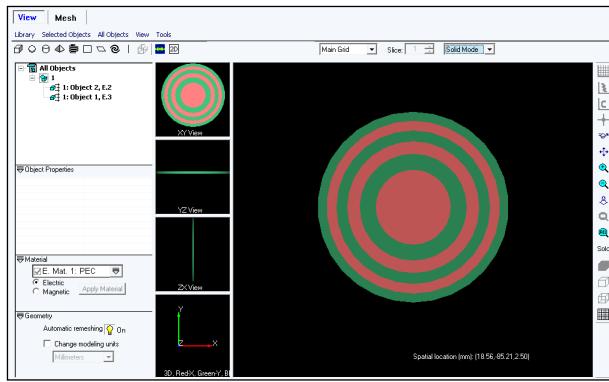


Рис. 1. Окно конструирования исследуемой структуры программы XFDTD

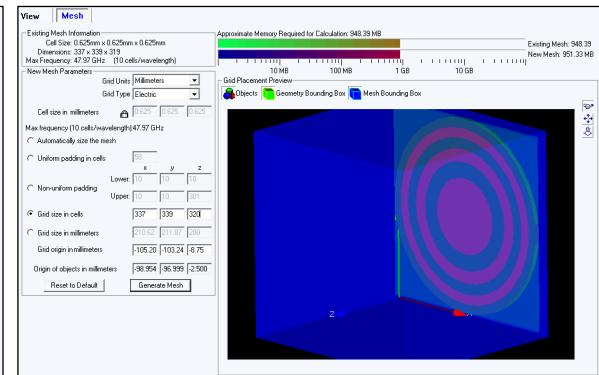


Рис. 2. Окно дискретизации исследуемой структуры программы XFDTD

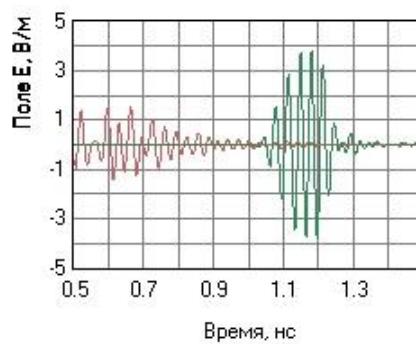


Рис. 3. Изображение сигнала во временной области

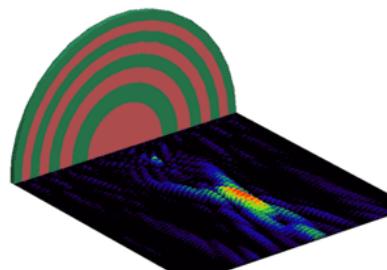


Рис. 4. Картина электрической напряженности поля в ближней зоне

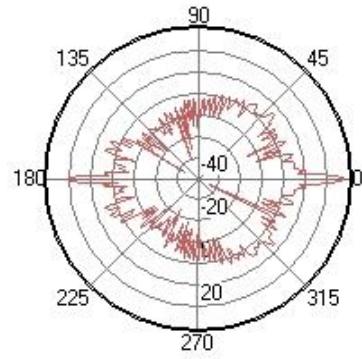


Рис. 5. Сечение диаграммы направленности

После чего пользователь может запустить моделирование, в ходе которого рассчитывается прохождение излучения через все пути распространения электромагнитных волн в геометрической структуре. Когда моделирование выполнено, пользователь может вывести на графики результаты моделирования. Постобработка включает расчет и вывод графиков S-параметров, отображение сигнала во временной области (рис. 3), вывод анимированных цветных картин ближнего поля (рис. 4), сечений диаграммы направленности (рис. 5) и т.д.

2. Разработка программного продукта

Программа XFDTD является одной из наиболее эффективных современных систем в классе трехмерного электродинамического моделирования и проектирования различных СВЧ устройств во временной области, однако при эксплуатации были выявлены следующие недостатки:

- отсутствие возможности выводить электрическую и магнитную напряженность полей в двухмерном виде;
- отсутствие возможности производить расчет модуля вектора Умова-Пойнтинга, как в определенной точке, так и по всему расчетному пространству в целом;
- отсутствие автоматизированного инструмента для замера геометрического размера фокального пятна и уровней побочных дифракционных максимумов.

Для устранения указанных недостатков был разработан и реализован новый программный продукт 2DFV for XFDTD 6.0. Разработка продукта осуществлялась в среде C++ Builder, как одной из самых популярных и эффективных сред для создания приложений под операционные системы семейства Windows. Программа позволит выводить электрическую и магнитную напряженности поля в двумерном виде, а также производить расчет модуля вектора Умова-Пойнтинга с последующим их выводом. В качестве исходных данных используются файлы (результаты) промоделированного проекта XFDTD.

2.1. Описание файлов выходных XFDTD данных, используемых разработанной программой

1. Файл Transient Field (*.fld)

Используется для хранения данных напряженности электрического и магнитного поля, а также плотности тока (для проводящих поверхностей) в различные моменты времени. Структура Transient Field файла (example.xz170.t900.fld) приведена ниже:

```
t
900 900 3 169 0
337 339 319
1.203646e+000
6.250000e-004 6.250000e-004 6.250000e-004
6.254645e-003 -7.323638e-001 3.150838e-003
2.154524e-003 7.518719e-007 1.559084e-004
0.000000e+000 0.000000e+000 0.000000e+000
...
7.422960e-003 -9.589015e-001 5.104537e-003
1.992173e-003 -5.556415e-007 1.616677e-004
0.000000e+000 0.000000e+000 0.000000e+000
```

Описание заголовка вышеизложенного Transient Field файла (*.fld) приведено в табл. 1.

Таблица 1

Заголовок Transient Field файла (*.fld)

t	Означает, что файл содержит данные по всему полю.
80 1200 3 18 0	Номер временного интервала, общее количество временных интервалов, ориентация слоя (1 - xy, 2 - yz, 3 -xz), номер слоя (всегда на единицу меньше, чем в XFDTD проекте), тип сетки (0 - основная сетка, 1 - подсетка 1, 2 - подсетка 2 и т.д.).
337 339 319	Размер расчетного пространства в ячейках.
1.203646e+000	Временной интервал (пс).
6.25e-04 6.25e-04 6.25e-04	Геометрические размеры ячейки (м).

За заголовком файла для каждой ячейки слоя следует девять вещественных чисел, включающих проекции напряженности электрического поля, проекции напряженности магнитного поля и проекции плотности тока на оси декартовой системы координат (ДСК) соответственно. Значения величин приведены в единицах СИ.

2. Файл CEF (*.cef)

Используется для хранения данных о средней напряженности электрического поля, как по проекциям на оси ДСК, так и суммарное их значение в каждой ячейке слоя. Структура CEF файла (example.xz170.cef) имеет вид:

```

1
900
3 169 0
337 339 319
6.250000e-004 6.250000e-004 6.250000e-004
9.072421e-003 9.999968e-001 9.365984e-003 1.000082e+000
1.000138e-002 1.060330e+000 8.630897e-003 1.060413e+000
...
1.082979e-002 9.916839e-001 7.949954e-003 9.917749e-001

```

Описание заголовка вышеизложенного CEF файла (*.cef) приведено в табл. 2.

Таблица 2
Заголовок CEF файла (*.cef)

1	Означает, что файл содержит усредненные во времени данные.
900	Общее количество временных интервалов.
3 169 0	Ориентация слоя (1 - xy, 2 - yz, 3 - xz), номер слоя (всегда на единицу меньше, чем в XFDTD проекте), тип сетки (0=основная сетка, 1 - подсетка 1, 2 - подсетка 2 и т.д.).
337 339 319	Размер расчетного пространства в ячейках.
6.25e-04 6.25e-04 6.25e-04	Геометрические размеры ячейки (м).

За заголовком файла для каждой ячейки слоя следует четыре вещественных числа, включающих проекции средней напряженности электрического поля на ДСК и суммарное их значение соответственно. Значения величин приведены в единицах СИ.

3. Файл BFD (*.bfd)

Используется для хранения данных о средней напряженности магнитного поля, как по проекциям на оси ДСК, так и суммарное их значение в каждой ячейке слоя. Структура (заголовок, данные) BFD файла подобна структуре CEF файла, за исключением того, что вместо

электрической напряженности приводится магнитная. Значения величин приведены в единицах СИ.

2.2. Описание разработанной программы

Блок-схема разработанной программы представлена на рисунке 6.

Приведем описание каждого из блоков (рис. 6) алгоритма программы.

Блок 1. Выбор выходного XFDTD файла для последующей обработки данных. Используется диалоговое окно открытия файла (рис. 7).

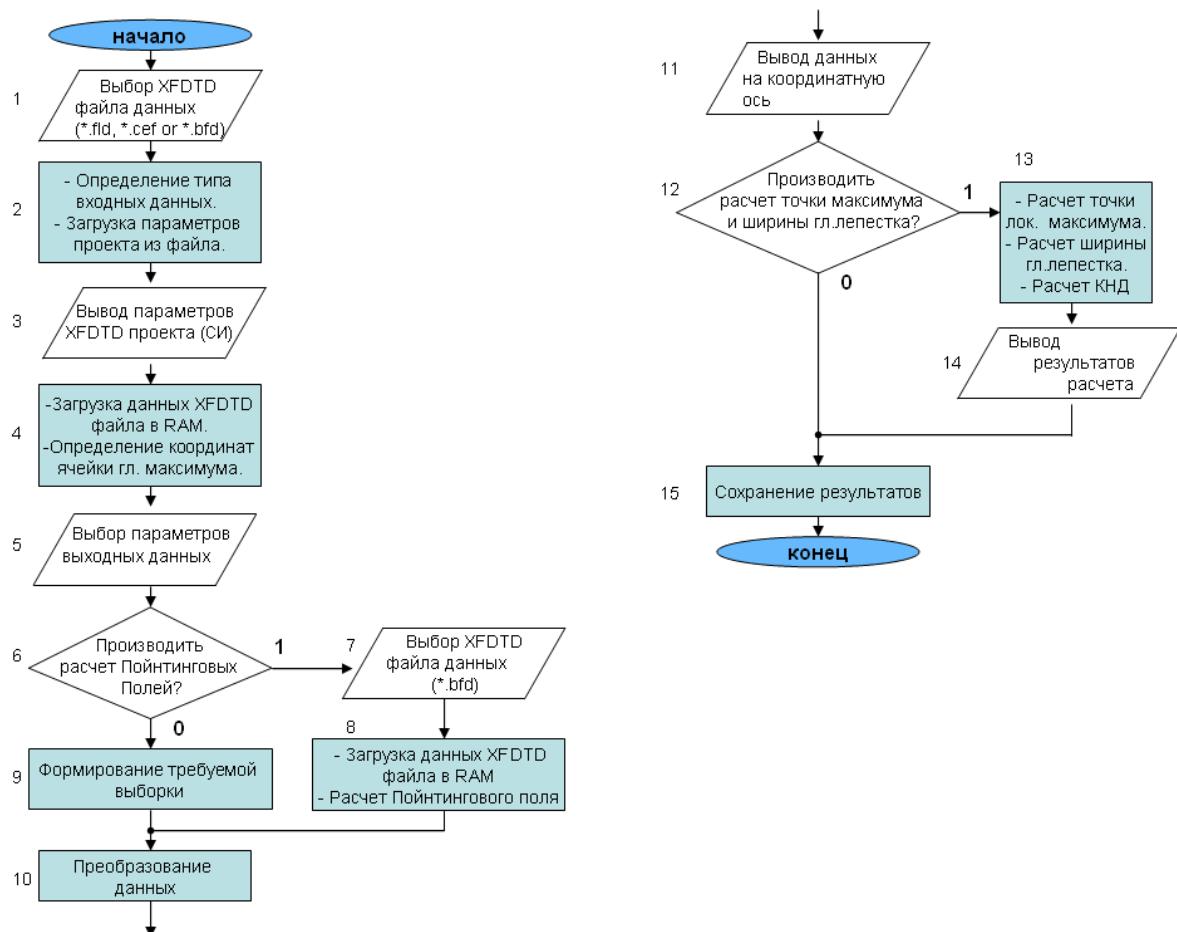


Рис. 6. Блок-схема разрабатываемой программы 2DFV for XFDTD 6.0

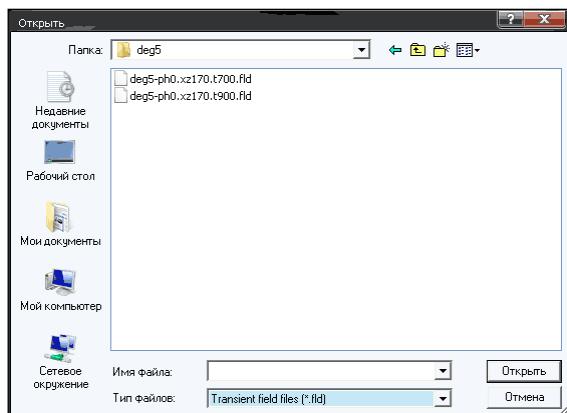


Рис. 7. API диалог открытия файла

Блок 2. Определение типа данных файла (Transient Field, CEF, BFD). Загрузка заголовка файла в оперативную память ЭВМ.

Блок 3. Вывод файла и его заголовка (в единицах СИ) на экран (рис. 8).

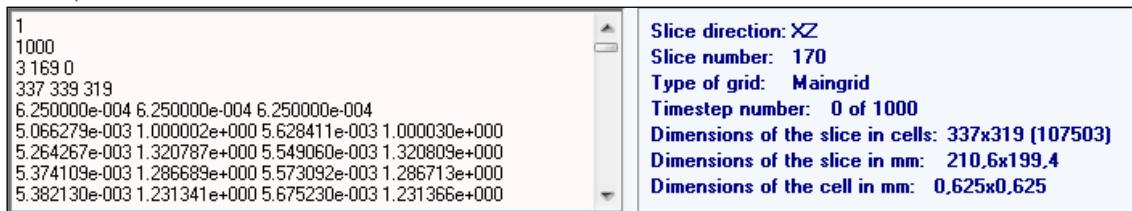


Рис. 8. Поля вывода параметров проекта XFDTD

Блок 4. Загрузка данных (напряженности или плотности поля) из файла в оперативную память. Определение координат точки максимума напряженности (плотности тока) на загруженном слое, вывод координат точки максимума на экран.

Блок 5. Выбор типа выходных данных, используя поля ввода данных программы (рис. 9).

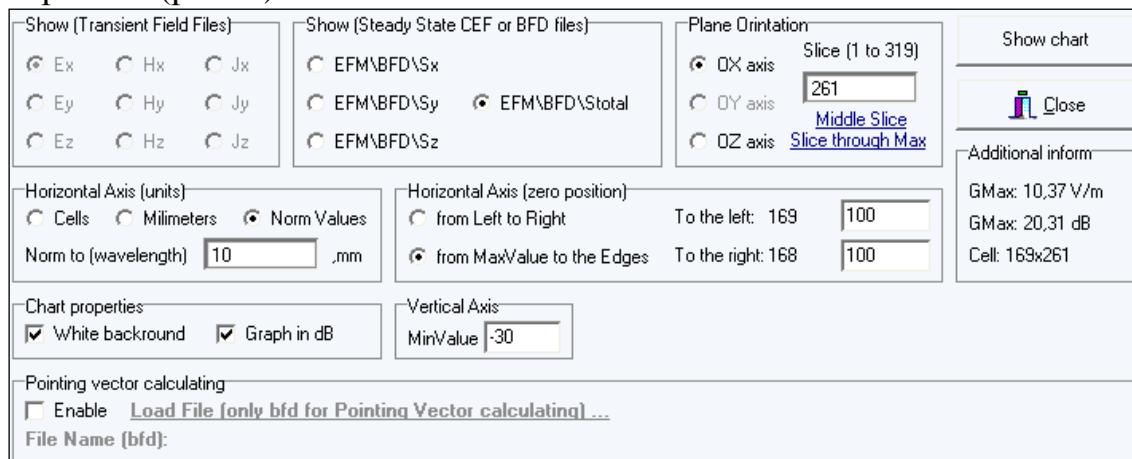


Рис. 9. Поля ввода и выбора типа выходных данных

Поле Show (Transient Field Files) – вывод соответствующей проекции напряженности электрического, магнитного поля или плотности тока. Активно только при загрузке Transient Field файла.

Поле Show (Steady State CEF or BFD files) – вывод соответствующей проекции средней напряженности электрического, магнитного поля или вектора Умова-Пойнтинга. Активно только при загрузке CEF или BFD файла.

Поле Plane Orientation – Выбор направления и положения требуемого двухмерного разреза загруженного слоя.

OX axis – разрез вдоль оси OX,

OY axis – разрез вдоль оси OY,

OZ axis – разрез вдоль оси OZ.

Slice – порядковый номер выводимого слоя (в скобках

указывается максимально возможный номер, исходя из загруженных параметров проекта).

Поле Horizontal Axis (units) – выбор единиц измерения откладываемых на горизонтальной оси координат графика.

Cells – ячейки,

Millimeters – миллиметры,

Norm Values – нормированные величины (нормировочная величина задается в поле Norm to (wavelength)).

Поле Horizontal Axis (zero position) – установка начала координат на двухмерном графике и диапазона значений оси абсцисс.

Поле Additional Inform – поле вывода значения максимальной напряженности поля (плотности тока) в единицах СИ (дБ, В/м), а также вывод координат ячейки точки максимума.

Поле Chart Properties – поле свойств выводимого графика.

White background – белый фон графика.

Graph in dB – ось ординат в децибелах.

Поле Vertical Axis – поле свойств оси ординат.

MinValue – минимальное значение выводимой величины по оси ординат графика.

Поле Pointing Vector Calculating – расчет проекций и модуля вектора Умова-Пойнтинга.

Enable – выполнять расчет.

Load File – вызов диалогового окна открытия файла для загрузки файла данных усредненной во времени напряженности магнитного поля (BFD файл) для расчета вектора Умова-Пойнтинга поля.

Блок 6 и 7. Загрузка XFDTD файла средней напряженности магнитного поля (BFD файл), необходимый для расчета модуля вектора Умова-Пойнтинга. Предполагается, что XFDTD файл средней напряженности электрического поля (Steady State CEF file), также необходимый для расчета энергии, уже загружен (Блок 1). Загрузка файлов производится через API диалог (рис. 7).

Блок 8. Догрузка в оперативную память данных (средняя напряженность магнитного поля) из BFD файла (Блок 7), расчет поля. Расчет модуля вектора Умова-Пойнтинга поля в каждой из ячеек слоя производится по известным проекциям на оси ДСК электрической и магнитной напряженности электромагнитного поля. Расчет значений векторов Умова-Пойнтинга выполняется по формуле [1]:

$$S = \frac{c}{4\pi} \cdot [E \times H] = \frac{c}{4\pi} \cdot ([E_y H_z - E_z H_y] \hat{i} + [E_z H_x - E_x H_z] \hat{j} + [E_x H_y - E_y H_x] \hat{k}), \quad (1)$$

где E_x, E_y, E_z – проекции на оси ДСК напряженности электрического поля (В/м); H_x, H_y, H_z – проекции на оси ДСК напряженности магнитного поля (А/м); c – скорость света (м/с).

Таким образом, проекции вектора Умова-Пойнтина на координатные оси вычисляются:

$$\text{На ось X} - S_x = \frac{c}{4\pi} \cdot [E_y H_z - E_z H_y], \quad (2)$$

$$\text{На ось Y} - S_y = \frac{c}{4\pi} \cdot [E_z H_x - E_x H_z], \quad (3)$$

$$\text{На ось Z} - S_z = \frac{c}{4\pi} \cdot [E_x H_y - E_y H_x]. \quad (4)$$

Тогда, модуль вектора Умова-Пойнтина рассчитывается по формуле:

$$S_{total} = \frac{c}{4\pi} \cdot \sqrt{[E_y H_z - E_z H_y]^2 + [E_z H_x - E_x H_z]^2 + [E_x H_y - E_y H_x]^2}. \quad (5)$$

Блок 9. Загрузка из оперативной памяти требуемых для вывода данных (для случая вывода на график только напряженности или плотности токов).

Блок 10. Преобразование полученных данных. Приведение к требуемым размерностям и формирование массива данных для вывода на график.

Блок 11. Вывод данных (рис. 10).

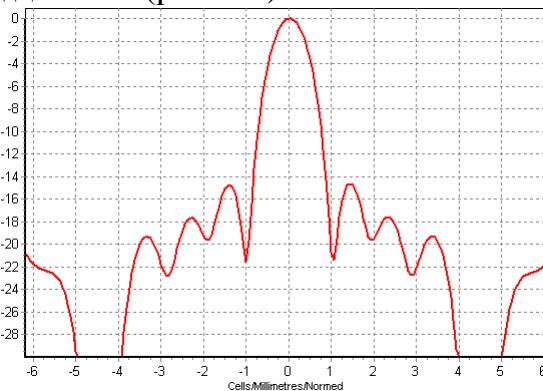


Рис. 10. Распределение модуля вектора Умова-Пойнтина

Блок 12, 13 и 14. Расчет точки локального максимума, КНД и ширины главного лепестка (по уровню -3дб) в выбранных единицах измерения (Поле Horizontal Axis (Units)). Вывод полученных данных на экран (рис. 11).

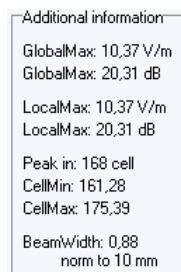


Рис. 11. Поле вывода КНД, ширины главного лепестка

Блок 15. Сохранение результатов. Сохранение графика производится

при помощи стандартного диалогового окна, появляющегося после нажатия кнопки Save. Запись графика производится в формате Windows Media (*.bmp).

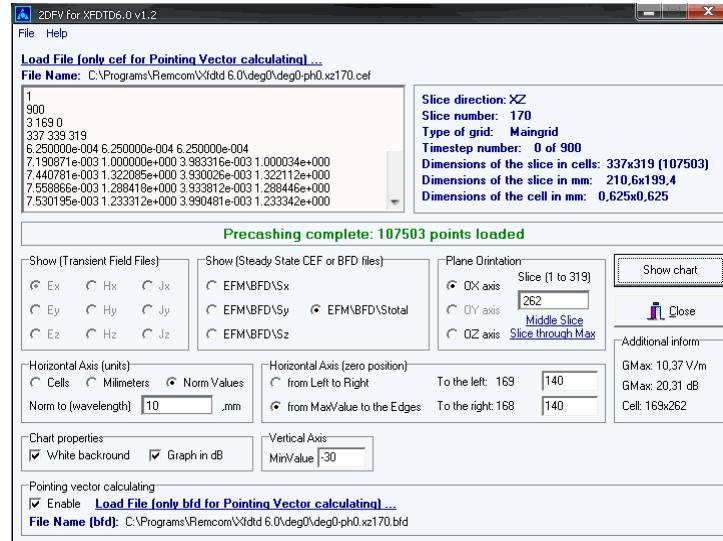


Рис. 12. Окно выбора типа входных и выходных данных программы 2DFV for XFDTD6.0

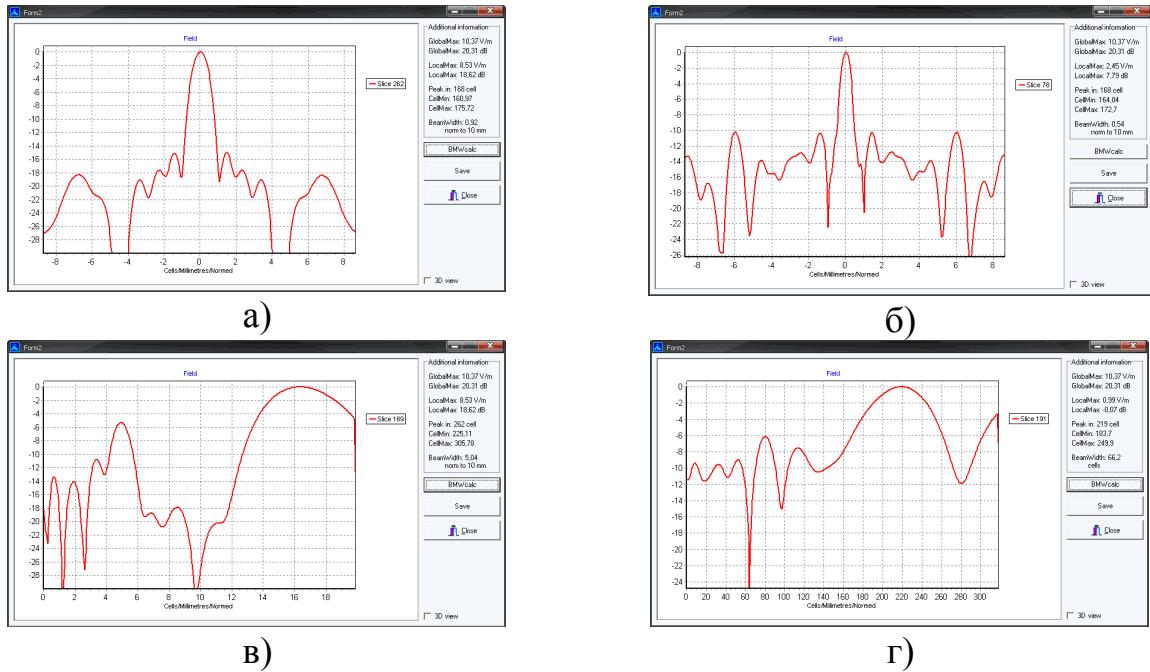


Рис. 13. Пример результатов расчета программы распределения модуля вектора Умова-Пойнтига в сечении, проходящем: а – поперек оптической оси через главный дифракционный максимум (F); б – поперек оптической оси через побочный дифракционный максимум ($F/3$); в – вдоль оптической оси через главный дифракционный максимум (F); г – вдоль оптической оси через побочный боковой дифракционный максимум.

Общий вид программы и построенных в автоматическом режиме графиков показаны на рисунках 12, 13.

Таким образом, разработана и реализована программная система,

позволяющая автоматизировать процесс вычислительного эксперимента и его обработки и строить двумерные разрезы электрической и магнитной напряженности поля, а также производить расчет интенсивности поля вдоль выбранных строк расчетной области. Программное средство позволяет в автоматическом режиме вычислять уровни побочных дифракционных максимумов, положение главного максимума и его геометрические размеры.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Kane S. Yee. Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media // IEEE Trans. on AP_14. – 1966. – № 3. – Р. 302-307.
2. RemCOM User's Guide, <http://www.remcom.com>.
3. Калиничев В. И., Курушин А. А. Программа XFDTD для анализа СВЧ структур. – EDA Express, 2004. –№ 9. – С. 40-46.

E. A. Михеева, A. B. Бауэр (г. Ульяновск)

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛИНОМА ЖЕГАЛКИНА

Как известно, в алгебре логики P_2 любую функцию можно представить в виде полинома Жегалкина, причем единственным образом. Однако, в конечнозначной логике P_k при $k > 2$ это условие уже не всегда выполняется. В данной работе представлены практические алгоритмы построения полинома Жегалкина для любой функции алгебры логики. Они следуют из метода таблиц, метода неопределенных коэффициентов и метода суперпозиции.

Иван Иванович Жегалкин (3.08.1869 – 28.03.1947) – российский и советский математик и логик. Из его открытий наибольшую известность получил так называемый полином Жегалкина (см.[1]). Полином был представлен им в 1927 году в качестве удобного средства для представления функций алгебры логики (ФАЛ). В зарубежной литературе представление ФАЛ в виде полинома Жегалкина обычно называют алгебраической нормальной формой (АНФ).

Берем множество $E_2 = \{0,1\}$. Составим его декартово произведение $E_2^n = \underbrace{E_2 \times \dots \times E_2}_n = E_2^n = \{\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) | \alpha_i \in E_2, i = 1, 2, \dots, n\}$, состоящее из

всевозможных двоичных наборов длины n . Рассмотрим функцию

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) : E_2^n \rightarrow E_2. \quad (1)$$

Определение 1. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вида (1), где как переменные, так и сама функция принимают значения из множества E_2 , называется функцией алгебры логики (ФАЛ).

Через P_2 обозначим алгебру логики.

Пусть дано множество $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, где $|X| = n$. Из элементов множества X составим всевозможные конъюнкции, их будет 2^n , полученные конъюнкции обозначим через k_i , где $1 \leq i \leq 2^n$.

Определение 2. Выражение вида $\sum_{i=1}^{2^n} a_i k_i$, где $a_i \in E_2$, называется

полиномом Жегалкина.

Теорема 1 (см.[2]). Каждая $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_2$ представима в виде полинома Жегалкина, причем единственным образом.

Теорема 2 (см.[2]). Каждая $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_2$ представима в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_n^{\sigma_n}. \quad (2)$$

Из теоремы 2 следует табличный способ построения полинома Жегалкина. Для этого в табличном представлении ФАЛ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выделяем все те наборы значений переменных, на которых функция принимает значение 1. Далее функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ представим в виде (2), где уберем все отрицания переменных, т.к. полином Жегалкина отрицания не содержит.

Пример 1. Представить $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$ в виде полинома Жегалкина методом таблиц.

Решение. Представим функцию в виде таблицы:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Исходя из табличного представления, представим функцию в виде (2)

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)=1}} x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& x_3^{\sigma_3} = \\ &= x_2 x_3 (\overline{x_1} + x_1) + x_1 (x_2 + 1) x_3 + x_1 x_2 (x_3 + 1) = \\ &= x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3. \end{aligned}$$

Из теоремы 1 следует метод неопределенных коэффициентов (МНК) построения полинома Жегалкина.

Согласно теореме 1 любая ФАЛ

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{2^n} a_i k_i, \text{ где } a_i \in E_2. \quad (3)$$

В сумме (3) неизвестными являются коэффициенты a_i , их всего 2^n .

Исходя из табличного представления данной функции, точнее, подставив данные каждой строки табличного представления в соотношение (3), получим конкретные значения неизвестных коэффициентов a_i . Далее, подставив значения коэффициентов a_i в соотношение (3), получим полином Жегалкина.

Пример 2. Представить $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$ в виде полинома Жегалкина МНК.

Решение. Согласно соотношению (3)

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1 x_2 x_3 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_1 x_3 + a_4 x_2 x_3 + a_5 x_1 + a_6 x_2 + a_7 x_3 + a_8. \quad (4)$$

Подставим данные каждой строки табличного представления нашей функции (см. пример 1) в соотношение (4), получим значения a_i , где $a_8=0$, $a_7=0$, $a_6=0$, $a_5=0$, $a_4=1$, $a_3=1$, $a_2=1$, $a_1=0$. Таким образом, согласно соотношению (4),

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

Заметим, что зная представление одной функции в виде полинома Жегалкина, всегда можно найти представление в виде полинома других функций, полученных из исходной заменой переменных. Назовем этот метод построения полинома Жегалкина – методом суперпозиции.

Пример 3. Известно, что $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$. Тогда

$$\begin{aligned} 1) \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 &= \bar{x}_1x_2 + \bar{x}_1x_3 + x_2x_3 = \bar{x}_1(x_2 + x_3) + x_2x_3 = \\ &= (x_1+1)(x_2+x_3) + x_2x_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2 + x_3 + x_2x_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2 + x_3. \\ 2) x_1\bar{x}_2 + x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3 &= x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_3(x_1 + \bar{x}_2) = x_1(x_2+1) + (x_3+1)(x_1+x_2+1) = \\ &= x_1x_2 + x_1 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3 + x_1 + x_2 + 1 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2 + x_3 + 1. \end{aligned}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Жегалкин И. И. О технике вычислений предложений в символической логике // Матем. сборник, 1927. – № 34. – С. 9-28.

2. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1979, 1986 (2-е изд., перераб. и доп.), 2001 (3-е изд., стер.).

E. A. Михеева, Н. А. Миняков (г. Ульяновск)

К ВОПРОСУ ПОЛНОТЫ В ТЕОРИИ КОНЕЧНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Понятие конечнозначной логики P_k , где $k \geq 3$, как системы функций с определённой на ней операцией суперпозиции относится к основным понятиям дискретной математики. Конечнозначная логика вводится как обобщение двузначной логики P_2 (или алгебры логики). В теории конечнозначных логик одним из основных вопросов является вопрос полноты. В данной работе приводится исторический ракурс решения вопроса полноты на языке предполных классов с указанием их числа и эффективности. Также делается определенное обобщение относительно критерия полноты в терминах предполных классов.

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ – исходный алфавит переменных. Будем рассматривать функции $f(x_1, \dots, x_n)$, аргументы которых определены на множестве $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ и такие, что $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in E_k$, когда $a_i \in E_k$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Эти функции будем называть конечнозначными функциями.

Таким образом, каждая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определяет отображение

$$\underbrace{E_k \times E_k \times \dots \times E_k}_{n \text{ раз}} \rightarrow E_k.$$

Систему всех конечнозначных функций над алфавитом X обозначим через P_k , где $k \geq 2$, и назовем конечнозначной логикой. P_2 обычно называют двузначной логикой или алгеброй логики.

Теорема 1. Число всех функций из P_k , зависящих от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n , $|P_k^{(n)}| = k^{k^n}$, где $k \geq 2$.

Доказательство следует из табличного представления функции $f(x_1, \dots, x_n)$. В таблице всего k^n строк, а на каждой строке функция принимает одно из k возможных значений, тогда по правилу произведения комбинаторики, действительно, $|P_k^{(n)}| = k^{k^n}$.

Одним из основных вопросов в теории конечнозначных функций является вопрос полноты.

Определение 1. Система функций $\{f_1, f_2, \dots, f_s, \dots\}$ из P_k называется полной, если любая конечнозначная функция может быть записана в виде формулы через функции этой системы.

Все понятия, которые не определяются здесь, можно найти в работе [1] и книгах [2].

В терминах замыкания и замкнутого класса можно дать другое определение полноты, эквивалентное исходному.

Определение 2. Система функций $\{f_1, f_2, \dots, f_s, \dots\}$ полна в P_k , если её замыкание $[\{f_1, f_2, \dots, f_s, \dots\}] = P_k$.

Как известно [1], одним из путей решения задачи о полноте является отыскание всех так называемых предполных классов данной конечнозначной логики P_k .

Определение 3. Класс F функций из P_k называется предполным, если $F \neq P_k$, а $\forall f \notin F [F \cup \{f\}] = P_k$.

Определение 4. Класс F функций из P_k называется предполным, если F неполный класс, а для $\forall f$ ($f \in P_k, f \notin F$) класс $F \cup \{f\}$ – полный.

В 1921 году появилось сообщение о результатах Э. Поста, которые были подробно опубликованы лишь в 1941 году [3]. Э. Постом были построены все предполные классы для P_2 , их оказалось всего 5. Из работы [3] следует

Теорема 2. Система двузначных функций $\{f_1, f_2, \dots, f_s, \dots\}$ полна в P_2 тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из пяти предполных классов.

В 1954 году в работе С.В. Яблонского [4] были описаны все предполные классы в P_3 , их оказалось 18. Из работы [4] следует

Теорема 3. Система трехзначных функций $\{f_1, f_2, \dots, f_s, \dots\}$ полна в P_3 тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из 18 предполных классов.

Замечание 1. Из описания предполных классов в P_k вытекает алгоритм распознавания полноты для конечных систем. Идея решения задачи о полноте в терминах предполных классов становится после этого одной из главных в P_k при $k > 3$.

В 1966 году А.И. Мальцев на этом пути решил задачу о полноте для P_k P_4 [5]. Далее, А.В. Кузнецовым, С.В. Яблонским, И. Розенбергом и другими были последовательно построены в явном виде все предполные классы для P_k .

В 1970 году И. Розенберг [6] провел завершающее построение, он дал описание всех предполных классов в P_k и критерий полноты для конечнозначных функций.

Замечание 2. Оказалось, число предполных классов в P_k конечно, однако оно довольно быстро растет с ростом числа k .

В работе [7] дана оценка числа предполных классов в P_k , она выглядит следующим образом:

k	Число предполных классов
2	5
3	18
4	80
5	667
6	15237
7	7854724

Замечание 3. Из вышеуказанной таблицы видно, что критерии полноты в терминах предполных классов практически приемлемы только при $k \leq 4$ и малообозримы при $k \geq 5$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике // В кн.: Труды МИАН СССР. – М.: Изд-во АН СССР, 1958. – Т. 51. – С. 5-142.
2. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1979, 1986 (2-е изд., перераб. и доп.), 2001 (3-е изд., стер.)
3. Post E. L. The two-valued iterative systems of mathematical logic. – Princeton Univ. Press, 1941.
4. Яблонский С. В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // ДАН СССР, 1954. – Т. 95, № 6. – С. 1153-1156.
5. Мальцев А. И. Итеративные алгебры и многообразия Поста. Алгебра и логика // Семинар, 1966. – Т. 5, № 2. – С. 3-9.
6. Rosenberg I. G. Über die funktionale Vollständigkeit in dem mehrwertigen Logiken // Rozpravy Cs. Akademie Ved. Ser. Math. Net. Sci., 80, 4, 1970. – С. 3-93.
7. Захарова Е. Ю., Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В. О предполных классах в k -значных логиках // ДАН СССР, 1969. – Т. 186, № 3. – С. 507-512.

E. A. Михеева, A. С. Шкапова (г. Ульяновск)

АЛГОРИТМЫ РЕАЛИЗАЦИИ ФАЛ СФЭ

Одним из интересных примеров приложения алгебры логики являются схемы из функциональных элементов (СФЭ). В данной работе СФЭ рассматриваются в стандартном базисе $B = \{\&, V, -\}$. Алгоритмы реализации функций алгебры логики СФЭ дают следующие методы синтеза:

- 1) метод синтеза, основанный на моделировании СДНФ (совершенной дизъюнктивной нормальной формы);
- 2) метод синтеза, основанный на совместной реализации всевозможных конъюнкций от переменных;
- 3) метод Шеннона.

Одним из интересных примеров приложения алгебры логики является теория управляющих систем. Основными классами «дискретных» управляющих систем являются контактные схемы, формулы и схемы из функциональных элементов (СФЭ).

В данной работе остановимся на синтезе СФЭ. Задача синтеза управляющих систем является одной из основных задач кибернетики. В общих чертах эта задача может быть сформулирована следующим образом. Пусть задан запас элементарных средств. Заданы правила построения из них более сложных образований – схем. Задан способ нахождения по схеме реализуемой ею функции. Задача синтеза состоит в получении для каждой функции алгебры логики (ФАЛ) наилучшей СФЭ, реализующей эту функцию.

Все необходимые обозначения, понятия и определения по ФАЛ взяты из [1], соответственно по СФЭ взяты из [2].

Определение 1. Если S – СФЭ, а $L(S)$ – число элементов в схеме S , то $L(S)$ называется сложностью схемы S .

Определение 2. Если функции всех элементов схемы S принадлежат множеству B , то будем говорить, что схема S есть схема в базисе B .

Замечание 1. В дальнейшем мы будем рассматривать СФЭ в стандартном базисе $B = \{\&, V, -\}$.

Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_2$. Считается, что схема S , реализующая f , тем лучше, чем меньше ее сложность $L(S)$. В этих условиях задача ставится так: для каждой функции f требуется найти реализующую ее схему S , на которой $L(S)$ достигает минимума.

Обозначим этот минимум через $L(f)$:

$$L(f) = \min_{S, \text{реал. } f} L(S)$$

по всем схемам S , реализующих функцию f .

Вводим функцию

$$L(n) = \max_{f(x_1, \dots, x_n) \in P_2} L(f) - \text{функция Шеннона,}$$

где \max берется по всем функциям от n аргументов.

Другими словами $L(n)$ – минимальная сложность СФЭ, реализованной самой сложной функцией среди функций, зависящих от n переменных.

Основная задача синтеза: Найти такой метод синтеза схем, позволяющий для любой функции от n аргументов построить схему S , для которой $L(S)$ близко к $L(n)$, например, $L(S) \lesssim L(n)$. Такой подход был предложен К.Э. Шенном в 1949г. при рассмотрении контактных схем и дан наилучший по порядку метод синтеза контактных схем (см. [3]).

Можно ли любую ФАЛ реализовать СФЭ?

На этот вопрос дает положительный ответ теорема 1 (см. [2]).

Теорема 1. Каждая ФАЛ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ может быть реализована некоторой СФЭ S и притом $L(S) \leq n \cdot 2^{n+1}$, где $n \geq 1$.

Алгоритмы реализации ФАЛ СФЭ дают следующие методы синтеза:

1. Метод синтеза, основанный на моделировании СДНФ

(совершенной дизъюнктивной нормальной формы).

Как известно (см. [1]), произвольную ФАЛ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно представить в виде СДНФ, т.е.

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& \dots \& x_n^{\sigma_n} \quad (1)$$

При реализации функции вида (1) СФЭ $L(n) \leq n \cdot 2^{n+1}$, где $n \geq 1$, это следует из доказательства теоремы 1.

Пример 1. Реализовать $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ СФЭ методом СДНФ.

Решение. СДНФ

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)=1}} x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& x_3^{\sigma_3} = \bar{x}_1x_2x_3 \bigvee x_1\bar{x}_2x_3 \bigvee x_1x_2\bar{x}_3 \bigvee x_1x_2x_3.$$

Если построить СФЭ S в стандартном базисе, реализующую нашу функцию, то $L(S) = 14$, а $L(3) = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$.

2. Метод синтеза, основанный на совместной реализации всевозможных конъюнкций.

Пусть $Q_n(x_1, \dots, x_n) = \{x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& \dots \& x_n^{\sigma_n}\}$ – система всех 2^n конъюнкций от переменных x_1, x_2, \dots, x_n .

Теорема 2 (см. [2]). Сложность реализаций всех конъюнкций от n переменных $L(Q_n) \sim 2^n$.

Из доказательств теорем 1 и 2 следует.

Следствие 1. $L(n) \lesssim 2^{n+1}$, где $n \geq 1$.

Реализация функции из примера 1 по данному методу выглядит следующим образом.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1x_2x_3 \bigvee x_1\bar{x}_2x_3 \bigvee x_1x_2\bar{x}_3 \bigvee x_1x_2x_3 = \bar{x}_1x_2x_3 \bigvee x_1\bar{x}_2x_3 \bigvee x_1x_2(\bar{x}_3 \bigvee x_3) =$$

$$= \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_3 = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_3.$$

Если построить СФЭ S , реализующую $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_3$, то $L(S) = 7$, а $L(3) = 2^4 = 16$.

3. Метод Шеннона.

Описанный ниже метод был предложен Шенномоном для контактных схем в 1949 году. В последующие годы этот метод применялся другими авторами для других классов схем. Здесь метод излагается применительно к СФЭ.

Теорема 3 (см. [2]). $L(n) \lesssim \frac{6 \cdot 2^n}{n}$.

Идея доказательства этой оценки заключается в разложении функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по $n-k$ переменным и выборе параметра k .

Как известно (см. [1]), что каждая ФАЛ может быть представлена в виде (2), т.е.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-k})} x_1^{\sigma_1} \And \dots \And x_{n-k}^{\sigma_{n-k}} \And f(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n), \quad (2)$$

где параметр $k = [\log_2(n - 3 \log_2 n)]$ (целая часть числа при достаточно больших n).

Реализация функции из примера 1 по методу Шеннона выглядит следующим образом.

Берем разложение функции по одной переменной:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = x_1 f(1, x_2, x_3) \vee \bar{x}_1 f(0, x_2, x_3) = x_1 [x_2(1+x_3) + x_3] \vee$$

$$\vee \bar{x}_1 (x_2 x_3) = x_1 (x_2 \bar{x}_3 + x_3) \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 = x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3.$$

Берем разложение функции по двум переменным:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 f(0, 0, x_3) \vee \bar{x}_1 x_2 f(0, 1, x_3) \vee x_1 \bar{x}_2 f(1, 0, x_3) \vee \\ \vee x_1 x_2 f(1, 1, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 0 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 (1+x_3+x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2.$$

А разложение функции по трём переменным это и есть её СДНФ.

Заметим, при разложении функции по одной переменной и по всем переменным пришли к первому методу, где $L(S) = 14$, а $L(3) = \frac{6 \cdot 2^3}{3} = 16$.

При разложении функции по двум переменным $L(S) = 9$, а $L(3) = 16$.

Замечание 2. Оценка сложности СФЭ, реализующей ФАЛ, зависит от вида представления ФАЛ.

Замечание 3. Метод Шеннона эффективен для достаточно больших n , где n – число переменных ФАЛ.

Действительно, при $n = 16$ $k = \log(16 - 3 \log 16) = \log(16 - 12) = \log 4 = 2$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 2001. – 384 с.
2. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. – М.: Изд-во МГУ, 1984.
3. Shannon C. The synthesis of two-terminal switching circuits. – BSTJ, 28. – № 1, 1949. – P. 59-98.

Ю. О. Растегаев (г. Саратов)

МИКРОМЕХАНИЧЕСКИЙ ПЬЕЗОГИРОСКОП В УСЛОВИЯХ РЕЗКОГО ПЕРЕПАДА ТЕМПЕРАТУР

Рассмотрено влияние резкого перепада внешней температуры на точность микро-механического пьезогироскопа. Выявлены элементы конструкции, имеющие наибольший градиент температур. Предлагаются способы уменьшения перепада температур в теле пьезогироскопа.

Введение

В данной работе рассматривается влияние резкого перепада внешней температуры на точность микромеханического пьезогироскопа. Как известно, изменение температуры оказывает значительное влияние на функционирование прибора [1]. Под воздействием температурных перепадов могут изменяться как физические свойства материалов, так и линейные размеры самих деталей [2], что оказывает значительное влияние на точность выходного сигнала и методы его обработки. Поэтому важно детально исследовать все возможные ситуации, провести расчеты и смоделировать поведение различных конфигураций прибора при перемещении прибора в среду с температурой значительно отличающейся от первоначальной.

Математическая модель

Моделировалась следующая конфигурация прибора [3-4] и внешние условия. Прибор состоит из металлического корпуса, присоединенной массы M , двух пьезопластинок P_1 и P_2 , некоторого элемента, который является внутренним источником тепла H , к примеру это может быть микросхема или другой узел. Весь корпус теплоизолирован, кроме небольшого участка F на одной из стенок, через который происходит теплообмен с окружающей средой. Внешние условия описывают перемещение прибора из среды с температурой 0°C в среду с температурой $+60^\circ\text{C}$.

При расчете трехмерного нестационарного температурного поля прибора использовался метод теплового баланса [5]. Каждый элемент конструкции (ЭК) разбивался на элементы разбиения (ЭР). Индексы L, R, BK, F, Top, B обозначают относительное положение соседних элементов разбиения по отношению к рассматриваемому: $L(Left)$ – элемент слева от текущего, $R(Right)$ – справа, $BK(BacK)$ – сзади, $F(Front)$ – спереди, Top – сверху от текущего, $B(Bottom)$ – снизу от текущего.

Расчет велся по явной разностной схеме и использовалось следующее соотношение:

© Ю. О. Растегаев, 2014

$$T^{i+1} = T^i + \Delta t \frac{2}{\rho C_y V_0 h} \left(S_0 \left(K_L \frac{T_L^i - T^i}{K + K_L} + K_R \frac{T_R^i - T^i}{K + K_R} + K_{BK} \frac{T_{BK}^i - T^i}{K + K_{BK}} + K_F \frac{T_F^i - T^i}{K + K_F} + K_{Top} \frac{T_{Top}^i - T^i}{K + K_{Top}} + K_B \frac{T_B^i - T^i}{K + K_B} \right) + B_0 \right).$$

Здесь $T^i = T(t_i)$, Δt – шаг счета по времени, K – теплопроводность соответствующего элемента, ρ – плотность, V_0 – объем ЭР, S_0 – площадь ЭР, h – толщина ЭР, C_y – теплоемкость текущего ЭР, T – температура, B_0 – мощность внутреннего источника тепла.

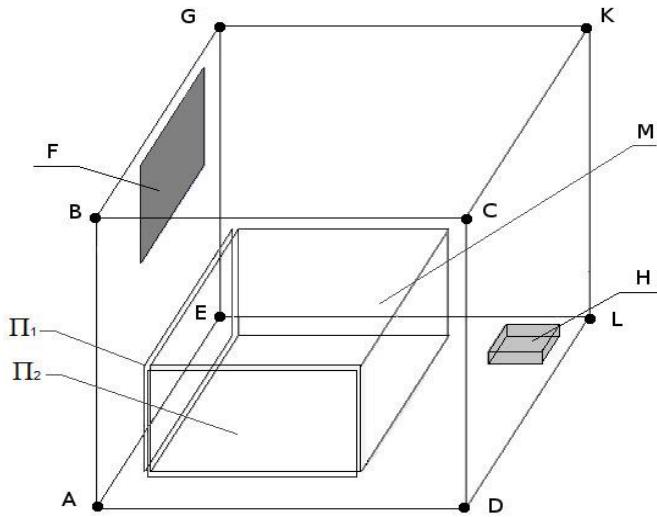


Рис. 1. Схема пьезогироскопа

Исследования проводились с помощью разработанного для этой цели программного комплекса *PiezoGiroskope Temprature Field Calculator 1.1*.

