МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Научно-методический совет по математике МОН РФ

Российская академия естественных наук

Средневолжское математическое общество

Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании

Международная научно-техническая конференция
(Россия, г. Ульяновск, 28–30 апреля 2016 г.)

Сборник научных трудов
Часть 2

Ульяновск
УлГТУ
2016

УДК 51 (04)
ББК 22 я43
М75

Рецензенты:

Д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой «Информационная безопасность и теория управления» Ульяновского государственного университета А. С. Андреев
Д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой «Прикладная математика» Ульяновского государственного университета А. А. Бутов

Редакционная коллегия:

УДК 51(04)
Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании : Международная научно-техническая конференция (Россия, г. Ульяновск, 28–30 апреля 2016 г.) : сборник научных трудов / под общ. ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. П. А. Вельмисова. – Ульяновск : УлГТУ, 2016.

Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании : Международная научно-техническая конференция (Россия, г. Ульяновск, 28–30 апреля 2016 г.) : сборник научных трудов. Ч. 2 / под общ. ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. П. А. Вельмисова. – Ульяновск : УлГТУ, 2016. – 180 с.

Во второй части сборника (выпуск 4) представлены тезисы докладов, посвященных проблемам школьного образования, учителей математики, прошедших повышение квалификации в УлГТУ по программе «Современные технологии проектирования и организации учебного процесса на основе управления индивидуальным прогрессом учащихся в соответствии с требованиями ФГОС общего образования». Часть статей содержит результаты исследований студентов.

Для специалистов в области прикладной математики, физики, механики, математического образования.

Статьи печатаются в авторской редакции.

ISBN 978-5-9795-1638-7
ISBN 978-5-9795-1640-0 Ч. 2.

Международная научно-техническая конференция
«Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании»
Ульяновский государственный технический университет
Ульяновский государственный университет
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
Научно-методический совет по математике Минобрнауки РФ
Средневолжское математическое общество

28–30 апреля 2016 г.
Место проведения: г. Ульяновск (УлГТУ)

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

Председатель: П. А. Вельмисов (Ульяновск, УлГТУ)
Сопредседатели:
А. С. Андреев (Ульяновск, УлГУ), П.С. Красильников (Москва, МАИ)
Секретарь: А. В. Анкилов (Ульяновск, УлГТУ)
Члены организационного комитета:
И. М. Ананьевский (Москва), В. И. Антонов (С.-Петербург), В. И. Астафьев (Самара), С. Н. Асхабов (Грозный), Ю. А. Блинков (Саратов), И. В. Бойков (Пенза), А. А. Бутов (Ульяновск), К. К. Васильев (Ульяновск), Г. П. Венков (София, Болгария), М. А. Волков (Ульяновск), П. К. Волков (Ханты-Мансийск), П. С. Геворкян (Москва), С. П. Грушевский (Краснодар), Ю. П. Гупало (Москва), В. А. Гуркин (Ульяновск), Ю. Н. Дерюгин (Саров), А. Г. Егоров (Казань), Р. В. Жалнин (Саранск), А. Н. Зарубин (Орел), А. М. Захаров (Саратов), Г. М. Ильмушкин (Димитровград), Л. И. Каранджулов (София, Болгария), А. В. Карапетян (Москва), Р. А. Каюмов (Казань), А. И. Кириллов (Москва), В. Н. Ковальногов (Ульяновск), Л. Ю. Коссович (Саратов), В. Р. Крашенинников (Ульяновск), В. А. Кудинов (Самара), В. А. Лазарев (Краснодар), В. Л. Леонтьев (Ульяновск), Б. В. Логинов (Ульяновск), Т. В. Мальцева (Тюмень), В. К. Манжосов (Ульяновск), С. И. Мартынов (Ханты-Мансийск), П. К. Маценко (Ульяновск), М. А. Мкртчян (Ереван, Армения), Л. И. Могилевич (Саратов), В. А. Основина (Ульяновск), С. В. Павликов (Наб. Челны), К. С. Проданова (София, Болгария), Л. С. Пулькина (Самара), Ю. Н. Радаев (Москва), В. П. Радченко (Самара), О. А. Репин (Самара), М. А. Родионов (Пенза), С. А. Розанова (Москва), Е. П. Семенова (Базель, Швейцария), В. А. Сергеев (Ульяновск), А. П. Солдатов (Белгород), Л. А. Сухарев (Саранск), В. А. Тестов (Вологда), В. Ф. Тишкин (Москва), В. В. Учайкин (Ульяновск), Ю. И. Худак (Москва), О. И. Череватенко (Ульяновск), И. И. Чучаев (Саранск), П. А. Шаманаев (Саранск), Г. М. Шигабетдинова (Ульяновск), Ф. Г. Шигабутдинов (Казань), А. Г. Ягола (Москва), Ю. Е. Якубовский (Тюмень), Н. Г. Ярушкина (Ульяновск).

Уважаемые преподаватели, сотрудники и студенты УлГТУ!

Для нашего университета 2017-й год является юбилейным: Политеху исполнится ровно 60 лет!
За эти годы наш вуз прошел долгий и трудный путь, в процессе которого вечерний филиал Куйбышевского индустриального института превратился в Технический университет, один из ведущих научных центров Поволжья. Неузнаваемо изменилась жизнь в нашей стране, менялась и система высшего профессионального образования, а вместе с ними и Политех. Каждый новый год ставил перед нами новые задачи, и эти задачи успешно решались: построены учебные корпуса и спортивные сооружения, открыты новые кафедры, факультеты и специальности, осуществлен полный переход на многоуровневую систему подготовки кадров, увеличились объемы научно-исследовательской работы, непрерывно совершенствуется система информатизации вуза, многое сделано для развития международных связей.

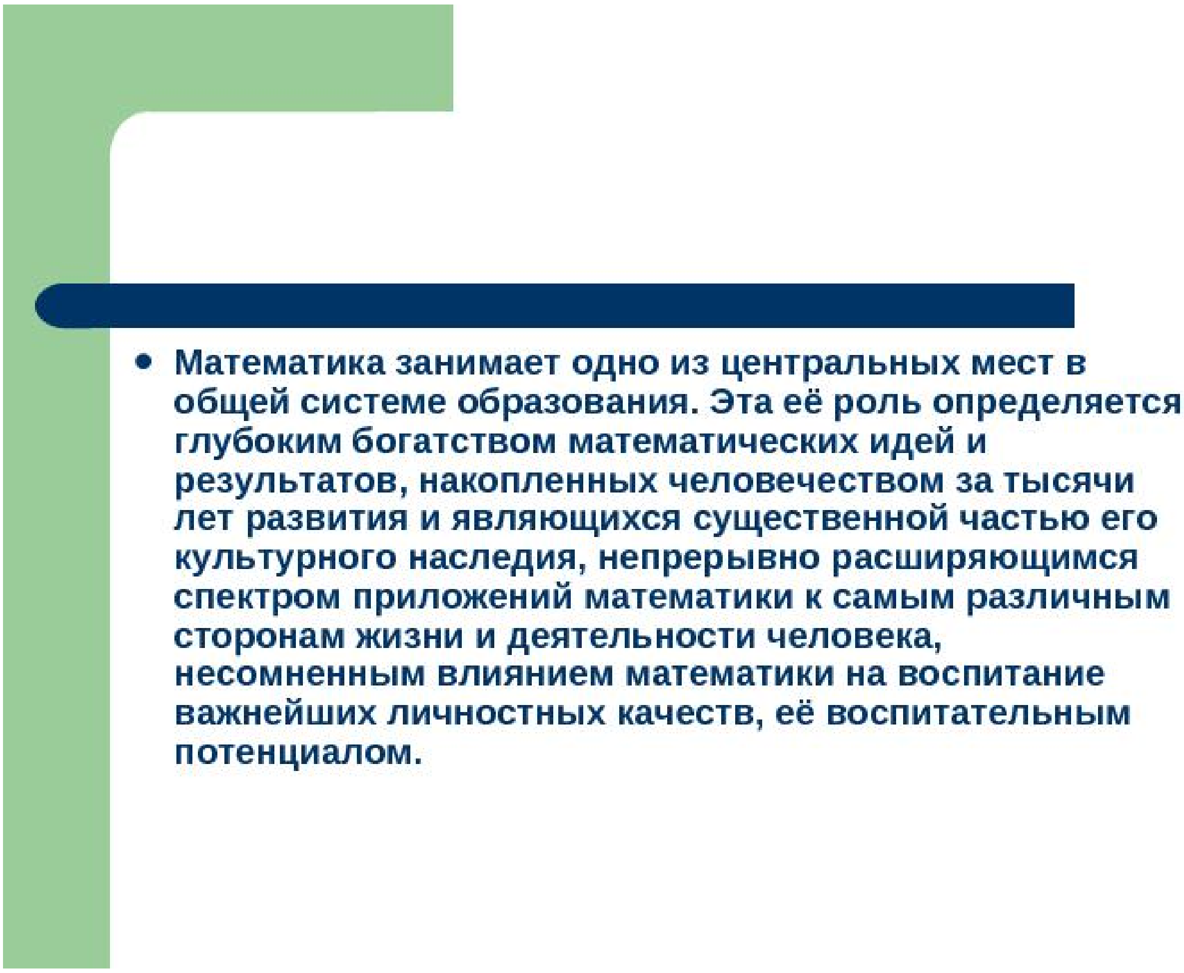
УлГТУ – это учебное заведение нового типа, в котором научная, учебная и экономико-внедренческая деятельность функционируют с одинаково высокой эффективностью. Студентам наш вуз дает возможность присоединиться к этой работе, предлагает полный набор возможностей для самореализации не только в профессиональной, но и в спортивной и творческой сфере. Годы, проведенные в Ульяновском государственном техническом университете – отличная стартовая площадка для будущей карьеры и, конечно же, самое незабываемое время в жизни.

История УлГТУ – это история успеха. И каждый новый год приносил нам новые вызовы и новые победы. Юбилейный 2017-й год не станет исключением.

А. П. Пинков, и.о. ректора УлГТУ

Секция 3

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОБРАЗОВАНИЯ
ОТ ШКОЛЫ К ВУЗУ



УДК 51

Н. В. Абаимова (г. Ульяновск)

ПРОГРАММА СПЕЦКУРСА «ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ»

Предлагается вариативный курс для учащихся 7 класса. Предлагаемые методы решения задач в рамках данного спецкурса позволяют разложить процесс математического моделирования на элементарные шаги, доступные учащимся.

Ключевые слова: *текстовые задачи, математическая модель.*

Умение решать задачи является основным средством развития математического мышления у учащихся. Из результатов работ ОГЭ и ЕГЭ видно, что большое количество учащихся не обладают умением решать текстовые задачи. Поэтому возникла необходимость в более углубленном освоении данного раздела элементарной математики в пределах данного спецкурса. Текстовые задачи сопровождают учащихся в течении всего школьного курса обучения математики и других предметов. Наибольшие трудности у школьников создает сам процесс составления математической модели задачи. Математические методики решения текстовых задач, предлагаемые в рамках данного спецкурса, позволяют разложить алгоритм математического моделирования на элементарные шаги, понятные учащимся, что позволяет понимать суть всех процессов и способов их моделирования. Все это позволяет формировать навык в решении текстовых задач и преодоление устойчивого психологического барьера «страх перед задачей».

На предлагаемую программу спецкурса отводится 34 часа. Она предназначена в основном для учеников 7 классов и позволяет расширить и углубить знания по математике. Структура программы спецкурса построена таким образом, что многие темы будут изучаться не только в 7, но и в 8, 9 классах. При создании программы спецкурса в основу легли темы, не входящие в традиционный курс обучения школьников, но конечно же бралась во внимание и базовая министерская программа. Вошедшие в состав программы спецкурса вопросы позволяют ученикам подготавливаться к всевозможным олимпиадам, конкурсам и, конечно же, к ОГЭ и ЕГЭ. В качестве форм проведения занятий могут быть выбраны как беседа, так и лекция, или вообще игра. Большой акцент делается на методику решения текстовых задач повышенной и высокой сложности.

К задачам спецкурса «Избранные вопросы математики» относятся: привить любовь к предмету; повысить уровень знаний по предмету; развить у учащихся логические способности; выявить способных и талантливых детей; сформировать пространственное воображение и повысить графическую культуру; сформировать у учащихся такие качества, как аккуратность, внимательность, упорство, трудолюбие; адаптировать детей к переходу в среднее звено обучения, имеющее профильную направленность. Учебно-тематический план представлен в таблице 1.

Таблица 1

№	Название раздела, темы	Количество часов	
		теория	практика
	Выражения, тождества, уравнения (4 часа)	1	3
1	Задачи с числовыми выражениями и выражениями с переменными		1
2	Задачи с тождественными преобразованиями		1
3,4	Решение задач с помощью уравнений	1	1
	Функции (5 часов)	2	3
5	Решение задач с помощью формул		1
6,7	Решение задач на построение графиков функций	1	1
8,9	Задачи на задание функции несколькими формулами	1	1
	Степень с натуральным показателем (3 часа)	1	2
10	Задачи на действия со степенями		1
11	Задачи с одночленами	0,5	0,5
12	Задачи с простыми и составными числами	0,5	0,5
	Многочлены (6 часов)	2	4
13,14,15	Задачи на действия с многочленами	1	2
16,17,18	Задачи на деление с остатком	1	2
	Формулы сокращенного умножения (4 часа)	2	2
19,20,21	Задачи на применение формул сокращенного умножения	1,5	1,5
22	Задачи на возведение двучлена в степень	0,5	0,5
	Занимательные задачи международного математического конкурса-игры «Кенгуру» (3 часа)		3
23,24,25	Занимательные задачи Международного математического конкурса-игры «Кенгуру»		3
	Системы линейных уравнений (5 часов)	2	3
26,27	Задачи с линейными уравнениями с двумя переменными и их системами	1	1
28,29	Задачи на решение систем линейных уравнений	0,5	1,5
30	Задачи с линейными неравенствами с двумя переменными и их системами	0,5	0,5
	Решение задач с параметрами (4 часа)	2	2
31	Решение задач на уравнения с параметрами	1	

Окончание табл. 1

№	Название раздела, темы	Количество часов	
		теория	практика
32,33	Решение задач на линейные уравнения, содержащие параметры	0,5	1,5
34	Решение задач на системы линейных уравнений, содержащих параметры	0,5	0,5
	Всего	12	22

Программа спецкурса обеспечивает достижение личностных результатов, таких как – креативность мышления; понимание сути поставленной задачи; выстраивание аргументации; умение приводить примеры и контрпримеры; умение четко и грамотно формулировать свои мысли в устной речи и письменной форме; проявление находчивости и активности при решении задач. Среди метапредметных результатов можно отметить такие как умение видеть математическую задачу в контексте решаемой задачи; умение находить необходимую информацию для решения математических проблем, и представление ее в понятной и доступной форме. Что касается предметных результатов, то можно выделить такие, как умение пользоваться математическими формулами и самостоятельно составлять формулы зависимостей между величинами на основе обобщения частных случаев и эксперимента.

Методика реализации спецкурса основывается на гуманитарно-целостном и компетентностном подходах к осуществлению математического образования. Данный курс поможет формированию практической, математической, социально-личностной и общекультурной компетентности. При обучении используется практика личностно-ориентированного обучения. Данная методика в обучении ориентирована на выявление субъектного опыта каждого ученика, то есть его способностей и умений в учебной деятельности, и на предоставление возможности ученику выбирать способы и формы учебной работы и характер ответов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мордкович, А. Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1 : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. – 14-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2010.

2. Мордкович, А. Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2 : задачник для учащихся общеобразовательных учреждений. – 14-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2010.

3. Геометрия : учебник для 7–9 кл. общеобразовательных учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – М. : Просвещение, 2008.

4. Ершова, А. П., Голобородько, В. В., Ершова, А. С. Самостоятельные и контрольные работы по математике для 7 класса. – М. : Илекса, 2009.

5. Русанов, В. Н. Математические олимпиады школьников : книга для учителя. – М. : Просвещение, 2009.

6. Аменицкий, Н. Н., Сахаров И. П. Забавная арифметика. – М. : Наука. Главная редакция физико- математической литературы, 2008.

7. Игнатьев, Е. И. В царстве смекалки / под ред. Потапова М. К. – М. : Наука. Главная редакция физико- математической литературы, 2000.

8. Олехник, С. Н., Нестеренко Ю. В., Потапов М. К. Старинные занимательные задачи. – М. : АО «СТОЛЕТИЕ», 2001.

9. Котов, А. Я. Вечера занимательной арифметики. – М. : «Просвещение», 2000.

УДК 501

М. Х. Абулеев (г. Ульяновск)

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО СПЕЦКУРСУ «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНИКЕ»

Предложен учебно-методический комплекс для школьников старших классов для ознакомления с возможностями моделирования простейших математических понятий, как график функции синуса, диаграммы данных.

Ключевые слова: *математическое моделирование, дидактика, педагогика.*

Изучение математических объектов посредством математических средств моделирования является важным средством повышения качества и вовлеченности старшеклассников в познавательную математическую деятельность.

Моделирование с помощью современных компьютеров и сопутствующих им технических и программных средств открывает огромные возможности для исследования явлений и процессов в природе и обществе.

Моделирование стало в наше время ведущей информационной технологией в ряде наук и областей практической деятельности, в частности в опыте изучения и преподавания математики в образовательных учреждениях.

Математические модели в прикладных областях выделяются в следующие виды: традиционные (физические), графические модели, имитационные модели, модели информационных процессов, вербальные (словесные).

Модель создается с целью ее исследования, получения результатов моделирования. В этом процессе можно использовать компьютеры (плюс вспомогательное оборудование), различные виды программного обеспечения. Программное обеспечение является чрезвычайно важным при моделировании. В компьютерном математическом моделировании доминируют численные методы. При анализе, осознании результатов моделирования лишь человек (прежде всего, сам постановщик задачи) является главным (чаще всего единственным) участником процесса.

Инструментарием компьютерного математического моделирования являются: системы программирования, пакеты программ математического моделирования, специализированные программы для реализации отдельных классов математических моделей. Например, программные продукты: Mathematica, Maple, MS Exel, MathCAD. На примере MS Exel предложен учебно-методический комплекс для школьников старших классов для ознакомления с возможностями моделирования простейших математических понятий, как график функции синуса, диаграммы данных, с пошаговой процедурой действий.

Изучение математических объектов посредством математических средств моделирования является важным средством повышения качества и вовлеченности старшеклассников в познавательную математическую деятельность.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Груденов, Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики. – М. : Просвещение, 1990.

2. Иванова, Г. А. Лекционно-семинарская система обучения // Математика в школе, 1987. – № 3. – С. 11–13.

3. Башмакова, И. Г. Диофант и диофантовы уравнения. – М. : Наука, 1972.

УДК 501

Г. А. Ахметова (р.п. Старая Кулатка, Ульяновская область)

ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

В данной работе рассмотрены методы решения иррациональных уравнений и неравенств. Приведены примеры решения задач.

Ключевые слова: *иррациональные уравнения, иррациональные неравенства.*

Уравнения и неравенства, в которых под знаком корня содержится переменная, называются иррациональными.

Методы решения иррациональных уравнений и неравенств, как правило, основаны на возможности замены (с помощью некоторых преобразований) иррационального уравнения (неравенства) рациональным уравнением (неравенством), которое либо эквивалентно исходному иррациональному уравнению (неравенству), либо является его следствием. Чаще всего обе части уравнения (неравенства) возводят в одну и ту же степень. При этом получается уравнение (неравенство), являющееся следствием исходного.

При решении иррациональных уравнений необходимо учитывать следующее:

1) если показатель корня – четное число, то подкоренное выражение должно быть неотрицательно; при этом значение корня также является неотрицательным (определение корня с четным показателем степени);

2) если показатель корня – нечетное число, то подкоренное выражение может быть любым действительным числом; в этом случае знак корня совпадает со знаком подкоренного выражения.

1. Метод пристального взгляда или метод ОДЗ

Пример. Решить уравнение $\sqrt{x-9}=\sqrt{1-x}$. Наличие радикалов четной степени говорит о том, что подкоренные выражения должны быть неотрицательными. Поэтому сначала найдем область допустимых значений переменной x (ОДЗ). Из определения квадратного корня следует, что в данном уравнении одновременно должны выполняться два условия:

а) $x-9\geq 0$; $x\geq 9$; б) $1-x\geq 0$; $-x\geq -1$; $x\leq 1$.