Результаты расчетов

Ниже представлены графики, показывающие установление стационарного температурного поля пьезогироскопа. Показаны графики выхода на стационарный режим во всех частях прибора.

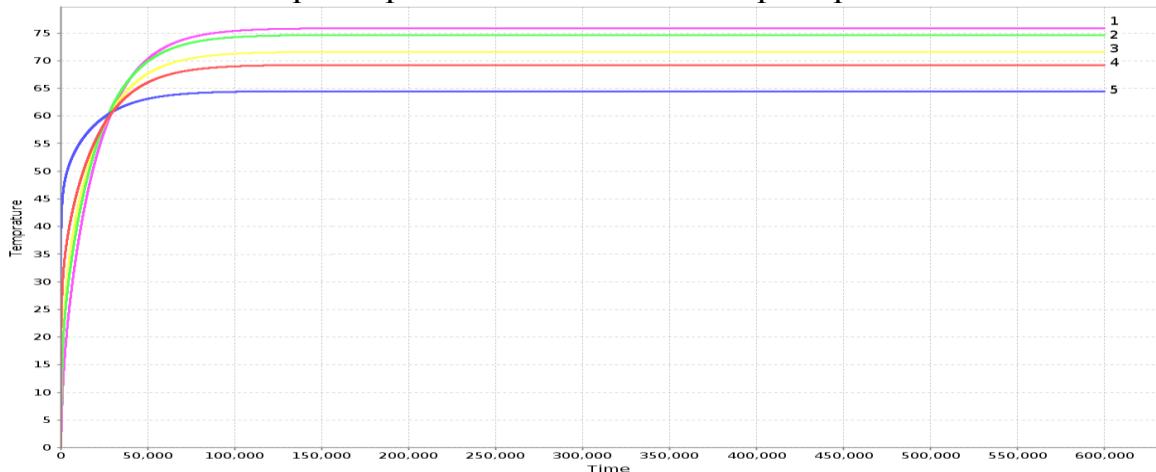


Рис. 2. График выхода на стационарный режим стенки ABGE корпуса

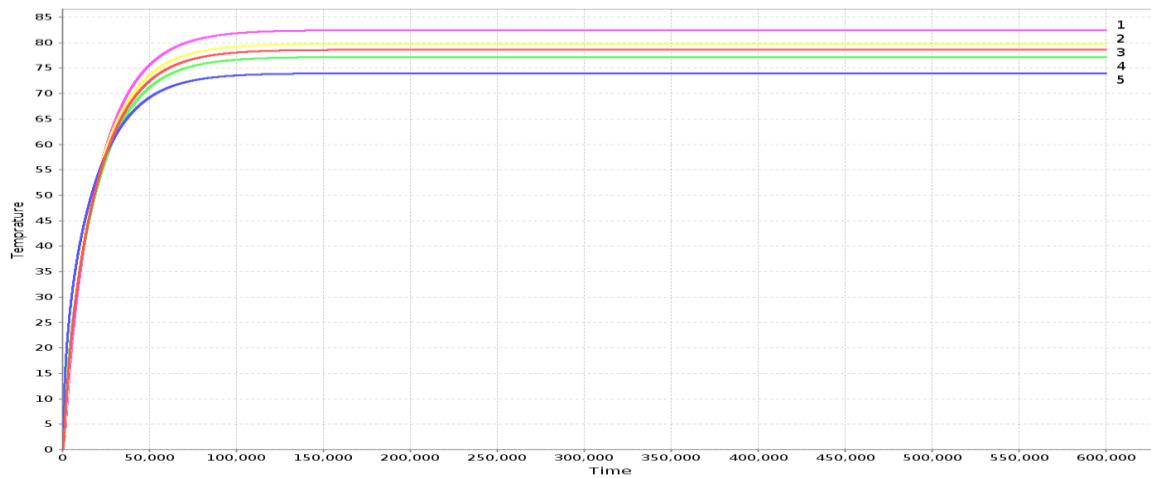


Рис. 3. График выхода на стационарный режим стенки ABCD корпуса



Рис. 4. График выхода на стационарный режим стенки DCKL корпуса



Рис. 5. График выхода на стационарный режим стенки LKGE корпуса



Рис. 6. График выхода на стационарный режим крышки BCKG корпуса



Рис. 7. График выхода на стационарный режим дна ADLE корпуса

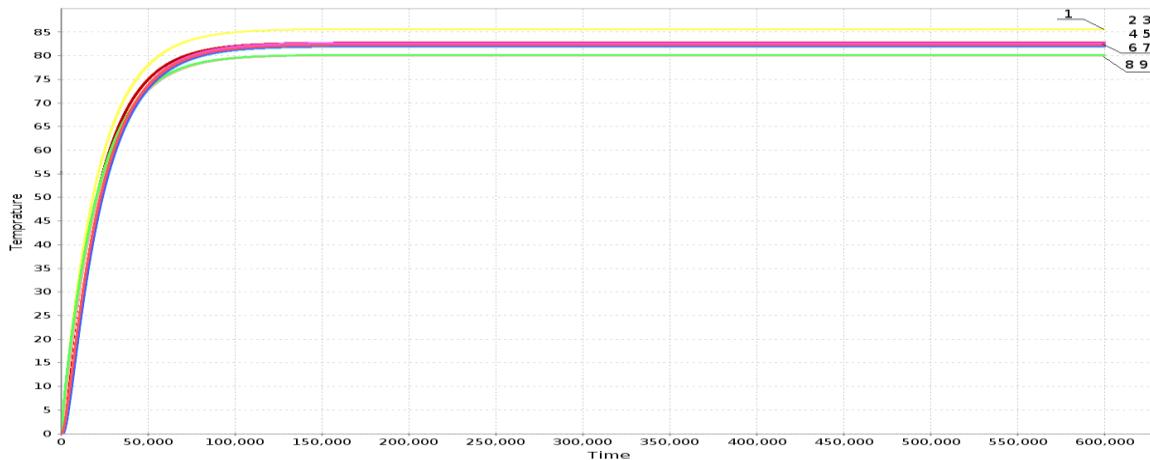


Рис. 8. График выхода на стационарный режим присоединенной массы

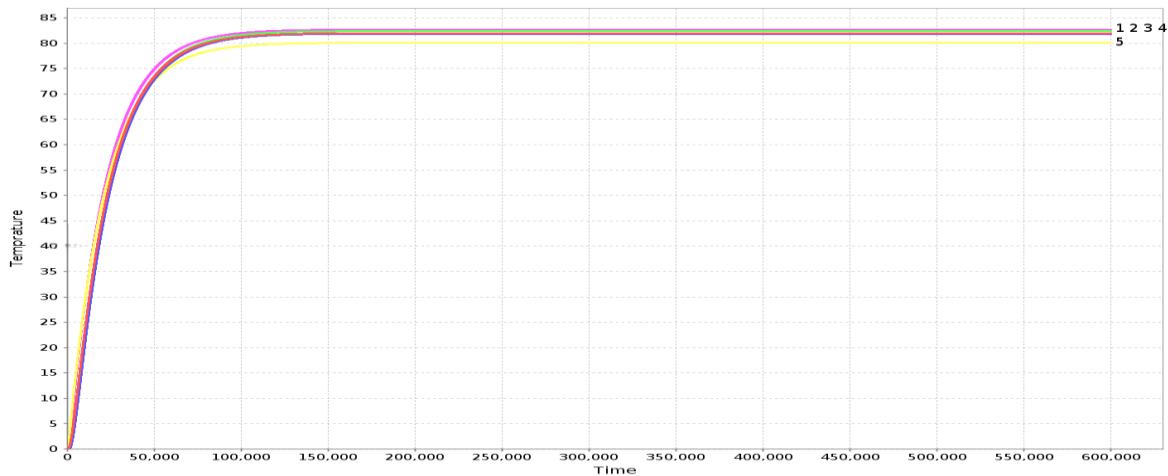


Рис. 9. График выхода на стационарный режим первой пьезопластины

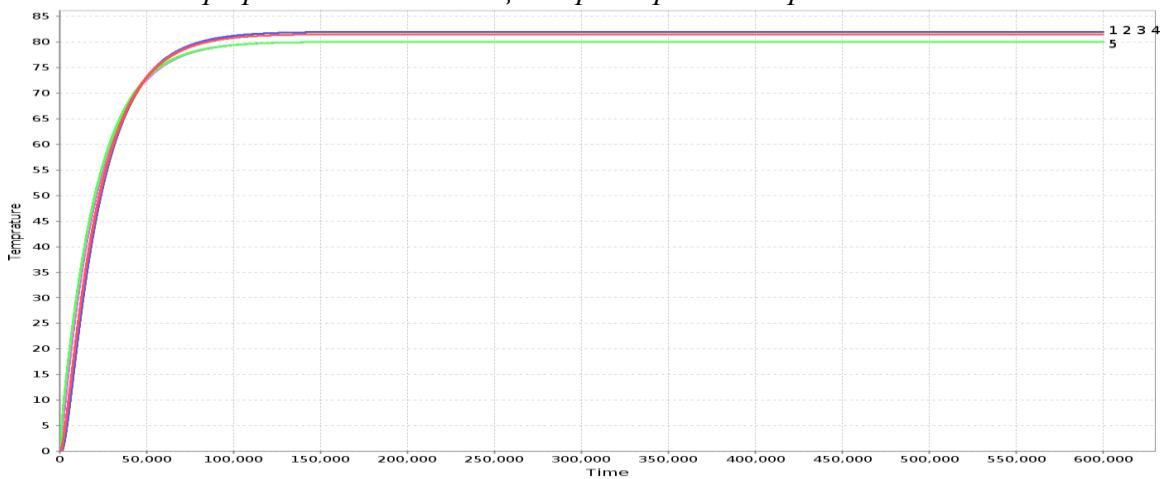


Рис. 10. График выхода на стационарный режим второй пьезопластины

На графиках ясно видно, что перепады температур внутри прибора достигают значения в 30°C. Это значительный перепад, который составляет до 50% от температуры окружающей среды.

Анализ приведенных результатов. Целью данного исследования является выявление наиболее уязвимых к перепадам температуры элементов пьезогироскопа. После проведения сравнительного анализа были выявлены следующие особенности установления стационарного режима в различных элементах конструкции прибора.

Наибольшие разницы температур приходятся на дно корпуса и стенку *LKGE*. В этих элементах разница температуры в разных точках составляет 18°C и 23°C соответственно. Одной из приоритетных задач в ходе данного исследования является нахождения путей снижения градиента температур в наиболее важных конструктивных частях прибора: присоединенной массе и пьезопластинах. Однако температуры в этих частях напрямую зависят от температурного поля дна корпуса пьезогироскопа, потому как они непосредственно связаны и между ними происходит наиболее интенсивный теплообмен.

Далее приведены результаты сравнения роста температур в следующих парах элементов конструкции: стенки корпуса *ABGE* и *DCKL*, стенки корпуса *ABCD* и *LKGE*, верх и дно прибора и также сравнивались между собой пьезопластины. На каждом элементе конструкции брались 4 точки на краях элемента и одна точка в центре и строились графики модуля разницы температур в аналогичных точках сравниваемых элементов.



Рис. 11. Сравнительный график верха и дна корпуса пьезогироскопа



Рис. 12. Сравнительный график стенок ABGE и DCKL корпуса

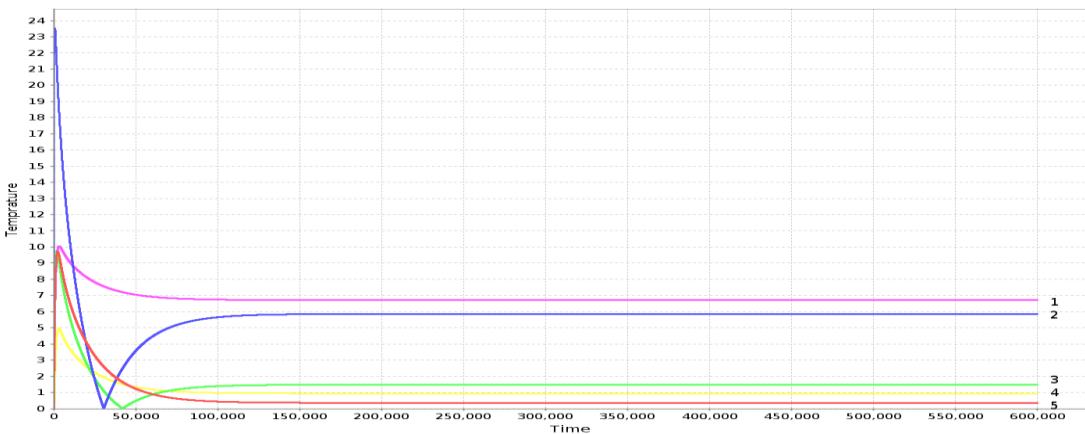


Рис. 13. Сравнительный график стенок ABCD и KLGE корпуса

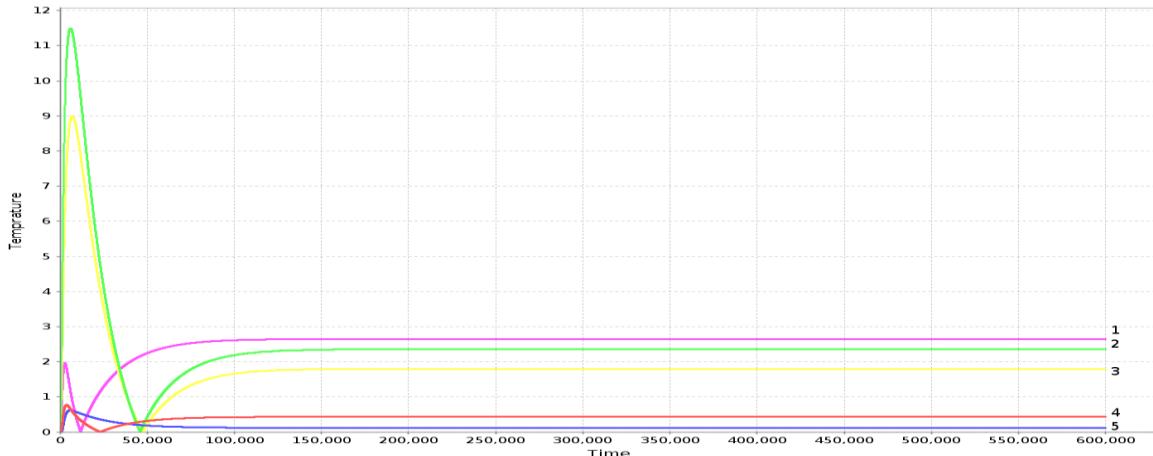


Рис. 14. Сравнительный график пьезопластин

На представленных выше графиках ясно видно, что имеется значительный градиент температур в теле прибора. Для предотвращения столь значительной разницы в температурах различных частей прибора предлагается применить метод шунтов [5].

Необходимо соединить шунтами противоположенные элементы конструкции стенки *ABGE* и *DCKL*, стенки *ABCD* и *LKGE* и верх и низ. Предварительные оценки показывают, что применения данного метода должно снизить градиент температур внутри тела прибора и стабилизировать сигнал пьезогироскопа при резком перепаде температуры окружающей среды.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Распопов В. Я. Микромеханические приборы: учебное пособие. – М.: Машиностроение, 2007. – 400 с.
2. Растегаев Ю. О. Влияние геометрических параметров на величину выходного сигнала пьезогироскопа // Сборник научных трудов «Математика. Механика». – Изд. СГУ, 2011. – С. 173-175.
3. Ольшанский В. Ю., Абитова И. Ф., Нагар Ю. Н., Серебряков А. В. Об одной модели датчика инерциальной информации // Вестник Нижегородского университета, 2011. – № 4, Ч. 2. – С. 260-261.
4. Панкратов В. М., Ольшанский В. Ю., Нагар Ю. Н., Серебряков А. В. Влияние диссипации на характеристики измерителя угловой скорости на основе взаимного пьезоэфекта // Авиакосмическое приборостроение, 2010. – № 8. – С. 3-8.
5. Джашитов В. Э., Панкратов В. М. Датчики, приборы и системы авиакосмического и морского приборостроения в условиях тепловых воздействий // СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2005. – 404 с.

A. Семёнов (г. Ульяновск)

К РЕШЕНИЮ ПРОСТЕЙШЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С НЕОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПРИ ПОМОЩИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

В работе установлены необходимые и достаточные условия существования разложимых в степенные ряды решений одного вида простейшей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с линейными неоднородными граничными условиями. Описан алгоритм поиска таких решений и приведены примеры его использования.

I. Рассмотрим краевую задачу: требуется найти аналитическую (разложимую в ряд Маклорена на отрезке $[0; 1]$) функцию $y = f(x)$, являющуюся решением дифференциального уравнения

$$y'' = g(x, y, y') \quad (1)$$

и удовлетворяющую граничным условиям

$$\begin{cases} a_0 y(0) + a_1 y'(0) = a_2, \\ b_0 y(1) + b_1 y'(1) = b_2; \end{cases} \quad (2)$$

где $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ – заданные действительные числа, причём $a_0^2 + a_1^2 \neq 0, b_0^2 + b_1^2 \neq 0$; $g(x, y, y')$ – заданная функция, такая, что функция $F(x) = g(x, f(x), f'(x))$ является аналитической, так что

$$\forall x \in [0; 1]: F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

где $F^{(n)}(0) = \left. \left(g(x, f(x), f'(x)) \right)^{(n)} \right|_{x=0}$, т. е.
 $F^{(0)}(0) = g(0, f(0), f'(0)) = \psi_0(f(0), f'(0)),$
 $F'(0) = \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial f} f' + \frac{\partial g}{\partial f'} f'' \right) \Big|_{x=0} = \psi_1(f(0), f'(0), f''(0)),$
 $\dots, F^{(n)}(0) = \psi_n(f(0), f'(0), f''(0), \dots, f^{(n-1)}(0)).$

Теорема 1. Для того чтобы краевая задача (1),(2) при $a_0 \neq 0$ имела аналитические решения необходимо и достаточно, чтобы существовали корни следующего уравнения с одним неизвестным z

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_0 + b_1 n}{n!} \varphi_n(z) = b_2 - b_0 \delta + (\alpha b_0 - b_0 - b_1) z, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a_1}{a_0}, \quad \delta = \frac{a_2}{a_0}; \quad \varphi_2(z) = \psi_0(\delta - \alpha z, z), \dots, \varphi_{n+2}(z) = \\ &= \psi_n(\delta - \alpha z, z, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+1}). \end{aligned}$$

Доказательство. Аналитическая функция $y = f(x)$ является решением рассматриваемой краевой задачи тогда и только тогда по определению, когда выполняются равенства

$$\begin{cases} f(0) + \alpha f'(0) = \delta, \\ b_0 f(1) + b_1 f'(1) = b_2; \end{cases} \quad (4)$$

и тождество

$$\forall x \in [0; 1]: f''(x) = g(x, f(x), f'(x)). \quad (5)$$

Значит, если обозначить $z = f'(0)$, то из первого условия в (4) имеем $f(0) = \delta - \alpha z$, а из условия (5), в силу единственности разложения аналитической функции в степенной ряд, получаем $f^{(n)}(0) = \varphi_n(z)$, $n = 2, 3, \dots$. Следовательно,

$$\forall x \in [0; 1]: f(x) = \delta - \alpha z + zx + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi_n(z)}{n!} x^n.$$

Теперь из второго условия в (4) получаем

$$\begin{aligned} b_2 &= b_0 f(1) + b_1 f'(1) = b_0 \left(\delta - \alpha z + z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi_n(z)}{n!} \right) + b_1 \left(z + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \varphi_n(z)}{n!} \right) = b_0 \delta - z(\alpha b_0 - b_0 - b_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_0 + b_1 n}{n!} \varphi_n(z). \end{aligned}$$

Отсюда и следует, что $z = f'(0)$ является корнем уравнения (3).

Теорема доказана.

Следствия.

1. Если уравнение (3) корней не имеет, то краевая задача (1), (4) аналитических решений не имеет.

2. Если действительное число $z = p$ является корнем уравнения (3), то решением задачи (1), (4) является функция

$$y = f(x) = \delta - \alpha p + xp + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi_n(p)}{n!} x^n. \quad (6)$$

3. Алгоритм поиска аналитических решений краевой задачи (1), (4) будет таким.

На первом шаге алгоритма, сначала, введя неизвестную $z = f'(0)$, определяем из первого условия в (4) $f(0) = \delta - \alpha z$ и, используя уравнение (1), последовательно находим $f^{(n)}(0) = \varphi_n(z)$, $n = 2, 3, \dots$. Затем составляем уравнение (3).

На втором шаге, решая уравнение (3), находим множество всех его действительных корней. Если оно пусто, то краевая задача решений не имеет; если не пусто, то переходим к третьему шагу алгоритма.

На третьем шаге алгоритма для каждого корня $z = p$ уравнения (3) получаем решение задачи (1), (4) в виде (6).

Аналогично доказывается теорема (2) и формулируются следствия к ней, когда $a_0 = 0, z = f(0)$.

Теорема 2. Для того чтобы краевая задача (1),(2) при $a_0 = 0$ имела аналитические решения необходимо и достаточно, чтобы существовали корни следующего уравнения с одним неизвестным z

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_0 + b_1 n}{n!} \varphi_n(z) = b_2 - (b_1 + b_0)\gamma - b_0 z, \quad (7)$$

где

$$\gamma = \frac{a_2}{a_1}; \varphi_2(z) = \psi_0(z, \gamma), \dots, \varphi_{n+2}(z) = \psi_n(z, \gamma, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+1}).$$

Заметим, что если поставлена задача поиска аналитического на $[a; b]$ решения уравнения (1) с граничными условиями

$$\begin{cases} c_0 y(a) + c_1 y'(a) = c_2, \\ d_0 y(b) + d_1 y'(b) = d_2; \end{cases}$$

то заменой независимой переменной по формуле $t = (x - a)/(b - a)$ она сводится к задаче (1), (2).

II. Приведём примеры решения краевой задачи (1), (2).

Пример 1. Требуется на отрезке $[0; 1]$ найти аналитическое решение уравнения

$$y'' = y + x, \quad (8)$$

удовлетворяющее граничным условиям (4).

Решение. Эта задача – частный случай задачи (1), (4) при $g(x, y, y') = y' + x$. Применим описанный выше алгоритм. Пусть $f'(0) = z$, тогда $f(0) = \delta - \alpha z$, и, используя уравнение (8) и метод математической индукции, находим $f''(0) = z$, $f^{(n)}(0) = \varphi_n(z) = 1 + z$, $n = 3, 4, \dots$. Тогда уравнение (3) принимает вид

$$\frac{b_0 + 2b_1}{2} z + (1 + z) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{b_0 + b_1 n}{n!} = b_2 - b_0 \delta + (\alpha b_0 - b_0 - b_1)z. \quad (9)$$

Используя разложение $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, имеем $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{b_0 + b_1 n}{n!} = b_0 \left(e - \frac{5}{2}\right) + b_1 (e - 2)$. Следовательно, уравнение (9) будет равносильно уравнению

$$((e - \alpha - 1)b_0 + eb_1)z = b_2 - b_0(e + \delta - 2.5) - b_1(e - 2). \quad (10)$$

Значит, если $(e - \alpha - 1)b_0 + eb_1 \neq 0$, то уравнение (10) имеет единственное решение

$$z = p = \frac{b_2 - b_0(e + \delta - 2.5) - b_1(e - 2)}{(e - \alpha - 1)b_0 + eb_1},$$

а краевая задача (4), (8) – единственное решение, задаваемое формулой (6). Если $(e - \alpha - 1)b_0 + eb_1 = 0$, и $b_2 - b_0(e + \delta - 2.5) - b_1(e - 2) = 0$, то уравнение (10) имеет множество решений и, следовательно, краевая задача (4), (8) имеет множество решений вида (6). Если же $b_2 - b_0(e + \delta - 2.5) - b_1(e - 2) \neq 0$, и $(e - \alpha - 1)b_0 + eb_1 = 0$, то уравнение (10) и краевая задача (4), (8) не имеют решений.

Рассмотрим конкретные случаи.

а) Пусть

$$\alpha = b_0 = b_1 = 1, \delta = b_2 = 0. \quad (11)$$

Тогда уравнение (10) принимает вид $2(e-1)z = 0.5(9-4e)$ и имеет единственный корень $z = p = 0.25(9-4e)/(e-1)$. Следовательно, краевая задача имеет единственное решение

$$y = f(x) = -p + px + 0.5x^2 + (1+p) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = p(-1+x+0.5x^2) + \\ + (1+p)(e^x - 1 - x - 0.5x^2) = \frac{2e-7}{2(e-1)} + \frac{5e^x}{4(e-1)} - x - 0.5x^2.$$

Проверим результат, используя аналитические методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Общее решение уравнения (8) имеет вид

$$y = C_1 + C_2 e^x - x - 0.5x^2. \quad (12)$$

Подставляя функцию (12) в граничные условия (4) с числовыми значениями параметров из (11) получаем $C_1 = (e-3.5)/(e-1)$, $C_2 = 1.25/(e-1)$. Значит, искомое решение представляется формулой $y = \frac{2e-7}{2(e-1)} + \frac{5e^x}{4(e-1)} - x - 0.5x^2$, что совпадает с результатом, установленным выше.

б). Пусть теперь

$$\alpha = 1, \delta = 2.5 - e, b_0 = 1, b_1 = (2-e)/e, b_2 = -(e-2)^2/e. \quad (13)$$

Тогда уравнение (10) принимает вид $0 \cdot z = 0$ и его корнем является любое действительное число. Значит, рассматриваемая краевая задача имеет множество решений, которое задаётся формулой

$$\forall p \in R: y = f(x) = 2.5 - e - p + px + 0.5x^2 + (1+p) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \\ = 2.5 - e - p + px + 0.5px^2 + (1+p)(e^x - 1 - x - 0.5x^2) = \\ = 3.5 - e - 2(p+1) + (1+p)e^x - x - 0.5x^2.$$

Проверим полученный результат. Подставляя функцию (12) в граничные условия (4) с числовыми значениями параметров из (13), получаем $\forall p \in R: C_2 = p+1$, $C_1 = 3.5 - e - 2(p+1)$. Значит, искомое множество решений краевой задачи представляется формулой $p \in R: y = 3.5 - e - 2(p+1) + (1+p)e^x - x - 0.5x^2$ что совпадает с результатом, установленным выше.

Пример 2. Требуется на отрезке $[0; 1]$ найти аналитическое решение уравнения

$$y'' = xy + 1, \quad (14)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{cases} f'(0) = \gamma, \\ b_0 f(1) + b_1 f'(1) = b_2; \end{cases} \quad (15)$$

Решение. Эта задача – частный случай задачи (1), (2) при $g(x, y, y') = xy + 1, a_0 = 0, \gamma = a_2/a_1$. Применяем алгоритм, аналогичный описанному в третьем следствии к теореме 1. Полагаем $f(0) = z$, а $f'(0) = \gamma$, и, используя уравнение (14) и метод математической индукции, находим

$$\begin{aligned} \varphi_{3k+2}(z) &= f^{(3k+2)}(0) = 3^k k!, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \\ \varphi_{3k}(z) &= f^{(3k)}(0) = 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3k-2) \cdot z, \quad k = 1, 2, \dots; \\ \varphi_{3k+1}(z) &= f^{(3k+1)}(0) = 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3k-1) \cdot \gamma, \quad k = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

Теперь, после применения свойств абсолютно сходящихся рядов, уравнение (7) принимает следующий равносильный вид

$$(b_0(1 + s_3) + b_1 s_4) \cdot z = b_2 - b_0(s_1 + \gamma(1 + s_5)) - b_1(s_2 + \gamma(1 + s_6)), \quad (16)$$

где $s_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k k!}{(3k+2)!} = 0.5447; \quad s_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k k!}{(3k+1)!} = 1.0088;$

$$s_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3k-2)}{(3k)!} = 0.1723; \quad s_4 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3k-2)}{(3k-1)!} = 0.5340;$$

$$s_5 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3k-1)}{(3k+1)!} = 0.1032; \quad s_6 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3k-1)}{(3k)!} = 0.6808.$$

Так что, если $b_0(1 + s_3) + b_1 s_4 \neq 0$ то уравнение (16) имеет единственное решение $z = p = \frac{b_2 - b_0(s_1 + \gamma(1 + s_5)) - b_1(s_2 + \gamma(1 + s_6))}{b_0(1 + s_3) + b_1 s_4}$, а краевая задача (14), (15) – единственное решение, задаваемое формулой

$$y = f(x) = p + \gamma x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi_n(p)}{n!} x^n. \quad (17)$$

Если $(1 + s_3) + b_1 s_4 = 0$ и $b_2 - b_0(s_1 + \gamma(1 + s_5)) - b_1(s_2 + \gamma(1 + s_6)) = 0$, то уравнение (17) имеет множество решений и, следовательно, краевая задача (14), (15) имеет множество решений вида (17). Если же $(1 + s_3) + b_1 s_4 = 0$ и $b_2 - b_0(s_1 + \gamma(1 + s_5)) - b_1(s_2 + \gamma(1 + s_6)) \neq 0$, то уравнение (16) и краевая задача (14), (15) не имеют решений.

A. Семёнов (г. Ульяновск)

**ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЕМ ПЛАТФОРМЫ ЭКСКАВАТОРА
ПО МАКСИМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ
НА ВРЕМЕННОМ ОТРЕЗКЕ С ПОДВИЖНЫМ КОНЦОМ
И С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА УПРАВЛЕНИЕ В ВИДЕ НЕРАВЕНСТВА**

В работе, используя математическую модель поворота платформы экскаватора электродвигателем постоянного тока, рассматривается задача оптимального управления электродвигателя по максимальной производительности на временном отрезке $[t_0, T]$ с подвижным правым концом и с ограничением на управление вида $|u(t)| \leq U_0$. Поставленная задача сведена к частному случаю задачи Майера-Больца и решена методом вариационного исчисления. Установлены интервалы значений параметра ограничения U_0 , зависящие от параметров модели электродвигателя, каждому из которых соответствует отличающийся от других вид оптимального кусочно-линейного управления.

I. Рассмотрим случай поворота платформы экскаватора электродвигателем постоянного тока. Предполагая магнитный поток постоянным, основное уравнение электродвигателя – уравнение равновесия моментов на валу – в безразмерном виде может быть записано так [1]

$$x'_1 = u_1 - \beta,$$

где $x_1(t)$ – угловая скорость, $x_1(t) \geq 0$; $u_1(t)$ – переменная, пропорциональная току в якоре электродвигателя; β – фиксированный момент сопротивления ($\beta > 0$). В начальный t_0 и конечный T моменты времени должны выполняться условия $x_1(t_0) = x_1(T) = 0$. Будем предполагать так же заданными тепловые потери в якоре электродвигателя и обозначим их в относительных единицах через γ ($\gamma > 0$). Тогда $\int_{t_0}^T u_1^2(t) dt = \gamma$, причём $\gamma > \beta^2 T$.

Поставим следующую задачу: требуется найти значение T , непрерывную функцию $x_1(t) \geq 0$ и кусочно-непрерывную функцию $u_1(t)$, удовлетворяющие на отрезке $[t_0, T]$ вышеприведённым соотношениям, и условию $|u_1(t)| \leq U_0$, (U_0 – заданный параметр, $U_0 \geq \sqrt{\frac{\gamma}{T}} > \beta$) найти такие, которые доставляют функционалу

$$J = \int_{t_0}^T x_1(t) dt \quad (1)$$

максимальное значение. Заметим, что функционал (1) определяет в

относительных единицах угол поворота платформы, т.е. производительность электродвигателя.

Введя дополнительные функции $x_2(t)$ и $u_2(t)$ по формулам

$$x_2(t) = \int_{t_0}^t u_1^2(t) dt, u_2^2(t) = U_0^2 - u_1^2(t),$$

получаем следующий частный случай вариационной задачи Майера-Больца [2]: среди непрерывных неотрицательных фазовых координат $x_1(t)$, $x_2(t)$ и кусочно-непрерывных управлений $u_1(t)$, $u_2(t)$, удовлетворяющих на отрезке $[t_0, T]$ дифференциальным уравнениям

$$x'_1 = u_1 - \beta, x'_2 = u_2^2 \quad (2)$$

и соотношению

$$u_1^2 + u_2^2 - U_0^2 = 0, \quad (3)$$

а на концах отрезка – условиям

$$t_0 = 0, \quad (4)$$

$$x_1(t_0) = 0, \quad x_2(t_0) = 0. \quad (5)$$

$$x_1(T) = 0, \quad x_2(T) = \gamma. \quad (6)$$

найти такие, которые сообщают функционалу (1) максимальное значение.

II. Решаем задачу вариационным методом [2]. Строим функции H и φ , имеем

$$H = x_1 + \lambda_1(u_1 - \beta) + \lambda_2 u_2^2 + \mu_1(u_1^2 + u_2^2 - U_0^2),$$

$$\varphi = \rho_1 t_0 + \rho_2 x_1(t_0) + \rho_3 x_2(t_0) + \rho_4 x_1(T) + \rho_5(x_2(T) - \gamma),$$

где $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\mu_1(t)$ – функциональные, а ρ_i ($i = 1, \dots, 5$) – постоянные множители Лагранжа. Тогда из условий стационарности (правило множителей) получаем

$$\lambda'_1 = -1, \quad \lambda'_2 = 0; \quad (7)$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 u_1 + 2\mu_1 u_1 = 0, \quad 2\mu_1 u_2 = 0, \quad (8)$$

$$\lambda_1(T)(u_1(T) - \beta) + \lambda_2(T)u_1^2(T) = 0, \quad (9)$$

причём в точках возможных разрывов непрерывности управлений сохраняется непрерывность фазовых координат, множителей λ_1 , λ_2 и функции H . Анализ соотношений (3), (7) и (8) показывает, что у экстремалей среди них искомое оптимальное решение) могут быть участки следующих типов:

- 1) $\mu_1 = 0$, $u_2 \neq 0$, $|u_1| \leq U_0$;
- 2) $\mu_1 \neq 0$, $u_2 = 0$, $u_1 = U_0$;
- 3) $\mu_1 \neq 0$, $u_2 = 0$, $u_1 = -U_0$.

Принимая во внимание электромеханическую модель рассматриваемой оптимальной задачи, естественно предположить следующие возможные виды экстремалей:

- 1) экстремаль с единственным участком первого типа;
- 2) экстремаль с двумя последовательными участками второго и первого типа;

3) экстремаль с тремя последовательными участками второго, первого и третьего типа;

4) экстремаль с двумя последовательными участками второго и третьего типа.

Для первого вида экстремалей, интегрируя систему дифференциальных уравнений (8), получаем $\lambda_2 = D_1$, $\lambda_1 = -t + D_2$, где D_1, D_2 – произвольные постоянные интегрирования. Так как $\forall t \in [0; T]: \mu_1(t) = 0$, то из (8) следует, что $u_1 = -\frac{\lambda_1}{2\lambda_2} = \frac{t-D_2}{2D_1} = C_2 - C_1 t$, где $C_1 = -\frac{1}{2D_1}$, $C_2 = -\frac{D_2}{2D_1}$. Теперь, интегрируя систему дифференциальных уравнений (2) с начальными условиями (4), (5), имеем

$$x_1 = -\frac{1}{2}C_1 t^2 + C_2 t - \beta t, \quad x_2 = \frac{1}{3}C_1 t^3 - C_1 C_2 t^2 + C_2^2 t.$$

Удовлетворяя граничным условиям (5), (9), для определения значений постоянных C_1, C_2, T получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 T - 2C_2 + 2\beta = 0, \\ C_1^2 T^3 - 3C_1 C_2 T^2 + 3C_2^2 T = 3\gamma, \\ u_1(T)(u_1(T) - 2\beta) = 0, \end{cases}$$

которая равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} C_1 T - 2C_2 = -2\beta, \\ C_1^2 T^3 - 3C_1 C_2 T^2 + 3C_2^2 T = 3\gamma, \\ C_1 T - C_2 = 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} C_1 T - 2C_2 = -2\beta, \\ C_1^2 T^3 - 3C_1 C_2 T^2 + 3C_2^2 T = 3\gamma, \\ C_1 T - C_2 = -2\beta, \end{cases} \quad (11)$$

Система (11) имеет единственное решение

$$C_1 = \frac{8\beta^3}{3\gamma}, \quad C_2 = 0, \quad T = \frac{3\gamma}{4\beta^2}, \quad (12)$$

а система (10) – единственное решение

$$C_1 = -\frac{8\beta^3}{3\gamma}, \quad C_2 = 2\beta, \quad T = \frac{3\gamma}{4\beta^2}, \quad (13)$$

Решению (13) соответствует экстремаль

$$u_1(t) = \frac{2\beta}{T}t, \quad x_1(t) = \beta t(t-T), \quad T = \frac{3\gamma}{4\beta^2},$$

которая не является искомым решением поскольку $\forall t \in [0; T]: x_1(t) \leq 0$.

Значения C_1, C_2, T из (12) определяют экстремаль первого вида формулами

$$u_1(t) = -\frac{8\beta^3}{3\gamma}(t-T), \quad x_1(t) = -\frac{4\beta^3}{3\gamma}t(t-T), \quad T = \frac{3\gamma}{4\beta^3}.$$

Найдём при фиксированных значениях параметров β, γ допустимые значения параметра U_0 , при которых экстремаль первого вида является решением рассматриваемой оптимальной задачи. Так как $u_1(0) = 2\beta$, $u_1(T) = 0$, то из линейности функции $u_1(t)$ следует, что

$\forall t \in [0; T]: |u_1(t)| \leq 2\beta$. Значит, экстремаль первого вида является искомым решением, если выполняется условие $U_0 \geq 2\beta = U_1$.

Для второго вида экстремалей предположим, что $\beta < U_0 < U_1$ и обозначим через t_1 момент сопряжения экстремальных участков второго и первого типа. Тогда, используя условия стационарности, последовательно получаем.

При $0 \leq t < t_1$: $u_1 = U_0$; $x_1 = (U_0 - \beta)t$.

При $t_1 \leq t \leq T_0$: $u_1 = -C_1(t - t_1) + C_2$. Тогда, из условий непрерывности в точке t_1 фазовых координат, множителей λ_1, λ_2 и функции H , вытекает непрерывность управления $u_1(t)$. Откуда следует, что $C_2 = U_0$ и $u_1 = -C_1(t - t_1) + U_0$. Теперь находим

$$x_1 = (U_0 - \beta)(t - t_1) - \frac{1}{2}C_1(t - t_1)^2 + C_3.$$

Из непрерывности в точке t_1 функции $x_1(t)$ следует $C_3 = (U_0 - \beta)t_1$. Значит, $x_1 = (U_0 - \beta)t - \frac{1}{2}C_1(t - t_1)^2$.

Для определения значений неизвестных t_1 , C_1 и T воспользуемся условиями (6) и (9). Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (U_0 - \beta)T - \frac{1}{2}C_1(T - t_1)^2 = 0, \\ \frac{1}{3}C_1^2(T - t_1)^3 - C_1U_0(T - t_1)^2 + U_0^2T = \gamma, \\ U_0 - C_1(T - t_1) = 0, \end{cases}$$

единственным решением которой $\forall U_0 \in (\beta; 2\beta)$ является тройка чисел

$$t_1 = \frac{3\gamma(2\beta - U_0)}{U_0^2(4\beta - U_0)}, \quad C_1 = \frac{U_0^3(4\beta - U_0)}{6\gamma(U_0 - \beta)}, \quad T = \frac{3\gamma}{U_0(4\beta - U_0)}. \quad (14)$$

Таким образом, экстремаль второго вида, определяемая формулами

$$u_1(t) = \begin{cases} U_0, & 0 \leq t < t_1; \\ U_0 - C_1(t - t_1), & t_1 \leq t \leq T; \end{cases}$$

$$x_1(t) = \begin{cases} (U_0 - \beta)t, & 0 \leq t < t_1; \\ (U_0 - \beta)t - \frac{1}{2}C_1(t - t_1)^2, & t_1 \leq t \leq T; \end{cases}$$

где значения t_1 , C_1 и T находятся по формулам (14), будет искомым решением рассматриваемой задачи оптимального управления для всех, кроме соответствующих экстремалей первого вида, допустимых значений параметра U_0 . Так что лучших решений среди экстремалей третьего и четвертого вида не существует.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Петров Ю. П. Вариационные методы оптимального управления. – М.-Л.: Энергия, 1977. – 250 с.
- Троицкий В. А. Оптимальные процессы колебаний механических систем. – Л.: Машиностроение, 1976. – 246 с.

C. A. Чернов (г. Ульяновск)

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ БЛОКА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА СТАДИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Рассмотрена конечно-элементная модель блока интегрированной технологической системы для очистки СОЖ. Приведены результаты расчетов вариантов конструкций по разработанной программе и рекомендации по снижению металлоемкости.

Конструкция блока интегрированной технологической системы для очистки СОЖ объемом 90 м³ – ИТС-90 представляет собой коробчатую конструкцию с внешним стержневым каркасом. Блок состоит из панели днища с размерами 6000×2000, передней и задней стенок с размерами 2000×7500 и двух боковых стенок с размерами 6000×7500. Сопряжения всех панелей выполнено с радиусом 137 мм. Толщина листа металла панели днища 8 мм, а толщина листов металла панелей боковых и задних стенок от 8 мм до 3 мм по высоте.

Каркас представляет собой стержневую конструкцию из основных стержней коробчатого квадратного сечения: труба профильная 100×100×6 и вспомогательных – труба профильная 60×60×3,5 ГОСТ 8639 – 82.

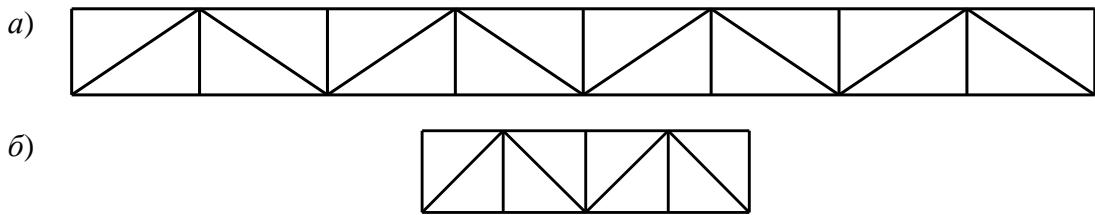
По длине днища располагаются шесть лонжеронов, которые переходят на заднюю и переднюю стенки. Два средних лонжерона изготовлены из трубы профильной 60×60×3,5, а другие – из трубы профильной 100×100×6. По ширине днища располагается десять поперечин (труба профильная 60×60×3,5), которые также переходят и на боковые стенки. Двенадцать горизонтальных стержней опоясывают блок по его периметру.

Верхний стержневой пояс и три следующих ниже, расположенные друг от друга на расстоянии 2000 мм, изготовлены из трубы профильной 100×100×6, а остальные шесть стержневых поясов – из трубы профильной 60×60×3,5. Крайние лонжероны и поперечины днища определяют габаритные размеры: ширину и длину. Углы сопряжения всех горизонтальных и вертикальных стержней на панелях боковых, передней и задней стенок, а также поперечин и лонжеронов днища составляют 90°.

Боковые стенки соединены между собой талрепами (24 шт.), которые расположены в четырех рядах на расстоянии 2000 мм от верха блока и по 2000 мм между рядами. В каждом ряду по шесть талрепов, которые находятся в узлах сопряжения горизонтальных и вертикальных стержней боковых стенок, изготовленных из трубы профильной 100×100×6.

Опорой блока является пространственная ферма высотой 500 мм,

которая образована шестью продольными плоскими фермами (рис. 1,а) и десятью поперечными плоскими фермами (рис. 1,б), изготовленными из трубы профильной $100 \times 100 \times 6$. Все лонжероны и поперечины днища лежат на стержнях верхнего пояса пространственной фермы.



*Рис. 1. Элементы пространственной фермы:
а – продольная ферма; б – поперечная ферма*

При кинематическом анализе технологической системы используется следующая матричная зависимость определения вектора внутренних узловых сил в общей системе координат $X^0Y^0Z^0$ [1, 2]:

$$\{S_k^0\} = [K_k^0]A[(A)^T[K_k^0]A]^{-1}\{P^0\} = [K_k^0]A\{Z^0\},$$

где $\{S_k^0\}$ – вектор внутренних узловых сил конструкции, состоящий из блоков (клеток) векторов $\{S_r^0\}$ внутренних узловых сил КЭ; $[K_k^0]$ – квазидиагональная матрица жесткости конструкции, состоящая из блоков матриц $[K_r^0]$ жесткости КЭ в общей системе координат; $[A]$ – матрица соответствий (связи узлов) конструкции, состоящая из блоков матриц $[A_r]$ соответствий КЭ; $\{P^0\}$ – вектор внешних узловых сил (заданной нагрузки) конструкции в общей системе координат; $\{Z^0\}$ – вектор узловых перемещений конструкции.

Конструкция блока симметрична по продольной оси и по поперечной, а также симметрично расположены опоры и действующая нагрузка. Исследования напряженного и деформированного состояния выполнены на одной четвертой ее части с реализацией условий симметрии.

Расчетная схема представляет собой подкрепленную коробчатую оболочку. Конечно-элементная модель четвертой части образована 7011 прямоугольными КЭ оболочки и 870 пространственными балочными КЭ и содержит 7172 узла. В узлах КЭ шесть степеней свободы.

Система разрешающих линейных алгебраических уравнений равновесия задачи состоит из 43032 уравнений. Модель блока представлена на рис. 2, где более толстые линии – основные стержни каркаса из трубы профильной $100 \times 100 \times 6$, тонкие – вспомогательные стержни из трубы профильной $60 \times 60 \times 3,5$. Точками на расчетной схеме обозначены узлы, в которых расположены талрепы.

Так как сетка прямоугольных КЭ панелей днищ одинаковая, то одинаковы ширина половины ленты матрицы жесткости конструкции и

минимально необходимый объем оперативной памяти ЭВМ для решения разрешающей системы уравнений равновесия. 90 тонн СОЖ, заливаемой в емкость, приводится к равномерной нагрузке $q = 7,5$ МПа, действующей на днище, и меняется на четыре ступенчато-переменные нагрузки по площади следующим образом:

$q = 6,7$ МПа от днища до высоты 1500 мм, толщина листа 8 мм,

$q = 5,0$ МПа от 1500 мм до 3500 мм, толщина листа 6 мм,

$q = 3,0$ МПа от 3500 мм до 5500 мм, толщина листа 5 мм,

$q = 1,0$ МПа от 5500 мм до 7500 мм, толщина листа 3 мм.

Условия закрепления модели конструкции реализованы следующим образом:

- угловые и линейные связи во всех узлах стержневых КЭ днища;
- линейные связи в узлах вдоль талрепов;
- линейные связи во всех узлах по направлениям, перпендикулярным срезам симметрии днища, боковой и задней стенок;
- угловые связи во всех узлах по срезам симметрии днища, боковой и задней стенок.

Последние два условия связей реализуют условия симметрии четвертой части конструкции.

Выполненный расчет проекта блока [3] показал, что максимальные линейные перемещения из плоскости панелей стенок расположены в узлах прямоугольных КЭ посередине боковой стенки, а по ее высоте – в верхней и средней части, соответственно составляют 6,8–7,1 мм.

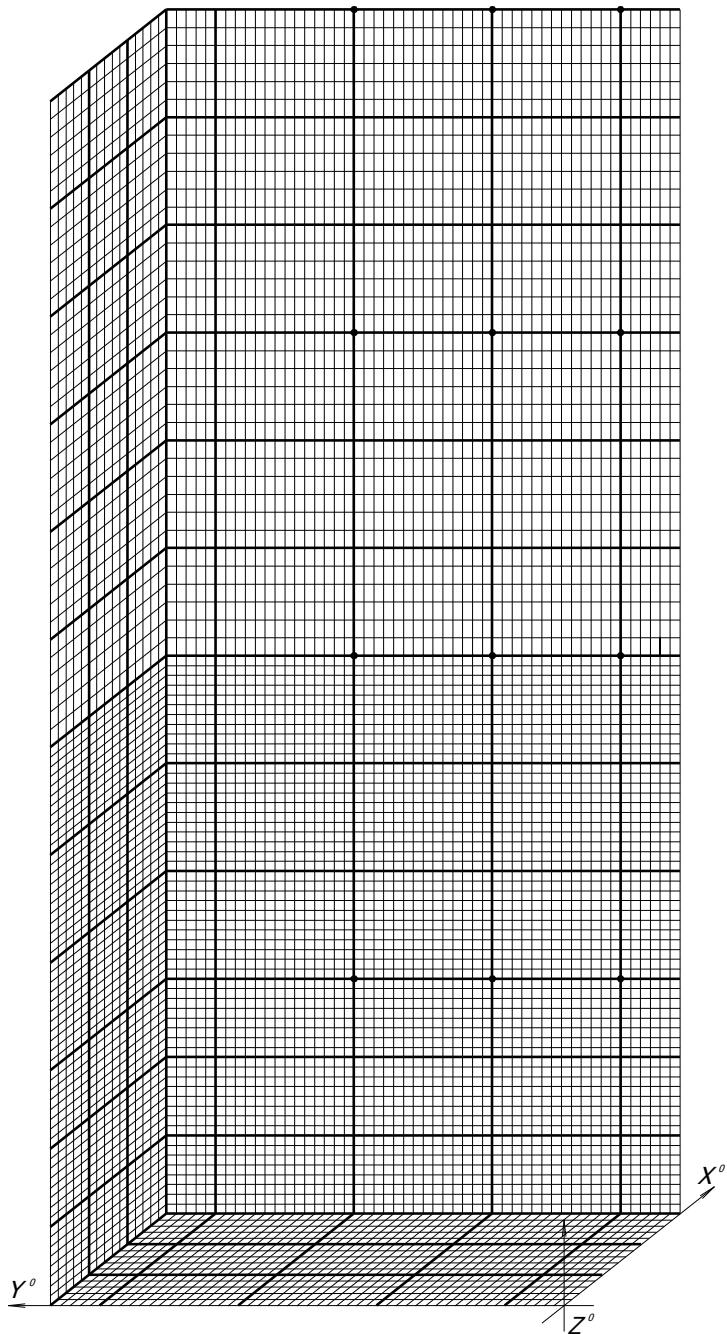


Рис. 2. Конечно-элементная модель

Максимальные нормальные напряжения от 80,8 до 81,7 МПа в прямоугольных КЭ оболочки, расположенных рядом с узлами талрепов боковой стенки.

Максимальные нормальные напряжения в балочных КЭ (151–166 МПа), моделирующих вертикальные стержни, расположены в средней части боковой стенки на высоте от днища 1500–3500 мм в узлах расположения талрепов нижнего и среднего рядов.

По результатам расчета проекта емкости можно сделать следующие выводы:

1. Лонжероны и поперечины днища не воспринимают какую-либо нагрузку, так как при установке блока ИТС-90 на раму они лежат на стержнях этой рамы. Лонжероны и поперечины днища не оказывают влияние на напряженное и деформированное состояния стержневого каркаса панелей боковой и задней стенок.

2. Наибольшие значения напряженно-деформированного состояния в блоке ИТС-90 расположены посередине его боковой стенки на высоте 1500 мм – 3500 мм от днища (80,8–81,7 МПа). При этом значения максимальных напряжений в балочных КЭ в два раза превышают значения напряжений в прямоугольных КЭ.

В связи с этим выполнены расчеты вариантов конструкции с толщиной листового металла 6 мм на днище и стенках на высоте до 1500 мм от днища:

1. Основные стержни – труба профильная 120×120×8, вспомогательные стержни – труба профильная 80×80×4.

2. Основные и вспомогательные стержни – труба профильная 100×100×6.

3. Основные стержни – труба профильная 100×100×6, вспомогательные стержни – труба профильная 80×80×4.

4. Основные стержни – труба профильная 100×100×6, вспомогательные стержни – труба профильная 60×60×3,5.

В табл. 1, 2 приведены максимальные значения нормальных напряжений и прогибов в стержнях каркаса, панелях днища, боковой и задней стенок для рассмотренных моделей проекта и приведенных вариантов конструкции блока ИТС-90.

Таблица 1

Максимальные значения напряженного состояния

Варианты конструкции	Нормальные напряжения, МПа			
	Стержни каркаса	Днище	Боковая стенка	Задняя стенка
Проект	166	73	82	74
I (120×120; 80×80)	99	98	102	61
II (100×100; 100×100)	158	104	110	76
III (100×100; 80×80)	163	115	118	82
IV (100×100; 60×60)	168	120	121	84

Таблица 2
Максимальные значения деформированного состояния

Варианты конструкции	Прогибы из плоскости панелей, мм			
	Стержни каркаса	Днище	Боковая стенка	Задняя стенка
Проект	3,8	6,3	7,1	6,4
I (120×120; 80×80)	3,4	6,5	7,2	6,5
II (100×100; 100×100)	3,6	6,5	7,3	6,6
III (100×100; 80×80)	3,6	6,7	7,3	6,6
IV (100×100; 60×60)	3,8	6,9	7,4	6,7

Расчеты вариантов моделей показали возможность использования листового металла 6 мм на днище и стенках на высоте до 1500 мм от днища, и что наиболее приемлема по напряженному и деформированному состоянию и массе конструкция проекта стержневого каркаса.

По результатам сравнительных расчетов вариантов конструкций ИТС-90 предложены следующие рекомендации:

1. При установке ИТС-90 на раму рассмотреть техническую возможность изготовления и монтажа блока без внутренних лонжеронов и поперечин на его днище.
2. При необходимости в конструкции внутренних лонжеронов и поперечин на днище заменить трубу профильную 100×100×6 на трубу профильную 60×60×3,5 для всех внутренних поперечин и лонжеронов днища.
3. Днище и стенки на высоте до 1500 мм от днища изготавливать из листового металла толщиной 6 мм.

Предложенная конструкция блока интегрированной технологической системы позволила уменьшить ее металлоемкость на 1115 кг.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / Пер. с англ. под ред. Б. Е. Победри. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
2. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов. Справочник / В. И. Мяченков, [и др.] – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.
3. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013617904. Статика коробчатых и цилиндрических конструкций, подкрепленных тонкостенными стержнями / Чернов С. А., Черный А. Н. Заявитель и правообладатель Ульян. гос. техн. ун-т. № 2013615766; заявл. 09.07.2013; зарегистр. в Реестре программ для ЭВМ 27.08.2013.

A. Ф. Ширялкин (г. Ульяновск)

КОНЦЕПТУЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ МЕТОДИКИ КЛАССИФИКАЦИИ И КОДИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ О ДЕТАЛИ

Рассмотрены аспекты систематизации машиностроительных производственных сред, при создании автоматизированной системы технической подготовки и управления производством. Разработка методики классификации и кодирования информации о детали основана на последовательной реализации принципов информационного отбора.

В рамках генетического подхода [1] структурное построение информации о детали в производственно-технологической среде предприятия предполагает ее последовательное рассмотрение в соответствии с эволюцией производственного процесса по этапам жизненного цикла изделия (ЖЦИ), в основном касаясь поддержки его 4-х этапов (выделено), рис. 1.



Рис.1. Информационная модель жизненного цикла продукции

Указанные 4 этапа представляют сущность технической подготовки производства (ТeПП), а последние 3 – технологической подготовки производства (ТПП). Поэтому процесс построения информации,

реализованный в методике классификации и кодирования информации о детали (МККД) начинается с классификации самых общих свойств детали, позволяющих поддерживать решение организационно-технологических задач на начальных этапах ЖЦИ. Данный вариант МККД включает правила и порядок классификации и кодирования информации о детали 1-го и 2-го уровня.

Методика классификации и кодирования разработана в рамках реализации комплексной автоматизированной системы технической подготовки и управления производством (КАС ТeПУП) [2] для формирования базы данных (БД) информации о детали. Эта процедура является первой стадией разработки информационно-аналитической системы конструкторско-технологического назначения (ИАС КТН), которая практически организует и использует структуру информации БД. При этом технологическая проработка и унификация проводится параллельно с созданием названной структуры и углубляется по мере разработки необходимого программно-информационного обеспечения.

Вторая стадия – проведение более тонкой структуризации информационного производственного пространства с одновременной организацией обратной связи с верхними управляющими уровнями, т. е. разработка системы автоматизированного расчета трудоемкости (САРТ). Третья – разработка системы оперативно-календарного планирования (АС ОКП) с ежесуточной выдачей четкого и гибкого графика запуска заготовок деталей машин в производство. Эта система – результат информационного взаимодействия и слияния двух предыдущих, она логически заканчивает процесс первичной информационной структуризации производства в рамках КАС ТeПУП. Обобщенная функциональная схема реализации первого этапа разработки комплексной системы приведен на рис. 2.

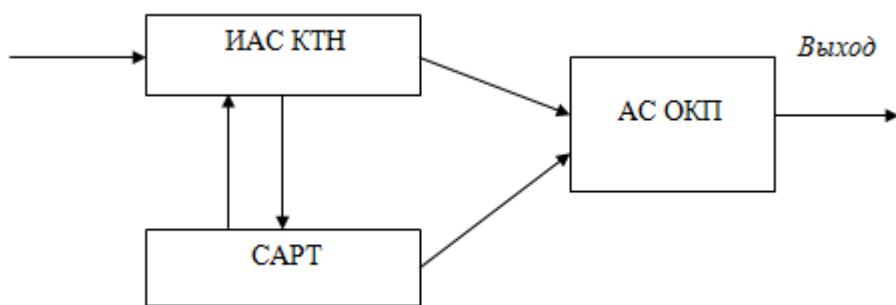


Рис. 2. Обобщенная функциональная схема КАС ТeПУП

Структура базы данных строится на базе классификационной системой информации об объектах производства (КС), адекватной структуре рассматриваемого производства. Ядро указанной системы реализуется с помощью многоуровневого элементно-технологического классификатора деталей машин (МЭТК). Исходной идеей при построении

данного классификатора является применение принципа технологической геометризации, т. е. рассмотрения геометрическо-конструктивных элементов детали на фоне изменяющейся динамики технологии их изготовления. Заметим, что этот принцип является ведущим в плеяде принципов информационного отбора, рассматриваемых ниже.

Методика классификации и кодирования информации о детали предназначена для получения оптимизированного набора исходных данных в целях проведения качественной технической подготовки и эффективного управления производством на различных этапах (уровнях) развития производственного процесса.

Цели, преследуемые путем реализации методики на этапах ТПП:

- получение оптимизированного набора исходных данных для проведения системно-организованной технологической подготовки производства;
- информационная поддержка производственно-технологической среды предприятия при организации наполнении и ведении БД (БЗ);
- поддержка и развитие в специалисте - технологе системно-технологического сознания

Основным документом, реализующим и узаконивающим первичный этап подготовки информации является «Ведомость информации о детали» (ВИД) (приложение 1), который также является исходным для системы конструкторско-технологической информации при решении задач технической подготовки производства. В этом варианте информация ВИД предназначена для автоматизированного решения следующих задач ТeПП:

1. конструкторского поиска деталей – аналогов при проектировании новых изделий;
2. технологической проработки деталей и их унификации;
3. поиска ТП – аналогов для их последующей корректировки при проектировании новых техпроцессов;
4. группирования деталей по конструктивно технологическим признакам;
5. проведения расцеховки деталей по подразделениям предприятия;
6. выбор и расчет количества оборудования, в том числе станков с ЧПУ;
7. выбора деталей для их обработки на станках с ЧПУ;
8. укрупненного расчета трудоемкости обработки деталей;
9. укрупненного расчета трудоемкости изготовления прессформ для литья;
10. укрупненной оценки технологической жесткости деталей
11. присвоение четких системных наименований;
12. разработка трехмерных видовых моделей (представителей групп) деталей для создания системного определителя и модульной основы для проектирования новых деталей;
13. присвоение четких системных наименований видовым моделям и деталям;

14. расчет загрузки цехов и участков;
15. проектирование планировок цехов и участков;
16. выбор и расчет количества инструмента и приспособлений;
17. выбор и расчет количества заготовок
18. формирование маршрута обработки групп и единичных деталей;
19. информационной поддержки при проектировании ТП обработки деталей;
20. автоматизированного расчета трудоемкости обработки деталей; (САРТ); а также в виде информационной основы для разработки логистических систем:
21. учета и планирования инструментообеспечения;
22. учета и планирования материалаобеспечения.

Классифицированная и закодированная информация о детали 1-го уровня предполагает поддержку решения первых 10 задач.

Отличительной особенностью информационной системы ВИД является возможность ее использования как в неавтоматизированном, "ручном" режиме, так и производить автоматизированное кодирование путем интерактивного диалога пользователя с ЭВМ. В этом случае ВИД используется как удобный промежуточный документ.

Удобству и простоте его использования способствует нахождение большинства классификационно-кодовых таблиц на поле бланка. Еще одним преимуществом, отличающим данный вид документа, является то, что с его помощью можно осуществить первый этап предварительного группирования, как для ручного, так и для автоматизированного группирования. В целом отметим, что ВИД есть как раз тот документ, использование которого максимально приближает работу технолога-систематика к режиму реального времени, что и определяет максимальную эффективность системной видовой технологии.

Заметим, что данный набор организационно-технологических данных о детали также является оптимизированным. Он необходим и достаточен для решения одной из самых сложных задач ТПП – расчета трудоемкости обработки детали на данном (1-м, оценочном) системно-технологическом уровне представления информации. Способ представления указанной информации также максимально прост, что, по сравнению с известными КС, значительно сокращает время классификации и кодирования деталей. Например, в сравнении с ТКД [3], все указанные признаки в табл. 5.3 представлены не в кодовом, а в истинном виде, что освобождает от необходимости потери времени на поиск кодовых таблиц, а также затрат ментальной энергии на операцию кодирования. Практика показывает, что время кодирования и ввода при этом сокращается в 2 – 3 раза и составляет в среднем 5 – 15 минут в зависимости от сложности детали. Следует также заметить, текстовый объем самой методики кодирования, по сравнению с ТКД, сокращается примерно в 10 раз.

Научные основы и принципы классификации и кодирования

Важным свойством любой системы, принципом ее действия, во многом определяющим качество функционирования, является *эмерджентность*. Это свойство означает принципиальную несводимость свойств системы к простой сумме свойств ее составных частей и невыводимость из последнего свойств целого объекта. Такое явление объясняется дополнительным влиянием связей, от которых зависит эффективность и качество функционирования системы.

Заметим, что для достижения эффективности и качества классификации, а значит и ее естественности таких связей должно быть как можно больше. В целом естественная система по количеству и свойствам связей ее объектов должна удовлетворять критерию Любищева: «... естественной следует назвать такую, где количество свойств объекта, поставленных в функциональную связь с его положением в системе, является максимальным» [2].

Для эффективного функционирования человека-машинной системы, которое и представляет производственно-технологическая среда авиастроительного производства, необходимо четкое распределение системно-информационных связей между человеком и машиной, в первую очередь на этапе технологической подготовки производства. На этом этапе к конструкторской информации о детали присоединяется информация о других элементах технологической системы (ТС) (заготовок, оборудования, оснастки и инструмента), многократно умножая ее количество. Это скачкообразно усложняет производственную систему и делает ее многомерной и многоуровневой. Вот поэтому ТПП является едва ли не самым узким местом производственного процесса, существенно замедляющим его ход, особенно в условиях внедрения новой техники.

Указанные факторы в первую очередь требует правильного решения вопроса по систематизации и автоматизации процесса проектирования ТП как взаимодействия указанных элементов ТС. При этом решающую роль придается процессу подготовки систематизированной информации, необходимой для автоматизации решения задач ТПП. Поэтому следует говорить о создании классификации вышеуказанных компонентов ТС (заготовок, оборудования, оснастки и инструмента), как и о разработке других классификаторов элементов производственно-технологической среды, в том числе:

- Классификатор технологического оборудования;
- Классификатор станочных приспособлений;
- Классификатор слесарного инструмента;
- Классификатор измерительного инструмента;
- Классификатор технологических операций и переходов;
- Классификатор нормативно-технической документации;

- Классификатор материалов и сортаментов;
- Классификатор стандартных изделий;
- Классификатор покупных изделий.
- Классификатор унифицированных деталей;
- Классификатор покрытий.

Однако все они должны исходить из классификатора информации о деталях основного производства – позвоночного столба всей производственной системы. Этот процесс и реализует данная методика.

Для качественной реализации процесса классификации и кодирования как элемента системной ТПП целесообразно начать сверху, в частности, овладеть принципами и приемами системного технологического мышления. Поэтому сопутствующей целью для правильной работы с методикой является овладение «системным технологическим сознанием», т. е использования при классификации и кодировании постоянной рефлексии, своего рода «обратной связи», ориентированной на соответствующие данному этапу изготовления детали технологические методы. Концептуальные основания для разработки и использования таких методов исходит из закона информационного отбора [3]. Такое видение рассматриваемого признака детали в иерархии естественно-классификационных связей придает надежную опору четкой реализации этого процесса, способствуя правильности (естественности) кодового описания и минимизируя эффект разнокодирования. При этом полнее реализуются принципы информационного отбора[2]:

- *принцип технологической геометризации (ПТГ);*
- *принцип приоритетности применения большего размера (ПБР);*
- *принцип информационной преемственности (ПИП).*

Информация о деталях основного производства, реализована в виде многоуровневого элементно-технологической классификатора (МЭТК) [2]. Данные о деталях структурированные в этой системе отвечают за их формообразование, т. е. количество, качество и взаиморасположение всех ее конструктивно-технологических элементов (КТЭ). При этом форма детали определяется как взаимосвязанная совокупность КТЭ с обязательным наличием хотя бы одного основного элемента (ОЭ) и вероятным присутствием дополнительных (ДЭ) и вспомогательных элементов. Главным, определяющим элементом формы детали является ее ОЭ. Классификационные группировки – таксоны, наиболее обобщенно определяющие визуально-представимую форму КТЭ – классы деталей (вращения, невращения, модульные) [2, 4]. Далее информация о детали разделяется еще на ряд таксономических категорий (подкласс, надсемейство, семейство, род). Основная таксономическая категория системы элементов деталей машин – это *Вид*, который конкретизируя форму элементов, составляющих деталь, дает ей четкое визуальное

представление. Вместе с тем, она доводит степень дискретности информационного описания детали до уровня различимости, позволяющего достичь конструкторскому описанию КТЭ соответствия компонентам маршрутной технологии их обработки. Обобщенный процесс развития поуровневой структуры соответствия системы КТЭ деталей компонентам технологической системы их обработки показан в табл. 1.

Таблица 1
Основные таксоны системы деталей их основных элементов

Название таксона	Определение таксона
Тип	наивысшая таксономическая категория различающая детали по сложности исходя из состава ОЭ конкретных классов и их технологической значимости в общей форме детали
Подтип	одна из высших таксономических категорий различающая элементы по величине их технологической значимости при рассмотрении пространственного положения отдельных ОЭ
Класс	одна из высших таксономических категорий системы ОЭ деталей, различающая их по изначальной визуально-представимой форме, соответствующей определенному виду технологической обработки и определяющей присущий этому элементу вид работы или тип оборудования
Подкласс	одна из высших таксономическая категорий системы деталей и ОЭ, различающая их по признакам, определяющим вероятность их обработки на определенных подтипах оборудования данного типа.
Надсемейство	надвидовая таксономическая единица системы деталей и ОЭ, включающих в себя совокупность их видов, определяющих схожую маршрутную схему обработки по характеристике оборудования.
Семейство	надвидовая таксономическая единица системы деталей и ОЭ, включающих в себя совокупность их видов, уточняющих схожую маршрутную схему обработки и имеющих единый тип СТО.
Подсемейство	надвидовая таксономическая единица системы деталей и ОЭ, включающих в себя совокупность их видов, уточняющих схожую маршрутную схему обработки по характеристике жесткости детали.
Род	размерное закрепление общих границ поверхности путем введения основных размеров -L, Dd (L, B, H, h, t), расчета отношения L/D, (L/ B), при этом уточняется схема маршрута обработки ОЭ, типоразмер оборудования и СТО.

ВИД	основная структурная и классификационная таксономическая) единица системы элементов деталей машин, уровень дискретности информационного описания в которой соответствует маршрутной технологии обработки этих элементов
-----	---

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ширялкин А. Ф. О качестве автоматизации авиастроительных производственных сред при создании PLM // Вестник УлГТУ. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – № 1. – С. 50-53.
2. Ширялкин А. Ф. Основы формирования многоуровневых классификаций естественного типа для создания эффективных производственных сред в машиностроении. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – 298 с.
3. Кудрин Б. И. Введение в технетику. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та, 1993. – 552 с.
4. Ширялкин А. Ф., Куприн П. Н., Василенко М. А. Разработка системы категориальных рядов признаков конструктивно-технологических элементов деталей // Автоматизация и современные технологии, 2007. – № 10. – С. 3-10.

A. Ф. Ширялкин, А. Н. Угасин (г. Ульяновск)

О ПОРЯДКЕ КОДИРОВАНИЯ И ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКОМ АППАРАТЕ СИСТЕМЫ КЛАССИФИКАЦИИ И ПОМЭТК

Рассмотрены аспекты систематизации машиностроительных производственных сред, при создании автоматизированной системы технической подготовки и управления производством. Разработка методики классификации и кодирования информации о детали основана на последовательной реализации принципов информационного отбора.

Классификация, кодирование и ведение информации о детали с помощью системы МЭТК может осуществляться в двух режимах: «ручном» и автоматизированном. При «ручном» режиме информация заносится в «Ведомость информации о детали» (ВИД) [1].

Автоматизированное кодирование проводится путем интерактивного диалога пользователя и ЭВМ в системе ИАС КТН. Классификацию и кодирование деталей предпочтительно проводит технолог соответствующего производственного подразделения (цеха, участка) или специально обученный технолог-систематик. Общий порядок классификации заключается в следующем:

- деталь мысленно располагается в положении первоначальной обработки, (после обработки баз в заготовительном цехе);

- вводятся конструктивно-технологические данные о детали, которые, в зависимости от уровня представления показаны в ведомости информации о детали;

- кодируется подкласс детали с помощью табл. 1 и заносится в соответствующие графы ВИД;

- при наличии альтернативы отнесения детали к тому или иному подклассу, следует кодировать более простым (подкласс элементарных деталей);

Для правильного отнесения рассматриваемой детали к той или иной таксономической категории (класс, подкласс и т. д.) необходимо уяснить терминологический аппарат системы. При этом форма детали определяется как взаимосвязанная совокупность конструктивно-технологического элемента (КТЭ) [1] с обязательным наличием хотя бы одного основного элемента (ОЭ) и вероятным присутствием дополнительных и вспомогательных элементов. Главным определяющим элементом формы детали является ее ОЭ. Заметим, что детали могут состоять и из одного ОЭ, поэтому таксономия деталей их основных элементов совпадают. Например, таксон, наиболее обобщенно определяющий визуально-представимую форму детали или ее ОЭ - класс (см. табл. 1).

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ВЫСПИХ ТАКСОНОВ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

(Исходная структура классификации)

Таблица 1

Типы	элементарные (из одного ОЭ)		однородно-комбинированные (из 2-х и более ОЭ одного класса)		неоднородно-комбинированные (из двух и более ОЭ разных классов)		
	П о д т и п ы	Классы деталей и их основных элементов	С совмещенными осьми, при значительном отличии основных размеров ОЭ (соосные ОЭ)	с одной прямой центральной продольной осью	с двумя или нескользкими параллельными пряммыми осями под углом	с одной или нескользкими изогнутыми осями	3 вида комбинаций ОЭ двух разных классов
П о д к л а с с ы							
ВРАЩЕНИЯ	круглые, (диски, шестерни, колпца, валы, штоки и др.)	БП	круглые (D1/D2 > 1,6) - (диски, шестерни, колпаки, листы, плиты и др.)	экспонентриковые (экспентрики, кривошипы, коленвала)	разветвленные вращения (угольники, тройники, крестовины)	изогнутыми осами (пружины, индукторы, змевики и др.)	3 вида комбинаций ОЭ двух разных классов
НЕВРАЩЕНИЯ	плоско-комбинированные (планки, листы, плиты и др.)	НП	плоско-комбинированные профильные (планки, листы, плиты, швеллеры и др. НО)	разветвленные профильные (уголки, тавры, швеллеры и др. НР)	плоскообразные невращения (фланцы, корпушки, кронштейны)	изогнутые (фланцы, корпушки, кронштейны)	6 видов комбинаций ОЭ разных классов
КОМПЛЕКСНЫЙ (МОДУЛЬНЫЙ)	ушкообразные (ушки, вилки, бонки, хомуты)	МП	(тяги, серьги, петли и др.)	(рычаги, пластины, кулисы)	ушкообразные изогнутые	многооперационные-невращения (тяги, переключатели и т.д.)	комбинации на основе многооперационных элементов

Т.к. форма детали может определяться несколькими основными элементами одного или разных классов введем понятия типа и подтипа детали. Определим типы деталей:

Деталь элементарная – деталь, в состав которой входит только один основной элемент (вращения, невращения, модульный), соответственно, имеющая один тип основной механической обработки.

Деталь однородно-комбинированная – деталь, состоящая из 2-х или нескольких основных элементов одного класса, также имеющий один тип основной механической обработки, но вероятность нескольких операций.

Деталь неоднородно-комбинированная – деталь, состоящая из двух или нескольких элементов разных классов, соответственно, имеющий один тип основной механической обработки, а также один или несколько дополнительных.

Описанный таксон дает наиболее общие представления о детали, характеризуя ее первоначальную сложность. Для описания относительного положения основных элементов при разделении однородно-комбинированных деталей на подтипы воспользуемся понятием центральной продольной оси, как наиболее обобщенным, простым и, соответственно, наиболее удобным для данной постановки задачи.

Параллельноосная (эксцентриковая) – однородно-комбинированная деталь состоящая из двух или нескольких ОЭ одного класса, центральные оси которых расположены параллельно друг другу.

Разветвленная – однородно-комбинированная деталь, состоящая из двух и более ОЭ одного класса, оси которых находятся под некоторым углом относительно друг друга.

При разделении на подтипы неоднородно-комбинированных деталей учитывается как количество входящих классов, так и относительные размеры каждого ОЭ. Элемент большего размера, согласно принципа ПБР, называется главным и при кодировании указывается первым. Например, неоднородно-комбинированные детали вращения-невращения, см. табл. 1.

Тогда целесообразно тем деталям, формы которых определяются ОЭ соответствующего класса, дать название этого таксона. Например, детали класса вращения имеет в качестве основного элемент класса вращения. Заметим, что порядок расположения ОЭ в коде детали определяет и порядок (маршрут) ее обработки. Дадим определение классам деталей.

Деталь - тело вращения (*деталь вращения*) – деталь, состоящая из одного или нескольких основных элементов вращения и вероятным присутствием дополнительных и вспомогательных элементов.

Деталь - тело невращения (*деталь невращения*) – деталь, состоящая из одного или нескольких основных элементов невращения и вероятным присутствием дополнительных и вспомогательных элементов.

Комплексной (модульной) деталью называется деталь, состоящая из одного или нескольких модулей основных элементов. Форма модульных деталей, в общем случае представляет собой комбинацию поверхностей вращения и невращения и исторически связана с развитием механических систем управления.

Модулем ОЭ следует считать некоторую совокупность ОЭ, связанную общей конструкцией, определяющей ее общее функциональное назначение.

Подкласс детали можно определить в виде некоторой совокупности сведений о ее классе и подтипе и соответственно кодировать двумя знаками. Эта информация является результатом взаимодействия двух ее видов, по существу представляя матричную ячейку, вбирающую в себя наиболее обобщенную первичную информацию о форме детали. Приведем определения подклассов (таблица 2).

Таблица 2

Подклассы элементарных и однородно-комбинированных деталей

N n/n	Наименование подкласса	Системное определение подкласса детали на основе количества и качества форм ОЭ
Детали класса вращения:		
1	Круглая (элементарная деталь вращения)	деталь, которая кроме дополнительных и вспомогательных элементов, состоит из одного основного элемента вращения.
2	Эксцентриковая (параллельноосная деталь вращения)	однородно-комбинированная деталь вращения, состоящая из двух или более ОЭ вращения, оси которых параллельны друг другу.
3	Разветвленная деталь вращения	однородно-комбинированная деталь, состоящая из ОЭ вращения, продольные оси которых находятся под некоторыми углами друг другу.
Детали класса невращения:		
1	Деталь плоскообразная	Элементарная или однородно-комбинированная деталь невращения, форма которой образована одним или несколькими ОЭ невращения, лежащими в одной плоскости
2	Объемно-про- фильная (парал- льноосная де- таль невращения)	однородно-комбинированная деталь невращения, имеющая вид одного из стандартных профилей и состоящая из двух или нескольких параллельных друг другу ОЭ невращения.
3	Разветвленная деталь невращения	однородно-комбинированная деталь, состоящая ОЭ невращения, продольные оси которых находятся под некоторыми углами друг другу.

Детали класса модульных		
1	Элементарная комплексная (модульная) деталь	деталь, состоящая из одного комплексного ОЭ типа ушек, вилок и т.д.
2	Параллельноосная комплексная (модульная)	однородно-комбинированная деталь, состоящая из двух или нескольких комплексных параллельных друг другу ОЭ.
3	Разветвленная комплексная (модульная) деталь	однородно-комбинированная деталь, состоящая из комплексных элементов, продольные оси которых находятся под некоторыми углами друг другу.

В целом комбинированные детали представляют следующие образования:

Комбинированная деталь вращения – деталь, имеющая в своем составе или несколько элементов вращения (однородно-комбинированные детали вращения), или имеющая элементы другого типа, не превосходящие основные элементы по габаритам или трудоемкости обработки (неоднородно-комбинированные детали вращения).

Комбинированная деталь невращения – комбинированная деталь, имеющая в своем составе или несколько элементов невращения (однородно-комбинированные детали невращения), или имеющая элементы другого типа, не превосходящие другие элементы по габаритам или трудоемкости обработки (неоднородно-комбинированные детали невращения).

Комбинированная комплексная (модульная) деталь – комбинированная деталь, состоящая из нескольких однотипных модулей (модульные однородно-комбинированные детали) или имеющая элементы альтернативного типа, не превосходящие по габаритам или трудоемкости обработки (модульные неоднородно-комбинированные детали).

Следующими знаками кодируется надсемейство и семейство и подсемейство детали. Например, для объемно-профильных деталей, которые, в основном составляют номенклатуру авиастроительного предприятия, таковыми являются:

- первым признаком (надсемейство) будет характер наклона обрабатываемых ребер, что кардинально влияет на выбор типа оборудования;
- вторым (семейство) – параллельность боковых сторон, которая влияет на выбор типа приспособления;
- код подсемейства определяет наличие поперечных ребер и характер ребрения (сотовости);

- кодом рода является комплексная размерная характеристика технологичности детали, определяющая, в частности предварительную оценку ее жесткости;
- код вида для 1-2 уровня не кодируется;
- присутствие ТК (теоретический контур детали) обозначается цифрой его количества в чертеже.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ширялкин А. Ф. Основы формирования многоуровневых классификаций естественного типа для создания эффективных производственных сред в машиностроении. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – 298 с.
2. Ширялкин А. Ф., Угасин А. Н. Разработка системных технологий информационной поддержки этапов механообработки в авиастроении // Материалы VII Международной конференции «Стратегия качества в промышленности и образовании». – Т. 1(1). – С. 608-512. – (Varna, Bulgaria, 3 – 10 June, 2011)

А. Ф. Ширялкин, В. В. Окороков (г. Ульяновск)

О РАЗРАБОТКЕ АЛГОРИТМА РАСЦЕХОВКИ ЗАГОТОВОВОК ДЕТАЛЕЙ МАШИН ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТПП

Согласно принципу технологической геометризации для автоматизированного решения задачи расцеховки, рассматриваются характеристики фрезерного оборудования с ЧПУ и выделены классификационные признаки многоуровневого элементно-технологического классификатора для разработки алгоритма группирования при создании фрезерного участка.

Современный научно-технический прогресс связан с автоматизацией и значительным усложнением различного оборудования, применением широкой номенклатуры взаимосвязанных систем компонентов производства и материалов. При этом возрастают требования к качеству изделий и услуг. Важное значение приобретают вопросы надёжности и конкурентоспособности продукции. В таких условиях возрастает роль стандартизации, как важнейшего звена в системе управления техническим уровнем и качеством продукции на всех стадиях её жизненного цикла.

В условиях активно развивающейся рыночной экономики происходит переосмысление роли и места общетехнических и организационно-технических систем и комплексов государственных стандартов,рабатываются новые стандарты и концепции проведения работ в этой сфере. Меняются и концептуальные подходы применения методов стандартизации, систематизации и классификации для повышения эффективности и качества производства изделий, связанные с применением информационных и компьютерных технологий.

В связи с этим большую помощь могут оказать классификаторы объектов производства, которые значительно облегчают и убыстряют производственные процессы, способствуют их автоматизации, в том числе автоматизации технологической подготовки производства (ТПП). Одной из наиболее важных задач ТПП машиностроительного производства является задача расцеховки – распределении заготовок деталей машин по видам оборудования для их последующей обработки.

Для автоматизированного решения задачи расцеховки, согласно принципу технологической геометризации [1] (метод по оборудованию) подробно рассмотрены характеристики фрезерного оборудования и выделены классификационные признаки многоуровневого элементно-технологического классификатора (МЭТК) для разработки алгоритма

группирования при создании фрезерного участка. В частности в работе рассмотрены следующие положения:

- ✓ Методы кодирования и группирования;
- ✓ Проведен сравнительный анализ классификаторов с точки зрения выбора наиболее подходящего для решения задачи расцеховки;
- ✓ Проведен анализ принципов и методов построения технологического процесса на машиностроительном предприятии, а также анализ фрезерного оборудования;
- ✓ Проанализированы типовые технологические процессы на фрезерных станках;
- ✓ Проведен анализ классификатора МЭТК на предмет автоматизации ТПП на фрезерном участке;
- ✓ Изучена методика кодирования и классификации деталей по МЭТК;
- ✓ Проанализирована заданная номенклатура деталей;
- ✓ Закодированы и сгруппированы детали;
- ✓ Рассмотрены различные виды фрезерных станков, в том числе станки с ЧПУ.

Методика классификации и кодирования информации о детали МЭТК предназначена для получения оптимизированного набора исходных данных в целях проведения качественной технической подготовки и эффективного управления производством на различных этапах (уровнях) развития производственного процесса.

Основным документом, реализующим первичный этап подготовки информации является «Ведомость информации о детали» (ВИД) (рис.1), который также является исходным для системы конструкторско-технологической информации при решении задач технической подготовки производства (ТеПП). Форма ВИД предназначена для описания исходных данных при автоматизированном решении задач ТеПП, в том числе следующих задач 1-го уровня:

1. конструкторского поиска деталей – аналогов при проектировании новых изделий;
2. технологической проработки деталей и их унификации;
3. поиска ТП – аналогов для их последующей корректировки при проектировании новых техпроцессов;
4. группирования деталей по конструктивно технологическим признакам;
5. проведения расцеховки деталей по подразделениям предприятия;
6. выбор и расчет количества оборудования, в том числе станков с ЧПУ;
7. выбора деталей для их обработки на станках с ЧПУ;
8. укрупненного расчета трудоемкости обработки деталей;
9. расчет загрузки цехов и участков;
10. проектирование планировок цехов и участков;
11. выбор и расчет количества заготовок.

ВЕДОМОСТЬ ИНФОРМАЦИИ ДЕТАЛИ

вид

Код основных элементов (род детали)												Код дополнительных элементов (ДЭ) 3-й знак - количества ДЭ левого плюсома											
Круглая (К)												Отверстия (О)											
На			Цилиндр			Кони			Ради			Фа			Нарп			Применяющиеся			Направляющие		
№ п/п	глаз	ступ	чек	чек	чек	кон	кон	кон	м	м	м	глаз	ступ	зенк	шко	кони	кони	трап	трап	трап	трап	трап	трап
Н.	Г	С				К	Р	Ф	П	П	П	1	2..3	3	II	К	К						
Не	Плоско-параллел.											Резьба (Р) Накидка (Н)											
№ п/п	глаз	ступ	чек	чек	чек	кон	кон	кон	м	м	м	Резьба (Р) Накидка (Н)											
Н.	Г	С				К	Р	Ф	П	П	П	Мер	трап	трап	трап	трап	трап	трап	трап	трап	трап	трап	трап
Не	Плоско-комбинированное (П)											М1	Т	Д	(N)								
№ п/п	глаз	ступ	чек	чек	чек	кон	кон	кон	м	м	м	Канавки наружные (Н)											
Н.	Г	С				К	Р	Ф	П	П	П	Лыски (Л)											
Вид дополнительного сечения обечайко-профильн. дрт.												Лыски (Л)											
Утолож	тв	швеллер	швеллер	швеллер	швеллер	креп	з-	креп	шт	шт	шт	Лыски (Л)											
У.	Т	Ш	Д	К	З	Ко	П	П	НС	НС	НС	Лыски (Л)											
Под												1	2	3...	4	ост кром	30	45	75	125	175	225	275
Клас												Уступы (У) План (П),											
С												План (П)	План (П)	План (П)	План (П)	План (П)	План (П)	План (П)	План (П)	План (П)	План (П)	План (П)	План (П)
Се-												Размы	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р
Мей-												Размы	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р
ство																							
Род												У											
Общая информация о детали												Основные элементы											
№ п/п	№ черт- тка	Наим.	К	Габариты	В	Мар- ка мат. го р.	ОЭ	ОЭ	Общ.	Код	Размеры	Дополнительные элементы											
			ол на из л.	L	B	H(d)	(D)			ДЭ	ДЭ	Груд	Груд	Груд	Груд	Груд	Груд	Груд	Груд	Груд	Груд	Груд	Груд
1	47601.	Пояс	884	85	40					Д16	4.1	C8											
	02021	верхний																					
2	71.000	Профиль	944	45	25					Д16	1.1	C8											
	02012																						
	60.001																						

Рис. 1. Пример группировки объемно-профильных деталей в форме ВИД, УГОЛКИ.

Удобству и простоте его использования способствует нахождение большинства классификационно-кодовых таблиц на поле бланка, а также то, что с его помощью можно осуществить первый этап предварительного группирования, как в ручном, так и для автоматизированном режиме.

Заполнение ВИД начинается с получения общего представления конструктивно-технологической форме детали в виде эскиза. Для этого, в ручном варианте заполнения на бланке ВИД вводится эскиз детали-представителя. В автоматизированном варианте графическая информация может поступать по сети от конструкторской системе типа «Unigrafix» или другой подобной, а также часть текстовых данных (материал, заготовка и т. д.), уже имеющихся в базе.

Следующим этапом классифицируется, кодируется и вводится конструктивно-геометрические данные об общей форме группы деталей рассматриваемых в таксонах (класс и подкласс), таблица 1.

Таблица 1

Периодическая система высших таксонов деталей машин (фрагмент)

Типы	элементарные (из одного ОЭ)	однородно-комбинированные (из 2-х и более ОЭ одного класса)			
КЛАССЫ ДЕТАЛЕЙ И ИХ ОСНОВ- НЫХ ЭЛЕ- МЕНТОВ	П о д т и п ы				
	П о д к л а с с ы				
ВРАШЕ- НИЯ	круглые, (диски, шестерни, кольца, валы, штоки и др.) ВП	Круглые (D1/D2 > 1,6) - (диски, шестерни, кольца, валы, штоки и др.) ВС	эксценриковые (эксцентрики, кривошипы, коленвалы) ВО	разветвленные вращения (угольники, тройники, крестовины) ВР	круглые с изогнутыми осами (пружины, индукторы, змеевики и др.) ВИ
НЕВРА- ЩЕНИЯ	плоско-ком- бинированные (планки, листы, плиты и др.) НП	плоско- комбинир. сложные (планки, листы, плиты и др.) НС	объемно- профильные (уголки, тавры, швеллеры и др.) НО	разветвленные невращения (плоскостные, профильные) НР	невращения с изогнутыми осами НИ

Далее, в зависимости от конкретной номенклатуры и комплекса решаемых задач рассматриваются более конкретизированные таксоны (от надсемейства до рода).

Таблица 2

Наклон обрабатываемых ребер детали (надсемейство)

Прямые	Малкованные				
Отсутствие малки (прямой угол к основанию)	Открытая малка (угол с основа- нием $> 90^*$)	Закрытая малка (угол с основанием $< 90^*$)	Комбинирован- ная (открытая и закрытая)	С изменя- ющимся углом к ос- нованию	Произ- воль- ные
П	О	З	К	И	ПР

В данном исследовании использовалось 14 деталей невращения, которые были распределены на 4 группы в зависимости от своих характеристик. Пример ВИДа детали для одной из таких групп представлен на рис. 1. Все эти детали, согласно табл. 1 относятся к объемно-профильным, код НО.

Далее можно заметить, что они также относятся к немалкованным (прямой угол к основанию) и обозначаются буквой «П» (таблица 2). Это позволяет сделать вывод о том, что данный признак выбранных деталей, наиболее соответствует схеме обработки на трёхкоординатном фрезерном станке. При дальнейшей классификации определим род детали надсемейства НОП как уголки, закодировав данный признак кодом «У». Этот таксон нам необходим с точки зрения последующей унификации и типизации при проектировании приспособлений, а также применения многопозиционных наладок для обработки за одну операцию двух - четырех деталей.

При этом мы пропускаем подуровень (таксон) «семейство», который для решения данной задачи нам не нужен. Помимо этого, нам надо отделить детали длина и ширина которых, согласно предварительному анализу номенклатуры, не превышает 1000 мм, поэтому необходимо при выборе станка также обратить внимание на размер паллеты станка (для наших деталей подойдет станок с размером паллеты не менее 1000×1000 мм). Руководствуясь этими соображениями, а также другими свойствами деталей (максимальной массой, точностью обработки, материалом и др.), которые указаны ниже, мы выбираем подходящей для обработки фрезерный станок.

В целом это позволило перейти к практическому разработке алгоритма группирования деталей машин (рис. 2) для создания фрезерного

участка с помощью классификатора МЭТК и на расчёт общей трудоемкости групп деталей исходя из фонда времени изделий.

Для этого был взят трёхкоординатный горизонтально-фрезерный станок японской фирмы Mazak FH10800. Этому станку присущи следующие основные характеристики: число программируемых координат - 3, размер паллеты - 1000×1000 мм, перемещение по осям (X/Y/Z) – 1700/1400/1400 мм, быстрая подача – 40000 мм/мин.

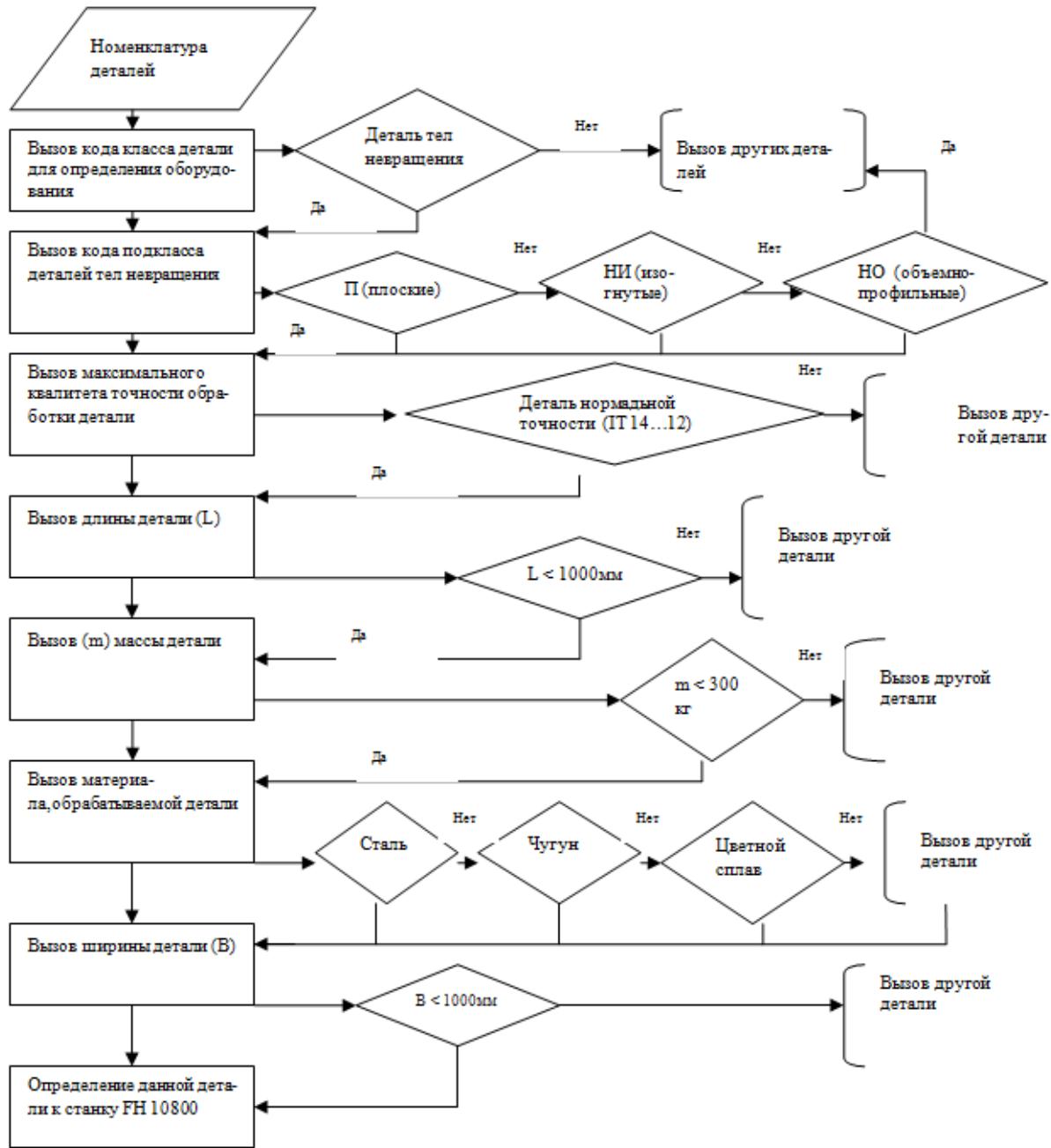


Рис. 2. Алгоритм выбора деталей тел невращения на горизонтально-фрезерному станку FH 10800 фирмы Mazak

Предварительный анализ мелкосерийного производства и классификация фрезерного станочного оборудования изготавливаемого

компанией «Mazak» показал, что наиболее соответствующими для обработки данной номенклатуры деталей является 3-х координатные станки серии FH.

Было выяснено, что при разработке алгоритма выбора деталей на фрезерный станок с ЧПУ основную роль играют такие признаки деталей, как класс, подкласс, надсемейство, размеры. На основе анализа технических характеристик выбираем горизонтально-фрезерный станок FH 10800, выбор был основан на многочисленных технических и технологических преимуществах станка, а также ввиду того, что на нём умещаются взятые для исследования детали.

И, наконец, был произведён расчёт общей укрупненной трудоемкости групп деталей исходя из фонда времени изделий. Взяв годовой фонд времени оборудования и среднюю трудоемкость деталей групп, рассчитана общая трудоемкость групп деталей. Расчёты показали, что горизонтально-фрезерный станок модели FH 10800 справляется с поставленной задачей, что свидетельствует о его рациональной загрузке.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ширялкин А. Ф. Основы формирования многоуровневых классификаций естественного типа для создания эффективных производственных сред в машиностроении. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – 298 с.
2. Мурашkin С. Л. «Технология машиностроения» в 3-х томах. – С-П.: изд. СПбГТУ, 2001.
3. Технология машиностроения: Производство деталей машин: Учеб. пособ. для вузов / Э. Л. Жуков, И. И. Козарь и др. – Высш. шк., 2003. – 295 с.

ПРОБЛЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ

- Математика занимает одно из центральных мест в общей системе образования. Эта её роль определяется глубоким богатством математических идей и результатов, накопленных человечеством за тысячи лет развития и являющихся существенной частью его культурного наследия, непрерывно расширяющимся спектром приложений математики к самым различным сторонам жизни и деятельности человека, несомненным влиянием математики на воспитание важнейших личностных качеств, её воспитательным потенциалом.