ОДЗ данного уравнения: $x\in\varnothing$. Ответ: корней нет.

2. Метод возведения обеих частей уравнений или неравенства в одну и ту же степень.

Если возвести обе части уравнения

$$f(x) = \varphi(x) \qquad (1)$$

в натуральную степень n, то уравнение

$$f^n(x) = \varphi^n(x) \qquad (2)$$

является следствием уравнения (1).

Пример. а) Решить уравнение $\sqrt{x^3 + 4x - 1 - 8\sqrt{x^4 - x}} = \sqrt{x^3 - 1} + 2\sqrt{x}$.

Нахождение ОДЗ в этом уравнении представляет собой достаточно трудную задачу. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$x^3 + 4x - 1 - 8\sqrt{x^4 - x} = x^3 - 1 + 4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3 - 1} + 4x;$$

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3 - 1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1, x_2 = 0.$$

Проверка показывает, что $x_2 = 0$ лишний корень. Ответ: $x_1 = 1$.

б) Решим неравенство вида: $\sqrt{f(x)} > g(x)$.

ОДЗ данного неравенства $f(x) \geq 0$. Пусть для каких-то x из ОДЗ $g(x) < 0$. Тогда, очевидно, все эти x − решения, так как при этих x левая часть определена ($x \in$ОДЗ) и неотрицательна, в то время как правая часть $g(x) < 0$. Для других x из ОДЗ $g(x) \geq 0$. Для них обе части неравенства неотрицательны, и его можно возвести в квадрат: $f(x) > g^2(x)$ Значит, данное неравенство равносильно совокупности неравенств:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Заметим, что в последнюю систему не входит требование $f(x) \geq 0$. Оно и не нужно, так как выполняется автоматически $f(x) > g^2(x) \geq 0$ ибо полный квадрат всегда неотрицателен.

3. Решение уравнений с использованием замены переменной.

Введение вспомогательной переменной в ряде случаев приводит к упрощению уравнения. Чаще всего в качестве новой переменной используют входящий в уравнение радикал. При этом уравнение становится рациональным относительно новой переменной.

Пример. Решить уравнение $2x^2 - 6x + \sqrt{x^2 - 3x + 6} + 2 = 0$.

Введем вспомогательную переменную. Пусть $y=\sqrt{x^2-3x+6}$, где $y\ge 0$, тогда получим уравнение $2y^2+y-10=0 \quad \Rightarrow y_1=2, y_2=-\frac{5}{2}$. Второй корень не удовлетворяет условию $y\ge 0$. Возвращаемся к x: $\sqrt{x^2-3x+6}=2 \Rightarrow x^2-3x+6=4 \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=2$. Проверкой устанавливаем, что оба корня являются корнями исходного уравнения. Ответ: $x_1=1, x_2=2$.

4. Иррациональные уравнения, содержащие степени выше второй.

Если уравнение имеет вид $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$, то его можно решить, возводя обе части этого уравнения в степень *n*. Полученное уравнение $f(x)=\left(g(x)\right)^n$ при нечетном *n* равносильно данному уравнению, а при четном *n* является его следствием, аналогично рассмотренному выше случаю при *n*=2.

Пример. Решить уравнение $\sqrt[3]{\frac{12-2x}{x-1}}+\sqrt[3]{\frac{x-1}{12-2x}}=\frac{5}{2}$. Пусть $\sqrt[3]{\frac{12-2x}{x-1}}=t$, тогда уравнение примет вид $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$, откуда получаем следствие: $2t^2-5t+2=0$. Решая это квадратное уравнение, находим два корня: $t_1=2, t_2=\frac{1}{2}$. Задача сводится теперь к решению следующих двух уравнений: $\sqrt[3]{\frac{12-2x}{x-1}}=2$, $\sqrt[3]{\frac{12-2x}{x-1}}=\frac{1}{2}$. Возводя обе части уравнений в куб, получаем $12-2x=8x-8,\ 96-16x=x-1 \Rightarrow x_1=2, x_2=\frac{97}{17}$.

Оба найденных корня удовлетворяют исходному уравнению, так как в процессе решения мы использовали (кроме замены неизвестного) только преобразование вида $\left[f(x)=g(x)\right] \Rightarrow \left[\left(f(x)\right)^n=\left(g(x)\right)^n\right]$, а при таком преобразовании получается равносильное уравнение. Ответ: $x_1=2, x_2=\frac{97}{17}$.

5. Иррациональное неравенство сводится к равносильной системе (или совокупности систем) неравенств:

1. $\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x)\ge 0, \\ f(x)>g(x); \end{cases}$ 2. $\sqrt{f(x)}\ge\sqrt{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x)\ge 0, \\ f(x)\ge g(x); \end{cases}$

3. $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x); \end{cases}$ 4. $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^2(x); \end{cases}$

5. $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x); \end{array} \right. \end{array} \right.$ 6. $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x). \end{array} \right. \end{array} \right.$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Математика: алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубленный уровни / Ш. А. Алимов, Ю. М.Колягин и др. – М. : Просвещение, 2016.

2. Дорофеев, Г., Потапов, М., Розов, Н. Математика для поступающих в вузы. – М. : Дрофа, 2002.

УДК 51

Г. Н. Багдеева (г. Ульяновск)

ДЕЯТЕЛЬНОСТНЫЙ ПОДХОД В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Разработаны и теоретически обоснованы приемы в обучении учащихся на основе формирования и развития теоретического (рефлексивного) мышления.

Ключевые слова: *деятельностный подход, дидактика, педагогика.*

Повышение качества обучения математики способствует такое обучение, при котором на первый план выступает не сам процесс обучения, а овладение учащимися общей структурой деятельности: теоретическими способом действий, состоящим из трех взаимосвязанных компонентов: анализа, планирования (внутреннего плана действий) и рефлексии.

Деятельностный подход исходит из положения о том, что психологические способности человека есть результат преобразования внешней предметной во внутреннюю психологическую деятельность путем последовательных преобразований. Для обучающихся это определяется, в первую очередь, учебной деятельностью. Содержание деятельностного образования складывается из методов, средств и форм преобразований деятельности (поисковой, проблемной, проектной, исследовательской). Деятельностный подход в обучении математики включает в себя следующий кластерный анализ: рефлексивный анализ, работа в группах, работа с вопросами причинно-следственного, прогностического и проектного характера, методы творческого применения знаний, нетрадиционные формы урока, интегрированные, деловые игры, уроки творчества, эвристическая беседа и другое.

Разработаны и теоретически обоснованы приемы в обучении учащихся на основе формирования и развития теоретического (рефлексивного) мышления.

Установлено в экспериментальной работе, что организация процесса обучения через деятельность обучающихся, может служить основой для формирования у них творческого мышления.

Изучены и представлены структуры урочной организации учебной деятельности в рамках рассматриваемой дидактической системы.

Применение деятельностного подхода в обучении математике, как показал эксперимент, обеспечивает развитие у школьников основной школы высокого уровня знаний, умений, приемов мышления, которые в свою очередь способствуют повышению качества обучения по предмету.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бочкина, Н. В. Самостоятельность личности школьника. – Л. : РГПУ, 2001.

2. Епишева, О. Б. Технология обучения математике на основе деятельностного подхода. – М. : Просвещение, 2003.

УДК 51

Ю. С. Горинович (г. Ульяновск)

ПАКЕТ КОНТРОЛЬНО-ДИАГНОСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПО РАЗДЕЛУ «АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ»

Разработан пакет контрольно-диагностических материалов по разделу «Алгебраические дроби».

Ключевые слова: *алгебраические дроби, системно-деятельностный подход.*

Разработан пакет контрольно-диагностических материалов по разделу «Алгебраические дроби» для формирования и оценки УУД на уроках алгебры в 8 классе по разделу «Алгебраические дроби». В основе проекта – единообразный принцип подбора заданий для формирования и оценки УУД в соответствии с требованиями ФГОС. Важной задачей работы стало обеспечение роста мотивации обучающихся к обучению, развитию их познавательной активности, речевых компетенций. В основе построения заданий – системно-деятельностный подход. Структура заданий направлена на формирование и развитие у обучающихся личностных, регулятивных, познавательных и коммуникативных УУД, что соответствует требованиям ФГОС и делает проект практически востребованным в образовательном пространстве основной школы. Данные задания служат для закрепления и систематизации знаний, полученных в процессе изучения раздела «Алгебраические дроби», а также для их диагностики.

Актуальность данного проекта обусловлена необходимостью разработки контрольно-измерительных материалов нового поколения в соответствии с требованиями ФГОС, построенных на принципах системно-деятельностного подхода и направленных на формирование и развитие у обучающихся всех видов УУД. В настоящее время в методической литературе подобного материала крайне мало. Данный проект стал актуальным после вступления в силу Федерального Государственного Образовательного Стандарта Основного Общего Образования, в основе которого лежит системно-деятельностный подход. Данный подход предполагает: воспитание и развитие качеств личности, отвечающих требованиям информационного общества, инновационной экономики, задачам построения демократического гражданского общества на основе толерантности, диалога культур и уважения многонационального, поликультурного и поликонфессионального состава российского общества; переход к стратегии социального проектирования и конструирования в системе образования на основе разработки содержания и технологий образования, определяющих пути и способы достижения социально желаемого уровня (результата) личностного и познавательного развития обучающихся; ориентацию на результаты образования как системообразующий компонент Стандарта, где развитие личности обучающегося на основе усвоения универсальных учебных действий, познания и освоения мира составляет цель и основной результат образования.

Федеральный государственный образовательный стандарт строится на системно-деятельностном подходе. Следовательно, сегодня предстоит отойти от традиционной передачи готового знания от учителя к ученику. Задачей учителя становится включить самого ученика в учебную деятельность, организовать процесс самостоятельного овладения детьми новыми знаниями, применение полученных знаний в решении познавательных, учебно-практических и жизненных проблем.

Известно, что формирование любых личностных новообразований – умений, способностей, личностных качеств – возможно лишь в деятельности. При этом формирование любых умений, в том числе и УУД, проходит через следующие этапы:

1) вначале при изучении различных учебных предметов у учащихся формируется первичный опыт выполнения УУД и мотивация к его самостоятельному выполнению;

2) основываясь на имеющемся опыте, учащиеся осваивают знания об общем способе выполнения этого УУД;

3) далее изученное УУД включается в практику учения на предметном содержании различных учебных дисциплин, организуется самоконтроль и, при необходимости, коррекция его выполнения;

4) в завершении организуется контроль уровня сформированности этого УУД и его системное практическое использование в образовательной практике.