УДК 51

С. Л. Вельмисова (г. Ульяновск)

ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ «НА ДВИЖЕНИЕ»

Рассматриваются графические методы решения текстовых задач «на движение». Обнаруживается внешняя аналогия физической формулы пути $S = v \cdot t$ и геометрической формулы площади плоской фигуры $S = x \cdot y$; подобная взаимосвязь является основой решения соответствующих алгебраических задач. Так же в решениях используются графики движения объектов в различных ситуациях – пересечение траекторий движения, движение по реке с учетом скорости реки и пр.

Текстовые алгебраические задачи представляют собой традиционный раздел элементарной математики. Решение задач подобного рода способствует развитию логического мышления, сообразительности и наблюдательности, умения самостоятельно осуществлять небольшие исследования. Особое место в ряду таких задач занимают задачи, условно называемые «на движение». Система уравнений, которую необходимо составить на основании условий задачи, обычно содержит такие параметры, как пройденное расстояние, скорости движущихся тел, время движения. Обозначение тех или иных неизвестных обычно принятыми для них в физике буквами концентрирует внимание на существе задачи, делает систему уравнений более понятной, исключает ошибки, которые могут возникать из-за безликости введенных обозначений. Если не оговариваются специальные условия, то обычно движение на отдельных участках считают равномерным, повороты движущихся тел и изменение скорости при этом мгновенными.

В задачах, связанных с движением, полезно составить иллюстративный чертеж. Этот чертеж нужно сделать таким, чтобы была видна динамика движения, со всеми встречами, остановками и поворотами. Хорошо составленный чертеж позволяет понять содержание задачи. Записи некоторых физических и геометрических формул имеют аналогичный вид, например $S = vt$ и $S = ah$. Этот факт используем в решении следующей ситуации: автобус начал двигаться с ускорением $2 \frac{m}{c^2}$, затем некоторое время ехал с постоянной скоростью, потом начал тормозить с тем же ускорением и остановился через 24 секунды после начала движения. Найдем максимальную скорость автобуса и пройденный путь, при условии, что все расстояние, пройденное автобусом, в 3 раза больше расстояния, пройденного за первые 9 секунд движения. Дадим геометрическую интерпретацию данной проблеме (рис. 1).

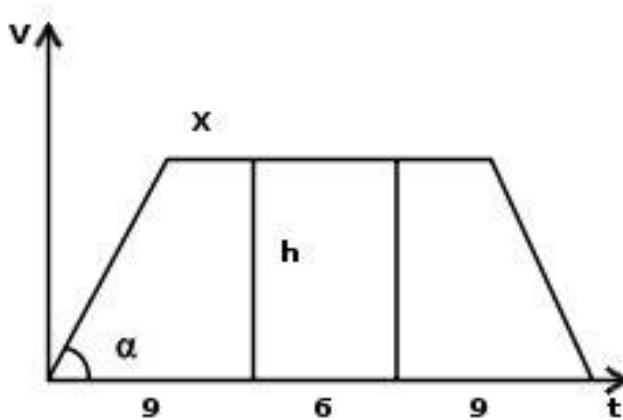


Рис. 1

Построим трапецию в осях скорость – время. По условию ускорение равно $2 \frac{m}{c^2}$, т.е.

$$\operatorname{tg} \alpha = 2, \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{9-x} \Rightarrow h = 18 - 2x, \frac{9+x}{2}h = \frac{1}{3}S, 6h = \frac{S}{3} \Rightarrow h = \frac{S}{18}.$$

Получаем $9+x=12$, $x=3$, $h=12$, максимальная скорость $v_{\max} = 12$, пройденный путь равен площади трапеции $S = 216$.

Рассмотрим задачу на встречное движение: из городов А и В навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в В на 2 часа раньше, чем велосипедист приехал в А, а встретились они через 45 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из В в А велосипедист?

Составим чертеж и используем геометрические свойства полученных построений (рис. 2). Пусть АВ – расстояние между пунктами, тогда АF и ВЕ – графики движения мотоциклиста и велосипедиста соответственно, К – место их встречи. Из двух пар подобных треугольников: $\Delta LFK \sim \Delta MAK$

и $\Delta BLK \sim \Delta EMK$ следует, что $\frac{LK}{KM} = \frac{LF}{AM}$ и $\frac{LK}{KM} = \frac{BL}{ME}$. Пусть $LF = x$,

тогда $ME = x + 2$, получаем: $\frac{x+2}{3/4} = \frac{3/4}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$. Найдем время движения

велосипедиста: $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 2 = 3$.

Используем пересечение графиков движения в подобной ситуации с другой постановкой вопроса: из пункта А в пункт В в 8:00 выехал велосипедист, а через некоторое время из В в А вышел пешеход. Велосипедист прибыл в В через 6 часов после выхода оттуда пешехода. Пешеход пришел в А в 17:00 того же дня. Скорости велосипедиста и

пешехода постоянны. Какую долю пути из А в В проехал велосипедист до его встречи с пешеходом?

Изобразим графики движения велосипедиста и пешехода в осях времени – расстояние (рис. 3). Из подобия двух треугольников с параллельными

сторонами 9 и 6 получаем $\frac{S}{AB - S} = \frac{9}{6}$ и находим $S = \frac{3}{5}AB$.

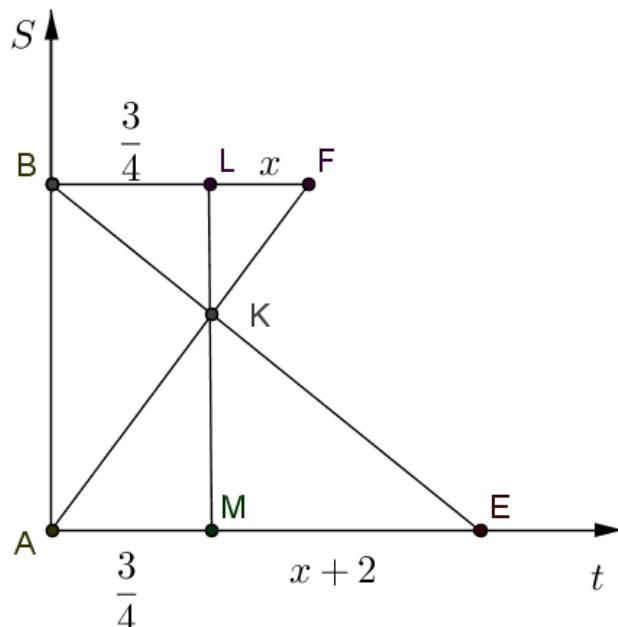


Рис. 2

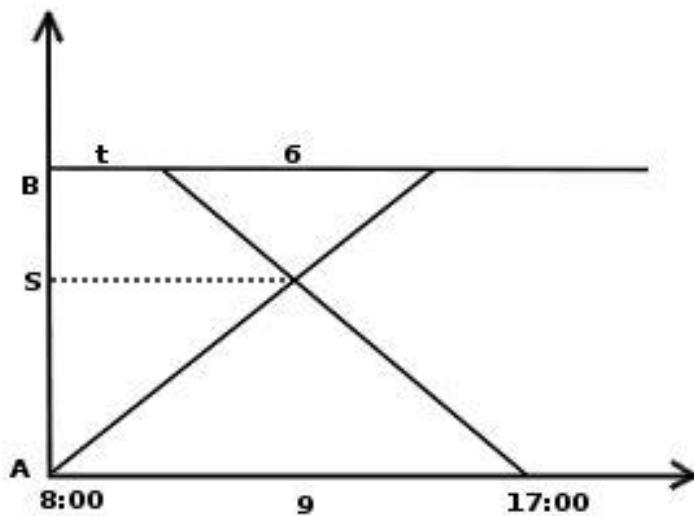


Рис. 3

При составлении текста задачи можно обыгрывать различные ситуации: пересечение путей, встречное или попутное движение и т.д. Рассмотрим такой вариант: из пунктов А и В навстречу друг другу вышли одновременно два поезда. Каждый из них двигался сначала равноускоренно (начальные скорости поездов равны нулю, ускорения

различны), а затем, достигнув некоторой скорости – равномерно. Отношения скоростей равномерного движения поездов равно $5/4$. В некоторый момент времени скорости поездов оказались равными, а один из них прошел к этому времени расстояние в $5/4$ раза больше, чем другой. В пункты В и А поезда прибыли одновременно. Какую часть пути прошел каждый из поездов к тому моменту, когда их скорости оказались равными? В решении будем считать, что оба поезда вышли из одного пункта. Построим графики, изображающие зависимость скорости от времени для каждого поезда (Рис.4). Для одного поезда графиком является ломаная OKM , для другого – OK_1M_1 . Длина пройденного пути к определенному моменту времени одним из поездов равна площади фигуры, ограниченной снизу отрезком оси t и соответствующей частью графика его скорости сверху. По условию площади трапеций $OKMN$ и OK_1M_1N равны, значит, равновелики и фигуры OKP и PK_1M_1M . Площадь $OPKL$ равна $5/4$ площади OPL по условию. Если площадь OPL равна 1, площадь OKP равна $\frac{1}{4}$. Площадь PK_1T равна $\frac{1}{16}$, поскольку $K_1T = \frac{1}{4}PL$ (по условию отношение скоростей равно $5/4$, т.е. $M_1N = \frac{5}{4}PL$), а треугольники OPL и PK_1T подобны. Из равновеликости OKP и PK_1M_1M находим площадь прямоугольника TK_1M_1M . Она равна $\frac{3}{16}$. Затем находим площади двух оставшихся прямоугольников. Весь путь равен площади $OKMN$ (или OK_1M_1N), т.е. $S = 2\frac{1}{2}$. Поскольку площади трапеции $OKPL$ и треугольника OPL соответственно равны $\frac{5}{4}$ и 1, то в момент равенства скоростей (точка Р) один поезд прошел $\frac{1}{2}$ пути, а другой – $\frac{2}{5}$.

Как видим, в решении задачи не были использованы ни уравнения, ни другие соотношения, содержащие неизвестные. Графическая интерпретация в данном случае оказалась весьма полезным способом решения.

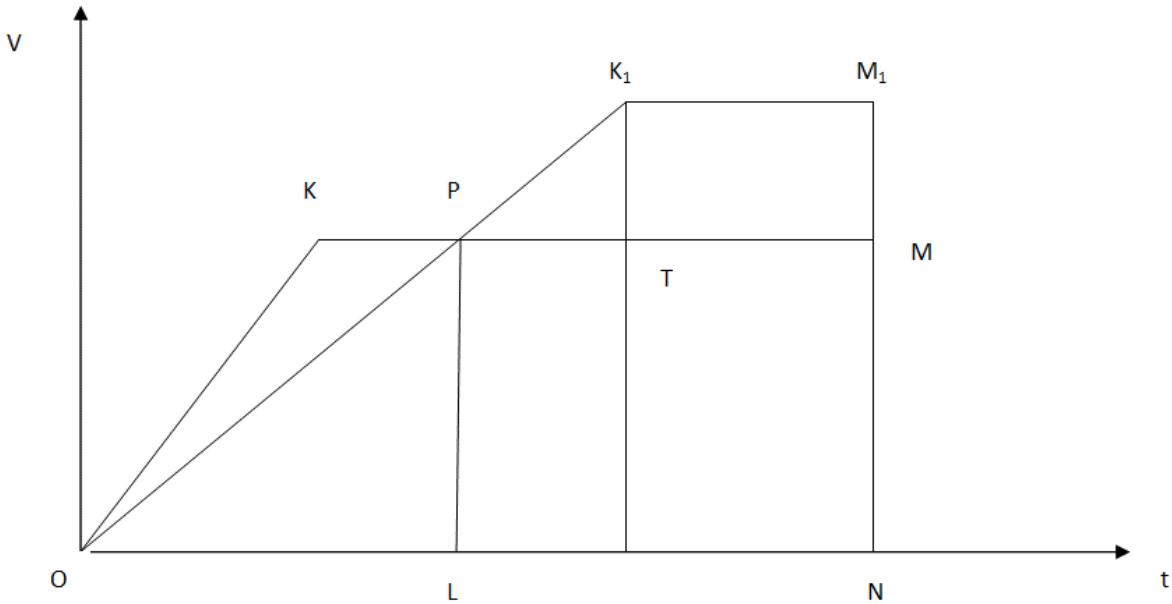


Рис. 4

В задачах на движение по реке учитывается, что скорость тела по течению w слагается из скорости в стоячей воде v плюс скорость течения реки u : $w = v + u$, а если против течения реки, то скорость равна $w = v - u$. Рассмотрим такое движение: из пунктов А и В, расстояние между которыми равно 2 км, вниз по течению одновременно начинают движение плот и лодка соответственно. В тот же момент времени из пункта В навстречу плоту начинает движение катер. Собственная скорость лодки равна скорости течения, собственная скорость катера в два раза превышает скорость течения. Встретив плот, катер мгновенно разворачивается и следует до встречи с лодкой, после чего снова разворачивается и движется в сторону плота до встречи с ним, затем опять к лодке и т.д. Сколько раз катер встретит плот за время, в течение которого плот преодолеет расстояние, равное 1000 км?

Для решения изобразим процесс движения (рис. 5). Примем скорость плота и реки равными 1 (км/ед. времени), тогда скорости лодки и катера относительно плота равны 1 и 2 соответственно. Первая встреча катера с плотом происходит в момент 1, когда лодка находится на расстоянии 1 км от них. В момент 2 катер нагоняет лодку, оказываясь на расстоянии 2 км от плота, а в момент 3 снова встречается с плотом. Из подобия треугольников ABC и ADE, а также ACD и AEF получаем, что третья встреча катера с плотом происходит в момент 9. Далее, аналогично, катер встречает плот в моменты 27, 81, 243, 729, 2187, ... При этом к моменту седьмой встречи плот проплывает $729 < 1000$ км, а к моменту восьмой – должен был бы проплыть $2187 > 1000$ км.

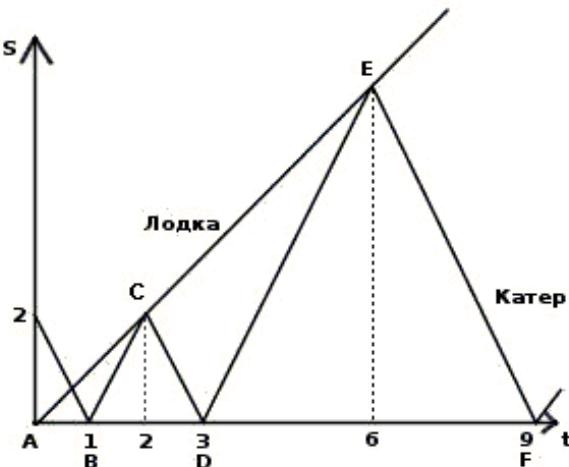


Рис. 5

Еще одна задача на движение по реке: согласно расписанию катер проходит по реке, скорость течения которой 5 км/ч, путь из А в D длиной 15 км за 1 ч. При этом, выходя из пункта А в 12 часов, он прибывает в пункты В и С, отстоящие от А на расстоянии 11 км и 13 км соответственно, в 12 ч. 20 мин. и 12 ч. 40 мин. Известно, что, если бы катер двигался из А в D без остановок с постоянной скоростью v (относительно воды), то сумма абсолютных величин отклонений от расписания прибытия в пункты В, С, D не превысила бы уменьшенного на полчаса времени, необходимого катеру для прохождения 5 км со скоростью v в стоячей воде. Какой из пунктов – А или D – находится выше по течению?

Обозначим через x время, за которое катер проходит 1 км при движении из А в D: $x = \frac{1}{v+5}$ или $x = \frac{1}{v-5}$, в зависимости от того, выше А по течению или нет. Таким образом, имеем неравенство $\left|11x - \frac{1}{3}\right| + \left|3x - \frac{2}{3}\right| + |15x - 1| \leq \frac{5}{v} - \frac{1}{2}$, где $v = \frac{1}{x} - 5 = \frac{1-5x}{x}$ или $v = \frac{1+5x}{x}$.

Рассмотрим графики трех функций (рис. 6) $y_1 = \left|11x - \frac{1}{3}\right| + \left|3x - \frac{2}{3}\right| + |15x - 1|$, $y_2 = \frac{5x}{1-5x} - \frac{1}{2}$, $y_3 = \frac{5x}{1+5x} - \frac{1}{2}$. График функции y_1 есть ломаная линия, минимум y_1 равен $\frac{6}{13}$ (достигается при $x = \frac{2}{39}$). График функции y_2 имеет вертикальную асимптоту $x = \frac{1}{5}$ и пересекается с y_1 , т.е. неравенство $y_1 \leq y_2$ имеет решение.

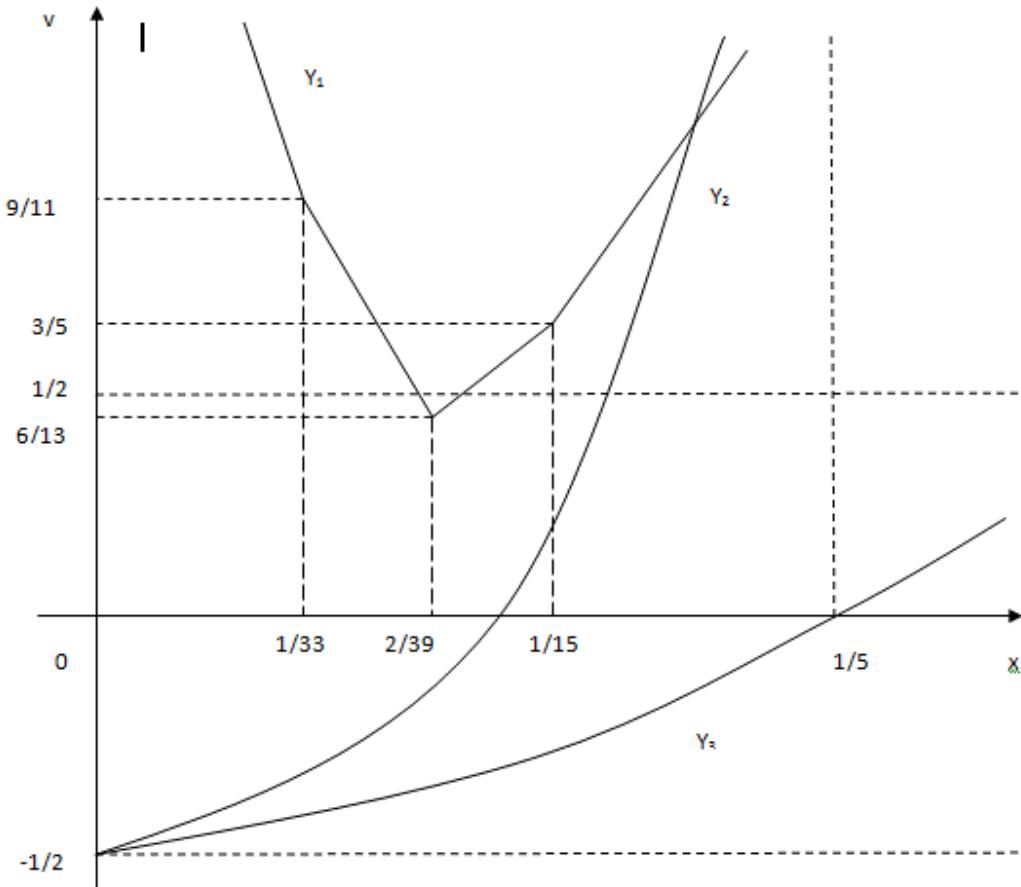


Рис. 6

Очевидно, что $y_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+5x} < \frac{1}{2}$ при всех $x > 0$, т.к.

$$y_3 = \frac{5x}{1+5x} - \frac{1}{2} = \frac{5x+1-1}{1+5x} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+5x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+5x} < \frac{1}{2}.$$

Значит, $y_3 \leq y_1$. Таким образом, задача имеет решение, если $v = \frac{1-5x}{x}$, $x = \frac{1}{v+5}$, т.е. А выше по течению, чем D.

Разнообразие текстовых задач на заданную тему достаточно велико, способы их решения различны – практически каждую можно решить алгебраическим или арифметическим способом. При введении большого количества переменных алгебраическая система становится громоздкой, и в этом случае лучше использовать геометрический метод – чертеж или график движения, которые иллюстрируют проблему и показывают пути ее решения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Материалы сайта www.alexlarin.ru.
2. Материалы сайта www.fipi.ru.

УДК 533+517+519

P. K. Галимова, З. Я. Якупов (г. Казань)

КОНЦЕПЦИИ МАГИСТЕРСКИХ ПРОГРАММ

В статье рассмотрены вопросы внедрения новых методов и форм обучения в преподавании дисциплин «Специальные вопросы технологии микро- и наноэлектроники» для магистрантов направления «Техническая физика» в рамках магистерской программы «Физика нанотехнологий и наноразмерных структур» и дисциплины «Дополнительные главы математики» для магистрантов направления «Электроэнергетика и электротехника» в рамках магистерской программы «Электроэнергетика и электротехника». Предполагается использование в учебном процессе моделей обучения, которые в мировой практике условно делят на группы репродуктивной и поисковой ориентации.

1. Актуальность внедряемых методов и форм обучения

Дисциплины «Специальные вопросы технологии микро- и наноэлектроники» и «Дополнительные главы математики» имеют ряд специфических особенностей, отличающих их как от предметов общего цикла, так и от многих предметов специального цикла. Это отличие обусловлено разнообразием применяемых технологических методов, процессов, оборудования и их моральным старением. В связи с этим в преподавании дисциплин необходимо уделить внимание: принципиальным вопросам применения математических методов в микро- и наноэлектронике, электроэнергетике и электротехнике, общим проблемам производства, а не частным технологическим рецептам и режимам; формированию у магистрантов представлений о месте математики в изучении различных технологических процессов; изучению основ технологии производства элементов, на базе которых создается современная микроминиатюрная радиоэлектронная и вычислительная аппаратура; ознакомлению с перспективами развития микро- и нанотехнологии и определению физических ограничений, накладываемых на дальнейшее уменьшение геометрических размеров микросхем; описанию закономерностей, лежащих в основе конкретных операций; ознакомлению будущего специалиста с сущностью и особенностями основных технологических методов и процессов изготовления тех или иных микросхем или дискретных приборов.

2. Востребованность изменения учебного процесса

У организации учебного процесса в традиционном понимании есть заметные недостатки. Магистранты проявляют слабость, когда от них

требуется самостоятельность, инициатива, творчество.

Модели и методы обучения, предполагаемые к внедрению в учебный процесс, позволяют им получать в ходе обучения достаточное количество информации, что дает возможность преподавателю целенаправленно управлять усвоением знаний.

Ценность рассматриваемых моделей и методов состоит в стимулировании большого количества идей и способов их реализации, в неоднозначности принимаемых решений, характер которых определяется конкретной учебной ситуацией. Важно отметить, что эти модели и методы должны существовать в процессе обучения в органической связи с теоретическими занятиями.

Внедрение новых моделей и методов обучения в технические и технологические дисциплины затруднено. Это связано с тем, что сложные системы, являющиеся предметом изучения, характеризуются одновременной интеграцией в них природной и социальной составляющей, сочетают естественное и искусственное. Понять все ситуации и все варианты факторов не представляется возможным. Поэтому применяемые модели, методы и формы обучения должны быть направлены на формирование понимания состояния объекта или процесса в тех случаях, когда недостаточно сведений о состоянии системы.

Современный специалист в области техники и технологии работает со сложными техническими системами. Его деятельность связана с конструированием, проектированием, диагностикой, налаживанием, вводом в эксплуатацию. Эти виды деятельности отличаются многовариантностью осуществления, неоднозначностью результата, взаимодействием между собой факторов различной природы, силы и длительности действия, требуют развитых навыков коммуникации.

Планируемые к внедрению в учебный процесс модели, методы и формы обучения призваны оказать существенную помощь

– в формировании представлений об основных тенденциях, возможностях, физических основах и перспективах развития современной технологии микро- и наноэлектроники, электроэнергетики и электротехники; о применении новых материалов и технологических процессов в микротехнологии; об эксплуатации и сервисном обслуживании технологического оборудования;

– в освоении навыков перехода от общего к частному в будущей профессиональной деятельности; умений прогнозировать направление протекания технологического процесса и свойств конечных продуктов.

Актуальность и востребованность внедрения в учебный процесс различных моделей и методов обучения (работа в команде, методы проблемного обучения, обучение на основе опыта, опережающая самостоятельная работа, разработка задач, деловых игр, кейсов, включение

проектного и производственного подходов) заключается в повышении качества овладения знаниями, умениями, навыками, обеспечении интереса к учебе, установлении оперативной обратной связи преподаватель–магистрант, предупреждению возможных пробелов и ошибок, созданию условий для широкого применения программированного обучения, компьютеров и других технических средств, облегчающих овладение знаниями, запуску механизма саморазвития (самосовершенствования, самообразования), обеспечению готовности личности к реализации собственной индивидуальности и изменениям в обществе.

В настоящее время рассмотренные аспекты важны из-за жесткой конкуренции и отбора на рынке труда. Специалист должен иметь соответствующий “багаж” знаний и интересов.

3. Описание структуры и содержания изменяемых курсов

Изменяемые курсы включают следующие образовательные технологии:

- работа в команде;
- методы проблемного обучения;
- обучение на основе опыта;
- поисковый метод;
- разработка задач, деловых игр, кейсов;
- включение проектного и производственного подходов.

Основой традиционного построения изучения дисциплины составляет лекционный курс и практические занятия, составляющими которых являются, в основном, преподнесение преподавателем нового материала, опрос, закрепление. Такое построение процесса обучения имеет ряд недостатков, среди которых можно выделить усредненный темп прохождения учебного материала, преобладание целевой установки преподавателя (преподнести материал, проконтролировать), затруднения в получении обратной связи индивидуального подхода и ориентация на среднего обучаемого и связанная с этим сложность осуществления индивидуального подхода.

Планируемые к разработке в составе изучаемой дисциплины образовательные технологии призваны ввести в процесс обучения элементы управления познанием магистрантов, иметь представления об уровне их знаний, о противоречиях, которые могут возникать или возникают на различных этапах обучения, о наиболее оптимальных путях разрешения этих противоречий.

Пример внедрения видов образовательных технологий в состав изучаемых тем в рамках одной из рассматриваемых дисциплин и предполагаемые результаты освоения знаний, умений, владения предметом изучения, сведены в таблицу 1.

Таблица 1

№ п/п	Наименование темы	Результаты освоения (знать, уметь, владеть)	Образовательные технологии
1.	Основные тенденции и возможности современной технологии микро- и наноэлектроники	Способность к самостоятельному обучению новым методам исследования, готовность к изменению социокультурных и социальных условий деятельности	Работа в команде. Деловые игры. Обучение на основе опыта. Кейс–метод. Поисковый метод. Проектный метод
2.	Квантовые эффекты, лежащие в основе информационного функционирования наноразмерных элементов	Умение вскрывать физическую, естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности	Работа в команде Методы проблемного обучения. Обучение на основе опыта. Разработка задач. Кейс–метод
3	Классификация физико-химических процессов технологии микро- и наноэлектроники	Способность к пополнению своих знаний в области современных проблем технической физики и смежных наук	IT–методы Работа в команде Методы проблемного обучения. Обучение на основе опыта. Кейс–метод. Поисковый метод. Проектный метод
4	Физические основы современной технологии микро- и наноэлектроники	Умение проводить качественный и количественный анализ проблем, возникающих в профессиональной деятельности	Работа в команде Обучение на основе опыта. Поисковый метод. Разработка задач
5	Применение новых материалов и технологических процессов в микро- и наноэлектронике	Готовность к активному общению в научной, производственной и социально-общественной сферах деятельности	Работа в команде. Методы проблемного обучения. Обучение на основе опыта. Кейс–метод. Деловые игры
6	Эксплуатация и сервисное обслуживание технологического оборудования	Готовность к разработке, проведению, наладке и испытанию, эксплуатации научного и аналитического оборудования	Работа в команде. Методы проблемного обучения. Обучение на основе опыта. Кейс–метод. Поисковый метод. Деловые игры. Проектный метод. Производственный подход

7	Перспективы развития современной технологии микро- и наноэлектроники	Умение разрабатывать и оптимизировать современные наукоемкие технологии в различных областях технической физики с учетом экономических и экологических требований	Работа в команде. Методы проблемного обучения. Обучение на основе опыта. Кейс–метод. Поисковый метод. Проектный метод. Производственный подход
---	--	---	--

Работа в команде направлена на индивидуализацию обучения, преодоление пассивности магистрантов, повышения результативности обучения. Академическая группа делится на подгруппы. Каждой подгруппе рекомендуется единая тема. Магистранты распределяют между собой отдельные вопросы для изучения, т. е. каждый выполняет часть общего задания. Готовится коллективный отчет о проделанной работе.

Методы проблемного обучения предполагают постановку проблемы, выяснение трудностей, с которыми столкнутся магистранты при изучении той или иной темы, и побуждение магистрантов к поиску возможных решений проблемы.

Поисковый метод имеет следующий алгоритм: ознакомление магистрантов с предметом исследования; поиск и структурирование данных; формулировка выводов.

Обучение на основе опыта базируется на знаниях и умениях, полученных при изучении других дисциплин. Полученный опыт работы позволяет нацеливать магистрантов на разработку и решение различных технических и технологических задач.

Разработка задач магистрантами позволяет использовать полученные знания и приобретенные умения для формулировки тренировочных и творческих задач с последующим решением их совместно с членами академической группы. Формулировка творческих задач требует от магистрантов значительных мыслительных усилий, связанных с синтезом полученных знаний. При использовании кейс–метода группа совместными усилиями анализирует ситуацию, вырабатывает практическое решение, оценивает альтернативы применения того или иного технического или технологического решения.

Деловые игры позволяют моделировать предметный и социальный аспекты содержания профессиональной деятельности, интенсифицируют учебную деятельность, моделируя управленические, экономические, психологические, педагогические ситуации, дают возможность анализировать и вырабатывать оптимальные действия в дальнейшем.

Проектный метод побуждает магистранта проявить интеллектуальные способности и коммуникативные качества, способность к

самообразованию и самоорганизации. В основе проекта лежит какая-либо проблема, для решения которой необходимо владеть большим объемом знаний и определенными умениями.

Производственный подход предполагает участие магистрантов в исследовательской деятельности научных лабораторий выпускающей кафедры, что создает условия для получения практической подготовки специалистов в учебном заведении.

Все методы и подходы взаимосвязаны, взаимно пересекаются, имеют сходные элементы. Поэтому актуальной задачей является создание дидактических материалов, методических разработок для разъяснения их места в структуре учебной дисциплины, формулировки задач, представления методик выполнения индивидуальных и коллективных заданий.

4. Методология и методическая новизна в преподаваемых курсах

Методология предполагает использование ряда связанных между собой методов и техник, используемых при создании проекта и использовании результатов.

При разработке описываемого проекта планируется делать упор на создание возможностей использования в обучении поведенческой методики, предусматривающей создание игровой обстановки, сотрудничество преподавателя и магистранта. Такой подход к построению обучения позволяет формировать навыки общения, которые можно совершенствовать. Поведенческая методика органично сочетается с исследовательской методикой типа «Приглашение к исследованию», где в полной мере используются все принципы, рассматриваемые в поведенческой методике. Идеи «Кооперативного обучения» позволяют сформировать у магистрантов индивидуальную независимость, когда каждый должен демонстрировать результаты своей работы; социальное взаимодействие, когда члены академической группы решают возникающие у них проблемы; перспективу, когда члены группы оценивают свою работу и намечают пути ее совершенствования. Все методики призваны развить опыт активного и самостоятельного обучения.

Весь курс изучаемых дисциплин делится на семь «синтетических тем». При изучении каждой темы магистрантам предлагается использование тех или иных образовательных технологий (работа в команде, методы проблемного обучения, обучение на основе опыта, поисковый метод, опережающая самостоятельная работа, разработка задач, деловых игр, кейсов, включение проектного и производственного подходов) с применением для самообразования обязательной и дополнительной литературы, технической документации, материалов электронных ресурсов, с поощрением самостоятельности, опоры на личный опыт.

Предлагаемые разработки в рамках рассматриваемых дисциплин являются **новыми системами**, позволяющими управлять обучением магистрантов. В ходе их выполнения должно происходить усвоение материала в процессе выполнения специальных заданий, направленных на усвоение теоретических знаний, приобретение практических умений и навыков. О результатах усвоения предмета предполагается судить по количеству и качеству выполненных заданий, как на любом производстве. Банк заданий к каждой «Синтетической теме» учебного предмета, планируемых к разработке в рамках рассматриваемого проекта, призван

- целенаправить, облегчить восприятие и понимание теоретических сведений, чтобы они стали доступны для дальнейшего использования при самообразовании и в производственной деятельности;
- систематизировать теоретическую информацию;
- обеспечить усвоение и закрепление теории путем выполнения системы упражнений, заданий практического характера, построенных на принципах доступности, постепенного усиления в них самостоятельного, творческого начала.

Широко распространен опыт использования различных моделей обучения (таких, как разработка деловых игр, кейсов и др.) в экономических дисциплинах, юриспруденции, дисциплин физического цикла. Рассматриваемый проект предполагает использование новых методов для обучения технологической дисциплине, где рассматриваются описания объектов, отличающихся многообразием состояний.

5. Используемые технологии

В преподавании дисциплин возможно использование материалов на электронных носителях, видео-, аудиоматериалов, пакеты прикладных программ MatCad, MatLab, Statistica, мульти-медиа технологии.

6. Место в существующем учебном процессе

Таблица 2

Методы Вид занятия	Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа
Работа в команде		+	
Методы проблемного обучения.	+	+	
Обучение на основе опыта	+	+	+
Опережающая самостоятельная работа		+	+
Разработка задач		+	+
Разработка деловых игр		+	+
Проектный подход		+	+
Производственный подход		+	

Для достижения поставленных целей преподаваемых дисциплин планируется реализовывать следующие средства, способы и организационные мероприятия:

- преподнесение теоретического материала дисциплины на лекциях с использованием компьютерных технологий;
- стимулирование самостоятельного изучения теоретического материала дисциплины с использованием *Internet*-ресурсов, методических разработок, специальной учебной и научной литературы введением в структуру преподавания дисциплины планируемых к разработке методов обучения.

7. Ожидаемые результаты

Разработка дидактических материалов (пособий, указаний, презентаций) для самостоятельной работы магистрантов, в которых будут

- представлены методические рекомендации, позволяющие организовать работу в команде;
- изложены принципы методов проблемного обучения, представлена база данных различных проблем технического и технологического направления;
- описаны методики и направления, позволяющие организовать опережающую самостоятельную работу на основе накопленного опыта, подготовить к разработке задач;
- перечислены темы и особенности организации деловых игр;
- показаны требования к формату и структуре кейсов;
- включены темы, предполагающие применение проектного и производственного подходов.

Используются тестовые задания для контроля усвоения материала на основании использования различных методов обучения. Планируется перевод учебных материалов и тестов в среду Black Board.

Проводится постоянная работа по привлечению к участию магистрантов в деятельности научно-методических и научно-практических конференций и вовлечение в публикации совместных статей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Якупова А. Р., Чернявская В. И. Компетентностная модель специалиста технического профиля // Научные исследования в образовании, 2009. – № 6. – С. 45-58.
2. Еранькина Л. Е. Внедрение модульно-компетентностных технологий обучения // Профессиональное образование. Столица, 2010. – № 3. – С. 33-34.

УДК 371.14

С. Н. Дорофеев, Е. А. Емелина (г. Пенза)

РОЛЬ ЭЛЕКТИВНЫХ КУРСОВ ПО МАТЕМАТИКЕ В РАЗВИТИИ ТВОРЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ

В статье изучаются проблемы развития у учащихся старших классов творческих математических способностей. Излагаются методические основы обучения старшеклассников приемам построения математических моделей реальных ситуаций.

Проблема развития творческих способностей учащихся старших классов является одной из наиболее актуальных проблем школьного образования. Как свидетельствуют результаты ЕГЭ по математике и физике количественный процент учащихся, справившихся с заданиями группы С, остается невысоким. Причин этого факта можно назвать много, но основная из них – это не достаточно высокий уровень сформированности операционно-содержательного и мотивационного компонентов к изучению предметов физико-математического цикла. С целью углубления и расширения математических знаний в профильных школах физико-математического направления широко используют элективные курсы. Как правило, выделяют элективные курсы предпрофильного и профильного обучения. Цель первых заключается в организации эффективной помощи учащимся в самоопределении направления будущей профессиональной деятельности, цель вторых – состоит в формировании уверенности в уже выбранном направлении профессиональной деятельности и способствует выбору конкретной будущей профессии. Элективный курс представляет собой форму организации целенаправленного педагогического воздействия, обусловливающего повышение качества математического образования учащихся и стимулирования их активной учебно-познавательной деятельности по овладению новыми знаниями, умениями и навыками, развитию творческих способностей, мировоззрения и нравственно-эстетических взглядов. В связи с этим в качестве важнейших задач элективного курса выдвигаются следующие задачи: 1) стимулирование познавательной активности учащихся; 2) организация их учебно-познавательной деятельности по овладению научными знаниями, умениями, навыками; 3) развитие логического и абстрактного мышления, сообразительности, памяти и способностей; 4) формирование научного мировоззрения и культуры; 5) выработка и совершенствование учебно-

познавательных умений и навыков; 6) формирование умения самостоятельно углублять и пополнять свои знания.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дорофеев С. Н. Основы подготовки будущих учителей математики к творческой деятельности. – Пенза: Информац.-издат. центр Пенз. гос. ун-та, 2002. – 218 с.
2. Емелина Е. А. Интеграция математических методов в изучении школьниками физических явлений // Университетское образование: Сборник статей XI Международной научно-методической конференции. – Пенза, 2007. – С. 327-330.
3. Емелина Е. А., Дорофеев С. Н. Интегративные приемы в обучении старшеклассников математическим методам решения прикладных задач // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Гуманитарные науки, 2009. – № 2. – С.75-84.
4. Терешин Н. А. Прикладная направленность школьного курса математики. – М.: Просвещение, 1990. – 96 с.

С. П. Грушевский, Н. В. Андрафанова, Н. Ю. Добровольская
(г. Краснодар)

ФОРМИРОВАНИЕ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ КОМПЕТЕНЦИЙ МАГИСТРОВ МАТЕМАТИКИ НА ОСНОВЕ ИТ-ТЕХНОЛОГИЙ

Формирование профессионально-педагогических компетенций магистров математических направлений осуществляется при изучении и использовании ряда информационно-коммуникационных технологий. Выделяются частные ИТ-компетенции, развивающие умения обработки и анализа математических данных с применением компьютерных статистических пакетов, способность применять для конструирования дидактических материалов мультимедиа технологии, навыки автоматизации математических расчетов, визуализации результатов с помощью функций систем компьютерной математики, умение разрабатывать структуру сайта, определять его методическую и информационную составляющие.

В последние годы в российском высшем профессиональном образовании происходят важные изменения, связанные с переходом высшей школы России к модели инновационного развития. В результате изменений происходит смена знаниевой традиционной системы образования на компетентностную. Реализация компетентностного подхода является одним из основных направлений процесса реформирования образования, поскольку позволяет создавать условия для формирования активного, конкурентоспособного специалиста.

В складывающейся в настоящее время двухкомпонентной структуре профессиональной подготовки (бакалавриат-магистратура) особая роль отводится современным магистерским образовательным программам. Если рассматривать подготовку магистров математики, то следует отметить тот факт, что временные рамки образовательных программ бакалавров математики позволяют формировать только базовые компоненты профессиональной подготовки. Магистерские программы позволяют завершить профессионально-педагогическую подготовку [1,2].

Область профессиональной деятельности магистров математики в соответствии с ФГОС ВПО включает: научно-исследовательскую деятельность в областях, использующих математические методы и компьютерные технологии; решение различных задач с использованием математического моделирования процессов и объектов и программного обеспечения; разработку эффективных методов решения задач естествознания, техники, экономики и управления; программно-информационное обеспечение научной, исследовательской, проектно-

конструкторской и эксплуатационно-управленческой деятельности; преподавание цикла математических дисциплин (в том числе и информатики).

Из перечисленных областей профессиональной деятельности магистров математики следует один из ее видов – педагогическая деятельность.

Магистр математики должен обладать следующими компетенциями в педагогической деятельности:

– возможность преподавания физико-математических дисциплин и информатики в средней школе, средних специальных и высших учебных заведениях на основе полученного фундаментального образования и научного мировоззрения (ПК-15);

– умение извлекать актуальную научно-техническую информацию из электронных библиотек, реферативных журналов и т.п. (ПК-16).

Для формирования этих профессионально-педагогических компетенций необходимы компетенции в области информационной основы профессиональной деятельности [3]. Это умение получать и использовать научную и профессиональную информацию, необходимую для осуществления профессиональной деятельности: конструирования дидактических ресурсов, разработки систем контроля знаний, подготовки учебных материалов и т.п.

Формирование профессионально-педагогических компетенций осуществляется при изучении и использовании следующих информационно-коммуникационных технологий:

1. Технологий обработки информации (текстовой, графической, табличной, звуковой, комбинированной);
2. Инструментальных средств создания образовательных ресурсов: контрольно-обучающих, тренировочных и контролирующих;
3. Технологий дистанционного обучения;
4. Интерактивных обучающих сред;
5. Информационно-поисковых и справочных систем.

Рассмотрим некоторые конкретные технологии, применяемые для формирования ИТ-компетенций профессионально-педагогического блока в ряде дисциплин, читаемых в магистерских программах на кафедре информационных образовательных технологий КубГУ. Магистерские программы предполагают два основных уровня освоения ИТ-компетенций: умение разрабатывать собственные дидактические ресурсы и умение квалифицировано использовать различные информационные технологии для решения профессионально-педагогических задач. Каждый уровень освоения предполагает изучение собственного набора информационно-коммуникационных технологий.

Практически любая комплексная педагогическая задача для своего

решения требует сбор, хранение, обработку и последующий анализ некоторой информации. Будущим учителям математики и информатики необходимо уметь работать с информацией двух видов: учебной информацией, представляющей собой дидактические материалы различных форм и информацией об обучаемых, которая включает данные о траектории их обучения. Для хранения и создания учебной информации необходимы навыки работы с текстовыми и графическими редакторами, умение применять для конструирования дидактических материалов мультимедиа технологии (например, Flash-технологию), презентационные пакеты и другие средства разработки дидактических материалов. Информация об обучаемых требует, прежде всего, анализа данных. Для этого магистрам необходимы навыки работы с пакетами статистической обработки данных (пакет Statistica), электронными таблицами (Microsoft Excel), базами данных (Microsoft Access).

Способность автоматизации математических расчетов, визуализации результатов является непосредственной профильной компетенцией магистра математики. Применение различных пакетов и систем компьютерной математики (MathLab, MathCad, Mathematica и другие) для решения математических задач, с одной стороны, позволяет автоматизировать процесс вычислений, с другой стороны – решает задачу конструирования наглядных учебных материалов для уроков математики, визуализации и проведения математического эксперимента. Использование в будущей педагогической деятельности магистров систем компьютерной математики преобразует математику в экспериментальную науку, повышает положительную мотивацию учащихся к изучению математики.

В современных условиях использования Internet и соответствующих технологий способность разрабатывать структуру сайта, определять его методическую и информационную составляющие, становится показателем квалификационного уровня магистра. Формирование этой компетенции предполагает изучение принципов разработки сайтов, языков их конструирования PHP и HTML, технологий определения методического и информационного наполнения.

Уровень автоматизации контроля результатов учебной деятельности учащихся в современных условиях является определяющим параметром общей эффективности учебного процесса. Магистры, владеющие навыками программирования, могут с помощью Web-технологий, языка PHP и других разрабатывать как локальные системы тестирования, так и дистанционные тесты.

Магистры – квалифицированные пользователи программного обеспечения используют пакет Microsoft Excel, встроенные формулы и элементы языка VBA для конструирования наборов тестовых вопросов и заданий. При любом уровне освоения способности автоматизировать контроль знаний учащихся предполагается, что разрабатываемые средства контроля могут собирать результаты тестирования и представлять их в

некоторой форме отчета.

Магистры – разработчики дидактических компьютерных ресурсов – осваивают языки программирования (например, Паскаль, Си) и среды визуального программирования (Visual Basic, Delphi) для создания обучающих программ, электронных учебников и задачников, систем тестирования и контроля знаний. Здесь используются технологии построения фасетных тестов для формирования наборов учебных задач, технологии адаптивного тестирования для конструирования индивидуальных тестовых заданий, принципы разработки компьютерных обучающих систем и ресурсов.

При формировании способности разрабатывать структуру цикла уроков, наряду с традиционными педагогическими технологиями используется технология построения фрейма урока. Причем работа с фреймом может быть автоматизирована. Использование фреймовой структуры урока позволяет адаптировать изучаемый материал к текущим образовательным возможностям обучаемого, подбирать для каждого учащегося индивидуальный набор заданий. Такой процесс может быть автоматизирован с помощью программ, разработанных на языках программирования или с помощью электронных таблиц (в зависимости от уровня освоения компетенции).

Перечисленные информационные технологии изучаются как в рамках учебных дисциплин, таких как «Информационные технологии в науке и образовании», так и используются в самостоятельной работе, подготовке курсовых и диссертационных работ.

Таким образом, выделенные нами частные компетенции профессионально-педагогического цикла предполагают для успешного освоения изучение ряда информационно-коммуникационных технологий. Причем применение ИТ-технологий неразрывно связано, с одной стороны, с освоением традиционных педагогических технологий, с другой стороны, опирается на глубокую математическую базу, полученную магистрами в рамках обучения по магистерской программе математических направлений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Грушевский С. П. О формировании педагогических компетенций в современных образовательных программах профессиональной подготовки математиков // Научный журнал «Теория и практика общественного развития», 2012. – № 3.
2. Грушевский С. П., Андрафанова Н. В. О математико-педагогических магистерских программах // Научный журнал «Известия АлтГУ», 2013. – № 2-2(78).
3. Грушевский С. П., Добровольская Н. Ю. Проектирование профессионально-педагогической подготовки студентов математических направлений на основе технологий формирования их ИТ-компетенций // Научный журнал «Известия АлтГУ», 2013. – № 2-1(78).

УДК 378

С. П. Грушевский, Е. В. Князева (г. Краснодар)

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ ПЕДАГОГА-ИССЛЕДОВАТЕЛЯ

Студентам, магистрантам, аспирантам необходимо знать, где, когда и как методы математической статистики могут применяться на практике для анализа данных психолого-педагогического исследования.

В системе профессиональной подготовки студентов много внимания уделяется разработке дисциплин, связанных с формированием системы понятий, знаний и умений в области применения методов математической статистики для исследований в педагогике и психологии, с развитием интуитивного и практического представления студентов об анализе данных, статистической обработке эмпирических данных; знакомящих с культурой анализа данных и решением исследовательских задач с использованием современных компьютерных технологий и программных средств.

Теоретические методы исследования в психологии и педагогике дают возможность раскрыть качественные характеристики изучаемых явлений. Эти характеристики будут достовернее, если накопленный эмпирический материал подвергнуть количественной обработке. Существует проблема количественных измерений в рамках психолого-педагогических исследований. Сложность заключается в субъективно-причинном многообразии педагогической деятельности и ее результатов, в самом объекте измерения, находящемся в состоянии непрерывного изменения. Вместе с тем введение в исследование количественных показателей сегодня является необходимым компонентом получения объективных данных о результатах образовательного процесса. Эмпирические данные могут быть получены как путем прямого измерения различных составляющих педагогического процесса, так и посредством количественной оценки соответствующих параметров адекватно построенной его математической модели. С этой целью при исследовании проблем психологии и педагогики широко применяются методы математической статистики.

В разработанном на кафедре информационных образовательных технологий курсе «Математические методы в педагогике и психологии» акцентируется внимание на развитии у будущих педагогов способности анализировать явления и, главное, самостоятельно делать выводы о закономерностях, которым они подчинены, и закономерных связях между структурными компонентами анализируемых явлений.

© С. П. Грушевский, Е. В. Князева, 2014

Получая информацию от педагога и выполняя под его управлением определенные действия (в том числе на компьютере), студенты обрабатывают информацию, что приводит к новообразованиям, вследствие которых они вырабатывают свои варианты решения задач, предпринимают самостоятельные действия, чтобы получить подтверждение своим гипотезам на практике. Педагог рассматривает версии и результаты, замечает рациональное зерно и адекватно корректирует действия студента. Это возможно только при условии самосовершенствования как непрерывного процесса в его профессиональной деятельности. Что, в свою очередь, сказывается на следующем этапе управления процессом обучения.

Разработка методики составления учебных материалов и организации учебной деятельности средствами математического моделирования рассматривается как методическая составляющая педагогического обеспечения развития у студентов навыков педагогического исследования. При составлении учебных заданий по курсу «Математические методы в педагогике и психологии» учитываются особенности педагогических специальностей, профессиональные интересы обучаемых, возможности компьютерных средств и принципы новых информационных технологий, программного обеспечения. Специфика математического моделирования заключается в том, что информационность модели придает данному курсу широкий спектр межпредметных связей. Мы ориентируем студентов на повышение уровня познавательной деятельности, побуждаем их к проявлению инициативы, предусматриваем некоторую помощь со стороны преподавателя, предоставляя при этом возможность интеллектуального саморазвития. Такое построение курса приводит не только к усвоению нового знания, но и к формированию таких качеств, как инициативность в выборе модельных средств, способность активно преобразовывать имеющуюся модель применительно к конкретным условиям решаемой задачи.

Задачи данной дисциплины:

- раскрыть обучающимся теоретические и практические основы знаний в области методов исследования в педагогике и психологии;
 - показать возможности современных технических и программных средств для решения исследовательских задач;
 - сформировать практические навыки работы с эмпирическими данными при обработке на персональном компьютере в специально разработанных программных средах (статистические пакеты и др. приложения с встроенным анализом данных);
 - привить навыки грамотной интерпретации результатов.
- Эти задачи приводят к формированию таких компетенций, как
- способность использовать знания о современной

естественнонаучной картине мира в образовательной и профессиональной деятельности, применять методы математической обработки информации, теоретического и экспериментального исследования (ОК-4);

– способность нести ответственность за результаты своей профессиональной деятельности (ОПК-4);

– способность применять современные методы диагностирования достижений обучающихся, осуществлять педагогическое сопровождение профессионального самоопределения обучающихся (ПК-3).

В результате изучения подобных дисциплин студент должен знать и понимать роль математических методов в педагогике и других гуманитарных науках, содержательные критерии на разных выборках, свойства эмпирических данных, структуру и формы их представления в компьютере, содержание исследовательской работы с применением методов математической статистики и факторного анализа, пакеты прикладных программ общего и специального назначения; уметь пользоваться современными программными средствами обработки статистических данных, использовать стандартное и прикладное программное обеспечение для анализа данных и их визуализации, использовать математические методы для статистической обработки педагогического, психологического, социального эксперимента.

Курс должен строиться на принципе модульности. Модульность заключается в классификации критериев (деление на параметрические и непараметрические), в классификации задач (сравнение двух и более выборок, исследование достоверности сдвига, сокращение факторного пространства и др.).

В результате изучения представленного курса студенты должны овладеть навыками сбора, нормирования и хранения эмпирических данных, представления данных в виде диаграмм и таблиц, навыками обработки данных методами математической статистики (параметрическими и непараметрическими), навыками решения профессиональных задач с использованием информационных технологий.

Любой теоретический курс должен иллюстрироваться примерами применения методов анализа данных в практических задачах. Практика решения задач должна осуществляться на компьютере. Как показывает наш опыт, активное использование компьютерных технологий в обучении методам математической статистики формирует навыки и умения анализа и структурирования исходной и получаемой информации.

Современные технологии обработки данных и анализа статистической информации позволяют использовать математические доказательства исследователями, не имеющими математического образования. Нет необходимости и в изучении специальных статистических пакетов – достаточно ознакомиться с возможностями пакета анализа данных и

встроенных статистических функций электронных таблиц Excel широко применяемого пакета MS Office. Не требуется вручную выполнять трудоемкие расчеты по сложным формулам, строить вручную сложные диаграммы и графики – всю эту черновую работу взял на себя компьютер, а педагогу-исследователю остается творческая работа: постановка задачи исследования, выбор методов педагогического исследования и грамотная интерпретация результатов:

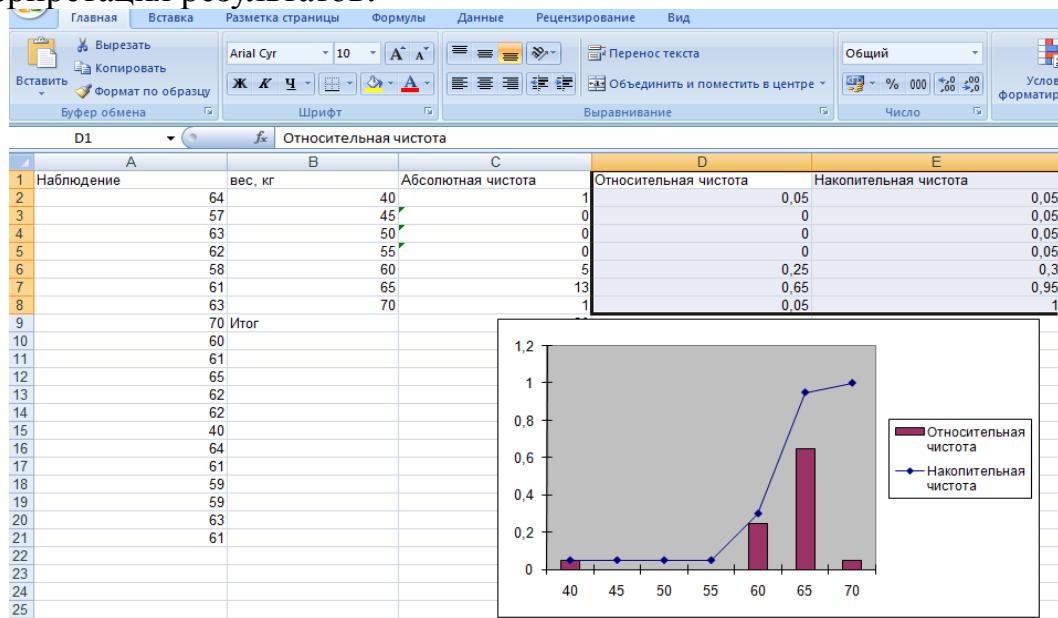


Рис. 1. Обработка эмпирических данных в среде электронных таблиц MS Excel

Будущим педагогам-математикам предоставляется возможность программировать статистические критерии для собственного использования и для облегчения обработки статистических данных педагогами-гуманитариями.

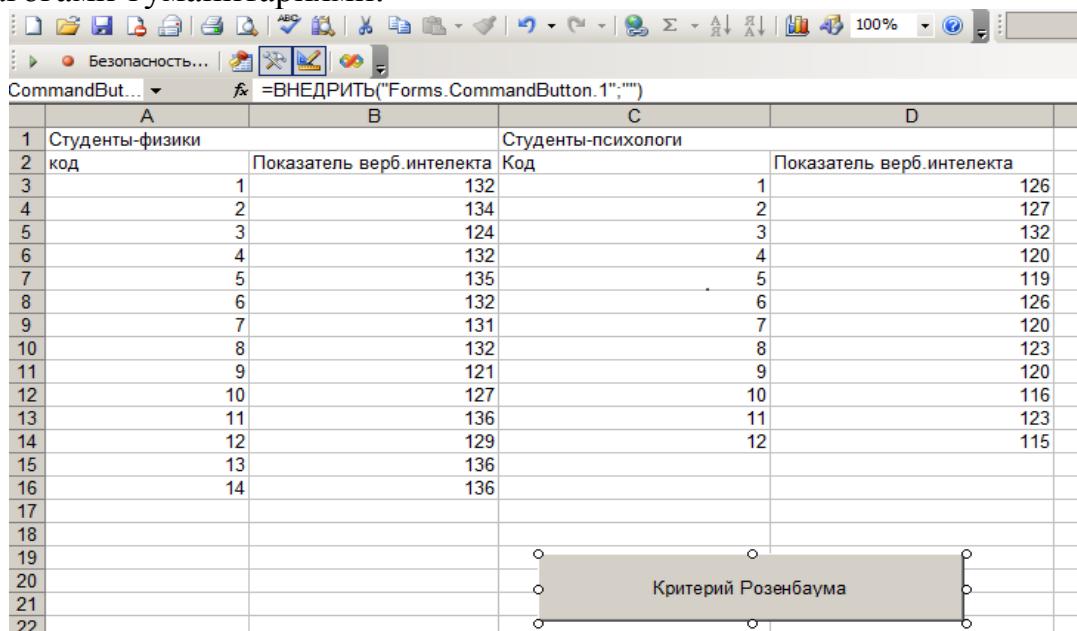


Рис. 2. Программный модуль реализации критерия средствами VBA

Создание математической модели заключается: а) в первичном анализе исходных статистических данных, который позволяет сформулировать экспериментальную гипотезу; б) в выборе статистического критерия для обработки эмпирических данных; в) в выборе среды для проведения расчетов. Данный пункт позволяет использовать компьютер, что приводит к построению компьютерной модели со своими этапами в виде выполнения конкретного алгоритма; г) в анализе полученного результата и его визуальном представлении.

Студенты, опираясь на полученные знания, имеют полную свободу в выборе подходящего критерия, среды реализации задачи, оформления полученного результата, что, в свою очередь, приводит к проявлению самостоятельности, активности, мотивационной заинтересованности в обучении. Для решения задачи можно применить как непараметрический критерий, например, критерий Крускала-Уоллиса, так и параметрический, например, факторный анализ. Параметрические критерии используются для нормально распределенных случайных величин, что предполагает проверку распределения значений выборки на нормальность. Выбор критерия определяет возможности компьютерной среды, а реализация компьютерной модели закрепляет полученные математические знания, необходимые для интерпретации результата. Обоснование своей экспериментальной гипотезы и проведение педагогического эксперимента может рассматриваться как самостоятельный творческий проект.



Рис. 3. Модель развития профессиональных компетенций будущих педагогов

Будущие педагоги должны быть ознакомлены с основными математическими методами обработки эмпирических данных для оценивания эффективности учебного процесса, с основными концепциями и этапами педагогического эксперимента, с основными статистическими методами проверки гипотез. Предположим, творческий педагог изобрел важное нововведение: разработал новую методику преподавания.

Первичный анализ результирующего признака дает повод предположить, что это нововведение дало положительный эффект. Но, может, этот кажущийся эффект определен вовсе не нововведением, а естественной случайностью, и уже завтра можно получить прямо противоположный эффект? Для решения этой задачи надо сформировать два набора чисел, каждый из которых содержит значения интересующего исследователя показателя эффективности до и после нововведения. Статистические критерии сравнения двух выборок покажут, случайны или достоверны различия этих двух рядов чисел.

Испытание экспериментальной модели предполагает проведение констатирующего и формирующего экспериментов. Констатирующий эксперимент проводится с целью определения исходного уровня экспериментальной и контрольной групп.

В начале эксперимента вся рассматриваемая выборка (экспериментальная и контрольная вместе) должна представлять достаточно однородную группу, что можно выявить, например, методом главных компонент (получены как линейные комбинации измеренных на учащихся исходных признаков).

При помощи метода главных компонент в процессе факторного анализа можно установить неоднородность общей выборки в конце эксперимента, заключающуюся в отделении экспериментальной группы от контрольной, что можно объяснить произошедшими под влиянием педагогических воздействий существенными изменениями исследуемого признака у учащихся экспериментальной группы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Грушевский С. П., Князева Е. В. Развитие навыков информационного моделирования как активный метод профессионального обучения студентов гуманитарных специальностей // Экономические и гуманитарные исследования регионов. Научно-теоретический журнал. – Ростов-на-Дону: ЗАО «Центр Универсальной Типографии», 2014. – № 1. – 108 с.
2. Лялин В. С., Зверева И. Г., Никифорова Н. Г. Статистика. Теория и практика в Excel. – Изд.: Финансы и статистика, Инфра-М, 2010. – 448 с.
3. Грабарь М. И., Краснянская К. А. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы. – М.: Педагогика, 1977. – 137 с.

C. П. Грушевский, О. В. Засядко, О. В. Мороз (г. Краснодар)

ФОРМИРОВАНИЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ В КУРСЕ «МАТЕМАТИКА» ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ БАКАЛАВРОВ

Актуализация проблемы формирования профессиональных компетенций в курсе «Математики» на примере экономических специальностей.

Согласно Концепции модернизации российского образования, целью современного профессионального образования является подготовка конкурентоспособных специалистов, способных системно мыслить и действовать, обладающих творческой активностью, лидерскими качествами, отличающихся инициативностью и самостоятельностью, то есть обладающих ключевыми компетенциями. В этой связи, термины «компетентность» и «компетенция» приобретают все более широкое распространение в образовательной среде. Для компетенции характерно наличие знаний и умений. Для компетентности характерна возможность (способность, готовность) применять знания и умения. Таким образом, компетентность – результат применения компетенций в профессиональной деятельности [1].

Неотъемлемую часть профессиональных компетенций экономиста составляет профессионально-математические компетенции. В их структуре можно выделить несколько основных компонентов:

Таблица 1

Ценностно-Мотивационный компонент	<ol style="list-style-type: none">1. Мотив профориентации.2. Мотив к расширению знаний в области математики.3. Мотив использования математических методов и информационных технологий в профессиональной деятельности.4. Мотив достижения поставленных целей.
Когнитивный компонент	<ol style="list-style-type: none">1. Знание основ математики, информационных и математических моделей и умение применять эти знания в профессиональной деятельности.2. Умение анализировать полученные знания и оценивать их.
Деятельностный компонент	<ol style="list-style-type: none">1. Основы математики как средство для решения профессиональных задач, как средство для познания, самосовершенствования и творчества.2. Проектирование курса математики как средство активизации познавательной деятельности в профессиональной подготовке.

Педагоги-ческая рефлексия	<ol style="list-style-type: none"> 1. Способность к самореализации и самовыражению в профессиональной деятельности. 2. Осознание своего места в социуме, в котором предстоит заниматься профессиональной деятельностью, необходимость диагностировать себя как профессионально-грамотную личность. 3. Способность осуществлять разносторонний подход к анализу ситуации в зависимости от целей и условий. 4. Способность к самоконтролю и самооценке себя в профессиональной деятельности.
---------------------------	--

Ценностно-мотивационный компонент включает мотивы, цели, потребности в профессиональном обучении, совершенствовании, самовоспитании, саморазвитии, ценностные установки актуализации в профессиональной деятельности, стимулирует творческое проявление личности в профессиональной деятельности. Он предполагает наличие интереса к профессиональной деятельности, который характеризует потребность личности в знаниях, в овладении эффективными способами организации профессиональной деятельности. Также ценностно-мотивационный компонент включает в себя мотивы осуществления деятельности, направленность на передачу суммы знаний и развитие профессионально-грамотной личности. Когнитивный компонент кроме теоретических знаний по математике, умений и навыков оперирования различными математическими методами, информационными объектами и т. п., включает в себя умение анализировать полученные знания и оценивать их, выделять уровни межпредметных связей [4]. Деятельностный компонент представляет собой активное применение знаний математики в профессиональной подготовке выступающих, как средства активизации познавательной деятельности. Рефлексивная сфера профессиональной математической компетенции экономиста определяется отношением его к окружающему миру, к своей практической деятельности и ее осуществлении. Она включает в себя самосознание, самоконтроль, самооценку, понимание собственной значимости в будущей профессии и понимание результатов своей деятельности, ответственности за результаты своей деятельности, познания себя и самореализации в профессиональной деятельности.

Анализ Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки (специальности) 080100 «Экономика», показывает, что в результате изучения базовой части математического и естественнонаучного цикла обучающийся должен знать: основы математического анализа, линейной алгебры, теории вероятностей и решений математической статистики,

необходимые для решения экономических задач, обладать практическими навыками использования методов математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования, современного математического инструментария в процессе экономической деятельности, владеть методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов, обоснования принимаемых хозяйственных решений и получения оценки их эффективности. Для освоения указанных знаний, умений и навыков необходимо:

1) привить студенту определенную математическую грамотность, достаточную для самостоятельной работы с экономико-математической литературой;

2) развить логическое мышление;

3) научить студента постановке математической модели стандартной задачи и анализу полученных данных;

4) обучить студента классическим методам решения основных математических задач, к которым могут приводить те или иные экономические проблемы, методам статистики, использующим результаты теории вероятностей, основным методам оптимизации и их использованию для решения различных экономических задач.

Процесс решения вышеуказанных задач направлен на формирование следующих общекультурных и профессиональных компетенций:

Общекультурные компетенции:

- (ОК-15) владеть методами количественного анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования;

- (ОК-16) осознавать роль и значение информации и информационных технологий в развитии современного общества и экономических знаний;

- (ОК-17) владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации, навыками работы с компьютером как средством управления информацией.

Профessionальные компетенции:

- (ПК-31) уметь применять количественные и качественные методы анализа при принятии управленческих решений и строить экономические, финансовые и организационно-управленческие модели;

- (ПК-32) владеть способностью строить и выбирать математические модели организационных систем, анализировать их адекватность, проводить адаптацию моделей к конкретным задачам управления.

Для формирования указанных компетенций в рамках курса «Математика» для студентов экономических специальностей необходимо создать совокупность структурированных учебно-методических материалов, объединенных посредством компьютерной среды обучения, обеспечивающих полный дидактический цикл обучения и предназначенных для оптимизации овладения студентом профессиональных математических компетенций.

Весь комплекс целесообразно разбить на несколько блоков, направленных на формирование определенных элементов профессиональных математических компетенций: учебный, моделирующий, контроля, исследовательский и методический. При этом у студентов нужно формировать знания, умения, навыки, нарабатывать опыт самостоятельного обучения и профессиональной деятельности.

Для каждой компетенции следует провести дифференциацию интегрированного содержания для математических дисциплин.

Приведем схему обоснования задачных технологий, реализуемых в процессе формирования профессиональных компетенций, на примере компетенции ПК32, для учебного курса «Теория вероятностей и математическая статистика» (таблица 2).

В связи с этим важно отметить, что при решении одного типа задач у студента должен формироваться не один конкретный вид компетенций, а несколько общекультурных и профессиональных компетенций. Например, при построении модели корреляционной связи экономических переменных формируются все выше перечисленные компетенции.

При изучении общих профессиональных дисциплин экономистов необходимо ориентировать студентов на использование всех потенциальных возможностей математики. Специфика использования математических знаний, умений и навыков в предметах общепрофессионального и специального циклов при подготовке экономистов диктует отбор математического материала, обеспечивающего наиболее глубокую связь математики с предметами разных циклов этой специальности для формирования компетенций. Междисциплинарная интеграция компонентов курса математики и общих профессиональных дисциплин, позволяет осуществить планирование курса математики в соответствии с профессиональными дисциплинами и сформировать основания для конструирования профессионально ориентированного учебного материала [7].

Таблица 2

Компетенция	Содержание компетенции	Дифференцирующие составляющие необходимого содержания компетенции на уровень знать, уметь, владеть	Умения навыки	Специальные УН	Задачные технологии формирования компетенций
ПК-32	владеть способностью выбирать математические модели организационных систем, анализировать их адекватность, проводить адаптацию моделей к конкретным задачам управления.	<p>1. Знать сущность и структуру математической модели случайных явлений.</p> <p>2. Знать классические схемы вычисления вероятности случайных событий.</p> <p>3. Знать виды случайных событий.</p> <p>4. Уметь анализировать и исключать возможные ошибки при вычислении вероятности случайного события.</p> <p>5. Уметь оценивать влияние второстепенных факторов на исход события.</p> <p>6. Уметь прогнозировать исход случайного события.</p> <p>7. Уметь выбирать и применять теоремы и формулы вычисления вероятности случайных событий.</p> <p>8. Владеть приемами обеспечения необходимых условий и результатов в производственных ситуациях.</p> <p>9. Кооперироваться с коллегами при реализации моделей случайных явлений и уметь ими управлять.</p>	Уметь решать задачи: нахождение классической и статистической вероятности; статистические оценки параметров распределения; статистическая проверка гипотез; моделирование случайных величин и т.д.	Уметь прогнозировать различные процессы и явления; анализировать стратегии действий. Уметь оценивать степень достоверности фактов.	Интерактивные тесты с использованием локальных: фасетные тесты (<i>представляют собой специфическую форму обобщения, контроля и диагностики знаний</i>), тесты да-нет (<i>их целью служит оценка качества знаний обучаемых, с учетом индивидуальных особенностей в соответствии с определенными факторами</i>), листы группового контроля (<i>это некий элемент методического обеспечения, основная цель которого – освоение содержательного теоретического ядра, вокруг которого образуется устойчивое поле основных знаний</i>) типовые расчеты (<i>используются в качестве промежуточного контроля и диагностики усвоения материала</i>) и т.д.

	10. Воспитывать ответственность за качественный расчет возможных исходов случайных событий.			
--	---	--	--	--

Отмечая тот факт, что экономические специальности – это специальности, интегрирующие сведения из математических, естественных, гуманитарных и социально-экономических дисциплин, то, соответственно подход к отбору содержания курса математики должен удовлетворить «заказ» на математический аппарат для всех циклов. В связи с этим, необходимо при формировании компетенций прежде провести анализ внутри- и межпредметных связей. Развитие этих связей имеет глубокие корни, затрагивающие основы учебных дисциплин, и имеет принципиальное значение для совершенствования всего процесса обучения. Они выражают интеграцию учебного знания на основе трансформации научного знания и непосредственно влияют на достижение обучающей и развивающей функции обучения. Центральной идеей в данном процессе интеграции является генерализация знаний учащихся на основе единого подхода к формированию понятий общих для различных учебных дисциплин, математического моделирования природных и технологических явлений и процессов, разработка операционных структур решения типовых задач и профессионально ориентированных задач.

Знания и умение решать профессионально ориентированные задачи приобретаются студентами в процессе изучения общих профессиональных дисциплин курса. Постановка профессионально ориентированных задач требует, как известно, весьма глубоких знаний, относящихся и непосредственно к математической науке, и к той области, к которой принадлежит изучаемая задача [3].

Профессиональная ориентация преподавания математики студентам специальности экономических специальностей является важным фактором решения дидактических проблем обучения. Одной из главных составляющих профессиональной подготовки мы считаем профессионально ориентированное обучение, предусматривающее ориентацию всех изучаемых дисциплин на конечные результаты обучения, связанные с приобретением конкретной специальности (в нашем случае речь идет об экономических специальностях). Профессиональная ориентация преподавания математики базируется на организации учебной деятельности, направленной на профессиональную деятельность. Такой подход требует создания дидактического обеспечения, использующего задачи с профессионально ориентированным содержанием [6].

Формирование компетенций экономиста сводится в основном к формированию умений владеть способностью строить и выбирать

математические модели организационных систем, анализировать их адекватность, проводить адаптацию моделей к конкретным задачам управления. А развитие таких умений в рамках курса математики может осуществляться через модельные задачи прикладного содержания, связанных в сквозную траекторию через все разделы курса математики [2]. Поэтому, важное значение имеет проблема разработки таких задач и упражнений, которые помогали бы формировать вышеперечисленные умения и служили средством для эффективного применения теоретического материала и развития исследовательских навыков, а также способствовали изучению способов, методик, схем их (задач) применения в учебном процессе. В настоящей работе мы рассматриваем некоторые приемы конструирования и примеры использования так называемых модельных задач.

Под модельными задачами обычно понимаются задачи, возникающие при математической формализации конкретных практических ситуаций физики, экономики химии или других наук, другими словами задачи, представляющие собой математические модели. Выполнение студентами заданий, основанных на использовании модельных задач, делает изучение математики более целенаправленным и содержательным, способствует повышению интереса как к самой математической науке, так и применению математических методов на практике.

Возможны разнообразные способы и схемы использования модельных задач в учебном процессе, например, в типовых расчетах, самостоятельных и контрольных работах, на лекциях и практических занятиях при введении или иллюстрации новых математических понятий, в курсовых или дипломных работах. Однако, при этом прослеживается следующая схема:

- На первом этапе формулируется учебная проблема в форме практической задачи, уже описанной на языке специальной дисциплины и подлежащая исследованию средствами и методами математики.
- Сформулированная задача формализуется, переводится на язык математики, т.е. строится математическая модель. На этом этапе возможно возникновение проблемной ситуации, заключающейся в том, что для формализации может быть недостаточно математических знаний. Разрешение этой проблемной ситуации является стимулом для расширения теоретических знаний, введения и изучения новых математических понятий, методов, алгоритмов.
- Полученные в результате математического решения новые теоретические знания о прикладной задаче интерпретируются, т.е. переводятся на язык, в котором формулировалась задача.

Понятно, что описанная схема не абсолютна и не может применяться на каждой лекции, семинаре или практическом занятии. Формы, методы и способы ее реализации разнообразны и определяются методическими

целями и дидактическими задачами учебного процесса.

Эффективность использования модельных задач при изучении математики обуславливается тем, что наибольшая познавательная активность студентов достигается в исследовании вопросов, напрямую связанных с их будущей специальностью.

Высокий обучающий эффект достигается при применении сквозных моделей, т.е. моделей, изучение которых может быть продолжено на протяжении нескольких тем или разделов курса математики. Применении модельных задач в течении ряда лет применяются в типовых расчетах курса математического анализа на экономическом факультете Кубанского госуниверситета в конструкциях типовых расчетов. Как показывает анализ результатов, применение решения модельных задач позволяет студентам не только глубоко освоить необходимые знания теории, но и приобрести ценный опыт их практического использования, что в свою очередь опять же влияет и на глубокое теоретическое осмысление знаний и содействует приобретению опыта их творческого применения. В итоге развивается интеллект студента, формируются его профессиональные компетенции и, как следствие – его професионализм.

Приведем примеры таких задач из типовых расчетов по математике. Отметим, что задания выдаются в параметрической форме и при конструировании вариантов заданий представляется эффективным использовать системы генерации параметров.

Задание 1

В таблице (ниже) приведены данные о дневной производительности 5 предприятий, выпускающих 4 вида продукции с потреблением 3 видов сырья, а также продолжительность работы каждого предприятия в году и цена каждого вида сырья. Требуется определить:

- 1) годовую производительность каждого предприятия по каждому виду изделий;
- 2) годовую потребность каждого предприятия по каждому виду сырья;
- 3) годовую сумму кредитования каждого предприятия для закупки сырья, необходимого для выпуска продукции указанных видов и количеств.

По данным таблицы составить новую таблицу по следующим условиям:

- дневная производительность всех предприятий увеличивается на 100%;
- число рабочих дней в году для первого предприятия увеличивается на 50%, а для остальных – на 40%;
- цены на виды сырья уменьшаются соответственно на 10, 20 и 30%.

Определить суммы кредитования предприятий и их соответствующие процентные изменения.

Таблица 3

Вид изделия, №п/п	Произв. предприятий, изд. /день	Затраты видов сырья изделия, ед. веса / изд.							
		1	2	3	4	5	1	2	3
1	4	5	3	6	7	2	3	4	
2	0	2	4	3	0	3	5	6	
3	8	15	0	4	6	4	4	5	
4	3	10	7	5	4	5	8	6	
	Кол-во рабочих дней в году	Цена видов сырья							
	1	2	3	4	5	1	2	3	
	200	150	70	20	40	40	50	60	

Задание 2

В таблице приведены данные по балансу за некоторый промежуток времени между тремя отраслями промышленности. Необходимо:

1) найти векторы конечного потребления и валового выпуска;

2) найти матрицу коэффициентов прямых затрат; определить является ли она продуктивной, используя два критерия продуктивности;

3) установить объём валового выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям возрастет соответственно до y_1, y_2, y_3 условных денежных единиц. Решить задачу одним из методов: Крамера, обратной матрицы, Гаусса, Жордана – Гаусса.

4) определить процентные изменения валовых выпусков, необх. для обеспечения заданного увеличения компонент вектора конечного продукта.

Таблица 4

	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
1	20	5	35	40	100
2	10	10	20	10	50
3	15	5	20	60	100
	$y_1 = 60, y_2 = 30, y_3 = 70$				

Задание 3

В регионе M в году X было вложено инвестиций по месяцам соответственно a_1, a_2, \dots, a_{12} (в млн р.) в сельское хозяйство региона и по месяцам соответственно b_1, b_2, \dots, b_{12} (в млн р.) – в промышленность региона. Тогда как, за год У инвестировали по месяцам соответственно c_1, c_2, \dots, c_{12} (в млн р.) также в сельское хозяйство данного региона и d_1, d_2, \dots, d_{12} (в млн р.) – в промышленность региона. Требуется:

- 1) задать матрицу A , отражающую инвестирование в сельское хозяйство района M ;
- 2) задать матрицу B , отражающую инвестирование в промышленность района M ;
- 3) выписать матрицу, характеризующую сумму инвестиций как в сельское хозяйство, так и в промышленность региона M в каждом году;
- 4) зная распределение инвестиций в сельское хозяйство в году X по месяцам, составить дискретный вариационный ряд и изобразить его графически;
- 5) зная распределение инвестиций в промышленность в году Y по месяцам, составить дискретный вариационный ряд, найти среднюю арифметическую, медиану и моду дискретного вариационного ряда.

Примечание: данная модельная задача прикладного содержания позволяет будущему экономисту анализировать реальные явления и процессы, происходящие в экономике с математической точки зрения. Изменяя параметры a_i , b_i , c_i и d_i , характеризующие количество инвестиционных вложений, получаем множество вариантов задач, о конструировании которых мы упоминали выше.

Задание 4

Зависимость управленческих расходов R от объема произведенной продукции P определяется формулой $R = ap + \frac{b}{c + p} + d$.

При данных параметрах $a=3$, $b=1452$, $c=16$, $d=17$, определить:

- 1) Средние и предельные расходы при объеме продукции $P = 10$ условных единиц.
- 2) Эластичность расходов при выпуске продукции, равном $P=1$ и $P=5$ условных единиц.
- 3) При каком объеме выпущенной продукции управленческие расходы будут минимальны?
- 4) Как изменятся расходы при увеличении объема произведенной продукции на 5% от минимального объема?

Отметим ещё одну конструкцию типового расчета, основанного на модели рыночного равновесия, которая может использоваться по описанной схеме в курсе высшей математики на экономических специальностях [5].

Начальный этап формирования модели (темы графики элементарных функций, решение уравнений):

Задание 5

Пусть кривая спроса определяется функцией $ps(q)$, а кривая предложения функцией $ph(q)$.

1. Построить на одном чертеже графики зависимости спроса, предложения от цены. Найти точку, определяющую рыночную цену. Определить на графике области избыточного предложения и избыточного спроса.

2. Определить по графику изменение спроса в зависимости от цены.

(Что происходит со спросом когда растет цена, что происходит с кривой спроса при росте цен?)

3. Определить по графику изменение предложения в зависимости от цены. (Что происходит с предложением когда растет цена, что происходит с кривой предложения при росте цен?)

4. Рассчитать ценовую эластичность спроса и ценовую эластичность предложения. Оценить является ли спрос и предложения эластичными, неэластичными, с единичной эластичностью. (Указание: ценовая эластичность спроса и предложения определяются по формулам:

$$Es := \frac{ps(q)}{ps'(q) \cdot q}; Eh := \frac{ph(q)}{ph'(q) \cdot q}.$$

5. Определить ренту (излишек) продавца и покупателя.

6. Как изменится рыночная равновесная цена, если изменение цен на сырье привело к изменению функции предложения в виде $ph1(q) = ph(q) + c$.

7. Оценить изменение ренты покупателя и продавца, если государство установило потолок цен Pso .

Параметры условия: В зависимости от параметра j в i -варианте необходимо выбрать по следующему правилу формулы задания функций спроса $Ps(q,i)$ и предложения $Ph(q,i)$.

j	$Ps(q,i)$	$Ph(q,i)$
1	$A_i/(q+b_i)$	$k_i q$
2	$-A_i q + b_i$	$k_i q + q^2$
3	$A_i/(q+b_i)$	$k_i q + q^2$

Матрица параметров

i	j	A	b	k	c	Pso
1	2	8.0	185.50	11.50	65.50	85.47

Используя подобную задачу в типовых расчетах матрицу параметров для различных вариантов можно задавать таблично для любого количества вариантов.

Задание 6

В отчетном году по городу розничный товарооборот увеличился на 9%. Прирост товарооборота за счет роста объема продаж составил 3%. Определить, на сколько процентов увеличился розничный товарооборот за счет роста цен.

Задание 7

По трем предприятиям отрасли имеются следующие данные:

Предприятие	Выпуск продукции, тыс. руб.	Производительность труда 1 рабочего, тыс. руб.	Энергоооруженность 1 рабочего, тыс. кВт/час
	a	b	c
1	1800	6,0	10,4
2	1200	2,4	5,8
3	1720	8,6	12,2

Определить среднее значение каждого признака.

Подобного рода задачи с профессионально ориентированным содержанием разрабатываются в соответствии с программой курса математики и охватывают все его основные разделы. Они могут предлагаться студентам в виде типовых расчетов, выполнение которых рассчитано на продолжительное время, в виде самостоятельных или контрольных работ непосредственно на занятиях, в виде курсовых работ и т.д. В учебном процессе задачи с профессионально ориентированным содержанием могут выполнять разные функции: служить средством усвоения математических знаний, овладения навыками их применения, стимулировать познавательную и исследовательскую деятельность студентов, служить средством контроля за усвоением изучаемого материала и т.д. Содержание конкретных заданий зависит от методических целей и задач, которые решаются в учебном процессе, формы, в которой индивидуальное задание предлагается студентам.

В системе подготовки экономистов курс математики обладает высоким интеграционным потенциалом. Это позволяет реализовать многоуровневую интеграцию через реализацию интеграционных связей на внутрипредметном и межпредметном уровнях, а также синтез информационных и дидактических технологических компонентов, учебных и профессионально ориентированных видов деятельности [8]. При этом наряду с научно-педагогической интеграцией курса математики в структуру экономических специальностей большое значение приобретает и программно-аппаратная интеграция информационных технологий.

В том числе целесообразно использование электронных образовательных ресурсов, выполнение различных типовых расчетов и лабораторных работ, проведение консультаций студентов, посредством электронной почты и других возможностей электронных ресурсов,

направленных на формирование профессиональной подготовки специалиста, которую закономерно рассматривать не как «овладение ремеслом», а как процесс становления и развития профессионально-грамотной личности. Поэтому формирование компетентности, как следствия формирования профессиональных компетенций, т. е. способности применять знания в реальной жизненной ситуации, остается одной из наиболее актуальных проблем современного образования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кострова Ю. С. Генезис понятий «компетенция» и «компетентность» // Молодой ученый, 2011. – № 12, Т. 2. – С. 102-104.
2. Грушевский С. П. Задачные дидактические конструкции при изучении математического анализа // Современные проблемы школьной и вузовской подготовки: Сб. науч. тр. – Краснодар, 2000. – С.103-113.
3. Григулецкий В. Г., Ященко З. В. Высшая математика для экономистов: Учеб. пособие для вузов. – Краснодар, 2001.
4. Далингер В. А. Методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике. – М., 1991. – 80 с.
5. Засядко О. В., Мороз О. В. Линейная алгебра и элементы линейного программирования: учеб.-метод. пособие. – Краснодар: КубГУ, 2012. – 126 с.
6. Грушевский С. П., Боровик О. Г., Засядко О. В., Карманова А. В, Шмалько С. П. Приложение в экономике функций, производной и интеграла: учеб.-метод. пособие. – Краснодар: КубГУ, 2010.
7. Грушевский С. П., Мороз О. В. Конструирование дидактического обеспечения курса математики для полипредметных специальностей (на примере специальности «Регионоведение») // Образовательные технологии, 2009. – № 2.
8. Грушевский С. П., Засядко О. В. Математика и информатика. Учебное издание. – Краснодар: КубГУ, 2006. – 157 с.

УДК 372.851, 378.1, 519.711.3

Н. И. Еремеева (г. Димитровград)

ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КОМПЕТЕНЦИЙ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

В статье обосновывается необходимость формирования у студентов навыков самостоятельного приобретения и использования в своей деятельности математических знаний и приводится пример использования новой формы самостоятельной работы студентов, способствующей выработке данных математических компетенций.

Быстрое развитие современной науки и техники диктует новые подходы к подготовке специалистов в высших технических учебных заведениях. В настоящий момент компетентность предполагает не только наличие высокого уровня знаний, но и умение быстро осваивать новое, уметь применять это новое к практическим задачам. Специалист, обладающий современными математическими компетенциями, должен не только обладать прочными математическими знаниями, но и иметь опыт самостоятельной деятельности на основе этих знаний. В настоящий момент становится очень важной способность самостоятельно приобретать и использовать в практической деятельности математические знания и умения.

Для повышения качества подготовки выпускников технических специальностей наряду с традиционными занятиями (лекциями, семинарами) следует вводить новые формы работы со студентами. Новые виды работы должны не только способствовать формированию у студентов навыков самостоятельного приобретения и использования математических знаний, но и требовать от них умения применять в своей деятельности знания, полученные при изучении классического курса высшей математики.

Данным требованиям отвечает следующая форма работы. Студенческой группе предлагается:

- самостоятельно освоить новую технологию (математическое направление, методику, и т. п.);
- решить на основе полученных знаний конкретную практическую задачу;
- сделать доклад (публикацию) по результатам исследования.

При выборе темы изучения нужно обратить внимание на следующие моменты:

© Н. И. Еремеева, 2014

- тема исследования должна иметь практическое значение (быть актуальной);
- для освоения темы студенты должны применять знания, полученные из разных разделов курса высшей математики.

Схема данной формы работы студентов изображена на рисунке 1.

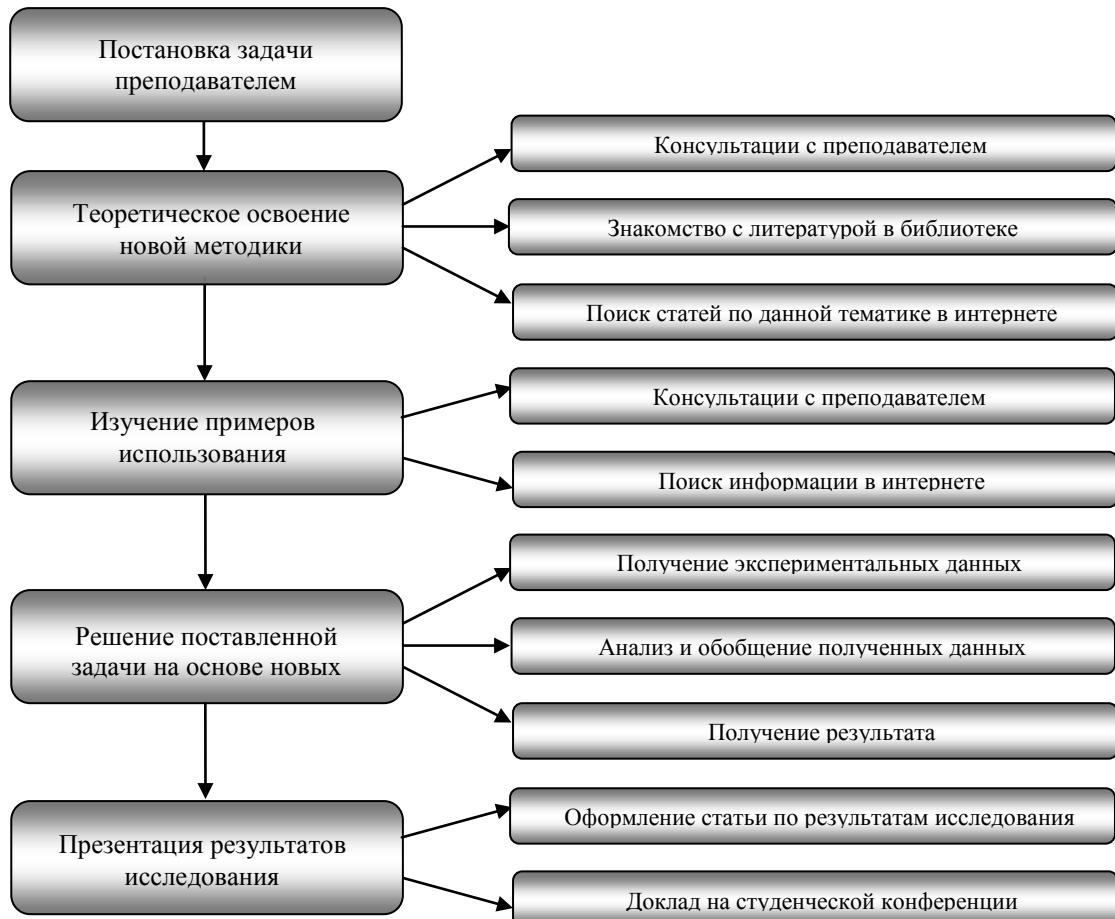


Рис. 1. Форма организации самостоятельной работы студентов

В качестве примера такого обучения приведем изучение студентами группы РБ-21 Димитровградского инженерно-технологического института НИЯУ МИФИ нечетких множеств.

Темы «Нечеткие множества» и «Нечеткая логика» не входят в классическую программу подготовки по математике в высших технических учебных заведениях. Данное направление в математике появилось сравнительно недавно. Понятия «Нечеткие множества» и «Нечеткая логика» были впервые предложены американским ученым Лотфи Заде в 1965 г. Их возникновение связано с введением так называемых лингвистических переменных, описывающих неточное (нечеткое) отражение человеком окружающего мира.

Категория нечеткости и связанные с ней модели и методы очень важны с мировоззренческой точки зрения, поскольку с их появлением стало возможно подвергать количественному анализу те явления, которые раньше либо могли быть учтены только на качественном уровне, либо требовали использования весьма грубых моделей.

В настоящее время нечеткий подход к моделированию сложных систем получил признание во всем мире. Нечеткие экспертные системы для поддержки принятия решений находят широкое применение в медицине, экономике, автомобильной, аэрокосмической, транспортной промышленности, в области изделий бытовой техники.

Теория нечетких множеств и нечеткого управления на сегодняшний момент является одной из самых активных и результативных областей исследований. Изучение этой темы полезно не только с педагогической точки зрения (формирование необходимых общекультурных компетенций), но и для создания математической базы будущего специалиста (формирование профессиональных компетенций).

Отметим, что при изучении темы «Нечеткие множества» студенты не только освоили новый для них теоретический материал, но и применили его для решения конкретной задачи оптимизации (определение оптимального количества жира и белков в молочной колбасе). При решении задачи они продемонстрировали способность интегрировать знания из разных разделов курса математики (линейная алгебра, теория вероятностей и математическая статистика, функции многих переменных, использование вычислительных мат. пакетов). В своей работе они совмещали аналитические и экспериментальные методы (рис. 2), учились аргументировано и грамотно строить математическую речь, а так же готовить полученный материал к презентации (рис. 3).



Рис. 2. Экспериментальный этап исследования

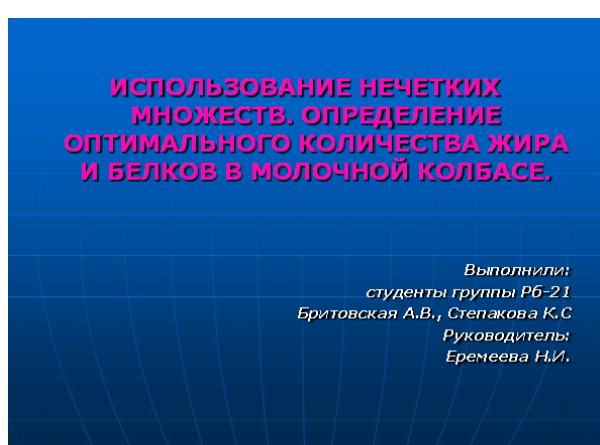


Рис. 3. Презентация результатов

Проведенная работа способствовала формированию у студентов следующих математических компетенций:

- владение математической культурой мышления;
- способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения;
- умение грамотно и ясно строить математическую устную и письменную речь;
- наличие навыков совместной работы в коллективе;
- способность самостоятельно приобретать и использовать в практической деятельности математические знания и умения;
- умение интегрировать знания из разных разделов курса математики;
- способность применять экспериментальные, аналитические и вычислительные методы для решения прикладных задач в области техники;
- умение использовать математику для принятия научно-обоснованных решений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кудрявцев Л. Д. Мысли о современной математике и методике ее преподавания: учеб. пособие. – М.: Физматлит, 2008. – 434 с.
2. Плахова В. Г. Математическая компетенция как основа формирования у будущих инженеров профессиональной компетентности // Известия РГПУ. Аспирантские тетради. – 2008. – № 38. – С. 131-136. [электронный ресурс] – Режим доступа. – ftp://194.226.213.129/text/plakhova_38_82_p131_136.pdf
3. Грачев Ю. П. Математические методы планирования эксперимента. – М.: Пищевая промышленность, 1997. – 200 с.

УДК 37.12.7(063)

Г. М. Ильмушкин (г. Димитровград)

СПЕЦИФИКА ОРГАНИЗАЦИИ САМООБРАЗОВАНИЯ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ

В работе выделяются особенности организации самообразования и самостоятельной работы студентов технических специальностей в процессе изучения математических дисциплин.

Деятельность по организации самообразования и самостоятельной работы представляют собой специфическую особенность в формировании математической компетентности инженера по технической специальности, ибо вне такой деятельности становится практически нереальным успешное формирование данной компетентности. Специфика математического образования такова, что она требует постоянного обновления своих знаний и творческого саморазвития, прежде всего, средствами самообразования, ибо в данной области происходит быстрое расширение информационного потока. И в то же время организация самообразования в данной предметной области знаний для студентов представляет собой на фоне других дисциплин значительные трудности. Прежде всего, это связано с особой сложностью изучения самих объектов математики, они трудны для понимания и восприятия, требуют усидчивости, настойчивости, целеустремленности, масштабного проявления творческого потенциала личности, проработки насыщенного материала и рассмотрения целого комплекса прикладных задач, а также мотивационного интереса к ним. К сожалению, как свидетельствует педагогическая деятельность, большинство из студентов к этому не готовы.

Познавательная задача связана с потребностью в приобретении знания. Если мыслительная задача совпадает с познавательной, то возникает новое знание, полностью удовлетворяющее необходимому видоизменению ситуаций. Идеальным результатом обучения считается достижение такого уровня познавательной мыслительной деятельности, когда субъект познания может самостоятельно ставить познавательную задачу, находить способы ее решения, контролировать и оценивать результаты своей познавательной деятельности, а затем формулировать задачи. К мыслительным операциям относятся следующее: анализ, синтез, сравнение, конкретизация, классификация, систематизация, обобщение, абстрагирование. Операции мышления могут быть сформированы лишь в

процессе решения творческих задач. В решении поставленной задачи субъект использует тот или иной набор мыслительных операций или более сложных умственных действий в тех или иных сочетаниях.

По мнению В.Г. Разумовского, с точки зрения творческой деятельности наиболее ценные операции дивергентного и конвергентного мышления и оценки [2].

А. В. Брушлинский отмечал, что мыслительные процессы формируются главным образом неосознанно, но на уровне личностного, деятельностного аспекта мышления, человек в значительной степени осознанно с помощью рефлексии регулирует протекание этих процессов [2].

Самостоятельная работа студентов по математическим дисциплинам является многоплановой. Это связано с выбором содержания материала, его сложностью и объемом, видов выполняемых работ, контингентом студентов, используемыми технологиями обучения, значимостью учебного материала в процессе дальнейшего обучения математике, применением математических методов в специальных дисциплинах и в выполнении поисково-исследовательских работ. На младших курсах, самостоятельная работа студентов проявляется выполнением текущих домашних заданий (решение практических задач, проработка лекционного материала по определенной теме, написание рефератов, самостоятельное изучение некоторых несложных материалов по дисциплине и т.д.). Одним из эффективных форм организации самостоятельной работы студентов является выполнение многоуровневых типовых индивидуальных заданий. Студентам предлагается к определенному сроку выполнить самостоятельно задания по математике по мере изучения теоретического материала, задания предлагаются различного уровня сложности, студент в зависимости от уровня своей математической подготовленности выбирает тот или иной уровень сложности предложенного задания. При этом студент имеет возможность по мере приобретения навыков решения определенного класса типовых задач переходить к более сложным уровням. Такой подход позволяет каждому студенту активно участвовать в выполнении таких работ с учетом его подготовленности, развивает мотивацию учения, поскольку он имеет возможность проверить и испытать себя на более сложных уровнях. В свою очередь, педагогом учитывается его продвижение в процессе выставления итоговой семестровой оценки. Выполнение таких типовых заданий обеспечивают непрерывность математического образования студентов. Они должны их выполнять параллельно в процессе изучения теоретического материала и представить к сроку, кроме того защититься по ним. В типовые задания в обязательном порядке включаются задачи, связанные с составлением того или иного алгоритмического процесса, при необходимости требуется

разработки несложных алгоритмических программ с выходом на ЭВМ. Преподавателям особое внимание обращается на выполнение студентами подобного типа задач, они бесценны для студентов, поскольку способствуют развитию у них алгоритмического мышления и творческих и поисково-исследовательских способностей. По итогам самостоятельного изучения студентами теоретического материала они периодически сдают теоретические коллоквиумы, результаты которых учитываются существенным образом при итоговом оценивании знаний студентов (если студент по итогам коллоквиума проявил достаточные теоретические знания по теме, то он по этой не будет экзаменоваться). Существенное место в успешной организации самостоятельной работы студентов играют текущие контрольные работы, они готовятся заранее по определенной теме к выполнению контрольной работы, результаты в дальнейшем учитываются. В частности, на итоговом экзамене студенту уже не предлагаются задачи по теме, по которой он успешно справился в процессе выполнения контрольной работы. В организации самостоятельной работы имеет существенное значение своевременная помощь преподавателя. Математика как дисциплина очень сложная, поэтому не всегда студент может разобраться самостоятельно в предметном материале. В этой связи наиболее сложные вопросы преподаватель рассматривает на специальных консультациях или во время аудиторных занятий. Полезно в курсе изучения математики предлагать студентам рефераты по отдельным интересным вопросам математики и по ним выступить на специальном семинаре. Такой вид работы им нравится и их мотивирует к предметному обучению. Как мы видим, математические дисциплины имеют свои особенности в плане организации самостоятельной работы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Брушлинский А. В., Поликарпов В. А. Мысление и общение. – М.: Университетское, 1990. – 214 с.
2. Разумовский В. Г. Развитие творческих способностей учащихся / В. Г. Разумовский. – М.: Просвещение, 1975. – 272 с.