УУД делятся на несколько групп:

1)личностные;

2) регулятивные;

3)познавательные;

4)коммуникативные.

Проект направлен на формирование у обучающихся всех видов универсальных учебных действий, которые требует ФГОС. Данная работа адресована учителям, работающим в 8 классах, учащимся и др. Материалы могут быть использованы на уроках алгебры в 8 классе при изучении раздела «Алгебраические дроби».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мордкович, А. Г., Николаев, Н. П. Алгебра 8 класс. – М. : Мнемозина, 2013. – 258 с.

УДК 51

В. П. Гумирова (г. Ульяновск)

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ

Актуальные проблемы преподавания математики в современной школе заключаются в пересмотре огромного опыта, связанного с активизацией обучения школьников. Проблема воспитания творческой активности школьников до сих пор не теряет своей актуальности. Решение связано с преодолением многочисленных противоречий и ряда проблем, присущих процессу обучения.

Ключевые слова: *активизация обучения школьников, творческая активность школьников.*

В настоящее время, когда царят демократизация, дифференциация и гуманизация, нужно учитывать гибкость и вариативность в построении образования в средней школе. Сегодня, преобладает усиление развивающей стороны обучения, поэтому требуются большие изменения в построении содержания учебного материала. Простота, полнота, целостность учебного курса – важнейшие условия для развития учащихся.

Проблемы, связанные с обязательными предметами и предметами по выбору, с определением учебного времени на эти группы предметов достаточно актуальна в настоящее время. Наиболее способным учащимся нужны учебники, способные раскрыть углубленный курс изучения математики, менее способным – интегрированные. Но в настоящее время в школах они практически отсутствуют. В любой школе имеются ученики, которые не обладают математическими наклонностями, желающие найти себя совсем в других областях знаний. И дифференцированность в обучении должна осуществлять право учащегося на выбор доступного ему содержания математического образования.

По моему мнению, содержание математического образования в школе должно быть основательным для тех учеников, которые собираются изучать на достаточно глубоком уровне технические и прикладные дисциплины. Они должны с легкостью, изяществом и точностью воспроизводить в данных дисциплинах все математические выкладки. Но также углубленное изучение должно включать базовый уровень, как стартовую площадку к построению фундаментальных знаний.

Актуальная проблема преподавания математики – использование «метода наслоения», как необходимого аппарата учета возрастных, психологических особенностей учащихся и систематизации их знаний – переосмысление ранее пройденного материала, но учитывая накопленный опыт.

На сегодняшний день учебники не раскрывают, существующие разделы за рамками школьного курса, что создает у школьников впечатление завершенности, исчерпанности математики как науки, обедняет их представление о ней. Поэтому и учебник, и учитель должны расширить и дать возможность учащимся познавать прекрасный мир математики, который несравненно шире, чем школьный курс.

Также нельзя обойти стороной проблему обучения составлению задач – достаточно мало времени мы уделяем ей при построении процесса обучения математике. А ведь именно этот процесс как никакой другой способствует развитию логического мышления, формирует истинные математические знания.

Затруднительно дать ответ на вопрос: как соединить процесс индивидуального обучения, которое зависит от склонностей ученика, с общим направлением образования? На сегодняшний день учителю нужна глубокая психологическая перестройка, он должен отойти от ряда традиционных установок, разработать новые приемы и формы обучения, которые в большей степени ориентированы на индивидуальный подход к учащимся.

Также следует заметить, что стране нужны целеустремленные, одаренные люди. Поэтому очень важно распознать способности учащихся на этапе школы, развить их.

Сегодня существенные перемены в преподавании связаны в первую очередь с дифференциацией в обучении. Важнейшим видом дифференцировки при обучении во всех классах становится уровневое размежевание. Его отличительная особенность заключается в разделении требований к знаниям и умениям учащихся: выделяют базовый уровень – нижняя граница усвоения материала. Данный уровень доступен и посилен всем учащимся. На нем базируется фундаментальное овладение курсом. Учащиеся могут обучаться в одном классе и по единой программе, выбирать тот уровень усвоения, который соответствует их потребностям, интересам, способностям. Также выделяют повышенный уровень, который является основой для дальнейшего обучения в технических вузах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Методика преподавания математики в средней школе : общая методика : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1980.

2. Образовательные стандарты / под ред. Б.А. Бордовского. – Санкт-Петербург : Образование, 1996.

3. Практикум по методике преподавания математики в средней школе : учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Т. В. Автономова, С. В. Варченко, В. А. Гусев и др.; под ред. В. И. Мишина. – М. : Просвещение, 1993.

4. Профессиональная педагогика : учебник для студентов, обучаемых по педагогическим специальностям и направлениям. – М. : Ассоциация «Профессиональное образование», 1997.

УДК 51

Е. В. Давыдова (г. Ульяновск)

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ

Выносится на обсуждение методика изучения в классах с углубленным изучением математики раздела «Показательные и логарифмические уравнения, неравенства, системы».

Ключевые слова: *уравнения, неравенства, системы, показательный, логарифмический вид, методика преподавания.*

Математике как учебной дисциплине присущи некоторые особенности. В отличие от других школьных предметов в математике приходится оперировать абстрактными понятиями, использовать сложные рассуждения и многообразные приемы и методы решения задач, широко опираясь при этом на ранее изученный материал. Поэтому на формирование математической культуры школьников огромное влияние оказывает непрерывный контроль их знаний и умений. Непрерывная обратная связь «ученик – учитель» позволяет вносить необходимые коррективы в учебный процесс, своевременно организовывать работу по устранению обнаруженных пробелов.

Математическая культура учит человека анализировать, сравнивать, находить наилучший вариант решения, воспитывает многие полезные качества, необходимые в современной жизни. Уравнения, неравенства и их системы являются ядром математического образования школьников; они играют огромную роль не только в математике, но и в других разделах науки, поскольку широко используются для описания всевозможных процессов и явлений. Поэтому усвоение приемов и методов решения уравнений и неравенств является важной частью математической подготовки школьника.

Важнейшей частью этого ядра являются показательные и логарифмические уравнения, неравенства и их системы. Достаточно напомнить, что задачи из этого раздела математики широко присутствуют в вариантах ЕГЭ как базового, так и профильного уровня. Вместе с тем, ФГОС второго поколения [1], на наш взгляд, уделяет недостаточно внимания этой сложной, но важной теме. Для успешной сдачи ЕГЭ школьникам приходится «дорабатывать» этот раздел самостоятельно, занимаясь дополнительно на курсах или с репетитором.

В докладе выносится на обсуждение, используемая в лицее, методика изучения раздела «Показательные и логарифмические уравнения, неравенства, системы». Приведены некоторые алгоритмы оптимизации методов решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств. В частности, показательное неравенство вида: $a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)}$ заменяется равносильной системой неравенств

$$\begin{cases} x \in D(a) \cap D(f) \cap D(g), \\ a(x) >= 0, \\ \big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big) > 0, \end{cases}$$

а логарифмическое неравенство вида: $\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$ – системой неравенств

$$\begin{cases} x \in D(a) \cap D(f) \cap D(g), \\ a(x) >= 0, \ \ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \quad g(x) > 0, \\ \big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big) > 0. \end{cases}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Федеральный государственный общеобразовательный стандарт основного общего образования (Стандарты второго поколения) – М. : Просвещение, 2011. – 48 с.

2. Бородуля, И. Т. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства : пособие для учителей. – М. : Просвещение, 1968.

3. Глухова, Л. У., Глухов, В. П. Практикум по решению задач для учащихся физико-математического лицея при УлГПУ. – Ульяновск : УлГПУ, 2006.

4. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016 : учебно-методическое пособие / под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Калабухов – Ростов-на-Дону : Легион, 2015.

5. Мирошин, Н. В., Баскаков, А. В. и др. Математика : сборник задач с решениями для поступающих в вузы. – М. : Астрель, 2002.

6. Шестаков, С. А., Захаров, П. И. ЕГЭ 2013. Математика. Задача С1. Уравнения и системы уравнений / под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2013.

УДК 51

М. А. Дубова (г. Ульяновск)

О РОЛИ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ

На основе анализа роли математической подготовки в образовании современного человека сформированы цели обучения математике в школе и пути их достижения.

Ключевые слова: *цель обучения, математическая подготовка, алгоритмическое мышление, творческое мышление.*

Цели обучения математике в общеобразовательной школе определяются ее ролью в развитии общества в целом и формировании личности каждого отдельного человека.

Для жизненной самореализации, возможности продуктивной деятельности в информационном мире требуется прочная базовая математическая подготовка. Математика, давно став языком науки и техники, в настоящее время все шире проникает в повседневную жизнь, все более внедряется в традиционно далекие от нас области.

Практическая полезность математики обусловлена тем, что ее предметом являются фундаментальные структуры реального мира, пространственные формы и количественные отношения от простейших до достаточно сложных, необходимых для развития научных и технических идей.

Ведущая роль принадлежит математике в формировании алгоритмического мышления, воспитании умений действовать по задуманному алгоритму и конструировать новые. В ходе решения задач, основной учебной деятельности на уроках математики – развиваются творческая и прикладная стороны мышления. Занятия математикой дают возможность развивать у учащихся чувство точности, экономичности, информативности речи, умения точно выражать мысли, отбирая для этого наиболее подходящие языковые (символические, графические) средства. Математическое образование необходимо для общей культуры человека. Это касается знакомства с методами познания действительности. Изучение математики способствует эстетическому воспитанию человека, формируя понимание красоты и изящества математических рассуждений, помогает восприятию фигур, усвоению идеи симметрии, развивает воображение, пространственные представления.

Роль математической подготовки в образовании современного человека ставит следующие цели обучения математике в школе:

– овладение конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения сложных дисциплин, для продолжения образования;

– интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых для продуктивной жизни в обществе;

– формирование представлений об идеях и методах математики, о математике как форме описания и методе познания действительности;

– формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, понимания значения математики для общественного прогресса.