E. A. Мельникова, M. C. Фадеев (г. Тольятти)

ПРИМЕНЕНИЕ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ В АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ОБУЧАЮЩЕЙ СИСТЕМЕ

В статье представлена автоматная модель, которая применяется для управления процессом обучения в автоматизированной системе обучения. Автоматная модель обеспечивает адаптацию процесса обучения к индивидуальным характеристикам пользователя. На основе предложенной модели управления обучением разрабатывается автоматизированная система обучения.

Автоматизированные системы обучения являются одним из действенных средств повышения эффективности учебного процесса и позволяют обеспечить адаптацию процесса обучения к индивидуальным характеристикам обучаемых по уровню знаний, разгрузку преподавателя от ряда трудоемких повторяющихся операций, связанных с предъявлением учебной информации и контролем знаний [1].

Учебный процесс может быть сформирован как конечное множество возможных сценариев обучения. Каждый сценарий представляет собой некоторую фиксированную последовательность теоретического материала и тестовых заданий. Выбор сценария осуществляется с учетом индивидуальных особенностей ученика, выявленных на начальном этапе тестирования. Другой вариант – это использование интеллектуальных технологий, которые позволяют редактировать процесс обучения на каждом новом этапе обучения: есть заранее определенные стратегии обучения, которые могут сменяться в зависимости от поведения ученика.

С точки зрения индивидуализации процесса обучения второй вариант более предпочтителен. Для реализации адаптивной модели обучения могут быть применены продукционные правила [2,3]. У продукционных систем есть известные недостатки: при накоплении достаточно большого числа трудно отследить их непротиворечивость, трудно интерпретировать. Эти недостатки отсутствуют в автоматной модели.

Рассмотрим вариант моделирования процесса обучения с помощью конечных автоматов [4]. Процесс обучения можно представить как последовательность уроков. На каждом уроке обучаемому предлагается изучить лекционный материал и пройти по данному материалу тестирование. Для реализации стратегий теоретический материал по каждой теме разбивается на блоки нескольких уровней: для углубленного

изучения, для среднего уровня обучения, а также есть вариант более подробного изложения материала с большим количеством примеров, объяснений. После завершения теста система принимает решение об изменении темы и уровня сложности предлагаемого ученику материала.

Рассмотрим возможный вариант моделирования процесса обучения с помощью конечных автоматов. Процесс обучения можно представить как последовательность уроков. На каждом уроке ученику предлагается изучить лекционный материал и пройти по данному материалу тестирование. Для реализации стратегий теоретический материал по каждой теме разбивается на блоки нескольких уровней: для углубленного изучения, для среднего уровня обучения, а также есть вариант более подробного изложения материала с большим количеством примеров, объяснений. После завершения теста система принимает решение об изменении темы и уровня сложности предлагаемого ученику материала, то есть система может перевести обучаемого:

- на следующий урок без изменения уровня сложности;
- на повторение урока без изменения сложности;
- на следующий урок с повышением уровня сложности;
- на повторение только что пройденного материала с понижением сложности;
- на следующий урок с понижением уровня сложности.

Решение о дальнейшем ходе обучения принимается с помощью автомата на основе характеристик обучаемого.

Таблица 1. Характеристики обучаемого

X		Y		Z	
0	время выполнения теста больше нормы	1	0 – 60%	1	0 – 60%
1	время выполнения теста не меньше нормы	2	60 – 90%	2	60 – 90%
		3	90 – 100%	3	90 – 100%

Конечное множество состояний автомата содержит 5 состояний. Состояние определяется парой целых чисел, каждое из которых может принимать значение -1 , 0 , 1 . Первое число означает изменение уровня сложности, а второе – изменение темы. То есть состояние « 0_1 » означает перевод обучаемого на следующий урок без изменения уровня сложности, состояние « -1_0 » – повторение только что пройденного материала с понижением сложности и т.д.

Стартовым состоянием является $q_0 = \{0_1\}$.

Финальными вершинами являются $F = \{0_1\}, \{1_1\}, \{-1_1\}$.

Входной алфавит состоит из троек (X, Y, Z) , где

- X – среднее время выполнения тестов,

- Y – средний результат выполнения тестов,
- Z – результат выполнения последнего теста.

Используемые значения представлены в таблице 1.

Таблица 2. Функция переходов автомата

	0 1	0 0	1 1	-1 0	-1 1
0_1	(122) (123) (022) (023) (032) (033)	(AA1)	(132) (133)		(012) (013) (112) (113)
0_0	(AA3) (122) (132) (032)			(AA1) (022) (112) (012)	
1_1	(AA2) (AA3)	(AA1)			
-1_0	(AA3)			(AA1) (AA2)	
-1_1	(AA2) (AA3)	(AA1)			

Функция переходов автомата представлена в таблице 2. Символ «A» – любой из символов 1, 2, 3. На основе состояния автомата определяется тема, предлагаемая ученику для изучения, и уровень сложности учебного материала. Графическое изображение автомата представлено на рис. 1.

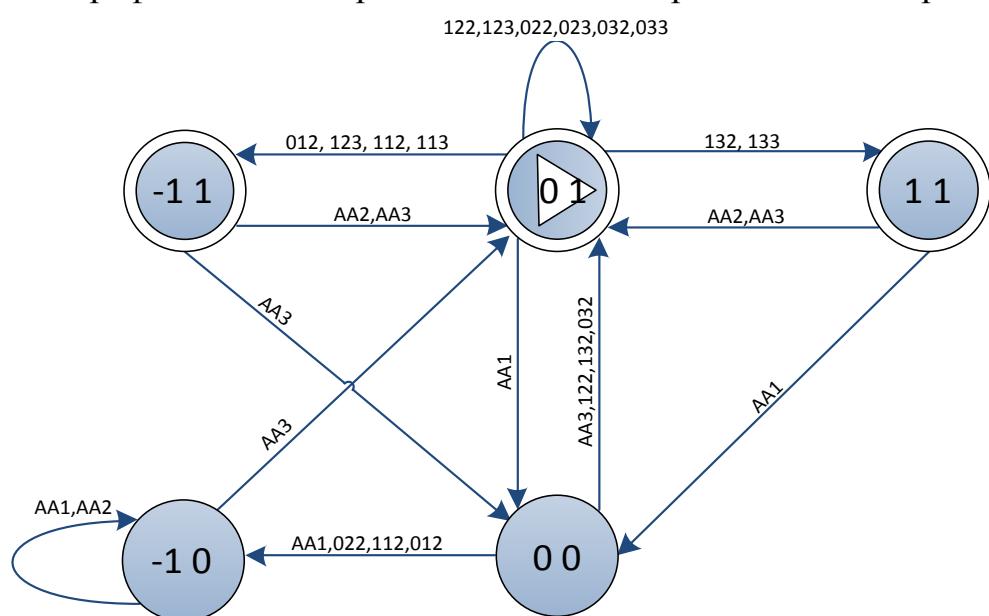


Рис. 1. Графическое представление автомата для определения состояния ученика в учебном процессе

Из описания модели следует, что для корректного управления процессом обучения необходимо максимально точно оценивать уровень усвоения учеником материала. Классическая схема организации тестирования, в которой создается массив из вопросов и случайным образом выбирается некоторое количество из них, не соответствует адаптивной модели обучения. В иерархической модели контроля знаний [5] каждый вопрос имеет подмножество дополнительных вопросов: если обучаемый ответил неправильно на поставленный вопрос, то из соответствующего подмножества задаются дополнительные вопросы. Такая схема контроля знаний позволяет более точно определить уровень усвоения учебного материала, но требует значительно больших затрат для создания теста.

На основе представленной автоматной модели была разработана адаптивная обучающая система, состоящая из следующих основных компонентов:

- модуль подготовки учебного материала,
- модуль обучения,
- модуль тестирования,
- модуль работы с учетными записями учеников,
- пользовательский интерфейс.

Модуль подготовки учебного материала позволяет преподавателю с помощью специального интерфейса подготовить материал для изучения конкретного курса. Учебные файлы подготавливаются в html-формате. Здесь же устанавливаются глобальные параметры курса, необходимые для корректной работы системы и используемые остальными компонентами в процессе обучения.

Модуль обучения управляет процессом обучения на основе автоматной модели и фактически взаимодействует с другими модулями для решения задач, возникающих на этапе обучения. Этот модуль отвечает также за формирование истории обучения ученика, в которой фиксируются следующие события:

- изученные темы,
- уровни обучения на каждом этапе,
- результаты тестирования на каждом этапе,
- частота и длительность занятий.

Модуль тестирования обеспечивает контроль знаний обучаемого, организует процесс адаптивного тестирования в соответствии с местом ученика в учебном процессе. Для корректного управления процессом обучения необходимо максимально точно оценивать уровень усвоения учеником материала. Классическая схема организации тестирования, в которой создается массив из вопросов и случайным образом выбирается некоторое количество из них, не соответствует адаптивной модели

обучения. Тестовый материал так же, как и теоретический, имеет три уровня сложности с учетом разного уровня знаний обучаемых, их подготовленности. В зависимости от уровня определяется количество вопросов теста, их сложность.

Кроме того, при формировании тестового набора вопросы выбираются случайным образом не просто по всему множеству вопросов темы, а так, чтобы присутствовали вопросы из каждого подмножества, относящегося к определенному сегменту темы. Это позволяет устранить недостаток, что один или несколько сегментов темы оказались бы не охвачены тестом. Для организации процесса тестирования также разрабатывается автоматная модель.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Жукова И. Г., Сипливая М. Б., Шабалина О. А. «Концепция открытой адаптивной контрольно-обучающей системы на основе персонализации процесса обучения» // Системотехника, 2003. – № 1.
2. Левинская М. А. «Продукционная модель интерактивной компоненты обучающей системы» // МКО-10, 2002.
3. Мельникова Е. А., Соболева Е. В. Адаптивная модель обучения и её реализация на основе экспертной системы // Коллективная монография «Эвристические алгоритмы и распределенные вычисления». – Тольятти: ТГУ, 2012.
4. Мельникова Е. А. Моделирование процесса обучения с помощью конечных автоматов // Материалы научно-практической конференции «Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики». – Тольятти: ТГУ, 2014.
5. Дулин С. К., Репьев А. В. Программная реализация обучающей системы на основе адаптивной модели обучения // Программные продукты и системы, 2007. – № 1.

УДК 510.6

A. P. Сибирева (г. Ульяновск)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ВЛИЯНИЕ СРЕД НА ПРОЦЕСС ВНЕДРЕНИЯ ИННОВАЦИИ В ПЕДАГОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В работе рассмотрены разные типы воздействия сред на процесс внедрения инновации в педагогических системах. Дан обзор соответствующих математических моделей. Использована синергетическая методология, позволяющая выявить общность математических моделей при описании динамики процессов в различных педагогических системах.

Вопросы математического моделирования социальных, педагогических систем актуальны во все времена. Р. Декарт, Г.В. Лейбниц своей главной задачей считали философско-математическое описание существующего мира. Эта задача решалась с помощью доступного математического аппарата. Для Декарта – это алгебраические уравнения, для Лейбница – аппарат дифференциального и интегрального исчисления, для математиков 18–19 века – дифференциальные уравнения.

В первой половине 20 века Н. Винер создает междисциплинарное направление «кибернетика», основные понятия которого – «информация», «информационный поток», «управление». Бестселлером становится его книга «Кибернетика и общество» [2]. Кибернетика использует аппарат бурно развивающейся теории вероятностей. В 60-е годы методы и модели кибернетики широко используются для описания технических, информационных систем, экономических систем.

В 90 годы правопреемницей кибернетики становится синергетика. Ее основатель – Г. Хакен. Синергетика изучает динамику поведения открытых сложных систем произвольной природы (биологических, социальных, технических и др.), связи между элементами их структуры. Синергетика – междисциплинарное направление, подразумевающее совместную работу специалистов предметной области и математиков. Ее язык – это язык математического моделирования, теория нелинейных дифференциальных уравнений. Вопросы общей методологии рассматривались в работах В. И. Аршинова, Ю. А. Данилова, Б. Б. Кадомцева, С. П. Капицы, Е. Н. Князевой, С. П. Курдюмова, А. Ю. Лоскутова, А. П. Назаретяна, Дж. Николис, И. Пригожина, А. П. Руденко, И. Стенгерс и др. Синергетический подход в педагогике

использован в работах В. И. Аршинова, М. В. Богуславского, В. Г. Буданова, В. Г. С. П. Капицы, Е. Н. Князевой, С. П. Курдюмова, Г. Г. Малинецкого, Т.И. Шамовой и др.

В. Г. Буданов в книге «Методология синергетики в постнеклассической науке и в образовании» описывает этапы синергетического моделирования:

- постановка задачи на языке предметной области;
- согласование языка дисциплины с языком синергетики, синергетическая интерпретация основных понятий и эмпирических результатов исследования;
- выделение базовых процессов, выявление, проверка и согласование принципов синергетики в эмпирическом материале;
- построение структурно-функциональной когнитивной модели;
- математическое моделирование (построение динамической модели, задающей вид дифференциальных уравнений, начальные условия и т.д.; построение «реальной» модели опытным нахождением коэффициентов, фигурирующих в изучаемых уравнениях; решение задачи; сравнение найденного решения с итогами эксперимента, трактовка результатов; корректировка модели)[1].

Инновацией в педагогических системах, следуя определению инновации, данному А. И. Пригожиным [10], будем считать целенаправленный процесс, результатом которого является образование новых стабильных элементов системы.

В работах авторов [11], [14] произведено описание элементов системы «инновация», которыми названы основные процессы и соответствующие им информационные потоки. Приведена типология информационных потоков, описаны взаимосвязь и взаимодействие между ними, динамика поведения в стадиях становления и стабильного функционирования системы. В работе [15] рассматриваются различные типы воздействия сред на эти потоки. Приводимые построения позволяют трактовать на основе единой структурно-когнитивной модели различные математические модели инновации.

Среда – это совокупность взаимосвязанных условий, влияющих на педагогическую систему. Влияние сред является определяющим для динамики протекания процесса «инновация». Один из принципов синергетической методологии – «принцип иерархичности» [1, с. 49], согласно которому все процессы образуют иерархическую структуру, в зависимости от скорости их протекания, при этом медленные процессы управляют быстрыми. Процессы, протекающие в средах, несомненно медленнее, чем процессы внедрения нововведений. Согласно терминологии, принятой в синергетике, параметры, характеризующие среды, занимают верхний иерархический уровень по отношению к

параметрам, описывающим процессы системы «инновация».

Синергетический «принцип наблюдаемости» [1, с. 49] гласит, что для внешнего и внутреннего наблюдателей системы, для наблюдателей, расположенных на разных иерархических уровнях системы, описание системы – различно. Для внешнего наблюдателя недоступны процессы, происходящие внутри системы, для него появление внедряемого нововведения происходит как «по мановению волшебной палочки».

Восприятию внешнего наблюдателя отвечает задача на изучение точек бифуркации, аттракторов, их устойчивости, зон притяжения аттракторов для системы нелинейных дифференциальных уравнений, где переменные характеризуют состояние системы, а влияние сред отражено в виде постоянных параметров. Среды характеризуются значительно более медленным протеканием процессов, поэтому параметры, их характеризующие, в подобных задачах принято считать постоянными. Изучается зависимость поведения решений системы уравнений от этих параметров (см. [7], [8]). Используются методы грубого моделирования, где малое количество параметров характеризует качественное поведение системы. Для внешнего наблюдателя точка бифуркации – точка появления нововведения.

Такому подходу соответствуют целевые математические модели, используемые в экономике, менеджменте. В таких задачах влияние сред на целевые параметры инновации и скорость их изменения представлено постоянными коэффициентами в нелинейных дифференциальных уравнениях, приток ресурсов из внешних сред – постоянными свободными членами.

Среды являются источником ресурсов для инновации. Для внутреннего наблюдателя системы «инновация» в период её стабильного функционирования влияние ресурсов, поступающих из внешних сред, может быть описано с помощью ресурсно-целевой модели. Изменение ресурсов описывается функцией от времени $\varphi(t)$, называемой управляющей функцией. При составлении дифференциальных уравнений полагают, что скорость изменения целевых параметров зависит от них самих и от $\varphi(t)$.

В книге Н. Н. Моисеева «Простейшие математические модели экономического прогнозирования» [9] в научно-популярной форме рассматриваются задачи зависимости произведенного продукта (т.е. целевого параметра) от рабочей силы, фондов, ресурсов. Задачи управления в экономике изучались в трудах Н. Н. Моисеева, Г. С. Поспелова, А. А. Петрова, И. Г. Поспелова, Ю. П. Иванилова, А. В. Лотова, Г. Б. Молдашевой, А. П. Крутова, В. Н. Буркова, В. В. Кондратьева, А. Ю. Бузина, В. В. Кришталь, В. А. Ирикова, А. Е. Курилова, А. А. Шананина, Н. Н. Оленева и др. Математические

модели такого типа приведены в книгах [3], [7], [8], [16] и др. Математический аппарат (без приложения к педагогическим системам) задач управления за конечное время для линейных и нелинейных дифференциальных систем уравнений разработан в работах В.И. Зубова, Е.В. Воскресенского, Н.Н. Красовского и др.

То, что для внешнего наблюдателя – точка бифуркации, для внутреннего наблюдателя процесс, в синергетике называемый кризисом. Система в этот период неустойчива, но оказывается, что кризис, хаос отличается удивительно четкой структурной организацией. Система при этом проходит через череду вполне определенных выборов (см. [14]). Для описания взгляда внутреннего наблюдателя в период кризиса применимы теория «русл и джокеров» Г. Г. Малинецкого, теория «перемешивающего слоя» Д. С. Чернавского [16]. При совершении каждого из выборов чередуются состояния «перемешивающего слоя», затем линейного процесса.

Математические модели, характеризующие взгляд внутреннего наблюдателя в период кризиса, позволит построить, в частности, теория «странных аттракторов» (см. [7], [17]), основоположниками которой являются Э. Лоренц, Д. Рюэль, Ф. Такенс. Математические свойства странных аттракторов схожи с наблюдаемыми свойствами информационных потоков инновации в период кризиса. Сходство математических и эмпирических свойств описано в работе автора [12]. Управление в системах со странными аттракторами изучалось в математических моделях физики (см., например, [17]).

Имеет место «включенность» процесса «инновация» в среды. В частности, информационные потоки инновации строятся на основе информационно-коммуникативной среды педагогической системы.

Существуют математические модели, изучающие коммуникации между участниками процесса без учета смысловой нагрузки информации. В книге В. П. Милованова «Неравновесные социально-экономические системы: синергетика и самоорганизация» [8] на основе описания коммуникации между участниками процесса построены модели: «возникновение лидерства в группах», «возникновения семьи», «устойчивость группы в экстремальных условиях», «возникновение чувств», «национальное чванство» и др. В книге В. И. Жегалова, С. Н. Киясова «Приложения обыкновенных дифференциальных уравнений» [3] построена математическая модель, описывающая разные схемы коммуникации, обмена информацией в научном коллективе. В. Г. Буданов [1] строит модель информационного взаимодействия образовательных учреждений региона. В учебнике Н. В. Макаровой, В.Б. Волковой «Информатика» [5] приводятся формулы Шеннона, Хартли и др., описывающие синтаксическую, семантическую и прагматическую

значимость информации, зависимость количества информации, воспринимаемой субъектом, от его тезауруса. Математическая модель и экспериментальные кривые, выявляющие зависимость результативности инновации образовательного учреждения от уровня сформированности информационно-коммуникативных потоков, описаны в работе авторов [13]. В изученной литературе целевые и информационные модели образуют отдельные классы задач. Актуально построение и изучение информационно-целевых математических моделей.

Среда в процессе инновации может изменяться. Согласно принципу иерархичности, изменения возможны в тех подсистемах среды, которые расположены на нижних иерархических уровнях, по сравнению с системой «инновация». Изменения накапливаются в этих подсистемах, возможен переход количества в качественно новое состояние среды.

Решая задачи прогнозирования или оптимизации при внедрении инновации, рассмотрим систему «инновация» и одну из нижних смежных подсистем как двухуровневую иерархическую систему. Здесь возможно применение математического аппарата общей теории иерархических систем, основы которой заложены Н.Н. Моисеевым и Ю.Б. Гермейером, в частности, методы решения задач двухуровневых систем с заданной реакцией или заданными интересами нижнего уровня, разработанные В.А. Гореликом.

Синергетическая структурно-когнитивная модель информационных потоков инновации позволяет увидеть единство в многообразии математических методов и моделей, описывающих динамику поведения педагогических систем.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Буданов В. Г. Методология синергетики в постнеклассической науке и в образовании. – М.: URSS : Изд-во ЛКИ, 2008. – 230 с.
2. Винер Н. Кибернетика и общество. – М.: Издательство иностранной литературы, 1958. – 202 с.
3. Жегалов В. И., Киясов С. Н. Приложения обыкновенных дифференциальных уравнений. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2007. – 179 с.
4. Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика и прогнозы будущего. – М.: Наука, 1997. – 295 с.
5. Макарова Н. В., Волкова В. Б. Информатика: учебник для экон. спец. вузов. – СПб. : Питер, 2011. – 576 с.
6. Малинецкий Г. Г. Математическое моделирование образовательных систем // Синергетическая парадигма. – М., 2007. – С. 329-345.
7. Малинецкий Г. Г. Математические основы синергетики. – М.: Издательство ЛКИ, 2007. – 312 с.
8. Милованов В. П. Неравновесные социально-экономические

системы: синергетика и самоорганизация. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 263 с.

9. Моисеев Н. Н. Простейшие математические модели экономического прогнозирования. – М. : Знание, 1975. – 64 с.

10. Пригожин А. И. Нововведения: стимулы и препятствия. – М. : Политиздат, 1989. – 270 с.

11. Сибирев В. В. Классификация информационных потоков при внедрении инновации в общеобразовательном учреждении // Сб. материалов IV Всероссийской научно-практической конференции «Психология и педагогика». – Новосибирск : Изд-во СИБПРИНТ, 2009. – Ч. 1. – С. 237-242.

12. Сибирева А. Р. Математическая модель «самоорганизации» педагогической системы в период кризиса // Вузовская наука в современных условиях. Сборник материалов 46 научно-технической конференции. – Ульяновск: УлГТУ, 2012. – С. 245-248.

13. Сибирева А. Р., Сибирев В. В. Анализ результатов эксперимента по выявлению зависимости результативности инновации в общеобразовательном учреждении от степени сформированности информационных потоков // Сб. науч. работ 6 Межд. конф. «Иновационные технологии». – Ульяновск: УлГУ, 2010. – № 1. – С. 74-79.

14. Сибирева А. Р., Сибирев В. В. Горизонтальные информационные потоки при внедрении инновации в общеобразовательном учреждении // Вестник ЧГПУ, 2012. – № 4. – С. 211-220.

15. Сибирева А. Р., Сибирев В. В. Влияние сред на информационные потоки инновации в педагогических системах // Вестник ЧГПУ, 2013. – № 4. – С. 197-209.

16. Чернавский Д. С. Синергетика и информация : (динамическая теория информации). – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 288 с.

17. Странный аттрактор. Энциклопедия физики и техники. [Электронный ресурс] www.femto.com.ua/articles/part_2/3914.html

УДК 510

B. A. Тестов (г. Вологда)

ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ РЕАЛИЗАЦИИ КОНЦЕПЦИИ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

В статье обсуждаются основные проблемы реализации принятой правительством России концепции развития математического образования (мотивация к изучению математики, обновление содержания обучения, подготовка учителей математики).

В последнее время руководством России осознана роль математического образования как основы конкурентоспособности России в XXI веке, необходимого элемента безопасности страны. Математическое образование является одной из немногих стержневых составляющих воспитания, средством развития интеллектуальных качеств подрастающего поколения. Поэтому правительством РФ в декабре 2013 г утверждена концепция развития математического образования. В этой концепции подняты многие актуальные проблемы математического образования. В качестве основной проблемы выделена низкая учебная мотивация школьников и студентов, что, по мнению авторов концепции, связано с бытующей в общественном сознании недооценкой математического образования, а также перегруженностью программ, оценочных и методических материалов техническими элементами и устаревшим содержанием.

Исследования показывают, что основными факторами, оказывающими отрицательное воздействие на отношение учащихся к изучению математики, являются следующие:

- а) необходимость решения большого количества задач со сложными выкладками (70% учеников);
- б) скучность, не эмоциональность предмета (65%);
- в) необходимость постоянной опоры на прошлый опыт (60%);
- с) большое количество непонятных терминов, символов, определений, которые необходимо запомнить (65%) [2].

Наиболее часто нелюбовь к математике проявляется при изучении ее некоторых разделов, в частности такого раздела, как тригонометрия, особенно при изучении обратных тригонометрических функций. Это еще раз подчеркивает тесную связь проблемы мотивации с проблемой содержания математического образования, которое продолжает устаревать и остается формальным и оторванным от жизни.

Психологические исследования В. А. Крутецкого выявили феномен предметной избирательности мотивации по отношению к математической деятельности. Необходимость учета специфики предметного содержания при внедрении тех или иных педагогических технологий подчеркивалась многими известными методистами. В частности, А. А. Столляр указывал, что вызвать интерес к предмету, очевидно, нельзя без учета специфики предмета, и эта педагогическая проблема решается по-разному для различных учебных предметов.

Таким образом, основной педагогической проблемой при изучении математики в общеобразовательной школе становится развитие учебной мотивации. Многие исследователи в качестве ведущего мотива учебно-познавательной деятельности выделяют познавательный интерес, который можно определить как когнитивно-мотивационное состояние личности, связанное с потребностью познания; существенное качество личности, направленное на овладение знаниями и способами познания и проявляющееся в положительно эмоционально окрашенной, избирательной, активной, познавательной деятельности.

К числу факторов, определяющих положительное отношение учащихся к математике, как отмечает М. А. Родионов [2], относятся

- а) возможность подумать при решении нестандартных задач (50% учащихся);
- б) решение занимательных задач, исторические экскурсы, научно-популярная информация (60% учащихся);
- в) математика необходима для продолжения образования (48% учащихся средних классов и 79% старшеклассников);
- г) объективность, доказательность, точность и универсальность математики (40% учащихся средних классов и 55% старшеклассников).

Была также выявлена как у школьников, так и у студентов-математиков, предпочтаемость символьических и графических форм представления информации по сравнению с верbalной формой. Эта закономерность лежит в основе такого способа развития познавательного интереса как обеспечение наглядности обучения математике.

Для развития познавательного интереса могут использоваться и другие известные приемы: занимательность; стимулирование творческого подхода, инициативы и самостоятельности в познании; создание позитивной психологической атмосферы, ситуации успеха в познавательной деятельности. Однако этих, вполне обоснованных и проверенных практикой классических приемов, недостаточно при организации изучения математики.

В современных условиях в основной школе интерес к математике должен поддерживаться многообразием ее приложений, а также компьютерными инструментами и моделями. Тем самым проблема

развития интереса к изучению математики также тесно увязывается с оптимальным решением проблемы содержания образования.

Целостность содержания обучения достигается лишь при динамическом балансе всех компонент триады: фундаментальности, гуманистической ориентации и практической (прикладной, профессиональной) направленности. В истории образования имелись попытки нарушения баланса между этими тремя компонентами, в частности попытки положить в основу обучения практику. Однако все они заканчивались неудачей, ибо становилось очевидным разрушение в этом случае фундаментальности обучения [3].

Фундаментализация образования и коррекция его содержания в сторону более тесной связи с современной наукой в первую очередь необходима потому, что фундаментальное образование имеет стратегический характер, генерирует отложенные знания. Как раз освоение фундаментальной, принципиальной стороны дела было сильной стороной российского образования. Эта традиция сложилась еще до революции и, к счастью, не была утрачена, хотя сейчас делаются попытки ее разрушить в угоду утилитарному образованию.

Содержательная сторона математического образования должна быть ориентирована не столько на узко понимаемые сегодняшние потребности, сколько на стратегические перспективы, на видение многообразия ее приложений, широкого применения в современном обществе математических моделей. Тем самым ставится задача приближения содержания обучения математике к современной науке. В математике возникли новые важные разделы, требующие своего внедрения, как в вузовскую, так и в школьную программу по математике (теория графов, теория кодирования, фрактальная геометрия, теория хаоса и др.). Эти новые направления в математике обладают большим методологическим, развивающим и прикладным потенциалом. Однако высказанные в печати целым рядом крупных математиков современности пожелания об обновлении школьного курса математики, включения в него новых важных математических идей и освобождении его от некоторых технических и архаичных вопросов вызывают эмоциональные возражения со стороны представителей так называемой «abituriентской математики» и обвинения в попытке нарушить традиции отечественного математического образования [4].

В истории образования содержание школьного курса математики неоднократно менялось. Любое изменение всегда было предметом острых дискуссий. Содержание курса математики – очень болезненный и неоднозначный вопрос, взгляды на который у разных ученых, педагогов, учителей могут сильно различаться.

Так высказывается мнение, что школьная математика – это культурно-историческая традиция, она передается из поколения в поколение (классический пример – евклидова геометрия). Традиция – вещь устойчивая, и школа все равно не примет радикальных новшеств. Рано или поздно она вернется к испытанным способам трансляции культурных образцов прошлого. Поэтому целесообразно никаких реформ не проводить.

С такой точкой зрения нельзя согласиться. Математическая культура, как часть общечеловеческой культуры, все время развивается и накапливается. Разумеется, это необходимо учитывать и в содержании обучения и надо бережно относиться к традициям. Однако в образовании помимо традиций всегда были, есть и будут инновации и необходимо правильно решить вопрос об их соотношении. Необходимость и неизбежность взаимосвязи инноваций и традиций в развитии педагогических систем вроде бы ни у кого не вызывают сомнений. Но на практике, как правило, сбалансированность этой связи нарушается то в одну, то в другую сторону. Инновации и традиции – это два полюса мира образования. Они оба должны служить ориентирами в развитии педагогической науки и практики.

Отбор содержания должен основываться как на высокой математической культуре, так и на методически обоснованной стратегии, на определенных принципах построения содержания в соответствии с возрастными особенностями учащихся, с потребностями практики и с потребностями развития самой личности.

Обновление в содержании математического образования обусловлено двумя факторами: развитием математики как науки и изменением требований общества к подготовленности выпускником школ и вузов.

Говоря о соответствии между математикой как наукой и как учебным предметом, необходимо отметить, что если развитие науки идет преимущественно равномерно, то изменение содержания учебного предмета происходит скачками. Время от времени образовывается существенный разрыв между математикой - наукой и математикой - учебным предметом, который необходимо сокращать. В России вопрос о реформе математического образования, о повышении его научного уровня, о необходимости включения в школьную программу более поздних идей аналитической геометрии и анализа настойчиво ставился на первом и втором Всероссийских съездах преподавателей математики (1912 и 1915 гг.). Наиболее явственно такой разрыв наступил к середине 20-го столетия, что и стало основной причиной реформы математического образования, проводившейся во всех странах и которая в нашей стране получила название колмогоровской. Последним крупным обновлением содержания

школьного курса математики стало включение в него элементов теории вероятности, хотя разговоры об этом велись почти столетие.

Любая реформа связана с преодолением ряда трудностей. Все изменения в программе по математике для средней школы должны совершаться с большой осторожностью: всякое чересчур резкое или слишком значительное изменение легко может быть потом в тягость в течение длительного времени. Можно даже утверждать почти категорически, что всякое вообще изменение, прежде всего, приносит некоторый вред и в течение периода приспособления влечет за собой больше неудобств.

В настоящее время также наметился разрыв между математикой – наукой и математикой – учебным предметом. Математические методы за последние полстолетия стали более общими и разнообразными. Сочетание с гигантскими возможностями компьютеров позволило оформиться принципиально новому направлению научного познания – математическому моделированию и математическому эксперименту. Математические модели природных и общественных явлений, технических процессов стали точнее и надежнее отображать существование дела. Повысилось прикладное значение математики. Поэтому вновь появилась необходимость пересмотра программы школьного курса математики.

В последнее время наблюдается бурный рост дискретной математики и ее приложений. Это вызвано тем, основано на том, что современный компьютер выступает не столько как вычислительное средство, а как весьма совершенный инструмент для моделирования самых разнообразных явлений и процессов (в физике, генетике, молекулярной биологии, кристаллографии, теории управления и т.д.), допускающих описание на языке структур дискретной математики.

Но главная причина бурного развития дискретной математики лежит в методологии. До последнего времени в науке доминировала непрерывная математика, на долю исследований дискретной математики приходилось всего несколько процентов. Но мыслящий субъект дискретно, порционно воспринимает и познает мир. Познаваемый объект всегда предстает в обозримом виде, ограниченном во времени и в пространстве. Поэтому весьма важно гармоничное сочетание дискретного и непрерывного в изучении математики и в понимании ее характера.

Ввиду указанной фундаментальной роли изучение дискретной математики или изучение отдельных ее элементов предусмотрено Государственным стандартом высшего профессионального образования по многим специальностям. Однако изучение дискретной математики должно стать обязательным и при обучении математике в школе. В процессе обучения дискретной математике оттачивается умение находить

оптимальный способ моделирования. Поэтому дискретная математика является методологической основой создания разнообразных и ярких образцов искусства математического моделирования в самых разных областях школьного знания.

Другим новым важным разделом математики, требующем своего внедрения как в вузовскую, так и школьную программу по математике, является фрактальная геометрия. Фрактал – это удивительное понятие математики, оказавшееся средством адекватного отражения природных явлений. Разветвления трубочек трахей, листья на деревьях, вены в руке, река, бурлящая и изгибающаяся, рынок ценных бумаг – это все фракталы. Открытие фракталов было открытием новой эстетики искусства, программирования и математики, а также революцией в человеческом восприятии мира. Фрактальные образы с успехом используются при описании хаотического поведения нелинейных динамических и диссипативных систем, турбулентного течения жидкости, неоднородного распределения материи во Вселенной, при исследовании трещин и дислокационных скоплений в твердых телах, при изучении электрического пробоя, диффузии и агрегации частиц, роста кристаллов и т.д.

Фрактальная геометрия – молодое быстроразвивающееся математическое направление, связанное не только с выдвижением новых математических идей, но и бурным развитием компьютерной графики, художественного компьютерного творчества. Столь большой и не ослабевающий интерес объясняется принципиально новыми возможностями, которые фрактальность открывает перед современными науками о природе и обществе. Только сейчас, благодаря фрактальной геометрии, человечество научилось замечать и ценить непосредственную природную красоту, такую необычную и такую простую в своем проявлении.

Чтобы научиться понимать и ценить красоту геометрии Евклида необходимы тренировки и обладание порой особым, математическим складом ума. По-другому обстоит дело с фракталами и фрактальной геометрией. Здесь практически не требуется дополнительных знаний и умений, чтобы ощутить природную эстетическую красоту фракталов, получить от этой красоты эстетическое удовольствие.

В современной науке произошел переход к постнеклассической (синергетической) картине мира, характеризующейся отказом от детерминизма и абсолютизации, признанием идей самоорганизации, конструктивной роли хаоса. От этих процессов, происходящих в современной науке, не может изолироваться и такая традиционно жестко детерминированная наука, как математика. В математике признаки становления новой парадигмы уже различимы. Строятся новые математические теории, оперирующие с неточно заданными,

неопределенными, нечеткими объектами. На практике такие неопределенные объекты и понятия встречаются повсюду. Координаты, скорость, сила, масса и другие физические характеристики не могут быть точно измерены. Поэтому строятся и развиваются такие новые теории, как теории нечетких и мягких множеств, интервальный анализ, мягкое дифференциальное и интегральное исчисление, теория мягкой вероятности, мягкая теория игр и т.п.

Кроме создания таких разнообразных мягких математических моделей к новой парадигме в математике можно отнести разработку фрактальной геометрии и многозначной логики. На очереди создание мягкой геометрии, в которой точка имеет некоторую протяженность, прямая – ширину, а плоскость – толщину. О необходимости разработки такой геометрии, приближенной к реальным объектам, писал еще П.А. Флоренский [5]. Все эти новые теории должны со временем найти отражение как в вузовской, так и в школьной программе по математике. Современное представление о «нелинейном мире» будет иметь исключительно важное методологическое значение для формирования мировоззренческих представлений, не только обогатит сам курс математики и сделает его современным, но и продемонстрирует ее роль как универсального языка исследований природных и социальных явлений.

Вместе с тем, ряд чисто технических вопросов вполне может быть исключен из школьной программы без особого ущерба для развития математического мышления, важно лишь сохранить при этом традиционное ядро обучения математике. К сожалению, внедрение ЕГЭ и необходимость натаскивания школьников на быстрое решение стандартных задач не позволяет исключить из программы задачи, решение которых может быть сведено к нажатию кнопки надлежащим образом подготовленного компьютера.

Проблема обновления содержания обучения математики всегда была тесно связанной с проблемой школьных учебников. Выступая на 1-м съезде преподавателей математики В.Ф. Каган, в целом поддерживая необходимость реформы содержания школьного образования, призывал делать это с крайней осторожностью, что легче их широкое значение провозглашать, чем действительно осуществлять, поскольку при такой реформе возникает проблема новых учебников.

Как отмечает один из учеников А.Н. Колмогорова профессор МГУ В.М. Тихомиров, важнейшая задача математического просвещения – возбудить в человеке интерес к самому себе, как к мыслящей личности. Каждый человек должен научиться рассуждать и решать задачи. «Всех» надо обучать на общедоступном и осмысленном материале, чтобы у

учащихся не закрадывалась мысль о заумности и бессодержательности нашего предмета.

К сожалению, такие мысли возникают у многих школьников. Например, они никак не могут понять, почему в век информационных технологий надо строить геометрические фигуры так же, как это делали древние греки, с помощью циркуля и линейки. Гораздо более интересными для них являются задачи из теории графов или из теории кодирования, которые не включены в школьную программу. Поэтому представляется, что целый ряд традиционных разделов школьной математики следует оставить только для учащихся уже имеющих устойчивый интерес к математике и склонных к творчеству и размышлению.

По мнению автора одного из школьных учебников проф. А.Г. Мордковича, есть некоторые «мелочи» в изложении школьного курса математики, на которые, как считают многие учителя и даже авторы школьных учебников, можно не обращать внимания. Одной из таких мелочей является выбор места для формального определения сложного математического понятия. Если основная задача учителя – развитие, то следует продумать выбор места и времени (*стратегия*) и этапы постепенного подхода к формальному определению на основе предварительного изучения понятия на более простых уровнях (*тактика*). Таковых уровней в математике можно назвать три: *наглядно-интуитивный; рабочий* или *описательный; формальный*. Стратегия введения определений сложных понятий базируется на положении о том, что выходить на формальный уровень следует при выполнении двух условий:

1) у учащихся накопился достаточный *опыт* для адекватного восприятия вводимого понятия: *верbalный* – опыт полноценного понимания всех слов в определении; *генетический* – опыт использования понятия на предшествующих уровнях;

2) у учащихся появилась *потребность* в строгом определении понятия. [1]

Одной из самых сложных проблем современного математического образования остается проблема обучения геометрии. Стиль мышления молодежи сегодня за счет постоянного общения в интернете и с масс-медиа – образно-эмоциональный. Мысление школьников и студентов все меньше тяготеет к абстрактным построениям. Традиционные учебники этого не учитывают и только усугубляют проблему с геометрией. В этих условиях особую актуальность приобретают новые подходы к построению школьного курса геометрии, призванные повысить интерес к этому предмету и помогающие сформировать у учащихся пространственное мышление. В частности, особое значение приобретают подход и учебники

по геометрии для общеобразовательной школы, разрабатываемые В.А. Гусевым на основе концепции «Я в пространстве».

В концепции развития математического образования признано, что игнорирование различий в способностях и особенностях подготовки учащихся различных уровней, отсутствие различий в программах и требованиях итоговой аттестации приводит к низкой эффективности учебного процесса, к «натаскиванию» на экзамен. Согласно концепции для каждого ребенка должен индивидуально проектироваться его «коридор ближайшего развития». Понятие «ребенок, не способный к математике» должно исчезнуть из лексикона учителей, родителей, школьников и общества.

При работе с одаренными к математике учащимися необходимы совсем другие подходы в подборе содержания обучения. Для таких учащихся надо подбирать темы исследовательского характера, темы научных рефератов, циклов задач, математических проектов и экспериментов и пр. Важной составляющей школьной жизни России становятся школьные научные конференции. Выступления учеников с докладами на научных конференциях заметно способствует становлению устойчивого интереса учащихся к изучению математики и созданию атмосферы творчества в школьных коллективах. Здесь многое зависит от учителя, от уровня его профессиональной подготовки, от его умения видеть, искать, находить и ставить задачи.

Однако учителей, которые могут качественно преподавать математику, учитывая, развивая и формируя учебные и жизненные интересы обучающихся, как отмечено в концепции, в России не хватает. В целом результаты приема и данные о трудоустройстве выпускников свидетельствуют о существовании «двойного негативного отбора», когда в педагогические вузы поступают не самые «лучшие» (в академическом смысле) абитуриенты, а учителями становятся не самые «лучшие» выпускники.

Поэтому все более остро встает проблема подготовки квалифицированных учителей математики. Хотя эта проблема и обозначена в концепции, однако не указаны пути ее решения, за исключением одного направления – студентам необходимо решать задачи элементарной математики в зоне своего ближайшего развития, в существенно большем объеме, чем сегодня. Разумеется, это важное направление, но это необходимо делать не в ущерб фундаментальной математической подготовке. А такая опасность вполне реальна, поскольку Министерство образования в проекте концепции реформирования педагогического образования предлагает в качестве основной модели подготовки педагогических кадров прикладной педагогический бакалавриат, программа которого предполагает замену значительного объема

теоретических курсов на практический компонент. Такая замена может только усилить «рецептурность» знаний студентов, не будет способствовать вовлечению их в научно-исследовательскую деятельность, а значит, не будет способствовать повышению качества подготовки учителей математики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Математика в современном мире // Материалы Международной научной конференции, посвященной 150-летию Д.А.Граве. – г. Вологда, ВГПУ, 7-10 октября 2013 г. Под ред. проф. В.А. Тестова, проф. А.А. Фомина, доц. Г.Н. Шиловой. – Вологда: ООО «Вологодская типография», 2013. – 158 с.
2. Родионов М. А. Мотивация учения математике и пути ее формирования. – Саранск: Изд-во МГПИ им. М.Е. Евсеевьева, 2001. – 252 с.
3. Тестов В. А. Фундаментальность образования: современные подходы // Педагогика, 2006. – № 4. – С. 3-7.
4. Тестов В. А. Обновление содержания обучения математике: исторические и методологические аспекты. – Вологда, ВГПУ, 2012. – 176 с.
5. Флоренский П. А. Мнимости в геометрии. Расширение области двухмерных образов геометрии. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

УДК 517.984

E. Ф. Хайбулкин (г. Ульяновск)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АБСОЛЮТНОЙ ЕДИНИЦЫ АБСОЛЮТНЫХ ИСТИН

Автор замечательной книги «Математика. Утрата определенности», – Морис Клейн, – один из выдающихся математиков современности, утверждает, что сегодняшняя наука не имеет ответа на вопрос: «Что такое математика?». Развивая идеи Пифагора и Иоганна Кеплера, автор данной статьи желает привести читателя к выводу, что математика – есть наука об Абсолютной Единице, математическом знаке Мироздания «Вселенной», выражющейся через единицу (1) – первый знак (или число) натурального ряда чисел.

Философия, как основная форма мышления о Мироздании, как основа для всех ветвей науки, в процессе своего развития от античности до конца XX века, не сумела доказательно выработать ответы на три следующих вопроса:

- 1) Из скольких и каких начал (субстанций) состоит Мироздание (Вселенная)?
- 2) Какими понятиями, а также, какими математическими знаками (символами) возможно выражение и обозначение начал (субстанций) Мироздания?
- 3) Кто? или Что? является Исключенным третьим или же, просто, Третьим Закона исключенного третьего философии?

Сегодняшняя математика, по утверждению одного из ее корифеев, Мориса Клейна, – автора замечательной книги «Математика. Утрата определенности» (М.: «Мир», 1984), находится в тупиковом положении. По моему убеждению причина этого достаточно прозрачна: поскольку, основы математики находятся в философии, а современная философия не имеет доказательного ответа на первый, из упомянутых выше вопросов, то и математика оказалась на шатком основании. А по причине того, что философия не имеет ответа и на второй, отмеченный выше вопрос, она на сегодня сама не является истинной наукой, ибо не прошла через математические доказательства. Здесь уместно вспомнить слова великого Леонардо да Винчи: «Ни одно человеческое исследование не может называться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства». Следовательно, без взаимосвязи философии и математики, основанных на истине, оказалось, что сегодняшняя наука, если вернуться к утверждениям М. Клейна, не может ответить на вопрос: «Что такое математика?». Забегая вперед, скажем: весьма не случайно и

вопрос об отношении сознания к бытию, духовного к материальному вообще – оказался основным вопросом современной философии, превратившимся затем в неразрешимый вопрос: «Что первично: дух или материя?».

И, в свою очередь, без надлежащего ответа на третий вопрос, человечество так и будет барахтаться в болоте лжи. Ведь из умозаключения Парменида: «Из двух противоположных утверждений об одном и том же объекте в одно и то же время одно, и только одно, является истиной» следует, что его внимание направлено на выявление истины. Поэтому вполне вероятно, что во времена жизни философов античности истина ценилась выше, чем в наши дни. А сегодня, когда ложь проникла во все сферы человеческой деятельности, впору произнести восклицание: «Да, здравствует ложь!», а парменидовому умозаключению противопоставить умозаключение: «Из двух противоположных утверждений об одном и том же объекте, в одно и то же время, одно, и только одно, является ложью». Поэтому есть смысл рассмотреть Закон исключенного третьего в философии с точки зрения рациональности (лат. rationalis – разумный). Известно, около 2500 лет назад, сторонник пифагорейцев, основатель Элейской (г. Элея, южная Италия) философской школы Парменид (согласно Аполлодору около 544 – ? гг. до н.э.) составил и предал огласке предложение: «*Из двух противоположных утверждений об одном и том же объекте, в одно и то же время, одно, и только одно, является истиной*».

Это предложение Парменида философами было названо *Законом исключенного третьего* и в современной философии считается одним из основных законов. Позднее, один из величайших умов Древней Греции, Аристотель (384 – 322 до н.э.), формализовав и каталогизировав правила умозаключений, объявил ученыму миру поразительную догадку, высказав утверждение об их конечности. Так зародилась, говорят, наука о приемлемых способах рассуждений – Логика (гр. λογοῦ – понятие; мысль), в которой *Закон исключенного третьего* значится как *Двузначности принцип*, а в математике – *Исключенного третьего закон*. Философы, из предложения Парменида, противопоставив понятию *истина*, понятие *ложь*, предложили миру следствие, что *между ними нет других реалий*. Итак, Закон исключенного третьего отрицает присутствие других реалий между двумя противоположными утверждениями, об одном и том же объекте, в одно и то же время. Вследствие этого, одно из них признается *истинным*, а другое – *ложным*. В конечном счете, утверждения Парменида сводятся к понятиям, «истина» и «ложь» (рис. 1).