Планирование достижения конечных результатов школьниками осуществляется посредством определения целей учебной темы и отбора фактов, понятий, правил, знаков, составляющих основу практической деятельности учащихся. Отбор содержания материала каждого раздела и разбиение его по темам осуществляется на основе работы с учебной программой и стандартами образования по соответствующему учебному плану.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гиршович, В. С. Виды самостоятельных работ // Математика в школе, 1998. – № 3. – С. 37–39.

2. Мухамедзянова, Ф. С. Педагогические технологии и реализация государственного стандарта общего образования. Математика / под ред. Т. Ф. Есенковой, В. В. Зарубиной. – Ульяновск : У ИПК ПРО, 2007 – 76 с.

3. Саранцев, Г. И. Цели обучения математике в средней школе и современных условиях // Математика в школе, 1999. – №6. – С. 36–41.

4. Цукарь, А. Я. О творческом подходе к материалу учебника // Математика в школе, 1998. – № 5. – С. 48–53.

УДК 51

Л. С. Егорова (г. Ульяновск)

РАЗВИТИЕ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

В данной работе рассмотрены проблемы развития логического мышления, пути и средства их решения, приведены системы развивающих заданий.

Ключевые слова: *логическое мышление, занимательные задачи, логические задачи, развивающие задания.*

Изучение математики связано с общими и специфическими видами познавательной деятельности. Среди общих видов познавательной деятельности главное место занимают логические приемы мышления. Однако, в настоящее время в школе преобладает традиционная модель обучения, ориентированная на усвоение знаний, умений и навыков учащихся, и информационные методы обучения. Учитель рассказал новый материал, показал образцы решения задач, проверил знание правил и теорем, дал задания для самостоятельного решения и оценил их выполнение. Такое обучение не развивает умение мыслить самостоятельно и продуктивно (творчески).

Творческая деятельность ученика зависит от трех составляющих мышления:

1) высокий уровень сформированности элементарных мыслительных операций;

2) высокий уровень активности мышления, умение выдвигать множество гипотез, вариантов решений, нестандартных идей;

3) высокий уровень организованности и целенаправленности мышления, проявляющийся в выделении существенного в явлениях, осознании собственных способов мышления.

Задача учителя сводится к формированию указанных компонентов мышления. Можно выделить два подхода к формированию и становлению логико-математического мышления:

1) традиционное обучение, приводящее к формированию либо эмпирического либо теоретического мышления;

2) специально организованное обучение, ориентированное на формирование учебной деятельности, приводящее к становлению теоретического мышления.

Для формирования логического мышления приоритетным является второй подход.

Основным средством развития математических способностей учащихся являются задачи. Стандартные задачи, направленные на отработку какого-либо математического навыка, безусловно, полезны и необходимы. Но не менее важны задачи, формирующие устойчивый интерес к математике, творческое отношение к учебной деятельности математического характера. С помощью специально подобранных задач для школьников можно учить их наблюдать, пользоваться аналогией, индукцией, сравнениями, делать выводы. Эффективно использование в учебном процессе задач на сообразительность, задач-шуток, математических ребусов, софизмов. Логическое мышление развивают занимательные задачи (головоломки, нестандартные задачи, логические задачи). Занимательный материал многообразен, но его объединяет следующее:

1) Способ решения занимательных задач неизвестен. Для их решения характерны броуновское движение мысли, метод проб и ошибок. Поисковые пробы в отдельных случаях могут закончиться догадкой, которая покажет путь решения:
2) Занимательные задачи поддерживают интерес к предмету и играют роль мотива к учебной деятельности. Необычность сюжета, способа презентации задачи находят эмоциональный отклик у детей и ставят их в условия необходимости ее решения:
3) Занимательные задачи составлены на основе знаний законов мышления.

Систематическое решение таких задач способствует развитию мыслительных операций. В любом случае догадке как способу решения предшествует тщательный анализ: выделение существенных признаков, сходных признаков, свойств и т. д. Здесь необходимо вооружить детей такими приемами как анализ и синтез, сравнение, аналогия, классификация. Предлагая ученикам занимательные задачи, мы учим их выполнять эти операции и одновременно развиваем их.

Решение нестандартной задачи – очень сложный процесс. Учителю не стоит подсказывать к какому разделу школьного курса относится задача, какие теоремы нужно применить и т. д. Чтобы помочь учащимся найти путь к решению задачи, учитель должен попытаться увидеть источник возможных затруднений. Хорошим средством обучения являются вспомогательные задачи (родственные, похожие).

Умелая помощь ученику, оставляющая ему разумную долю самостоятельной работы, позволит учащемуся накопить опыт и развить математические способности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Асеев, Г. Г., Абрамов, О. М., Ситников, Д. Э. Дискретная математика : учебное пособие. – Ростов н/Дону : Феникс, Харьков : Торсинг, 2008. – 144 с.

2. Атанасян, Л. С. и др. Геометрия : учебник для 7–9 классов средней школы. – М. : Просвещение, 2014.

3. Березина, Л. Ю. Графы и их применение – М. : Просвещение, 1979. – 143 с.

4. Епишева, О. Б., Крупич, В. И. Учить школьников учиться математике. Формирование приемов учебной деятельности : кн. для учителя. – М. : Просвещение, 1990 – 128 с.

5. Мельников, О. И. Графы в обучении математике // Математика в школе, 2003. – № 8.

6. Мешкова, А. И. Графовая модель поиска рационального решения // Математика в школе, 2007. – № 1.

7. Погорелов, А. В. Геометрия : учебник для 6–7 классов средней школы. – М. : Просвещение,1990.

8. Фридман, Л. М., Турецкий, Е. Н., Стеценко, В. Я. Как научиться решать задачи. – М. : Просвещение, 1979.

9. Фридман, Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. – М. : Просвещение, 1983.

УДК 51

Г. Н. Иванова (г. Ульяновск)

ПРИНЦИПЫ МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

В работе приведены шесть принципов методической подготовки к ЕГЭ по математике. Они могут быть использованы учителем в своей работе.

Ключевые слова: *математика, тест, единый экзамен, подготовка, методика, принцип.*

Первый принцип построения методической подготовки к УГЭ: разумнее выстраивать подготовку по «правилу спирали» от простых типовых заданий до заданий «со звездочками», от комплексных типовых заданий до заданий раздела С.

Второй принцип: на этапе подготовки тематический тест должен быть выстроен в виде логически взаимосвязанной системы, где из одного вытекает другое, т. е. правильно решенное предыдущее задание готовит понимание смысла следующего; выполненный сегодня тест готовит к пониманию и правильному выполнению завтрашнего и т. д.

Третий принцип: переход к комплексным тестам разумен только в конце подготовки, когда у школьника накоплен запас общих подходов к основным типам заданий и есть опыт в их применении на заданиях любой степени сложности.

Четвертый принцип: все тренировочные тесты следует проводить в режиме «теста скорости», т. е. с жестким ограничением времени. На примере этих занятий школьник должен убедиться в том, что за данный промежуток времени он может успеть сделать намного больше, чем он привык делать на обычных уроках.

Пятый принцип: принцип максимизации нагрузки, как по содержанию, так и по времени для всех школьников в равной мере. Это необходимо, поскольку тест по определению требует ставить всех в равные условия и предполагает объективный контроль результатов.

Шестой принцип звучит так: «Нормальные герои всегда идут в обход!». Смысл его в следующем: нужно учиться максимально, использовать наличный запас знаний, применяя различные «хитрости» и «правдоподобные рассуждения», для получения ответа наиболее простым и быстрым способом.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шульман, А. Я. Вопросы методики разработки тестов. – М. : Просвещение, 2015.
2. Михайлов, Е. А. Дидактическая тестология. – М. : Народное образование, 2000.

УДК 51

М. М. Инкина (г. Ульяновск)

РАЗВИТИЕ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ У УЧАЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

В данной работе для формирования логического мышления школьников 5 классов составлена система развивающих заданий.

Ключевые слова: *логическое мышление, способы мышления, нестандартные задачи.*

Изучение математики в школе направлено на достижение целей – интеллектуального развития учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых человеку для жизни в современном обществе, для общей социальной ориентации и решения практических проблем. Но одной из первоочередных и важнейших задач является развитие мышления учащихся. «Учить надобно не мыслям, а мыслить», – эти слова немецкого философа и ученого XVIII в. И. Канта имеют большое значение, являются приоритетным принципом в обучении математике. Основной целью образовательного процесса становится усвоение определенных способов мышления, обеспечивающих понимание и производство новых знаний. В настоящее время много говорят о недостаточной эффективности процесса обучения. Учителя озабочены тем, что школьники с трудом усваивают учебный материал, не могут применять знания в измененной ситуации, выбрать тот или иной метод решения уравнений. Больше всего ссылаются на то, что учащиеся не учат правила, не умеют применять их, не могут выучить теорему и т. д. В настоящее время в школе преобладает традиционная модель, ориентированная на усвоение знаний, умений и навыков учащихся, и информационные методы обучения. Учителя чаще всего не владеют в полной мере умениями развивать логическое мышление, организовывать учебную деятельность учащихся по усвоению понятия, правила, методов решения математических задач, отбирать для этого учебный материал. В результате не создаются условия для эффективного развития общеучебных умений. Инструментом для развития мышления, являются занимательные задачи. Их можно успешно использовать на уроках в качестве дополнительного, вспомогательного пути для тренинга мышления и формирования элементов творческой деятельности. В большинстве учебников и дидактических пособий для средней школы практически отсутствуют задачи, которые бы способствовали развитию логического мышления. В традиционных учебниках, в основном, содержатся задания, требующие «вычислить», «найти», «решить», «проверить», «перечислить» и т. д. Для этого необходимо использовать на уроках нестандартных задач, а также задач требующих независимости мышления, здравого смысла, оригинальности.

Для формирования логического мышления приоритетным является специально организованное обучение, направленное на формирование учебной деятельности, приводящее к становлению теоретического мышления. Главная цель задач – развить творческое мышление учащихся, заинтересовать их математикой, привести к «открытию» математических фактов. Достичь этой цели с помощью одних стандартных задач невозможно, хотя стандартные задачи, безусловно, полезны и необходимы, если они даны вовремя и в нужном количестве. Следует избегать большого числа стандартных задач как на уроке, так и во внеклассной работе, так как в этом случае сильные ученики могут потерять интерес к математике и даже испытать отвращение к ней. Ознакомление учащихся лишь со специальными способами решения отдельных типов задач создают, на наш взгляд, реальную опасность того, что учащиеся ограничатся усвоением одних шаблонных приемов и не приобретут умения самостоятельно решать незнакомые задачи («Мы такие задачи не решали», – часто заявляют учащиеся, встретившись с задачей незнакомого типа).

Для формирования логического мышления школьников 5 классов можно составить следующую систему развивающих заданий по темам:

– аналогия;
– исключение лишнего;
– классификация;
– логические задачи;
– перебор;
– задачи с геометрическим содержанием;
– задачи «на переливание»;
– задачи-шутки;
– ребусы;
– занимательные задания.

Учитель, преподающий в 5–6 классах, может развивать логическое мышление учащихся с помощью созданной системы заданий. Для этого необходимо учитывать следующее:

– выбранные задания должны быть посильными для детей;
– задания, отобранные для одного урока, должны быть разнообразными для воздействия на различные компоненты мышления;
– если ученики не справляются с заданием, то целесообразно оставить его на обдумывание до следующего урока;
– ученикам можно дать необязательное домашнее задание по составлению аналогичных задач;
– если на уроке время ограничено, то эти задания можно применять на занятиях математического кружка.

Работая по любому учебнику, учитель может проявлять творческий подход к обучению учащихся, совершенствовать образовательный процесс, учить мыслить. Необходимо систематически использовать на уроках задачи, способствующие формированию у учащихся познавательного интереса и наблюдательности. Осуществляя целенаправленное обучение школьников решению задач, с помощью специально подобранных упражнений, учить их наблюдать, пользоваться аналогией, индукцией, сравнениями и делать соответствующие выводы.

Логическое мышление развивается интенсивнее, если создавать на уроках атмосферу уважения, поощрять инициативу и стимулировать творчество учащихся. Системное развитие логического мышления должно быть неотрывно от урока, каждый ученик должен принимать участие в процессе решения не только стандартных заданий, но и заданий развивающего характера (активно или пассивно).

Существенно важно, чтобы учитель математики, школьный учебник демонстрировали подлинные образцы культуры мышления. Ведь учащиеся в своей мыслительной деятельности естественно подражают учителю, учебнику. И если учитель допускает погрешности в логике изложения, в обосновании, то конечно, трудно ожидать от учащихся высокой культуры мышления.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Асеев, Г. Г., Абрамов, О. М., Ситников, Д. Э. Дискретная математика : учебное пособие. – Ростов н/Д : Феникс, Харьков : Торсинг, 2008. – 144 с.

2. Атанасян, Л. С. и другие. Геометрия : учебник для 7–9 классов средней школы. – М. : Просвещение, 1990.

3. Березина, Л. Ю. Графы и их применение. – М. : Просвещение, 1979. – 143 с.

4. Епишева, О. Б., Крупич, В. И. Учить школьников учиться математике : формирование приемов учебной деятельности : кн. для учителя. – М. : Просвещение, 1990 – 128 с.

5. Канин, Е. С. К изучению соответствия и функции в VI классе // Математика в школе, 2009. – № 5.

6. Колягин Ю. М., Луканкин Г. Л. и др. Методика преподавания математики. – М. : Просвещение, 1977.

7. Мельников О. И. Графы в обучении математике // Математика в школе, 2003. – № 8.

8. Мешкова, И. А. Графовая модель поиска рационального решения // Математика в школе, 2007. – № 1.

9. Оре, О. Теория графов. – М. : Наука, 1968. – 352 с.

10. Погорелов, А. В. Геометрия : учебник для 7–11 классов средней школы. – М. : Просвещение, 1990.

11. Пойа, Д. Математическое открытие. – М. : Наука, 1970.

12. Столяр, А. А. Методы обучения математике. – Минск : Высшая школа, 1966.

13. Фридман, Л. М., Турецкий, Е. Н., Стеценко, В. Я. Как научиться решать задачи. – М. : Просвещение, 1979.

14. Фридман, Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. – М. : Просвещение, 1983.

УДК 51

Л. И. Калугина (г. Ульяновск)

СОДЕРЖАНИЕ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА «МАТЕМАТИКА В НАШЕЙ ЖИЗНИ»

Предлагается вариативный курс для учащихся 9 класса. Программа данного курса в сочетании с программой обязательного курса математики способствует углубленному изучению математики и ее приложений в различных сферах жизнедеятельности.

***Ключевые слова**: математика, экономика, наука, техника, жизнь.*

Предлагаемый элективный курс предназначен для учеников 9 классов, обучающихся как в общеобразовательных, так и в математических классах. Данный курс состоит из трех частей. Знания, приобретенные в рамках данного курса, учащиеся могут применять в практической деятельности. Базовые знания математической подготовки, необходимые для освоения данного курса, могут быть различной направленности, поскольку часть материала курса полезна будет и учащимся гуманитарной направленности.

Предлагаемый элективный курс освещает вопросы, не рассматриваемые в общем курсе школьной математики, и предполагает знакомство учащихся с математикой как с наукой, имеющей всестороннюю направленность. Так как математика оказывает на нашу жизнь огромное влияние, то практически для всех специальностей необходимы математические знания.

Математические знания, приобретаемые нами в средней школе, вузе получены человечеством достаточно давно, но даже сегодня они остаются очень актуальными. Математика – это язык, на котором говорят не только наука и техника, математика – это язык человеческой цивилизации. Она проникла практически во все сферы человеческой жизни. Современные технологии в производстве, повсеместная компьютеризация, развитие современных информационных технологий требует математической грамотности. Это не только владение конкретными математическими знаниями, но и определенный стиль мышления, который позволяет вырабатывать математика.

Математическое образование откладывает определенный отпечаток на формирование общей культуры человека. Изучение математики способствует общему эстетическому воспитанию человека и пониманию всей красоты и изящества математических рассуждений. Международные исследования в области образования показали, что учащимся сложнее всего справляться с задачами, в которых требуется составить математическую модель конкретной жизненной ситуации. Одной из основных причин отсутствия соответствующих умений и навыков является тот факт, что учащиеся не видят прямой связи между изучаемыми математическими понятиями и реалиями жизни. Отсюда возникает представление о математике как о «сухой» и неинтересной науке, достаточно сложной в освоении, и практически теряется заинтере-сованность в получении новых знаний. Программа элективного курса рассчитана на 34 часа (см. таблица 1).

Таблица 1

Содержание	Кол-во часов		
	Всего	Лекций	Другие
1. Математика в экономике, управлении и банковской деятельности			
	14	**4**	**10**
1.1 Основные понятия экономики	2	1	1
1.2. Функции в экономике	3	1	2
1.3. Системы уравнений и рыночные отношения	3	1	2
1.4. Проценты и банковские расчеты	3	1	2
1.5. Защита проектов юных банкиров и экономистов	2		2
1.6. Научно-практическая конференция	1		1
2. Математика в сельском хозяйстве			
	8	**2**	**6**
2.1. Расчетные задачи в сельском хозяйстве.	3	1	2
2.2. Функции, диаграммы, графики.	2	1	2
2.3. Геометрические задачи.	1		1
2.4. Математические вариации с насекомыми.	1		1
2.5. Научно-практическая конференция.	1		1
3. Математика в искусстве, музыке и архитектуре			
	12	**4**	**8**
3.1. Симметрия – основополагающий принцип устройства мира.	3	1	2
3.2. Золотое сечение и гармония форм природы.	2	1	1
3.3. Музыкальная гармония пропорций	1	1	
3.4. Геометрия архитектурной гармонии.	3	1	2
3.5. Защита проектов юных художников, музыкантов и архитекторов	2		2
3.6. Научно-практическая конференция	1		1

Умение использовать математические знания в решении жизненных проблем не может возникнуть само по себе, этому следует обучать целенаправленно. Требуется организовать такую систему вариативных курсов, которая бы позволила многим учащимся ознакомиться с широко известными алгоритмами и методиками применения математических знаний в различных областях науки и техники. Курсы должны обеспечивать положительную мотивацию обучения. Программа данного курса в сочетании с программой обязательного курса математики способствует углубленному изучению математики и ее приложений в различных сферах жизнедеятельности. Она никоим образом не дублирует школьный курс математики, а является дополнением к ряду тем школьного курса математики.

Учебный процесс на курсе построен так, чтобы учащиеся не только пополнили свои знания, но и смогли выработать определенные умения и навыки, необходимые для повседневной жизни, научились бы реализовывать в будущем все свои наилучшие качества и были бы востребованными в профессиональной сфере.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Волошинов, А. В. Математика и искусство. – М. : Просвещение, 2012.
2. Смолина, Н. И. Традиции симметрии в архитектуре. – Л. : Стройиздат, 1968.
3. Есина, И. Г., Салихина, И. А. Экономика на уроках математики : методические рекомендации. – Ульяновск : ИПК ПРО, 2001.
4. Дорофеев, Г. В., Бунимович, Е. А., Кузнецова, Л. В., Минаева, С. С., Мищенко, Т. М., Росолова, Л. О., Суворова, С. Б. Курс по выбору для IX класса. «Избранные вопросы математики» // Математика в школе, 2003. – №10.
5. Семенко, Е. А. Прикладные курсы разных направлений // Математика в школе, 2005. – №4.
6. Азевич, А. И. Двадцать уроков гармонии : гуманитарно-математический курс. – М. : Школа-Пресс, 1998.
7. Прутченков, А. С., Соколов, Я. В. Граждановедение. (Основы рыночной экономики). Пособие для учащихся 7–9 классов, их родителей и учителей. – М., 2003.
8. Симонов, А. С. О математических моделях экономики в школьном курсе математики // Математика в школе, 2007. – № 5.
9. Симонов, А. С. Некоторые приложения геометрической прогрессии в экономике // Математика в школе, 2008. – № 3.
10. Симонов, А. С. Проценты и банковские расчеты // Математика в школе, 2008. – № 4.
11. Травин, Е. Н. Уроки экономики в школе. – Ярославль : Академия развития, 2003.

12. Фролов, И. А. О математике и поэзии, о божественной пропорции и симметрии, о магии чисел и нравственности и многом, многом другом... – Ульяновск, 1997.
13. Варга, Б., Димень, Ю., Лопариц, Э. Язык, математика, музыка. – М. : Мир, 1981.
14. Мазель, Л. Строение музыкальных произведений. – М. : Музыка.
15. Кордейлин, Г. Е., Шмелев, А. Д. Математика помогает лингвистике. – М. : Просвещение, 1994.