Истина ————— Ложь

Рис. 1

1) «**Истина**» – адекватное отражение объекта познающим субъектом, воспроизведение его таким, каким он существует сам по себе, вне и независимо от человека и его сознания. *Философский энциклопедический словарь. М. Советская энциклопедия. 1963.*

2) «**Ложь**», лжи, ж. Намеренное искажение истины, неправда. Уличить во лжи. С.И. Ожегов. *Словарь русского языка*.

Заслуга Parmenida, как философа, в том, что он первым осмыслив возможные отношения людей своего времени к истине (ложь, надо полагать, уже во всю культивировалась в его время), выразил это отношение в виде одной законченной мысли. Но составив предложение и огласив его, Parmenid не указал, какое из противоположных утверждений является истиной, а какое – ложью. Он не указал и на методы, и способы их нахождения. Ниже постараемся рассеять «туман», за которым скрывается тайна *Закона исключенного третьего*. После рассеяния «тумана», сводя два противоположных утверждения (об одном и том же объекте, в одно и то же время) к понятиям «истина» и «ложь», теперь он точно указывает, что же *исключается* в качестве *Третьего*. Действительно, спросим себя: *кто это?* или *что это?* *исключенный третий* или, просто, *Третий*? Почему этот закон называют *Его законом*? Почему учителя философии на протяжении многих десятков веков твердят и приучают своих учеников к мысли, что *Третьего* вообще нет, принимая за третье только какое-нибудь утверждение субъекта, а не самого субъекта со всеми его атрибутами? Мысление, как сложное и удивительное явление, свойственно только субъекту (человеку). Поэтому соотношение атрибутов субъекта (человека), понимаемых как *истина* и *ложь*, невозможно без субъекта (человека). Следовательно, *Третий* Закона – есть обладающий целым полем (арсеналом) атрибутов (греч. *ατtribuo* – придаю, наделяю) человек: Моисей, Авраам, Марк, Матфей, Лука, Иоанн, Мохаммед, ..., пророк, ..., святой, ожидаемый Мошиах, – образ и подобие для оболванивания себе же подобных. См. *Библия. Бытие 1.26*. В мыслительном процессе исключение *Третьего* – есть действие по удалению субъекта (человека) со всеми остальными многочисленными его атрибутами *из промежутка двух его же атрибутов*, понимаемых как *истина* и *ложь*. Иначе говоря, мыслящий, унося все свои атрибуты, оставляет только *истину* и *ложь*. Поэтому, без исключения *Третьего* со всеми его атрибутами, из промежутка двух оставляемых, *истиной* и *ложью*, философы не смогли бы «очистить» промежуток между ними. Ведь *истина*, сама по себе, не нуждается в противоположности. В соотношении противоположностей, *истина* — *ложь*, категория *ложь*

является *не топологичным* (греч. *τόπος* – место, местность + *λόγος* – слово, суждение) суждением, следовательно, является суждением об объекте, не имевшем места. Другими словами, ложь – есть *выдумка*. А для чего, глубоко исторически, субъекту нужна была ложь и ее «присоединение» к истине, как противопоставление? Противопоставление, лжи истине, необходимо субъекту для введения своих слушателей или оппонентов в состояние *иллюзии*. Мыслительным процессом противопоставления *выдумки истине*, исключая субъекта со всеми его атрибутами из промежутка между *истиной* и *выдумкой*, – «мыслитель» создает *иллюзию*, что между истиной и ложью нет других реалий и, следовательно, – третьего утверждения. Следовательно, создав иллюзию, и для себя тоже, что между истиной и ложью нет других реалий, субъект, в любое реальное время, имеет возможность возвращаться в оставленное им место со своими атрибутами и, если надо, немедленно возвращается: процесс-то мыслительный. Проще говоря, если в *мыслительном* процессе «убрать» субъекта, как исключаемого Третьего, со всей его же атрибутикой из промежутка между *истиной* и *ложью*, то действительно уже ничего не остается, кроме *иллюзии* или своеобразного *психологического* фокуса. Но при этом достаточно уличить ложь, и иллюзия немедленно исчезает. Таким образом, Закон исключенного третьего, как форма выдуманного «единства» *истины* и *ложи*, как одна из форм иллюзии, является своеобразным фокусом или формой «лабиринта», из которого более двадцати веков не может выбраться философская мысль. А разгадка фокуса или выход из этого «лабиринта», в сущности, довольно простая. Для этого требуются *два «ключа»* или *две «нити Ариадны»*. А ими у человека, из всех его атрибутов, являются понятия *уверение* и *доказательство* – суждение и рассуждение (цепочка мыслей, приводящая к истине), заполняющие все «расстояние» между *истиной* и *ложью*, как можно было бы сказать, между тезисом и антитезисом Георга Вильгельма Фридриха Гегеля. При этом они (*уверение* и *доказательство*) имеют противоположно направленные векторы: вектор уверения приведет к *ложи*, а доказательства – к *истине*. Поскольку задачей *уверения*, как орудия Моисея, Матфея, Марка, Луки, Иоанна, Мохаммеда, любого священнослужителя (пророка, святого,..., ожидаемого Мошиаха, да и любого Люцифера), является отделение *субъекта* от *истины* и *увод ко Лжи* (*Вере, Богу и Дьяволу, а также другим синонимам лжи*), а задачей *доказательства*, как орудия служителя *истины*, – отделение *субъекта от лжи и приведение к истине*, то *уверение* всегда находится, «дежурит»,

рядом с истиной, а **доказательство** – рядом с *Ложью* и ее синонимами: **Верой, Богом, Дьяволом**, а также другими синонимами лжи (рис. 2).

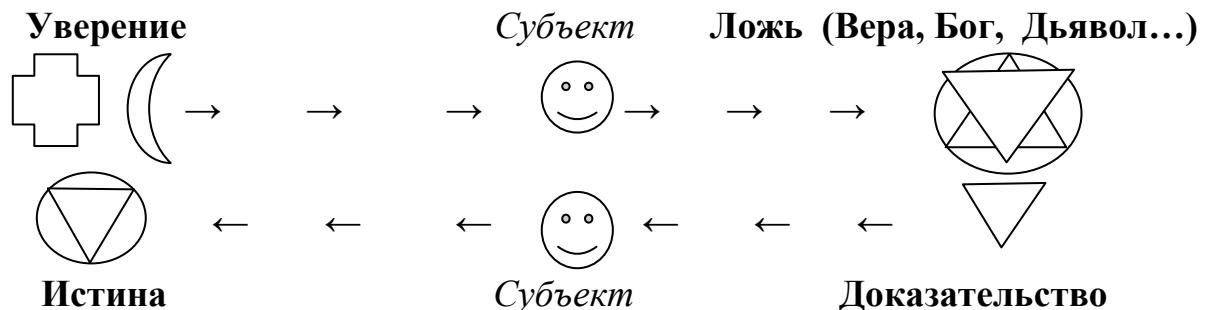


Рис. 2. Схема увода субъекта

Поэтому, в силу недостаточного интеллекта, миллиарды субъектов, не умея отличить **доказательство от уверения, а истину – от Лжи** (*Веры, Бога, Дьявола, а также других синонимов лжи*), становились и сегодня становятся *верующими, рабами божьими или рабами церкви* (идеологизированного доходного дома), а также *рабами власти, опирающейся на помощь церкви и ее идеологию*. Вот почему эти две организации (*церковь и государство или власть, два идеологизированных «доходных дома»*) любой политической системы общества, *де - юре* даже разделенные одно от другого, *де - факто* стараются широко использовать **уверение** в качестве основы своей **идеологии**. Одна из целей лжи, – эксплуатация человека человеком, – присвоение результатов труда одного человека другим человеком или результатов труда всего общества большими группами людей, организованными в систему. Ложь – есть спутница политической системы общества, организованного на принципе «Государь и подданный», а так же – «господин и холоп». Как видим, в политической системе общества, ложь – есть необходимость для власти, чаще всего, в ее интересах. А ложь в форме *веры*, синониме лжи, является для *государя* жизненной необходимостью, как система идеологии для его подданных, основанной на принципе «Господь и раб божий». Говоря философски, система вероисповедания является *идеей*, а государственный строй – *становлением* этой идеи. Подтверждением этому является вся история России, и в этом же кроются причины пословицы: «*В России две беды – дураки и дороги!*». Пришло время понимать, что **уверение**, – есть *ухищренный метод, способ, символический кнут, стрекало, – и является искусственно создаваемым принуждением или ухищренным насилием, применяемым для приведения субъектов к ВЕРЕ, – синониме ЛЖИ*. Вспомним знаменитые слова французского просветителя Жана Жака Руссо (1712 – 1778): «*Тысячи путей ведут к заблуждению, к истине – только один*». И этим единственным путем к истине является путь **доказательства!** У *веры*, как синонима лжи, множество форм, а потому форм уверений – еще больше. Здесь уместно вспомнить и слова другого

выдающегося мыслителя, современника Руссо, Дени Дидро (1713 – 1784): «Если вы хотите, чтобы я поверил в бога, сделайте так, чтобы я мог дотронуться до него рукой». На основании вышеизложенного, нам остается только сделать символическую поправку к Закону исключенного третьего в философии, исключающую его иллюзорность (рис. 3):

ИСТИНА ← ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ← СУБЪЕКТ → УВЕРЕНИЕ → ЛОЖЬ

Рис. 3. Поправка к Закону исключенного третьего в философии

Итак, **истина** на кону, Вы ее видите на рис. 2 и рис. 3, явившуюся после поправки «Закона исключенного третьего в философии». Отныне этот факт становится *мощным орудием науки* в нахождении истины с помощью ее постулата: **ЛОЖЬ** (*Вера, Бог, Дьявол и другие синонимы лжи*) *там – куда поведет уверение (обманывание)!* Хочешь обмануть? – уверяй! Уверил, – значит, обманул, т.е. привел ко лжи! Доказал – значит, привел к истине, – очевидному, – явному, бесспорному! Будучи на **кону** HOMO SAPIENSa, служителя истины, *этот постулат* становится выражением торжества **истины**. Жаль, что философы, приводя утверждения в соотношение *истина* и *ложь*, не узрели пирамиду синонимов лжи, по степени их утонченности, ухищренности, таких как (рис. 4):

Вера,
Бог, Дьявол,
Веранье, Вранье, Обман,
Хитрость, Словоблудие, Лукавство, и так далее

Рис. 4. Пирамида лжи

Здесь уместно вспомнить знаменитую латинскую мудрость: «DEMON EST DEUS INVERSUS – Дьявол есть перевернутый Бог». Следовательно, *вера*, как синоним лжи, не что иное, как своеобразная монета, изображающая ложь: на одной стороне изображение Бога, а на другой – Дьявола. Вот почему предметом науки является *истина*, а предметом религии – *вера*, следовательно – *Ложь*. В итоге, в *Законе исключенного третьего*, вместо аргумента «ложь», можно *истине* противопоставить любой подходящий ее (лжи) синоним из показанной выше пирамиды.

Поскольку Вы, уважаемый читатель, в данный момент находитесь в мыслительном процессе, я прошу Вас принять участие в следующем фокусе. Уберите **мысленно** Субъекта (человека), как исключаемого Третьего, вместе с его атрибутами, *доказательством* и *уверением* с рис. 3, как это сделали древние философы (это в Ваших силах, уважаемый читатель!), и перед Вами немедленно появится иллюзия, изображенная на рис. 1. Иначе для чего надо было *истине* противопоставлять *ложь*, как не для искаженного восприятия действительности? Ведь, *сама по себе*,

истина не нуждается ни в *субъекте*, ни в атрибуте субъекта, – *категории ложь*. Следовательно, рассматриваемый нами закон не является *объективным коном природы*, а является *субъектом* в *некотором* законом, т.е. тем, что принято выводить за пределы *кона*. В данном случае за кон выведен субъект со всеми его атрибутами, кроме «истины» и «ложи». И поэтому пришло время понимать и поменять *Закон исключенного третьего* на *Закон исключенного субъекта*. Несомненно, принимая противопоставление, лжи истине, как *Двузначности принцип* в логику, допущена недопустимая для науки ошибка: ложь, как противоположность, не может быть тождественна истине. Это, как говорится, должно было бы и козе понятно. Разумно ли тогда допускать ложь в принцип, для него двузначности, если она не тождественна истине? В связи со сказанным, справедливее было бы *Двузначности принцип* логики называть *Двузначностью иллюзии*. Ведь сегодня слово «истинно» мы ставим в *тождество* со словом «верно», о преданном друге говорим «верный друг», правильную дорогу называем «верной дорогой» и т.д. А сколько их в русском языке, слов, с корнем «вера»!? Разве это не формы иллюзии, или искаженного восприятия действительности? Слово «поверил» вошло даже в перевод слов Дени Дидро, который был приведен выше. Весьма вероятно, разрушение родового и первобытно – общинного строя и формирование первых государств, названных цивилизациями, – есть результат возникновения форм лжи. А если это так, то не следует ли историю разрушения родового и первобытно – общинного строя, возникновения и развития, так называемых цивилизаций, считать следствием возникновения и развития лжи? Таким образом, налицо деградация человечества в сторону лжи и необходимость каждому задать себе вопрос: **«А не наступило ли уже время для человечества, отказавшись от «принципов», основанных на вере, как синониме лжи, начать свое развитие и совершенствование на принципах истины?»**. А что может случиться с человечеством, если вдруг исчезнет ложь, в виде ее синонима «вера»? И не этого ли «Апокалипсиса», как о своем «конце света», всегда так страшится церковь? И, в заключение вышеизложенного, спросим себя, Закон исключенного третьего в философии это что: умысел, а может быть, – это есть следствие от «улыбки Джоконды» Парменида, равной *Великой теореме Пьера де Ферма*?

1. Основной вопрос философии

Известно, *отношение сознания к бытию, духовного к материальному вообщем* – является основным вопросом современной философии. Форма и содержание решения этого вопроса в настоящее время составляют основу таких философских взглядов как материализм,

идеализм, дуализм. Полагают, что к такой формулировке основного вопроса философии в девятнадцатом столетии очень близко смогли подойти лишь немногие философы. Среди них ярко выделяются Георг Вильгельм Фридрих Гегель (1770 – 1831) и Людвиг Фейербах (1804 – 1872). Однако современные философы считают, что *вычленение основного вопроса философии и выяснение его роли* в построении философских учений принадлежат Фридриху Энгельсу (1820 – 1895). Исследователи его трудов утверждают, что он, как один из последователей материалистической философии, к такой формулировке основного вопроса философии подошел путем осмыслиения человеческого сознания и интеллектуальной истории человечества. Предметом сегодняшней философии, как основной формы мышления, являются следующие философские учения о Мироздании (Вселенной):

Монизм (греч. μόνος – единственный) – способ рассмотрения многообразных явлений мира в свете одного *начала, единой основы (субстанции)* всего существующего и *построения* теории в форме логически последовательного развития исходного положения. @ Это самый модный способ из всех известных на сегодня: как для архаичных, так и для современных философов, и поэтому здесь следует остановиться особо. Ими являются, например: ведизм, брахманизм, махизм, эмпириомонизм, хрономизм, идеализм, материализм, марксизм и др. Истоки монизма лежат в *ведизме и брахманизме – Ра лиге или семействе лиги Ра*, откуда и слово «**религия**». Поэтому любое учение, основанное на монизме, как форма мышления, – есть всего лишь разновидность религии или *Господизма*. Отсюда и идея единого *Бога, Аллаха, Господа, Сущего или Иеговы*, т.е. «В начале... Бог...». См. Библия. *Бытие 1.1.* И действительно, Библия и К°, – Ветхий Завет, Новый Завет и Коран, – *Закон Божий*, – являются явными, бесспорными, т.е. очевидными сочинениями, предъявленными народам (народившимся частям человечества всех континентов) в качестве *Конституции (Основного Конца) Мироздания*. Скрывая за эзотерической формой эзотерическую, Библия и Коран сегодня представляют из себя чудовищный Справочник лжи, основанный на принципе «*Господь и раб божий*». Отсюда и его производные: *«Иегова и иудей»*, *«пастор и паства»*, *«пастух и стадо»*, *«господин и холоп»*. Как *трилогия иеговизма: Ветхий Завет, Новый Завет и Коран* сегодня представляют форму «сейфа», где методом каббалы скрыты все научные знания гениев прошлого. После закрытия «сейфа», последователи этих гениев и их труды, как известно, были физически уничтожены, а Всемирная библиотека в г. Александрия (Египет), где хранились труды гениев прошлого, была сожжена. В частности, на стр. 42 книги «Математика. Утрата определенности», отмеченной выше, М. Клейн сообщает: «Завоевание Египта (640 г.) сторонниками набиравшего силу

ислама нанесло греческой культуре удар, от которого она уже не смогла оправиться. Все ранее уцелевшие книги были уничтожены; как говорит предание, халиф Омар провозгласил: "Либо в этих книгах написано то, что есть в Коране, и тогда нам незачем их читать, либо они утверждают то, что противоречит Корану, и тогда их не подобает читать". Почти полгода бани Александрии отапливались пергаментными свитками».

Это кощунство происходило через сорок лет после публикации Корана, Закона для мусульман. Кстати, сам Омар, по утверждению Е.П. Блаватской, получил знания, пользуясь этими книгами. Подобные сожжения совершались и ранее, как христианами, так и мусульманами, и продолжались в последующие времена. Таков итог бешеного фанатизма раннего христианства и ислама, а затем и мрачного средневековья (с V по XV век). Здесь уместно вспомнить и склонить головы перед памятью сотен тысяч свободомыслявших великих людей, живыми преданных огню, например, позорным «королем инквизиции» Томасом Торквемада. Вспомним хотя бы о сожжении выдающихся мыслителей Джордано Бруно и Томаса Мора, о попытке сожжения Галилэо Галилея. Мало кому известно о том, что инквизиция, пытаясь сжечь мать Иоганна Кеплера, шесть лет держала ее в тюремных застенках и только активные действия ее сына, Иоганна, в качестве ее адвоката, спасли ее от костра инквизиции. Но ведь Торквемада не первый и не последний в этом позорном списке. В древности, не без вмешательства религии, Афинский суд приговорил к смерти философа Сократа. Как сообщает нам Е.П. Блаватская, чтобы загубить неоплатоническую школу, епископalexандрийский Теофил и его племянник Кирилл организовали заговор и убийство Ипатии, дочери математика Феона. Знаменитая женщина-философ, Ипатия, жившая в пятом веке в г. Александрия (Египет), была учителем многих знаменитых мужей того времени. Много позднее инквизиция на 27 лет заточила в монастырь Томмазо Компанелло, почти на столько же лет был отправлен в якутскую ссылку В.Г. Чернышевский. Известно и то, что чуть не лишили головы А.Н. Радищева: был осужден на смертную казнь, впоследствии замененную ссылкой в Сибирь. Здесь приведены лишь отдельные фрагменты тяжких преступлений религии против человечества. Этот «сейф» со сверхсекретными знаниями прошлого (Библия и Коран) сегодня может приобрести себе каждый желающий, но для открытия его требуется семь интеллектуальных ключей, обладателями которых являются только посвященные: адепты, розенкрейцеры, иерофанты. Можно предположить, что подобная судьба ждет и Интернет. Преподнесенная народам в эзотерической форме, как *уверение* (метод приведения ко лжи), эта *трилогия иеговизма, как учение последователей ведизма и брахманизма*, является *Господизмом* в совокупности. Принцип «господизма» или «пастуха и стада», переименованный сегодня в понятия «демократический

централизм» и «единоначалие», пронизывает все человечество, все политические системы общества. Этот же принцип является организационной основой сегодняшних «левых», «правых», «либералов», «единороссов» и т.д. Для понимания справедливости данного утверждения достаточно прочитать:

1. Библия. *Бытие 1.1; Бытие 17. 10-14; Исход. 3.14; 3.18 – 22; 6.3 (* Иегова); Евангелия от Иоанна (Иоанн 4.24). М. Издание Московской патриархии, 1968. В двух томах. Здесь же, в конце Тома 1, стр. 536-538, представлена статья «Библия и современный читатель», где в частности говорится: «...Писания Ветхого Завета рассказывают о великих Божиих деяниях по отношению к еврейскому народу и рассказывают Божий план даровать благословение всему человечеству через посредство еврейского народа (читай «иудеев» – Е.Ф.Х.)....Писания Нового Завета являются продолжением ветхозаветной истории. Они описывают пришествие Спасителя (Эммануила – замечание автора Е.Ф.Х.) и значение этого пришествия для всего человечества ...». Здесь под словом «Спаситель» подразумевается Иисус Христос, по-русски букв. «помазанный помазанник», откуда и выражение «масло масляное»: Иисус – транскрипция еврейского слова «иошуа», по-русски, – «помазанник»; греческое слово «христос», по-русски, также – «помазанник». Слово «спаситель», по-еврейски, – «эммануил», а не слово «иошуа». Следовательно, слова из Библии: «Книга Иисуса Навина» (а точнее было бы – «Книга иошуа Навина»), следовало бы переводить как «Книга помазанника Навина». «Спасителей» и «помазанников» или «эммануилов» и «иошуа», в истории человечества было великое множество.*

В те времена это могло означать титул выдающейся личности в жречестве или должность (напр., Фараона), а то и их «ученую степень», как в наши дни понятия: «вождь», «председатель партии», «титул религиозного деятеля», «император», «король», «президент», «академик», «доктор наук», «кандидат наук», «профессор» и др. Но все это, надо полагать, в о о б щ е – есть не более чем игра в хитрость или идеологическая система «эммануилов» и «иошуа» для управления «профанами».

См.: 1) Например, слова «хрестос», «элохим». Стр. 491–492 и стр. 523–524. Е.П. Блаватская. «Теософский словарь». М. Издательство «Сфера». 1994;

2) Слова «Филон иудей». Стр. 473. «Теософский словарь». М. «Сфера». 1994.

3) Слово «христос». Стр. 1473. «Советский энциклопедический словарь». М. Советская энциклопедия. 1980.

4) слово «иезуит». Стр. 224. «Современный словарь иностранных слов». С.-Петербург. «Дуэт». «Комета». 1994.

5) Эссе. Пятое Евангелие или жажды идеала. Стр. 297–317. Диас Валеев. «Стук резца по камню». г. Казань. Татарское книжное издательство. 1988.

2. Коран, где написано: «*Ислам — есть религия Ноя, Авраама, Моисея, Иисуса*». Сура XLII, 11. «*Скажи: мы верим в Бога, в то, что Он послал нам, что Он открыл Аврааму, Измаилу, Исааку, Иакову и двенадцати коленам, мы верим в священные книги, полученные с неба Моисеем, Иисусом и пророками, мы не полагаем между ними никакого различия — мы Ему предали себя*». Сура III, 78.

Термин «монизм» может быть рассмотрен и понят всего лишь как элемент плюрализма, т.е. как любое суждение, не прошедшее через математическое доказательство. Так, в частности *идеализм*, как форма *монизма*, где началом (субстанцией) является *Бог* (Бытие 1.1), *он же Господь Бог* (Бытие 2.4), *он же Сущий* (Исход 3.14), *он же Господь Иегова** (Исход 6.3), *он же Господь Бог Ерейский* (Исход 4.22), представляет собой всего-то элемент *плюрализма*.

Здесь весьма большой интерес представляет и следующий факт. Согласно евангелисту Иоанну: «*Бог — есть дух*» (Иоанн 4.24). Следовательно, выражение «*Господь Бог Ерейский*», согласно статьям Библии (Исход 4.22) и (Иоанн 4.24), тождественно выражению «*Господь дух еврейский*». Так как *дух русский* — есть *русский человек* (вспомним русские народные сказки), *дух китайский* — есть *китаец* и т. д., то логически *неотвратимо* выводится заключение: «Если *Господь Бог Ерейский* — есть *Господь дух еврейский*, то под выражением «*Господь Бог Ерейский*» скрыт обыкновенный *сущий — обычновенный смертный еврей*, живущий рядом с нами. Таким образом, Библия, возвеличивая *обобщенный образ* человека еврейской национальности до понятия *Господь Бог Ерейский*, делает его объектом поклонения для других народов.

Ничего не скажешь: тонкая работа авторов Библии! Таким образом, *Библия и Коран*, как *трилогия иеговизма*, как основа одной из форм *идеализма*, как творение рук евреев древности, — есть одна из *форм монизма*. Этот *монизм*, минуя все другие формы единства субстанций, подавляя все и вся в философии, сметая на своем пути все другие формы мышления, стал позорным явлением крайнего эгоизма в истории человечества.

В качестве геометрического символа начала такой философской конструкции (монизма) годится любая точка на поверхности сферы, опирающейся на плоскость, или точка опоры любого выпуклого многогранника, опирающегося на плоскость одной из своих вершин.

Дуализм (лат. *dualis* — двойственный) — философское учение, исходящее из признания равноправными, не сводящимися друг к другу

двух начал – духа и материи, идеального и материального. Как известно, этого учения придерживались Христиан Вольф (1679 –1754), Рене Декарт (1596–1650) и др. Из современных ученых можно назвать покойного академика Бориса Раушенбаха.

@ Идеализм и материализм, как монистические, но противоположные воззрения, совместно противостоят дуализму. В них, в качестве первоначал, мыслятся «дух» и «материя». Монизм делает их близкими по форме, но разными по содержанию. Дуализм же остается обособленным от материализма и идеализма, и становится самостоятельным воззрением на Мир. Любое учение или теория, представляющие из себя дуализм, – есть *полу религия*. Геометрически, в качестве символа такой философской конструкции годится, например, любая пирамида, двумя вершинами, т.е. одним ребром, опирающаяся на плоскость.

Триада (греч. τρίαζ□ – троица) – метод философского конструирования, в античности широко применяющийся в платонизме и неоплатонизме. Представители среднего платонизма учили о трех началах «образец – demiurge – материя» и трех ступенях бытия «нус (ум) – псюхе (душа) – космос». Широкое развитие принцип триады получает в немецкой классической философии – у Иоганна Готлиба Фихте (1762–1814), Фридриха Вильгельма Иозефа Шеллинга (1775–1854) и особенно у Гегеля, трудами которого в начале девятнадцатого века завершился многовековой спор различных философских течений. Он превратил триаду в универсальную схему всякого процесса развития: тезис (исходный момент); антитезис (переход в противоположность); синтез противоположностей в новом единстве (снятие, отрицание отрицания).

@Удивляясь творению Гегеля, и «великолепию» его философии, сегодня можно отметить, что его триада является лишь одним из методов философского конструирования – схема, согласно которой все процессы, происходящие в природе, развиваются стадийно, т.е. последовательно (тезис, антитезис, синтез) и в соответствии с «Законом отрицания отрицания». Однако логический статус этой схемы не выражает реальных связей между «тезисом», «антитезисом» и «синтезом». В этой схеме «**синтез**», в *реальности*, должен иметь место **между «тезисом» и «антитезисом»**, а не за ними. Здесь следует усмотреть ограниченность логического метода в описании и отражении реальных явлений в их возможных временных измерениях. *Введение времени (духа-движения)*, несущего собой *событийность* настоящего, ставит под сомнение универсальность законов формальной логики. Ведь, по Гегелю, «синтез» при разложении вначале должен превратиться в «тезис», и только после этого, – в «антитезис». Но, в действительности, процесс дифференциации синтеза на его составляющие происходит одноначально, что несомненно подрывает и основы «Закона отрицания отрицания». *Проницательный*

взгляд на триаду Гегеля позволяет увидеть в ней два хорошо замаскированных монизма (идеализм, материализм) и дуализм: тезис и антитезис — есть как бы «тени» духа и материи, а синтез — «тень» их дуализма.

Тетрада (греч. τετραδίον – четверка) – четверка чисел 1, 2, 3, 4 – составляющих основу учения пифагорейцев, а также лежащие в основе открытого ими закона консонансов (лат. consonantia – созвучие), выражаемый соотношением $n/(n + 1)$, где $n = 1, 2, 3$. Известная нам система знаний пифагорейцев называлась математика (греч. μαθηματικό – учение, знание) и состояла из четырех разделов: арифметики (учении о числах), астрономии (учении о строении Вселенной), геометрии (учении о фигурах и их измерении) и музыки (учении о гармонии). Они были убеждены, «что элементы чисел являются элементами всех вещей и весь Мир в целом является красотой и числом».

@В мире науки никто, кроме них, не стоял так близко от понятия, что **красота** Мироздания выражается через *математическую рациональность* – **Конституцию (Основной кон или Кон основной) Мироздания, Вселенной.**

Плюрализм (лат. pluralis – множественный) – философская ориентация, согласно которой существует несколько или множество независимых и не сводимых друг к другу начал или видов бытия. Термин был предложен немецким философом Вольфом в 1712 году.

@То же, что прения на собраниях (митингах) или хаос в естестве. **Плюрализм может быть рассмотрен и понят не иначе, как множество монизмов.** В этом случае, его геометрическим символом будет сфера, каждая точка поверхности которой, опирающаяся, например, на плоскость, будет основой монизма, входящего в указанное выше множество.

Объявляя противоречия как основу развития, т.е. противопоставляя ложь истине или ложь другой лжи, как отношения духовного к материальному вообще, *т.е. как своего основного вопроса*, современная философия в качестве «борющихся» слепо выдвигает идеализм и материализм. Это, в сущности, тождественно «тезису» и «антитезису» Гегеля. Но «борьба» идеализма и материализма в философии – есть «борьба» учений или теорий, основанных на **монизме**. Материализм называет идеализм *религией*. Но сам материализм, как вид монизма, является ничем иным как другим видом религии, *т.е. другим видом Библии*. Если в основу идеализма в качестве субстанции полагают «дух», то в основу материализма – «материю». Как говорится: хрен редьки не слаше! Поскольку любая теория, основанная на монизме, является **формой религии**, то борьбу идеализма и материализма можно рассматривать всего лишь как борьбу двух видов религий, представляющих, не иначе, как **два вида ложных идеологий**. Именно здесь находится *исток всех*

противоречий современной философии. Идеализм и материализм, как монистические, но противоположные воззрения, совместно противостоят дуализму. В них, как уже говорилось выше, в качестве первоначал мыслятся Дух и Материя. Монизм делает их близкими по форме, но разными по содержанию. Дуализм же остается обособленным от материализма и идеализма, и становится самостоятельным воззрением на Мир.

В итоге, как видим, этап дуальности, как уровень развития современной философии, на сегодня остается вершиной философской и математической мысли в вопросе о Мироздании. Следовательно, философия, не выходя из этапа дуальности, осталась полу религией, в сущности, прислужницей церкви, вплоть до сегодняшних дней начала XXI века. И не случайно в математике знания о геометрии правильных выпуклых многогранников (конечных геометрических тел – символов совершенных форм рациональности) также базируются на дуальностях: икосаэдр – додекаэдр, октаэдр – гексаэдр, тетраэдр – вписанный тетраэдр. При этом геометрия не располагает едиными пространственными соотношениями между сферой и правильными выпуклыми многогранниками, объясняющими непрерывность связи между микро и макро космосами. На дуальности базируются Закон исключенного третьего в философии и Двузначности принцип в логике, в математике – Исключенного третьего закон. Таково, вкратце, состояние основного вопроса современной философии.

2. Новая формула основного вопроса философии.

Итак, спросим себя, какая же из перечисленных выше философских ориентаций выражает основы Мироздания: **монизм (Господизм или Иеговизм); дуализм; триада платонизма** (античного, среднего, неоплатонизма); **триада христианства**, как одна из форм Иеговизма (святая троица: Бог-отец, Бог-сын, Бог-дух святой); **триада Гегеля** (тезис, антитезис, синтез); **триада К. Маркса** (немец. классич. философия, франц. утопич. социализм, англ. политэкономия); **тетрада пифагорейцев, или плюрализм?**

@ **Философия** (греч. φίλοσοφία – букв. любовь к мудрости: от φίλεω – люблю и σοφία – мудрость), как она мыслилась в античную эпоху, была «Наукой о Мироздании», что делало ее тогда основой всех других ветвей науки. Исторически статус философии менялся. Дошло до того, что философам было объявлено, что у философии свой предмет исследований. И это было сделано в наше время, когда любая отрасль науки, являясь формой разумного мышления, одной из форм любви к мудрости, в сущности, является лишь одной из форм философии и, следовательно, только частью единого целого, философии!

Современным философам крайне необходимо вспомнить и авторов этого переворота, чтобы понять, на чью мельницу, как говорится, льют они свои воды.

А теперь зададимся вопросом: – возможно ли сегодня, или в ближайшем будущем, возвращение ей статуса античной эпохи? Сможет ли она, как форма разумного мышления, как форма любви к мудрости, выступить формой основы для других наук и давать импульс для их развития? Что должны делать философы для возвращения философии былого статуса? Другими словами, перестанут ли философы пилить дерево, на котором расположен их «хрустальный дворец»?

Итак, обстоятельное осмысление истории философии и новейшие открытия в современной геометрии, позволяют по-другому взглянуть на исторически сложившиеся философские ориентации в мировидении, миропонимании, миро представлении и предложить ученому миру другое мировидение, миропонимание, миропредставление.

В предлагаемой картине Мироздания (Вселенной) фигурируют *три начала*, в отличие от монизма, где *одно начало*, или от дуализма, где *два начала*. Но эти три начала коренным образом отличаются от традиционных триад, приведенных выше. Новое мировидение становится также и основой для новейших открытий в современной науке.

*Предлагаемая принципиально новая философская конструкция Мироздания (Вселенной), в отличие от традиционных (одно субстанциональной, – монизм, и двух субстанциональной – дуализм), основывается на трех началах (субстанциях), понимаемых как *Движение, Дух и Материя*.*

Да, именно *Движение*, как одно из трех *равноправных и не взаимозаменяемых начал (субстанций)*, несмотря на то, что материалистическая философия определяет *Движение* как способ существования *Материи*, ее важнейшим атрибутом.

Но таков эгоизм любого монизма, старающегося подмять под себя все и вся в философии. Поэтому исторически и получилось, если так можно выражаться, «столкновение лбами» идеалистов и материалистов.

«Приватизировав» субстанцию *Движение*, каждый из них стал «обладателем» одного из двух разных видов энергии: *духовной* – «духа движение» (время) и *материальной* – «материя движение» (понимаемая сегодня как, собственно *энергия*).

Но *Дух* и *Материя* (в дуальности – пространство, ядерная энергия), как начала (субстанции), топологичны (греч.τόπος – место, местность). Через *Движение*, более всего, возможно изменение их форм или синтез.

Именно в этой реалии кроется причина того, что как идеализм, так и материализм стараются сделать *Движение* своим атрибутом. Сказанное

выше, о единстве трех начал (субстанций), символически выглядит так (Рис.5):



Рис. 5. Единство субстанций или начал Мироздания (Вселенной)

При этом каждая субстанция имеет бесконечное множество форм, как самых «примитивных» так и самых «совершенных». Как видим, единство трех начал (субстанций), изображенное на рис.5, представляет собой символическую схему фундаментальной формы аксиоматической системы, с конечным числом аксиом.

Как известно, аксиоматическое построение любой науки заключается в следующем:

- 1) первоначально перечисляются понятия, которые можно описать, но нельзя определить, т.е. перечисляются *неопределенные понятия*;
 - 2) составляется *система аксиом*, в которой описываются свойства первоначально выбранных неопределенных понятий и взаимосвязь между ними;
 - 3) при помощи *определений* вводятся другие понятия, сводимые к неопределенным;
 - 4) основанные на выбранной системе аксиом, с применением *теорем* доказываются новые утверждения.

Но к системе аксиом, как известно, еще предъявляются три важнейших требования: *непротиворечивость, независимость и полнота*.

- 1) *непротиворечивость* выражается в том, что из выбранной системы аксиом нельзя получить две теоремы, противоречащие друг другу;
 - 2) *независимость* означает независимость каждой аксиомы, входящей в выбранную систему, от остальных аксиом этого единства;
 - 3) *полнота* обеспечивает выход (вывод) всех истинных утверждений системы аксиом, как логическое следствие.

Символическая схема, представленная на рис. 5, удовлетворяет всем этим требованиям.

Ниже, приняв Единство этой триады в качестве Абсолютной единицы |(1)| – математического знака Мироздания (Вселенной) или *Абсолютного единства Абсолютных истин*, приведем математическое доказательство троичности Мироздания (Вселенной).

А положив, как правильный треугольник, в основу тетраэдра, заключающего в себе все другие правильные выпуклые многогранники, в том числе и сферы (как правильного выпуклого многогранника с бесконечным числом вершин, граней и ребер), введем математический критерий соотнесенности трехначальных основ Мироздания (Вселенной).

На основе сказанного, построим математическую модель Мироздания (Вселенной) в Декартовой системе координат, в соответствие с выраженной выше философской мысли (Фото и рис. 6 ниже). Поскольку основу схемы на рис. 5 составляют начала (субстанции) Мироздания (Вселенной), то данная *аксиоматическая система* не досягаема для, так называемой, *теоремы Геделя о неполноте*.

Таким образом, философия заявляет о себе, что она становится на математическую основу и получает дополнительные возможности выявлять новые рациональные схемы Мироздания и способы их выражения. Следовательно, заявляет о начале своей научности. Впервые такая идея автора настоящего труда опубликована в Сборнике «Проблемы сознания и самосознания человека в техногенной цивилизации». Стр. 49-52. УлГТУ. Ульяновск. 1997.

Но до публикации «Математической модели Мироздания (Вселенной)», математика *не располагала едиными непрерывными линейными и объемными связями между сферой и правильными выпуклыми многогранниками*. Впервые указанная работа автора, «Математическая модель Мироздания (Вселенной)», была опубликована в Трудах международной научно-технической конференции «Нейронные, реляторные и непрерывнологические сети и модели». Том 3. Стр. 30-33. УлГТУ. Ульяновск. 1998, а затем – и в одном из местных СМИ.

Поскольку человек и его сознание – это не только дух вообще, а *включенность человека, как единства элементов форм духа, движения и материи* в Бытие, то при примитивном сравнении, это как бы исправная электрическая лампочка, включенная в электрическую сеть. Таким образом, духовное имеет отношение не только к материальному вообще, но и к *Движению*, как самостоятельному началу (субстанции). А это, в свою очередь, не может оставить без изменения и *основной вопрос* самой философии. Поэтому, на основании вышеизложенного, современная *идея о необходимости замены старой формулировки основного вопроса философии* становится справедливым актом. Итак, предлагается новая формулировка основного вопроса современной философии, в следующей редакции:

Вопрос об отношении человека к Бытию, *как равноправному единству Движения, Духа и Материи*, – есть основной вопрос философии.

2.1 Математическое доказательство троичности Мироздания (Вселенной)

Выше было отмечено, что Мироздание (Вселенная) состоит из трех субстанций: Духа, Материи, Движения (рис.5). То, что Мироздание (Вселенная) – есть Абсолютный свод всех истин, Абсолютное их единение

– явный, бесспорный факт. Следовательно, Мироздание – есть Абсолютная Единица Абсолютных истин и **Единица (1)**, как число, – есть математический Знак Вселенной. Пифагор (576 – 496 до н.э. По крайней мере, ему приписывается это выражение), говоря: «Все – есть число!», – не договаривал. Полное его утверждение должно быть: **«Все – есть число Единица (1), знак Мироздания (Вселенной)!»**. Единицу (1), – **Знак Вселенной**, – математически можно рассматривать как бесконечную сумму различных дробей, т.е. представить в виде равенства:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n; \text{ где } n \text{ – число натурального ряда};$$

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ – слагаемые дроби.

Поэтому доказательство троичности, как основы совершенных форм рациональности (лат. *rationales* – разумный) Мироздания (Вселенной) сводится к решению задачи:

«Составить сумму дробей, равной Абсолютной единице так, чтобы величины слагаемых и их количество были наибольшими».

При бесконечном разнообразии величин этих слагаемых, наибольшей будет бесконечная периодическая десятичная дробь 0, 3 (3). Но при этой величине рациональное количество слагаемых будет равняться только числу три (3), т.е. указанная выше сумма примет вид равенства:

$$1 = 0,3(3) + 0,3(3) + 0,3(3), \text{ что и требовалось доказать.}$$

Вот почему так красива десятичная дробь 0,3(3)! Итак, перед нашими глазами количественные выражения начал (субстанций) в виде чисел – количественных значений, составляющих Абсолютную Единицу (1), – **математического знака Мироздания (Вселенной)**.

Таким образом, перед нами доказательство того, что Мироздание (Вселенная) – есть единство в троичности – единство Духа, Материи и Деяния – трех очевидных истин, называемых субстанциями (началами).

Это означает, что среди множества истин Мироздания есть *конечное число* Абсолютных, составляющих Его основу (фундамент). Их количество, как уже было доказано выше, равно трем, а все остальное – производные от них. В итоге, Единица (1), как число, – *есть математический знак Мироздания (Вселенной)*, а 0,3(3) – *количественный знак начала (субстанции)*.

Единица (1), как знак Мироздания (Вселенной), лежит в основе счета. Обозначая частички (элементы) и части Вселенной ее же знаком (1), начиная от частичек (элементов) атомов до планет, звезд, галактик, систем галактик и так далее, человечество получило понятие о натуральных числах: 1, 2 = (1+1), 3 = (1+1+1), 4 = (1+1+1+1), 5 = (1+1+1+1+1),...и так

далее, до бесконечности. Получается, что в основе всей математики лежит Единица (1).

Сложение, как начальное (фундаментальное) действие всей математики, есть действие в пределах Единицы (1) и во имя Единицы (1). Все другие числа – есть отражение ее частей, как Единицы (1).

Следовательно, Мироздание (Вселенная) – есть Абсолютная Единица (1) Абсолютных истин: Движения, Духа, Материи. А это означает, что сумма абсолютных величин всех чисел в математике, не может быть больше абсолютной величины Абсолютной Единицы - $|1|$! В этом случае выходит, что расстояние от нуля (0) до Абсолютной Единицы (1) следует признать бесконечностью, а нуль (0) и Абсолютную Единицу (1) – пределами этой бесконечности.



Рис. 6. Фото.

Стереометрическая форма Абсолютной единицы (1) – знака Мироздания (Вселенной)

числа больше Единицы (1) в Мироздании не существует. А все остальные числа – есть отражения частичек (элементов) и частей Мироздания (Вселенной), выраженные через Единицу (1), т.е. через знак Мироздания (Вселенной), как и было показано выше.

Аналитическая форма Абсолютной единицы (1) – знака Мироздания (Вселенной):

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n = \\ = 0,3(3)+0,3(3)+0,3(3),$$

где n – число натурального ряда;

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ – слагаемые дроби.

Отсюда вывод, что ни одно число в Мироздании (Вселенной) не может быть больше математического знака самого Мироздания (Вселенной). Говоря иначе,

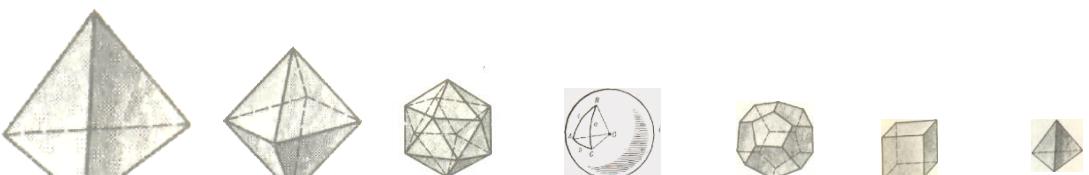


Рис.7. Последовательность вписания правильных выпуклых многогранников в тетраэдр Математической модели Абсолютной единицы(1) – знака Мироздания (Вселенной).

Здесь соотношения между сферой и правильными выпуклыми многогранниками являются математическим доказательством непрерывности связи между микро и макро космосами. При этом имеет

место следующая таблица, где a – длина ребра тетраэдра, в который вписаны многогранники.

Таблица 1

Многогранник	Ребро многогранника	Радиус описанной сферы	Радиус вписанной сферы	Объем
Тетраэдр	a	$\frac{\sqrt{6}}{4} \cdot a$	$\frac{\sqrt{6}}{12} \cdot a$	$\frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3$
Октаэдр	$\frac{1}{2} \cdot a$	$\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot a$	$\frac{\sqrt{6}}{12} \cdot a$	$\frac{\sqrt{2}}{24} \cdot a^3$
Икосаэдр	$\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}} \cdot a$	$\frac{\sqrt{2}(10+2\sqrt{5})}{4(3+\sqrt{5})} \cdot a$	$\frac{\sqrt{6}}{12} \cdot a$	$\frac{5\sqrt{2}}{12(7+3\sqrt{5})} \cdot a^3$
Додекаэдр	$\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{18+6\sqrt{5}}} \cdot a$	$\frac{\sqrt{6}}{12} \cdot a$	$\frac{1}{6} \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10(3+\sqrt{5})}} \cdot a$	$\frac{\sqrt{6}(15+7\sqrt{5})}{18\sqrt{(18+6\sqrt{5})^3}} \cdot a^3$
Гексаэдр	$\frac{\sqrt{2}}{6} \cdot a$	$\frac{\sqrt{6}}{12} \cdot a$	$\frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a$	$\frac{\sqrt{2}}{108} \cdot a^3$
Вписанный тетраэдр	$\frac{1}{3} \cdot a$	$\frac{\sqrt{6}}{12} \cdot a$	$\frac{\sqrt{3}}{36} \cdot a$	$\frac{\sqrt{2}}{324} \cdot a^3$

Имея такую таблицу, выразим все линейные размеры и объем тетраэдра, и всех гармонично вписанных в него геометрических тел, через радиус вписанной сферы:

Таблица 2

Многогранник	Ребро многогранника	Радиус описанной сферы	Радиус вписанной сферы	Объем
Тетраэдр	$\frac{12}{\sqrt{6}} \cdot R$	$3 \cdot R$	$R = i^4$ $i = \sqrt{-1}$	$\frac{24}{\sqrt{3}} \cdot R^3$
Октаэдр	$\frac{6}{\sqrt{6}} \cdot R$	$\frac{3}{\sqrt{3}} \cdot R$	R	$\frac{12}{\sqrt{3}} \cdot R^3$

Икосаэдр	$\frac{12}{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})} \cdot R$	$\frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})} \cdot R$	R	$\frac{120}{\sqrt{3}(7+3\sqrt{5})} \cdot R^3$
Додекаэдр	$\frac{4}{\sqrt{18+6\sqrt{5}}} \cdot R$	R	$\frac{2\sqrt{25+11\sqrt{5}}}{\sqrt{60(3+\sqrt{5})}} \cdot R$	$\frac{16(15+7\sqrt{5})}{\sqrt{(18+6\sqrt{5})^3}} \cdot R^3$
Гексаэдр	$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R$	R	$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot R$	$\frac{32}{\sqrt{3}} \cdot R^3$
Вписанный тетраэдр	$\frac{4}{\sqrt{6}} \cdot R$	R	$\frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot R$	$\frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot R^3$

R – радиус сферы, вписанной в тетраэдр, равный единице. Отсюда, в свою очередь, исходит очень важный вывод:

1) Вселенная, расширяясь, стремится к тетраэдру, ребро которого не может быть более чем $\frac{12}{\sqrt{6}} \cdot R$, а объем – $\frac{24}{\sqrt{3}} \cdot R^3$;

2) сжимаясь, Вселенная также стремится к форме тетраэдра, ребро которого не может быть менее $\frac{4}{\sqrt{6}} \cdot R$, а объем – менее, чем $\frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot R^3$. Таким образом, объем Мироздания (Вселенной) равен $4\pi R^3$ и может изменяться \lim от $\frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot R^3$ до $\frac{24}{\sqrt{3}} \cdot R^3$ и обратно, где R – есть начальный радиус Мироздания (Вселенной).

Символически: $\frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot R^3 < V \text{ Мироздания (Вселенной)} < \frac{24}{\sqrt{3}} \cdot R^3$.

Как видим, в Мироздании или Вселенной нет, и не может быть ничего сверхъестественного: Бытие – есть единство Движения, Духа и Материи.

Примечание:

1) @ - утверждения автора. Сергеев – родовая фамилия автора.

2) В тексте представлен фотографический снимок оригинала Математической модели Абсолютной единицы (1), – знака Мироздания (Вселенной), – на фоне великой реки Волга. Модель собственноручно изготовлена из металла и подарена автором Дому-музею И. Я. Яковлева в г. Ульяновске (Симбирске). Желающим увидеть – Добро пожаловать в Дом-музей И.Я. Яковлева, входящего в Мемориальный комплекс им. В.И. Ульянова (Ленина)!