УДК 51

А. Г. Карасева (г. Ульяновск)

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, КОМБИНАТОРИКИ И СТАТИСТИКИ

В работе приведены краткие теоретические сведения по теории вероятностей, комбинаторике и математической статистике в том разрезе, который нужен для решения задач ЕГЭ. Приведены примеры решения задач. Подобраны задачи для самостоятельного решения.

Ключевые слова: *теория вероятностей, комбинаторика, математическая статистика.*

Впервые задача по теории вероятностей появилась в ЕГЭ в 2012 году. Появление такой задачи потребовало включения в раздел математики средней школы изучение элементов теории вероятностей и комбинаторики. Ранее этот раздел входил в программу углубленного изучения математики. Задачи по теории вероятностей сначала вызывали большие затруднения. Сложно было и учителям. Пособий для отработки заданий, методических рекомендаций для школьников было мало.

Сейчас положение изменилось. Простые задачи по теории вероятностей включены и в ОГЭ, ученики привыкли и не боятся, как правило, этой задачи. Однако, сложность задач, представленных в базе данных по ЕГЭ, растет. Иногда встречаются задачи, вызывающие затруднение и у учителей. В тексте задачи встречаются лишние условия, которые запутывают ученика. Также могут встретиться завуалированные условия, увидеть которые могут не сразу.

Постепенно в пособиях по ЕГЭ появляются формулы и теоремы, которые ранее не были в школьном курсе, но они значительно облегчают решение задачи. Формулы Бернулли и полной вероятности ученики вполне усваивают, что часто упрощает решение.

В работе приведены краткие теоретические сведения по теории вероятностей, комбинаторике и математической статистике в том разрезе, который нужен для решения задач ЕГЭ. Приведены примеры решения задач. Подобраны задачи для самостоятельного решения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Прилепова, В. В. Теория вероятности в ЕГЭ и ОГЭ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: vk.com/mat24 (дата обращения 11.02.2016).

УДК 51

Т. В. Карягина (г. Ульяновск)

ПАКЕТ КОНТРОЛЬНО-ДИАГНОСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПО РАЗДЕЛУ «ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ»

По теме «Первообразная и интеграл» предложены три самостоятельные работы, задачи, зачет и контрольная работа.

Ключевые слова: *первообразная, неопределенный интеграл, определенный интеграл.*

Основной целью изучаемой в школе темы «Первообразная и интеграл» является знание таблицы первообразных (неопределенных интегралов) основных функций и умение применять формулу Ньютона-Лейбница при вычислении определенных интегралов и площадей фигур.

Учащиеся должны знать понятие первообразной для функции, непрерывной на интервале, понятие неопределенного интеграла, свойства неопределенных интегралов, таблицу неопределенных интегралов, понятие определенного интеграла как предела интегральных сумм, свойства определенных интегралов, понятие криволинейной трапеции и ее площади, формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенных интегралов, способы интегрирования (введение под дифференциал, замена переменной, интегрирование по частям).

Учащиеся должны уметь применять основные свойства интегралов и способы их интегрирования при решении задач различного уровня.

Изучение данной темы позволяет учащимся овладеть конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения других предметов, развития умственных способностей, самостоятельно выполнять различные творческие работы.

Учащиеся демонстрируют теоретические и практические знания по теме «Первообразная и интеграл». Могут привести примеры, подобрать аргументы, сформулировать выводы. Умеют составлять вопросы, задачи, создавать проблемную ситуацию. Умеют участвовать в диалоге, понимать точку зрения собеседника, признавать право на иное мнение.

По данной теме предложены три самостоятельные работы, задачи, зачет и контрольная работа. Все работы были проведены в 11 классах лицея при УлГТУ.

Самостоятельные работы представлены в двух вариантах так же, как они и проводились. Зачет представлен в двух вариантах, но на практике он состоит из шести вариантов. Контрольная работа по данной теме рассчитана на два урока. Задачи по темам «Первообразная» и «Площадь фигуры» могут быть использованы как на уроках, так и для самостоятельной работы дома (в том числе оценочных работ).

В заключение предложен план презентаций как результат применения определенного интеграла в геометрии. Задание было дано учащимся для подготовки к уроку-семинару по теме «Объемы тел».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Звавич, Л. И., Рязановский, А. Р., Поташник, А. М. Сборник задач по алгебре и математическому анализу для 10–11 классов : учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики: Вып. 1: Интеграл и площадь : справочный материал, решение задач с комментариями. – М. : Новая школа, 1996.
2. Галицкий, М. Л., Мошкович, М. М., Шварцбурд, С. И. Углубленное изучение алгебры и математического анализа : метод. рекомендации и дидактические материалы : пособие для учителя. – 3-е изд., дораб. – М. : Просвещение, 1997.
3. Доброва, О. Н. Задания по алгебре и математическому анализу : пособие для учащихся 9–11 кл. общеобразоват. учреждений. – М. : Просвещение, 1996.
4. Бурмистрова, Т. А. Программы общеобразовательных учреждений «Алгебра и начала анализа 10–11 классы».

УДК 51

Г. Ю. Киндеева (г. Ульяновск)

ПАКЕТ КОНТРОЛЬНО-ДИАГНОСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПО РАЗДЕЛУ «ТРИГОНОМЕТРИЯ»

Произведены анализ и систематизация заданий по теме «Тригонометрия» в школьном курсе математики с учетом требований ФГОС. Представлен набор заданий разных уровней сложности.

Ключевые слова: *тригонометрия, тригонометрические уравнения.*

Математическое образование в России переживает сейчас не лучшие времена. Многие преподаватели вузов и школьные учителя подтверждают, что задания, которые 20–25 лет назад, не вызывали затруднений у учащихся, подавляющему большинству современных учеников не по силам. Не работают старые методы и формы организации учебной деятельности. Правительство РФ в 2013 году утвердило «Концепцию развития математического образования». В концепции записаны слова, с которыми, думаю, полностью согласны, все, кто посвятил свою жизнь преподаванию математических дисциплин.

«Успех нашей страны в XXI веке, эффективность использования природных ресурсов, развитие экономики, обороноспособность, создание современных технологий зависят от уровня математической науки, математического образования и математической грамотности всего населения, от эффективного использования современных математических методов».

Наша задача воплощать в жизнь основные направления концепции. Искать новые, нестандартные формы и методы работы, постоянно «держать руку на пульсе» современной методики, быть в курсе всего нового, уметь хорошо ориентироваться в мире педагогических технологий, овладевать технологиями оценивания образовательных достижений учащихся.

Одной из трудных и важных тем школьного курса математики является «Тригонометрия». Было время, когда этому разделу математики в школах уделяли отдельный предмет. Тригонометрия, действительно, богата материалом. Функции, формулы, уравнения, неравенства, применение в других науках – это не далеко не полный перечень всего, что имеет тригонометрия. Представить математику без тригонометрии невозможно, а исключить ее из школьного образования, о чем порой ведутся разговоры, значит, лишить школьников богатства и стройности этого раздела.

Тригонометрии в школе уделяется внимание – сначала в курсе геометрии, затем в курсе алгебры и начал анализа. Однако, по мнению вузовских преподавателей, выпускники школ тригонометрию знают плохо.

Обилие формул очень затрудняет изучение тригонометрии. Формулы надо помнить, но главное – необходимо научиться быстро выводить каждую из них, так как умение вывести нужную формулу – большее достоинство, чем заучивание их без понимания вывода. Следовательно, необходимо построить такую систему изучения тригонометрии, которая давала бы возможность выводить различные формулы из небольшого числа их.

Вся школьная тригонометрия строится на модели числовой окружности. Опыт показывает, что недоработки с этой моделью, слишком поспешное введение тригонометрических функций не позволяют создать надежный фундамент для успешного усвоения материала.

В заданиях ЕГЭ по математике мы встречаем элементы тригонометрии как в первой части профильного уровня, так и во второй его части. В первой части – это чаще всего преобразования тригонометрических выражений и вычисление значений функций. Во второй части – решение тригонометрического уравнения и умение применить знание тригонометрии при выполнении планиметрических или стереометрических задач.

Данный набор уравнений используется на уроках систематизации знаний по теме «Решение тригонометрических уравнений»:

$$\operatorname{tg} x = a,\ \cos x = -1,\ \operatorname{ctg} x = -1,\ \sin x = 0,\ \operatorname{tg} x = 0,\ \cos x = 0,\ \operatorname{ctg} x = 1,$$

$$\sin x = \frac{1}{2},\ \operatorname{tg} x = \sqrt{3},\ \cos x = -\frac{1}{2},\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3},\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin x = \frac{5}{2},\ \operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \operatorname{ctg} x = 6,\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

В ходе урока каждый ученик проходит компьютерное тестирование по решению простейших тригонометрических уравнений, чтобы далее определить индивидуальную траекторию обучения каждого.

После определения уровня овладения материалом учащимся можно предложить набор уравнений, который позволяет выявить умение учащихся классифицировать уравнения по способам их решения:

$$\sin x + 5\cos x = 0,$$

$$\cos 5x \cos 4x + \sin 5x \sin 4x = 1,$$

$$2\sin^2 x = 3\cos x,$$

$$\sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x = 1,$$

$$2\sin x + \cos x = 2,$$

$$\cos^2 x - 5\cos x + 6 = 0.$$

Подготовка к ЕГЭ требует от выпускника умения хорошо ориентироваться в видах тригонометрических уравнений и способах их решения. Кроме этого, учитель должен так выстроить подготовку, чтобы его ученики были способны осуществлять синтез знаний и приемов, позволяющих грамотно выполнить решение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Единый государственный экзамен: математика : сборник заданий / [Л. О. Денищева, Г. К Безрукова, Е. М.Бойченко и др.]. – М. : Просвещение, 2014, 2015.

2. Концепция развития математического образования в Российской Федерации (утв. Распоряжением Правительства РФ от 24 декабря 2013 г. № 2506-р).

3. Семенов, А. Л., Ященко, И. В. Математика. Типовые тестовые задания. – М. : «Экзамен», 2013.