УДК 371.314

E. A. Ходзицкая (г. Ульяновск)

ФОРМИРОВАНИЕ КЛЮЧЕВЫХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ШКОЛЬНИКОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

Одним из перспективных направлений в работе современной школы является метод проектов, ориентированный на становление личности учащегося через активную практическую деятельность. Эта форма обучения получает все большее распространение в отечественном образовании. Введение в практику метода проектов предполагает коренное изменение не только системы организации образовательного процесса, но и роли педагога в нем. В связи с этим полезен любой опыт его освоения. В статье представлен успешный опыт организации проектной деятельности учащихся в физико-математических классах многопрофильного лицея № 20 города Ульяновска.

Плохой учитель преподносит истину,

хороший учит ее находить.

А. Дистервег

Проблема.

Современный учитель призван создавать необходимые условия для всестороннего развития личности своих подопечных. Его задачей является не только формирование у школьников глубоких предметных знаний, но и умения самостоятельно применять усвоенные знания и приобретённые навыки в практической деятельности и повседневной жизни. Это способствовало бы адаптации молодых людей в социальной среде и успешной их реализации в профессиональной деятельности.

Исследования показывают, что люди удерживают в памяти лишь 10% того, что они читают, 26% того, что слышат, 30% того, что видят, и 50% того, что они читают, видят и слышат. И сравните: в памяти остаётся 70% того, что обсуждалось с другими, 80% того, что основано на личном опыте и 95% того, чему люди обучались самостоятельно.

Здесь следует задуматься: а что остаётся в голове нашего ученика после традиционного, привычно организованного урока, центром которого является учитель – единственный источник и распространитель знаний? Урока, на котором основной упор делается на усвоение готовых знаний, а обучение происходит за счёт эксплуатации памяти учащихся? Уместно вспомнить высказывание французского философа-гуманиста Мишеля Монтеня (1533 - 1592 гг.): «Хотя чужое знание может нас кое-чему

© Е. А. Ходзицкая, 2014

научить, мудр бываешь лишь собственной мудростью».

Вывод напрашивается сам собой: нужно вводить педагогические технологии, ориентированные на большую самостоятельность в учении, выработку исследовательских умений, логического мышления, развитие творческих, организаторских, коммуникативных способностей, формирование личной ответственности учащихся за результат своей работы. Грамотное, продуманное, сбалансированное использование классических методов и новых технологий, несомненно, пойдёт на пользу современному школьному образованию.

Актуальность.

Федеральный государственный образовательный стандарт (ФГОС) чётко определяет приоритеты общего среднего образования. Главными задачами школы являются: духовно-нравственное развитие ребёнка, овладение ключевыми компетентностями, формирование универсальных учебных действий.

Новые подходы, запросы, приоритеты в современном школьном образовании требуют и изменений в сознании самих учителей. Однако этот процесс идёт значительно медленнее, чем того требует жизнь.

И дело не только в нежелании учителя меняться, идти в ногу со временем. Хотя и этот факт имеет место быть. Ведь это требует значительных усилий, изменения привычного уклада жизни, отказа от стереотипов, от сложившихся в течение десятилетий педагогических устоев, и, конечно, требует отдачи, творчества и особого напряжения мысли.

Но даже готовность педагога к переменам не является гарантией успеха и не всегда даёт положительные результаты. Причиной этому является элементарное неумение учить детей по-новому, незнание методик, реализующих поставленные временем задачи.

Учитель ищет ответы в специальной литературе, периодической печати, Интернете, но не всегда находит то, что нужно. С одной стороны, в силу своей загруженности он бывает лишен возможности быстро и с пользой освоить огромные объёмы новой информации.

С другой стороны, обилие появившихся в последнее время публикаций носит в большинстве своём достаточно поверхностный, общий характер. Цель их состоит в том, чтобы убедить читателей в необходимости перемен в современном школьном образовании. А вот как это сделать рядовому учителю не в теории, а на практике, в своей непосредственной каждодневной работе с реальными детьми и на реальном уроке – этот вопрос часто остаётся без конкретного ответа. Вот и получается, что «по-старому учить уже нельзя, а по-новому не получается».

Для выхода из этого положения существуют два пути: можно попытаться изобрести свою методику обучения школьников, а можно изучить опыт коллег по цеху, и из всего многообразия предложенных вариантов выбрать тот, который наилучшим образом подходит именно вам и вашим ученикам. Какой бы из путей вы не выбрали, пренебрегать опытом и советами коллег в любом случае представляется неразумным.

В последние годы широкое распространение среди школьных учителей получил метод проектов. И это не случайно. Правильно организованная проектная работа основывается на вопросах, ответы на которые не могут быть получены зубрёжкой. Это вынуждает ученика занимать активную позицию: исследовать проблему, принимать решения, искать и осваивать в процессе работы новую информацию, анализировать, систематизировать её, оформлять выводы, сотрудничать с другими людьми, документировать процесс своей деятельности, отстаивать свои взгляды. То есть участие в проектной деятельности формирует у учащихся качества, которые характерны для успешных, деятельных, инициативных людей, современных лидеров политики, искусства, бизнеса.

Эти качества, называемые «ключевыми компетентностями», нужно формировать с детства, чтобы после окончания школы молодой гражданин своей страны мог наилучшим образом адаптироваться в современном обществе, успешно реализоваться в выбранной сфере профессиональной деятельности. А где же и когда человеку учиться, если не за школьной партой?

Шаг 1. Вводные уроки. Предварительная подготовка.

Обучение проектной деятельности – процесс длительный и кропотливый. Ученику, впрочем, как и учителю, впервые столкнувшемуся с таким методом обучения, трудно перестраиваться, менять привычный уклад школьной жизни, непривычно брать на себя ответственность и проявлять инициативу. Возможно, по этой причине многие школьники вначале принимают такую работу без особого энтузиазма, она для них не совсем понятна, трудна и слабо мотивирована.

Именно поэтому полноценной и успешной проектной деятельности, на наш взгляд, должна предшествовать предварительная подготовка, направленная на мотивацию школьников к такого рода самостоятельному труду. Учителю необходимо приложить весь свой талант и усилия, чтобы заинтересовать учащихся, пробудить в них интерес к проектированию. На первых уроках следует рассказать о достоинствах метода, продемонстрировать учебные работы, выполненные ранее другими учениками, их ровесниками. От того, насколько убедительным будет учитель, насколько он сам будет активен, заинтересован, поглощён такой работой, во многом будет зависеть и отношение учащихся к ней.

Первые уроки необходимо также посвятить знакомству с историей возникновения и развития метода, учёными, чьи имена неразрывно связаны с проектной деятельностью в образовании. Следует довести до будущих проектантов цели, принципы и основополагающие идеи метода проектов. Ученики должны чётко представлять, какая цепь последовательных этапов работы предшествует получению качественного продукта проектной деятельности. Публикации на эту тему можно в достаточном количестве найти и на полках магазинов, и в Интернете.

Нельзя поручать выполнение проекта ребёнку, заведомо зная, что без помощи наставника он не сможет сделать самостоятельно ни одного шага. От такой работы больше вреда, чем пользы. Нужно понимать, что приступать к учебному проекту готов лишь тот ученик, у которого уже сформированы определённые первоначальные знания, умения и навыки. Это поможет ему на первых порах хотя бы часть работы выполнять самостоятельно. В противном случае применение метода проектов, общепризнанной деятельностной технологии, теряет всякий смысл, поскольку именно воспитание самостоятельности, ответственности, инициативы – одна из основополагающих идей метода проектов.

Кроме того, необходимо учитывать возрастные особенности учащихся. Понятно, что учащимся 5-6 классов требуется постоянная помощь педагога практически на всём протяжении работы над проектом, в то время как 9-11-классники могут все этапы проектной деятельности осуществлять самостоятельно.

Однако, независимо от возраста, от неподготовленных детей, не имевших ранее опыта работы с проектами, нельзя ожидать и тем более требовать выдающихся результатов в этой области.

Поэтому следующий, не менее важный этап предварительной подготовки учащихся к работе по методу проектов – обеспечение их необходимым инструментарием для выполнения намеченных действий.

Шаг 2. Формирование первичных навыков.

Прежде чем нацелить учащихся на подготовку серьёзного проекта, сначала надо обучить их планированию своих действий, поиску информации по заданной теме, отбору, анализу и систематизации найденных фактов, умению работать со справочной литературой, сотрудничеству с другими членами команды. Необходимо формировать творческие, исследовательские, организаторские, артистические способности школьников.

И ещё одна особенность современного этапа образования – всепроникающая роль информационных технологий во все сферы обучения. Невозможно представить проектную деятельность современного школьника без использования компьютера на любом этапе подготовки проекта – от поиска, обработки, хранения и передачи огромных объёмов

информации до оформления творческой работы и сопроводительной документации. И хотя многие школьники владеют компьютерной грамотностью лучше, чем разговорным языком, тем не менее, опыт показывает, что их увлечение часто принимает однобокий характер. Учащиеся тратят массу времени на интернет-общение, компьютерные игры, развлечения, упуская из виду безграничные возможности Интернета для развития и образования.

Значит, руководитель проектной деятельности должен обучать начинающих проектантов рациональному, умелому и эффективному использованию Интернет-технологий в образовательных целях, правилам работы в поисковых системах. Необходимо спланировать и уроки знакомства с наиболее популярными в проектной деятельности компьютерными программами (Microsoft Office Word, Microsoft Power Point, Windows Movie Maker, Paint, Microsoft Office Excel и др.). Очень уместны были бы на этом этапе рассказы учащихся о своих достижениях в этой области, уроки по обмену знаниями, умениями между школьниками. Опыт ровесников подтверждает досягаемость намеченных целей, прекрасно мотивирует учащихся, заинтересовывает, побуждая их осваивать новые знания, добиваться своих личных успехов.

Продолжительность данного этапа каждый учитель определяет для себя сам, исходя из возрастных особенностей конкретного коллектива школьников, их способностей, уровнем необходимых знаний и умений. По опыту знаем, что в слабо подготовленных классах на эту работу может уйти от нескольких месяцев до учебного полугодия. В любом случае пренебрегать этим этапом, предшествующим полноценной проектной работе, не следует. Чем лучше будет подготовлен ученик, тем больше он будет испытывать уверенность в своих силах. Чем большими практическими навыками он будет обладать, тем самостоятельнее будет его деятельность в дальнейшем, тем шире простор для творчества, разнообразнее по содержанию и интереснее по форме будут подготовленные им творческие, исследовательские проекты.

Понятно, что за один день этой серьёзной задачи не решить, но, поверьте, затраченное время будет оправдано качественными, интересными, яркими творческими работами, продуктом ума и рук ваших учащихся.

Шаг 3. Формирование основных навыков.

Итак, первый, подготовительный этап завершился. Учащиеся снабжены основными, необходимыми любому современному человеку знаниями, т.е. «рабочим инструментом», с помощью которого будут формироваться специальные, «проектные» умения. Наступает череда обучающих занятий и творческих домашних заданий, направленных на формирование навыков работы с большими объемами незнакомой

информации: поиском, обобщением, систематизацией, оформлением, презентацией материала. С этой целью мы предлагаем начинающих проектантам ряд обучающих упражнений такого рода:

Упражнение №1. Обучение работе с новой информацией.

Коллектив разбивается на группы по 2-3 человека по желанию учащихся. Учитель предоставляет ученикам творческие работы, изготовленные ранее другими авторами. Задание для учащихся:

- а) подготовить аннотацию проекта,
- б) сформулировать задачи, решаемые в данной работе,
- в) указать круг возможных пользователей данного продукта,
- г) написать рецензию на изученный материал.

Далее проводится коллективное обсуждение подготовленных вариантов ответов, заслушиваются замечания, предложения, в результате чего вырабатывается наиболее удачный вариант ответа. Для закрепления полученных понятий и навыков учащиеся получают домашнее задание: проделать аналогичную работу дома с другим материалом, оформить полученные выводы в печатном виде с использованием компьютера.

Упражнение №2. Обучение самостоятельному поиску новой информации.

Задание для учащихся: по возможности используя все виды источников информации (в том числе Интернет-ресурсы), подготовить папку с разнообразным материалом по теме, указанной учителем (например, «Симметрия», если говорить о математике). Описать, следуя правилам оформления, предварительно изученным на занятии, библиографические данные источников информации.

Упражнение №3. Формирование навыков обработки информации.

Задание для учащихся: изучить собранный ранее материал (упражнение №2), проанализировать его, выбрать главное, систематизировать и составить связный текстовый документ объемом в несколько печатных страниц. Оформить документ на компьютере, используя рисунки, графики, диаграммы, таблицы и пр.

Элементы такого упражнения для лучшего понимания и усвоения его учащимися желательно предварительно выполнить на уроке с последующим коллективным обсуждением результатов и выработкой наиболее приемлемого варианта.

Упражнение №4. Обучение навыкам компьютерного оформления результатов работы.

Учащиеся формируются в группы по 2-3 человека для подготовки компьютерных версий учебных работ. Задание для образовавшихся миниколлективов:

- а) выбрать из предложенного учителем списка любую понравившуюся тему;

б) подготовить краткий сценарий фильма или презентации;

в) используя Microsoft Power Point, Windows Movie Maker или другие компьютерные программы, создать слайдовую презентацию, видеофильм или мультфильм по выбранной тематике, максимально реализуя возможности соответствующей программы (анимации, эффекты, рисунки, гиперссылки, видео и пр.).

Упражнение №5. Обучение навыкам публичного выступления.

Подготовка творческих групп к защите своих работ. Задание для учащихся:

а) Составить текст выступления. В нём указать состав группы, проблему, над которой она работала, цели, которых авторы старались достичь. Кроме этого, учащиеся могут рассказать об основных идеях, отличительных чертах своей работы, о способах осуществления своих задумок, о сфере применения, о круге возможных пользователей своей работы и пр.

б) Составить сценарий защиты. Продумать и распределить роли, которые будут выполнять участники группы во время публичной демонстрации учебной работы.

в) Выучить тексты своих выступлений, провести предварительные репетиции своей защиты.

Далее следуют занятия, на которых происходит демонстрация подготовленных учебных работ и их защита перед руководителем и одноклассниками в соответствии с продуманным сценарием.

Упражнение №6. Формирование оценочных и самооценочных навыков.

Авторы учебных работ должны быть готовы в конце защиты своей работы ответить на вопросы зрителей, описать, какие проблемы возникали в процессе работы, и какими методами они преодолевались. Проанализировать, что из задуманного удалось, а что не получилось и по каким причинам.

Остальные учащиеся, свободные от защиты своих работ, в этот день играют роль жюри. Их задачи:

а) проанализировать выступление группы, написать отзыв, в котором следует оценить качество работы, отметить положительные её стороны, указать на недостатки и предложить пути их устранения;

б) коллективно обсудив, предложить возможные критерии оценки будущих проектов.

Опыт показывает, что процедуру защиты творческих работ не надо форсировать, она должна занимать не одно, а несколько занятий. Предварительно следует составить график защиты, в котором будут указаны даты проведения соответствующих уроков и очередность выступления рабочих групп. Временной фактор играет очень важную роль.

Дозированное поступление нового материала поможет избежать утомляемости учащихся, будет способствовать лучшему восприятию и усвоению новой информации. Кроме того, разбор достоинств и недочётов уже защищённых работ играет свою положительную роль, помогая другим учащимся учесть замечания и советы и не повторять выявленных ошибок. Гибкий график позволяет ученикам выделить достаточно времени для коррекции своих работ, для более качественной и серьёзной их обработки.

Что касается критерииев оценки, то учащиеся вносят довольно объективные и важные предложения уже на этом этапе пробных защит, а по мере накопления опыта проектной работы список критериев пополняется, корректируется, совершенствуется. Эта работа играет очень важную воспитательную роль. Ученики чувствуют себя полноценными участниками творческого процесса, своего рода «законодателями», людьми, с которыми считаются и чьё мнение уважают взрослые. Школьники относятся к этой работе серьёзно и обстоятельно, понимая, что сами формируют список качеств, которым в дальнейшем они и их работы должны будут соответствовать. Критерии, предложенные и утверждённые ученическим коллективом, кажутся школьникам более объективными и вызывают больше доверия, чем те, что «спущены сверху».

Этап 4. Проектная деятельность.

Итак, подготовительный этап закончился, учащиеся имеют в арсенале сумму исторических, теоретических знаний и практических навыков, которые уверенно могут применять в дальнейшей работе. Понятно, что такой подход к организации проектной деятельности учащихся поможет им плавно и органично влиться в процесс созидания, сделает его эффективным, полезным и приятным для каждого ученика.

Мониторинг проектной деятельности должен быть ясным и открытым для учащихся. Очень хорошо, если в классе будет оформлен стенд, на котором учащиеся могли бы найти всю необходимую информацию. Там можно разместить исторические и теоретические материалы, образцы необходимой сопроводительной документации (проектной папки, паспорта проектной работы), памятку для учащихся, графики консультаций, объявления, критерии оценки проектов и пр. Чтобы стенд был работающим, информация должна быть интересна учащимся, динамично меняться и отражать текущее состояние проектной работы в коллективе.

Учитель должен сознавать, что от степени самостоятельности учащихся напрямую зависит развивающий эффект проектного метода. Организатору проектной деятельности придётся отказаться от доминирующей роли в коллективе, он призван играть роль консультанта, советчика, старшего помощника, эксперта, координатора учебных действий. «Эффективность любого урока определяется не тем, что дает

детям учитель, а тем, что они взяли в процессе обучения», – говорил В. Сухомлинский. Школьники должны быть полностью свободны в выборе темы, вида, формы своего проекта, видов деятельности для достижения поставленных целей. Они сами несут ответственность за создаваемый их силами творческий продукт.

Благодаря учителю, школьники уже знают, какие последовательные этапы им предстоит пройти для создания собственного проекта. Однако нeliшне будет напомнить им об этом ещё раз.

Первый этап. Постановка проблемы. Целеполагание.

Важно помнить, что метод проектов имеет одну важную особенность, которую следует учитывать уже при выборе темы: каждый проект должен быть ориентирован на решение какой-либо проблемы, которую учащихся считают значимой и интересной. Нет проблемы – нет проекта. Следует подчеркнуть, что выбор проекта – от его темы до способа презентации – наши учащиеся осуществляют самостоятельно. Они руководствуются своими вкусами, интересами, предпочтениями. Единственное ограничение, которое ставит перед ними учитель в период выбора темы проекта – это использование предметных знаний текущего учебного года. В нашем случае это были проекты по математике, и поэтому перед учащимися было поставлено условие: обязательное применение математических методов в подготовке проекта. Такая постановка вопроса, как показала практика, имеет много «плюсов».

К примеру, учащийся выбирает любую тему алгебры или геометрии, которую ему ещё только предстоит изучать в этом учебном году. Мало того, что он должен самостоятельно разобраться во всех тонкостях выбранного материала, т.е. по сути, приобретать навыки самообразования, ему ещё предстоит создать, а затем и защитить полезный, практичный продукт своей деятельности с использованием приобретённых знаний. А поскольку работа школьника соответствует программному материалу, то вполне уместно использование его на уроках изучения соответствующей темы в классе. А это в свою очередь способствует лучшему усвоению данного материала другими учащимися, их заинтересованности, способствует росту авторитета автора проекта, убеждает зрителей в практической пользе данного вида деятельности, стимулируя их собственный труд. «Если раньше мы умели работать только с тем, что нам преподавалось, и делать то, что заранее оговаривалось, то теперь нам приходится выполнять проекты в незнакомой обстановке, самими быть учителями, а также актерами» (Михеева Елена, ученица 11 класса).

Например, группа в составе трёх десятиклассников нашей школы в начале учебного года провела опрос учащихся десятых-одиннадцатых классов. В результате была выявлена следующая закономерность: в период перехода от планиметрии к стереометрии, от плоских образов к объёмным

телам школьники испытывают серьёзные сложности с пространственным воображением (справедливость этих выводов может подтвердить любой учитель математики). Учащимся непросто даётся теоретический материал, им сложно усваивать теоремы, решать стереометрические задачи, т.к. они с трудом представляют себе, как изучаемые объекты выглядят и взаимодействуют в пространстве. Проблема? Проблема! Оценив ситуацию, группа определяет цель: помочь десятиклассникам в изучении стереометрии. За основу наши проектанты выбрали наиболее сложные темы геометрии: «Параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей».

Итак, группы сформированы, темы выбраны, цели определены. Учащиеся подают руководителю заявки на участие в проектной деятельности, в которых указывается состав группы, тема проекта и его цель. Можно переходить к следующему этапу проектной деятельности.

Второй этап. Планирование действий.

Проблема определена, цели установлены. Пора приступать к полноценной деятельности, которая должна начинаться с планирования, грамотного распределения имеющихся ресурсов (исполнителей, времени, материала). Это один из важнейших этапов, в результате которого становятся понятны не только отдалённые перспективы, но и последовательные шаги к достижению поставленной цели.

Участникам необходимо сформулировать задачи своей работы, распределить роли в группе, определить сроки поэтапного исполнения работ (составить график проектной деятельности), самостоятельно выбрать форму продукта и способы его презентации. Школьникам предоставляется полная свобода в выборе способов и видов деятельности для достижения поставленной цели. Им никто не навязывает, как и что делать, они сами несут ответственность за создаваемый их силами творческий продукт. «Не было никаких рамок того, каким должен быть наш проект. Мы сами ставили себе задачи, сами искали пути их решения. И это потрясающе, когда ты знаешь, что, зачем и для чего ты делаешь. Ты сам себе начальник!» (Пискун Юлия, 11 класс).

Группа учащихся, о которой шла речь выше, решила создать учебный видеофильм, в котором все теоремы, сопутствующие теме «Параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей», были бы озвучены и наделены яркими пространственными иллюстрациями. Все стереометрические «участники» теорем согласно подготовленному сценарию должны были бы двигаться, поворачиваться, демонстрируя зрителям свой «внешний вид», расположение в пространстве и взаимодействие друг с другом в соответствии с текстом теорем.

Для создания такого учебного продукта участникам пришлось запланировать самостоятельное изучение теорем, подготовку эскизов к

ожидающему фильму, поиск и изучение компьютерных программ, позволяющих создавать анимированные 3D-объекты, искать «актрису» с приятным голосом для озвучивания фильма. Согласитесь, что это неплохой стимул к самообразованию и прекрасный полигон для развития творчества и продуктивного общения с другими людьми. Важно, что и сами участники проектной деятельности прекрасно осознают это. «Если во время подготовки проекта ничему не учишься, то какой смысл его делать?» (Пахарева Полина, 11 класс). Авторы учебного видеофильма «Параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей» представляли себе и практическую значимость своей работы. Это был продукт, появления которого с нетерпением ждали и учителя математики, и ученики.

Понятно, что по мере продвижения к поставленной цели каждый из запланированных на данном этапе параметров проектной деятельности может быть изменён и скорректирован участниками процесса.

Учащиеся должны завести дневник проектной деятельности, в котором отражались бы текущий и все последующие этапы работы, фиксировались идеи, выводы, результаты исследований, опросов, поиска информации, изменения планов группы и пр. В нём также фиксируются проблемы, возникающие по ходу выполнения проекта, варианты их решения, советы и рекомендации научного руководителя, результаты совещаний, дискуссий с членами своей рабочей группы и пр. Дневник можно вести в произвольной, удобной для учащихся форме. Авторов проектов эта работа будет дисциплинировать, служить сохранению ценных идей, анализу собственных действий, планомерному и осознанному продвижению к намеченной цели. Кроме того, накопленный материал послужит основой для подготовки письменной части проекта (отчёта о проделанной работе).

Аналогичный дневник (или журнал) проектной деятельности ведёт и руководитель. В нём отражается вся деятельность группы, фиксируются детали, отражается степень активности каждого участника, учитывается его вклад в общее дело, рост и продвижение в работе над проектом. Журнал проектной деятельности руководителя – это прекрасный инструмент для ведения качественного мониторинга проектной деятельности. Такой документ позволяет также своевременно выявить ситуации, в которых уместна методическая помощь учителя. В дальнейшем этот документ создаст базу для объективной, обоснованной оценки участия каждого проектанта в создании творческого продукта.

Третий этап. Реализация намеченного плана.

На этом этапе учащиеся осуществляют поиск необходимой для создания проекта информации, анализируют, обрабатывают, систематизируют её, при необходимости проводят исследования, опросы,

опыты, строят гипотезы, общаются со специалистами в изучаемой области и пр.

Так, группа учениц 10 класса нашего лицея планировала после окончания школы поступление на экономические факультеты вузов. И темы проектов, ими выбранные, не только опирались на математические методы (в соответствии с требованиями руководителя), но и способствовали их самообразованию в области экономики. Учащиеся, серьёзным образом поработав в библиотеках, изучив большие объёмы информации в Интернете, выбрали для себя наиболее интересные темы: волновую теорию Эллиотта, числа Фибоначчи и их всепроникающее влияние на все сферы жизни. Они поставили цель: доказать, что даже самые привычные и обыденные явления в природе, астрономии, архитектуре, экономике, истории тоже поддаются закономерностям и математическим расчётом.

В процессе подготовки проекта учащиеся проявили самостоятельность, инициативу и деловой подход. Неоднократно они получали консультации и брали интервью у школьных специалистов: учителей математики, истории, обществознания, астрономии. Кроме того, школьницы сумели договориться с преподавателем экономического факультета Ульяновского университета о проведении специальной лекции по интересующим их проблемам, пригласив на неё своих одноклассников. Запись этой лекции они потом продемонстрировали и во время защиты своего проекта. Трудно переоценить степень важности приобретённых навыков для дальнейшего профессионального становления и роста.

Четвертый этап. Оформление проекта. Подготовка сопроводительной документации (портфолио проекта).

Получение практического результата, готового, «осозаемого» продукта – основополагающая идея метода проектов. Чтобы проект приобрёл завершённый, «товарный» вид, необходимо приложить немало усилий, творчества, фантазии. Здесь пригодятся среди прочих и навыки работы с компьютерными программами, которые были изучены ранее на уроках или освоены учащимися самостоятельно в ходе проектной деятельности.

Формы, которые приобретают проектные продукты учащихся, интересны и разнообразны. Среди них учебно-познавательные сайты, компьютерные презентации, тематические тесты, макеты архитектурных сооружений, результаты социологических опросов, видео и мультифильмы, модели геометрических тел, демонстрационные материалы, разработки уроков, учебные пособия, задачники и многое другое.

К примеру, группа учениц, занимавшаяся темой «Волновая теория Эллиотта и числа Фибоначчи», подготовила небольшую научно-популярную книгу, которая прошла рецензию декана физико-

математического факультета педагогического университета и была опубликована. Компьютерный набор, идеи, стиль, оформление – от начала до конца работы авторов. Представьте себе, какие чувства испытывает школьник, держа в руках собственную книгу – результат продолжительного и добросовестного труда его ума и рук, плод его инициативы, творчества и фантазии. И это не первый опыт издания проектных работ наших учащихся. Такой результат является мощным стимулом и для самих авторов книги, и для тех, кто их окружает. А сколько деловых, коммуникативных качеств, профессиональных навыков приобретено в период подготовки такого проекта!

Важной частью работы является подготовка сопроводительной документации к своей работе, так называемой проектной папки или портфолио проекта. Туда входят: паспорт проекта, дневник проектной деятельности, подробный отчёт о проделанной работе, а также все собранные по теме материалы, наброски, эскизы и пр.

В паспорте могут быть указана следующая информация:

- название проектной работы,
- состав проектной группы,
- образовательное учреждение,
- класс,
- руководитель проекта,
- консультант(ы),
- учебный предмет, в рамках которого проводится работа,
- дисциплины, близкие к теме проекта,
- тип проекта,
- цель проекта,
- необходимое оборудование,
- аннотация,
- предполагаемый круг пользователей продукта и прочее.

Очень важная составляющая часть проекта – так называемая письменная, представляющая собой отчёт о ходе проектной работы и полученных результатах. Ни в коем случае нельзя пренебрегать этим видом деятельности учащихся. Письменная часть проекта имеет глубокий смысл, поскольку побуждает школьников осуществлять рефлексивную оценку своих действий, анализировать свои успехи и промахи, искать причины неудач и находить иные, более эффективные варианты их решений.

Отчёт должен отражать весь ход проектной деятельности от начала до конца, содержать первоначальный план работы, описание предполагаемого вида продукта, поставленных целей, способа распределения ролей в группе. Учащимся следует описать методы решения поставленных задач,

указать проблемы, возникшие в ходе работы над проектом, изменения в плане и их причины, провести анализ выполненной работы, её соответствие задуманному плану, дать оценку эффективности предпринятых действий, сделать выводы и рассмотреть перспективы на будущее. Чем старше и опытнее учащиеся, тем более развернутым, серьёзным, продуманным должен быть отчёт.

Шестой этап. Презентация продукта.

Одним из важных качеств современного человека в условиях конкуренции является умение достойно преподнести окружающим свои деловые качества и умело презентовать продукты своего труда. Метод проектов предоставляет учащимся возможность развивать в себе эти навыки. Как уже известно, работа над проектом должна завершаться получением готового продукта. Защита ученических проектов – это демонстрация (презентация) продуктов проектной деятельности творческих групп. В ходе защиты школьники учатся представлять результаты своего труда, обосновывать полученные выводы, отвечать на вопросы, аргументировано отстаивать собственную точку зрения, свой взгляд на проблему.

Первые, пробные уроки защиты творческих проектов мы практикуем проводить на «малой сцене», в знакомой обстановке, внутри классных коллективов. Проектные работы учащихся в этом случае оценивают их же одноклассники. А в последующем мы расширяем границы нашей аудитории: проводим научно-практические конференции общелицейского масштаба с приглашением родителей, администрации, учителей и учащихся лицея, студентов педагогического университета и их руководителей. Постепенно, с приобретением проектного опыта, уверенности в себе наши учащиеся выходят и за границы лицея: представляют свои проекты на вузовских научно-практических конференциях, имеют опыт выступления перед учителями города и области, принимают участие в городских, областных и всероссийских конкурсах.

Разумеется, не все проекты одинаково успешны, однако даже не очень удачный проект важен для его создателей, вносит значительный вклад в их развитие и имеет большое воспитательное значение. Как говорил американский философ и педагог Джон Дьюи (1859 - 1952), «человек, по-настоящему мыслящий, черпает из своих ошибок не меньше познания, чем из своих успехов».

Отзывы учащихся свидетельствуют о том, что данная система обучения получила несомненное признание и самих участников проектной деятельности. Школьники отмечают, что метод проектов эффективно способствует раскрытию их природных талантов, развитию конструкторских, организаторских, артистических, художественных и

других творческих способностей. Такой метод обучения побуждает их осваивать новые современные технологии, заниматься поиском, изучением, анализом больших объёмов новой информации из разных областей знаний, способствуя тем самым их самообразованию и развитию. «*Школьные проекты учат нас, детей, не только добывать знания и работать по шаблону, но и применять эти знания на практике, проявлять самостоятельность, что очень важно для дальнейшей жизни. Я не думаю, что наш труд пропадет даром. И даже важно не то, какой материал мы нашли, а то, как мы искали и обрабатывали информацию, выделяли главное и преподносили его читателям. После столь сложной проделанной работы я поняла, что могу работать самостоятельно, мыслить творчески, выполнять работу так, как хочу, а не по образцу*» (Ушакова Екатерина, 10 класс).

Иногда можно получить и вовсе непрогнозируемые результаты. «*Мои главные враги - это лень и нервы. С ними очень трудно бороться. И я неожиданно для себя заметила, что именно проектная деятельность помогает мне с ними справляться*» (Смирнова К., 11 класс).

Так что идите вперёд! Дерзайте! В любом случае выйдете победителями!

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Голуб Г. Б., Перелыгина Е. А., Чуракова О. В. Метод проектов – технология компетентностно-ориентированного образования. Методическое пособие для педагогов - руководителей проектов учащихся основной школы / Под ред. д. ф.-м. н. проф. Е.Я. Когана. – Самара: Издательство «Учебная литература», Издательский дом «Федоров», 2006. – 176 с.
2. Зеленская Е. В. Поэтапная организация учебной проектной деятельности учащихся // Школьные технологии, 2009. – № 5. – С. 122–127.
3. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования / Под ред. Е. С. Полат. – М., 2000.
4. Сергеев И. С. Как организовать проектную деятельность учащихся: Практическое пособие для работников общеобразовательных учреждений. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: АРКТИ, 2006. – 80 с.
5. Ступницкая М. А. Новые педагогические технологии: учимся работать над проектами. Рекомендации для учащихся, учителей и родителей. – Ярославль: Академия развития, 2008. – 256 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ф.И.О	Ученая степень, ученое звание, место работы, E-mail
Андрафанова Н.В.	Канд. пед. наук, доцент кафедры информационных образовательных технологий Кубанского государственного университета. E-mail: nat_drofa@mail.ru
Андрянов Н.А.	Аспирант кафедры «Телекоммуникации» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: nikita-and-nov@mail.ru
Анкилов А. В.	Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: ankil@ulstu.ru
Атряхин В. А.	Программист кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механике Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева. E-mail: atrvol@rambler.ru
Афанасьева Т. В.	Доктор техн. наук, профессор кафедры «Информационные системы» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: tv.afanasjeva@gmail.com
Бадокина Т. Е.	Аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики Мордовского гос. университета им. Н. П. Огарева.
Бауэр А. В.	Студентка 5-го курса факультета математики и информационных технологий Ульяновского государственного университета. E-mail: bauer_ab@mail.ru
Вельмисов П. А.	Доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: velmisov@ulstu.ru
Вельмисова С. Л.	Канд. пед. наук, доцент кафедры теоретической физики Ульяновского государственного университета. E-mail: velmisova@mail.ru
Галимова Р. К.	Канд. техн. наук, доцент кафедры технической физики КНИТУ-КАИ им. А. Н. Туполева. E-mail: ryfiz@bk.ru
Глебова М. В.	Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры алгебры и методики обучения математике и информатике Пензенского государственного университета. E-mail: mvmorgun@mail.ru
Грушевский С. П.	Доктор пед. наук, профессор, декан факультета математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета, заведующий кафедрой информационных образовательных технологий КубГУ. E-mail: spg@kubsu.ru
Джукашев К. Р.	Аспирант кафедры функционального анализа и геометрии Тверского государственного университета. E-mail: dzhukashev@gmail.com

Добровольская Н. Ю.	Канд. пед. наук, доцент кафедры информационных образовательных технологий Кубанского государственного университета. E-mail: dnu10@mail.ru
Доманов В. И.	Канд. техн. наук, профессор, зав. кафедрой «Электропривод и автоматизация промышленных установок» Ульяновского государственного технического университета.
Еремеева Н. И.	Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Димитровградского инженерно-технологического института НИЯУ МИФИ. E-mail: eremeev.juri@yandex.ru
Засядко О. В.	Канд. пед. наук, доцент кафедры информационных образовательных технологий Кубанского государственного университета. E-mail: ovz65@mail.ru
Ивашкин А. И.	Аспирант кафедры «Теоретическая и прикладная механика» Ульяновского государственного технического университета.
Ильмушкин Г.М.	Доктор пед. наук, канд. физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики Димитровградского инженерно-технологического института НИЯУ МИФИ. E-mail: gera1946@yandex.ru
Карпухин К. Е.	Старший преподаватель кафедры «Электропривод и автоматизация промышленных установок» Ульяновского государственного технического университета.
Киреев С. В.	Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета. E-mail:
Козлов А. О.	Аспирант кафедры «Информационные системы» Ульяновского государственного технического университета.
Корнеев А. В.	Аспирант кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: a.korneev1@gmail.com
Кяшкин А. В.	Программист ООО «33 бита». E-mail: elenamel@rambler.ru
Леонтьев В. Л.	Доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры «Информационная безопасность и теория управления» Ульяновского государственного университета. E-mail: alex_lion@rambler.ru
Макаркин С. Б.	Доцент кафедры «Прикладная математика и информатика» Тольяттинского филиала Самарского государственного университета. E-mail: s.makarkin@gmail.com
Манжосов В. К.	Доктор техн. наук, профессор, зав. кафедрой «Теоретическая и прикладная механика» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: v.manjosov@ulstu.ru, tpm@ulstu.ru
Маценко П. К.	Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: mpk@ulstu.ru

Мельников Б. Ф.	Доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой «Прикладная математика и информатика» Тольяттинского филиала Самарского государственного университета. E-mail: bormel@rambler.ru
Мельникова Е. А.	Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика и информатика» Тольяттинского филиала Самарского государственного университета. E-mail: elenamel@rambler.ru
Минин И. В.	Доктор техн. наук, профессор кафедры метрологии и технологии оптического производства Сибирской государственной геодезической академии. E-mail: Prof.minin@gmail.com
Минин О. В.	Доктор техн. наук, профессор, зав. кафедрой метрологии и технологии оптического производства Сибирской государственной геодезической академии. E-mail: Prof.minin@gmail.com
Миняков Н. А.	Студент 3-го курса по специальности «прикладная математика и информатика» Ульяновского государственного университета. E-mail: MIN007_@mail.ru
Михеева Е. А.	Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» Ульяновского государственного университета. E-mail: melalex05@rambler.ru
Мороз О. В.	Канд. пед. наук, преподаватель кафедры информационных образовательных технологий Кубанского государственного университета. E-mail: kotkiot@yandex.ru
Окороков В. В.	Студент группы Укд-31 экономико-математического факультета Ульяновского государственного технического университета.
Петрова Т. Е.	Аспирант кафедры «Теоретическая и прикладная механика» Ульяновского государственного технического университета.
Растегаев Ю. О.	Аспирант института проблем точной механики и управления РАН. E-mail: urrast@yandex.ru
Решетников Ю. А.	Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета.
Сайфуллина Е. Ф.	Аспирант кафедры «Прикладная математика и информатика» Тольяттинского филиала Самарского государственного университета. E-mail: elena-fairy@yandex.ru
Семенов А. С.	Канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: a.semenov@ulstu.ru
Семенова Е. С.	Студентка 1 курса факультета информационных систем и технологий Ульяновского государственного технического университета. E-mail: liza.deer@yandex.ru
Сергеев А. В.	Студент Ульяновского государственного технического университета.

Сибирева А. Р.	<i>Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета.</i>
Тестов В. А.	<i>Доктор пед. наук, профессор кафедры математики и методики преподавания математики Вологодского государственного педагогического университета. E-mail: vladafan@inbox.ru</i>
Тренина М. А.	<i>Старший преподаватель кафедры «Прикладная математика и информатика» Тольяттинского филиала Самарского государственного университета. E-mail: trenina.m.a@gmail.com</i>
Угасин А. Н.	<i>Аспирант кафедры «Управление качеством» Ульяновского государственного технического университета.</i>
Фадеев М. С.	<i>Инженер-программист «ООО Неткрэкер». E-mail: mark.fadeev@gmail.com</i>
Хайбулкин Е. Ф.	<i>Офицер в отставке.</i>
Ходзицкая Е. А.	<i>Учитель математики высшей категории многопрофильного лицея № 20 в г. Ульяновске. E-mail: school20@simcat.ru</i>
Челышов М. С.	<i>Магистрант факультета математики и информационные технологии Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева. E-mail: chelyshovms@ya.ru</i>
Чернов С. А.	<i>Канд. техн. наук, преподаватель Ульяновского строительного колледжа.</i>
Шаманаев П. А.	<i>Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механике Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева. E-mail: korspa@yandex.ru</i>
Шелехов А. М.	<i>Доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры функционального анализа и геометрии Тверского государственного университета. E-mail: amshelehov@rambler.ru</i>
Ширялкин А. Ф.	<i>Канд. техн. наук, доцент кафедры «Управление качеством», заведующий лабораторией «Измерения и экспертиза» Ульяновского государственного технического университета.</i>
Шкапова А. С.	<i>Студентка 5-го курса факультета математики и информационных технологий Ульяновского государственного университета. E-mail: anastasia_shkapova@mail.ru</i>
Якупов З. Я.	<i>Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры специальной математики КНИТУ-КАИ им. А. Н. Туполева. E-mail: zymat@bk.ru</i>

СОДЕРЖАНИЕ

Математические методы и модели в науке, технике, естествознании и экономике

H. A. Андриянов

- Дважды стохастические модели на основе изменения интервала
корреляции 6

A. B. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев

- К вопросу о динамической устойчивости трубопровода 9

A. B. Анкилов, П. А. Вельмисов, Ю. А. Решетников

- Математическое моделирование двустороннего безотрывного
обтекания системы трех упругих пластин типа «тандем» дозвуковым
потоком идеального газа 23

B. A. Атряхин, М. С. Челышов, П. А. Шаманаев

- Метод ортогональной циклической редукции для решения систем
линейных алгебраических уравнений с матрицами специального вида . 34

T. B. Афанасьева, А. О. Козлов

- Обобщенная регрессионно-нечеткая модель сервера 37

П. А. Вельмисов, С. В. Киреев, Т. Е. Бадокина

- Изгибные формы пластины-полосы в сверхзвуковом потоке
при нелинейном упругом закреплении 41

M. B. Глебова

- Продолжение тензорных полей с гладких многообразий на их прямое
произведение 49

K. Р. Джускашев, А. М. Шелехов

- Об одном классе эластичных три-тканей с тензором кручения ранга 1 . 59

B. И. Доманов, К. Е. Карпухин, А. В. Сергеев

- Экспериментальное исследование автоматизированной системы
управления дуговой сталеплавильной печи постоянного тока 72

A. И. Ивашкин

- Анализ деформационного поведения моделей материалов в ANSYS ... 79

C. В. Киреев

- К вопросу о выборе знака в граничных условиях, соответствующих
упругой связи, в одной краевой задаче

A. В. Корнеев, А. С. Семёнов

- Одна задача оптимального управления электродвигателем платформы
экскаватора по минимуму потерь с ограничением на управление
в виде неравенства 97

<i>A. B. Кяшкин, Е. А. Мельникова</i>	
Исследование подходов к оптимизации систем построения дополненной реальности на основе распределенных вычислений	102
<i>B. Л. Леонтьев</i>	
Об ортонормированных функциях Франклина, ортонормированных финитных функциях и о связанных с ними рядах Фурье	110
<i>C. Б. Макаркин, Б. Ф. Мельников, М. А. Тренина</i>	
Специальные метрики для псевдогеометрической версии задачи коммивояжёра	112
<i>B. К. Манжосов, Т. Е. Петрова</i>	
Зоны существования и бифуркации кривошипно-коромыслового механизма	122
<i>П. К. Маценко</i>	
О некоторых условиях, порождающих инволюцию	140
<i>П. К. Маценко, Е. С. Семенова</i>	
Спектр одномерного возмущения функционально-дифференциального оператора первого порядка с отражением в старшем члене	143
<i>Б. Ф. Мельников, Е. Ф. Сайфуллина</i>	
Подход к решению задачи проверки изоморфизма графов с помощью последовательной проверки инвариантов	148
<i>И. В. Минин, О. В. Минин</i>	
Автоматизация вычислительного эксперимента на программном комплексе RELCOM XFDTD	158
<i>E. A. Михеева, А. В. Бауэр</i>	
Алгоритмы построения полинома Жегалкина	168
<i>E. A. Михеева, Н. А. Миняков</i>	
К вопросу полноты в теории конечнозначных функций	171
<i>E. A. Михеева, А. С. Шкапова</i>	
Алгоритмы реализации ФАЛ СФЭ	174
<i>Ю. О. Растегаев</i>	
Микромеханический пьезогироскоп в условиях резкого перепада температур	177
<i>А. С. Семёнов</i>	
К решению простейшей краевой задачи с неоднородными граничными условиями при помощи степенных рядов	184

<i>A. С. Семёнов</i>	
Задача оптимального управления электродвигателем платформы экскаватора по максимальной производительности на временном отрезке с подвижным концом и с ограничением на управление в виде неравенства	189
<i>C. A. Чернов</i>	
Кинематический анализ блока технологической системы на стадии проектирования	193
<i>A. Ф. Ширялкин</i>	
Концептуальные аспекты формирования методики классификации и кодирования информации о детали	198
<i>A. Ф. Ширялкин, A. Н. Угасин</i>	
О порядке кодирования и терминологическом аппарате системы классификации и по МЭТК	206
<i>A. Ф. Ширялкин, B. B. Окороков</i>	
О разработке алгоритма расщеповки заготовок деталей машин для автоматизации решения задач ТПП	212
Проблемы образования	
<i>C. Л. Вельмисова</i>	
Графические методы решения задач «на движение»	220
<i>P. K. Галимова, З. Я. Якупов</i>	
Концепции магистерских программ	227
<i>C. Н. Дорофеев, Е. А. Емелина</i>	
Роль элективных курсов по математике в развитии творческих способностей	235
<i>C. П. Грушевский, Н. В. Андрафанова, Н. Ю. Добровольская</i>	
Формирование педагогических компетенций магистров математики на основе ИТ-технологий	237
<i>C.П. Грушевский, Е.В. Князева</i>	
Статистические методы как средство развития профессиональных компетенций педагога-исследователя	241
<i>C. П. Грушевский, О. В. Засядко, О. В. Мороз</i>	
Формирование профессиональных компетенций в курсе «математика» для студентов экономических направлений подготовки бакалавров	247

<i>H. И. Еремеева</i>	
Формирование математических компетенций студентов технических специальностей	260
<i>Г. М. Ильмушкин</i>	
Специфика организации самообразования и самостоятельной работы студентов по математическим дисциплинам	264
<i>E. A. Мельникова, M. C. Фадеев</i>	
Применение конечных автоматов к моделированию процесса обучения в автоматизированной обучающей системе	267
<i>A. P. Сибирева</i>	
Математические модели, описывающие влияние сред на процесс внедрения инновации в педагогических системах	272
<i>B. A. Тестов</i>	
Основные проблемы реализации концепции развития математического образования	278
<i>E. Ф. Хайбулкин</i>	
Математическая модель абсолютной единицы абсолютных истин	288
<i>E. A. Ходзицкая</i>	
Формирование ключевых компетентностей школьников в процессе обучения математики	309
Сведения об авторах	324

Требования к оформлению
электронных текстов статей в сборник научных трудов
**«Математические методы и модели: теория, приложения и роль в
образовании»**

1. Объем текста статьи – до 20 страниц.
2. Редактор – Microsoft Word 2000, 2003, 2007. Формат А4. Шрифт – Times New Roman (14). Межстрочный интервал – одинарный (Word). Поля – левое, правое, верхнее – 25 мм, нижнее – 30 мм. Отступ (красная строка) – 10 мм. Не допускается использования табуляции и пробелов для формирования отступа первой строки абзаца!
3. При оформлении формул использовать редактор формул Microsoft Equation 3.0. Установки редактора формул: размеры: 14 – 11 – 9 – 16 – 11, стиль переменных и функций – курсив. Номера формул указываются в скобках с правой стороны, формулы центрируются. Выравнивание по ширине.
4. При оформлении рисунков в документе не допускается использование панели Рисование Microsoft Word непосредственно в тексте документа! Рекомендуется использование вставки рисунка из буфера, из файла без привязки. Формат графических файлов bmp. Названия рисунков (обязательно) даются снизу по центру рисунка шрифтом Times New Roman 12 pt, курсив.
5. Названия таблиц (обязательно) и сами таблицы печатаются шрифтом Times New Roman 14 pt.
6. С первой строки УДК работы (от левого края), далее пустая строка, И. О. Фамилия авторов (строчными буквами, от левого края, полужирный шрифт), далее пустая строка, НАЗВАНИЕ (прописными буквами, от левого края, полужирный шрифт), далее пустая строка, затем обязательно краткая аннотация работы до 10 строк (строчными буквами, по ширине, курсив, шрифт Times New Roman 12), далее пустая строка, затем текст статьи, далее пустая строка, затем БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.
7. Диск с файлами, содержащими текст статьи, файлы рисунков и сведения об авторах (научная степень, научное звание, должность, место работы, e-mail авторов) необходимо предоставить на кафедру «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета по адресу: г. Ульяновск, ул. Северный венец, 32, Вельмисову П. А. Файлы можно также выслать на электронный адрес velmisov@ulstu.ru
8. Тексты статей, оформленные с нарушениями данных требований, не включаются в сборник научных трудов.

Научное издание

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ:
ТЕОРИЯ, ПРИЛОЖЕНИЯ И РОЛЬ В ОБРАЗОВАНИИ**

Сборник научных трудов

ЛР №020640 от 22.10.97.

Подписано в печать 23.12.2014. Формат 60×84/16.

Усл. печ. л. 19,53. Тираж 150 экз. Заказ 188. ЭИ № 497.

Ульяновский государственный технический университет

432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.

ИПК «Венец» УлГТУ, 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.