УДК 51

С. В. Кормилицина (р.п. Майна, Ульяновская область)

ПАКЕТ КОНТРОЛЬНО-ДИАГНОСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПО РАЗДЕЛУ «РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ, СИСТЕМ: РАЦИОНАЛЬНЫХ, ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ, С МОДУЛЕМ»

Разработан пакет контрольно-диагностических материалов по разделу «Решение уравнений, неравенств, систем: рациональных, иррациональных, с модулем» для занятий с обучающимися 10 общеобразовательных и физико-математических классов.

Ключевые слова*: рациональные уравнения и неравенства, иррациональные уравнения и неравенства, уравнения и неравенства с модулем.*

Пакет контрольно-диагностических материалов по разделу «Решение уравнений, неравенств, систем: рациональных, иррациональных, с модулем» предназначен для занятий с обучающимися 10 общеобразовательных и физико-математических классов, которые имеют средний и высокий уровень обученности по математике, а также хотят получить дополнительные знания по многим темам предмета.

Кроме этого он поможет учащимся старших классов систематизировать свои математические знания, поможет с разных точек зрения взглянуть на уже известные темы, значительно расширить круг математических вопросов, которые не изучаются в школьном курсе.

Этот пакет позволяет учащимся подготовиться к промежуточной аттестации, к государственной итоговой аттестации в форме ЕГЭ. Расширяя математический кругозор, программа значительно совершенствует технику решения сложных конкурсных заданий.

Данный пакет рассматривает вопросы, выходящие за рамки школьной программы. Данная тема обладает новизной для учащихся, т. к. включает в себя материал, которому уделяли немного внимания в базовой программе при изучении тем «Уравнения. Неравенства». В 8 классе учащиеся знакомятся с понятиями уравнений и неравенств, содержащих неизвестные под знаком модуля, получают представление о геометрической иллюстрации уравнений $|x| = a$ и неравенств $|x| > a$, $|x| < a$, но формирование умения решать такие уравнения и неравенства программой не предусматривается. В этом же классе учащиеся начинают формирование понятий тождества на примере равенства $\sqrt{a^2} = |a|$, они учатся выполнять лишь простейшие преобразования выражений, содержащих квадратные корни. А ведь именно эти умения необходимы для продолжения изучения, как курса алгебры, так и смежных дисциплин. Именно поэтому данный пакет необходим для формирования умений решать задания из данных тем.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ершова, А. П., Голобородько, В. В., Ершова, А. С. Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и началам анализа для 10–11 класс. – М. : Илекса, 2010.

2. Ершова, А. П., Голобородько, В. В. Самостоятельные и контрольные работы по геометрии для 10 и 11 класса. – М. : Илекса, 2010.

3. Лукин. Р. Д., Лукина, Т. К., Якунина, М. С. Устные упражнения по алгебре и началам анализа : книга для учителя. – М. : Просвещение, 1989.

4. Лысенко, Ф. Ф., Кулабухова, С. Ю. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013 : учебно-методическое пособие. – Ростов-на-Дону : Легион-М, 2009.

5. Лысенко, Ф. Ф. Математика. ЕГЭ-2013. Тематические тесты. 10–11 класс. Часть 1. – Ростов-на-Дону : Легион, 2013.

6. Лысенко, Ф. Ф. Математика. ЕГЭ-2013. Тематические тесты. 10–11 класс. Часть 2. – Ростов-на-Дону : Легион, 2008.

7. Сборник нормативных документов. Математика. Федеральный компонент государственного стандарта. Федеральный базисный учебный план и примерные учебные планы / сост. Э. Д. Днепров, А. Г. Аркадьев. – М. : Дрофа, 2007.

8. Корянов, А. Г., Прокофьев, А. А. Отбор корней в тригонометрических уравнениях (типовые задания С 1).

9. Нырко, В. А., Табуева, В. А. Задачи с параметрами. – Екатеринбург : УГТУ, 2001.

10. Сканави, М. И. Математика. Задачи. – Минск,1998.
11. Шахмейстер, А. Х. Задачи с параметрами на экзаменах. – М. : Издательство МЦНМО ; СПб. : Петроглиф : Виктория плюс, 2009.

УДК 51

В. В. Кужугалиева (г. Димитровград)

ПАКЕТ КОНТРОЛЬНО-ДИАГНОСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПО РАЗДЕЛУ «РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ, СИСТЕМ»

В работе рассмотрены основные этапы освоения решения тригонометрических уравнений, неравенств, систем. Данный материал может использоваться учителями при подготовке к урокам, а также для занятий с выпускниками при подготовке к ЕГЭ.

Ключевые слова*: тригонометрические уравнения, тригонометрические неравенства, системы тригонометрических уравнений и неравенств.*

Решение тригонометрических уравнений, неравенств, систем стоит в одном ряду с другими важными темами алгебры и математического анализа в 10–11 классах. Тригонометрию можно отнести к одним из значимых разделов школьного курса математики, поэтому необходимо подходить к изучению теоретического материала и к практическому применению знаний, умений и навыков, имеющихся у обучающихся наиболее требовательно и качественно.

С чего же начинается обучение решения тригонометрических уравнений, неравенств, систем в школе? Естественно, с изучения тригонометрических функций, их свойств, формул тригонометрии. Старшеклассникам приходится работать с единичной окружностью. В связи с этим можно провести теоретический зачет по теме «Тригонометрические функции любого угла». Мной разработан так называемый лист опроса, в который вошли практически все ключевые вопросы по данной теме. При подготовке к этому зачету обучающиеся должны знать определения, свойства тригонометрических функций, таблицу значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов от 0° до 180°. Методика проведения такого теоретического зачета подробно изложена в работе.

Знание тригонометрических формул – главный залог к успешному решению любых простейших и сложных тригонометрических уравнений, неравенств, систем. После того как все формулы тригонометрии изучены, необходимо провести зачет по теме «Формулы тригонометрии». Здесь старшеклассникам предлагается письменно заполнить форму, в которой записаны в произвольном порядке все формулы тригонометрии, причем даны так левые так и правые части тригонометрических тождеств.

Следующий этап – решение тригонометрических уравнений. Самое главное для каждого старшеклассника необходимо овладеть решением простейших тригонометрических уравнений, а так же отлично знать решение частных случаев уравнений. Для проверки знаний по этой теме можно провести зачет по теме «Простейшие тригонометрические уравнения».

Наконец, рассматриваются способы решения тригонометрических уравнений. После которых проводятся различные проверочные и контрольные работы.

Хорошо освоив все предыдущие разделы старшеклассники подходят к решению тригонометрических неравенств, начиная с простейших. Для проверки знаний и умений обучающихся составляются проверочные работы. Обязательным условием решения тригонометрических неравенств является изображение их решения на единичной окружности.

Заключительный этап – решение систем тригонометрических уравнений. Для диагностики уровня обученности старшеклассников при решении систем уравнений остаются письменные контрольные работы и тесты.

Таким образом, в работе рассмотрены основные этапы освоения решения тригонометрических уравнений, неравенств, систем. Данный материал может использоваться учителями при подготовке к урокам, а также для занятий с выпускниками при подготовке к ЕГЭ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Колмогоров, А. Н., Абрамов, А. М., Дудницын, Ю. П. Алгебра и начала анализа : учебник для 10–11 классов общеобразовательных учреждений. – М. : Просвещение, 2014.

2. Максютин, А. А. Математика-10 : учебное пособие для 10-х математических классов, лицеев и гимназий. – Самара, 2002.

УДК 51

О. В. Ланкова (г. Ульяновск)

ПАКЕТ КОНТРОЛЬНО-ДИАГНОСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПО РАЗДЕЛУ «РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХИ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ»

Разработан пакет контрольно-диагностических материалов по разделу «Решение показательных и логарифмических уравнений, неравенств и систем». Пакет предназначен для учителей, работающих в старших классах.

Ключевые слова*: показательное уравнение, логарифмическое уравнение, системы уравнений.*

В материалах приводятся основные подходы и методы к решению показательных и логарифмических уравнений, неравенств и систем такие как:

1. Метод уравнивания показателей;
2. Уравнения, сводящиеся к квадратным уравнениям (метод замены);
3. Вынесение за скобки общего множителя в левой части уравнения;
4. Метод деления (однородные уравнения первой и второй степени).

Рассматриваются подходы к решению показательно-степенных уравнений, показательных неравенств.

Показательными неравенствами называются неравенства вида: $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, где a – положительное число, отличное от 1, и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Теорема. Если $a > 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того смысла: $f(x) > g(x)$.

Если $0 < a < 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$.

Особое внимание уделяется логарифму, а именно решению логарифмических уравнений и неравенств. Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или в его основании, называется логарифмическим уравнением. Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида $\log_a x = b$.

При решении логарифмических неравенств необходимо знать основные свойства логарифмов и свойства логарифмической функции.

В заключение теоретической части работы предложен особый метод в решении показательных и логарифмических уравнений и неравенств: метод рационализации (декомпозиции). Этот метод значительно упрощает решение некоторых показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

Краткость изложения теории компенсируется разбором большого числа примеров различной степени трудности.

Математика, как и любая другая наука не стоит на месте, вместе с развитием общества меняются и взгляды людей, возникают новые мысли и идеи. Появление компьютеров внесло свои корректировки в способы решения уравнений и значительно их облегчило. Однако знание хотя бы самых главных способов решения уравнений необходимо. Работая с данными материалами, учитель может обобщить, систематизировать и углубить знания учащихся, разбирая основные способы решения уравнений и неравенств, систем. Учащиеся могут научиться определять метод решения данного уравнения и неравенства, а в случаях, если способов решения несколько, найти альтернативный вариант. Не смотря на то, что использование уравнений в повседневной жизни – редкость. Все же уравнения нашли свое применение во многих отраслях хозяйства и практически во всех новейших технологиях.

Основная цель данных материалов для учителя не только квалифицированно подготовить учащихся к итоговой государственной аттестации, но и повышение уровня развития мышления ученика, который определяется степенью сложности умственных операций: анализ, синтез, сравнение, обобщение, классификация.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Авербух, Б. Г., Рубинштейн, А. И. Об определении степени и решении уравнений и неравенств, содержащих показательно степенную функцию // Математика в школе. – 1996. – №2. – С. 29–33.

2. Сканави, М. И. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. – М. : Просвещение, 1988.

УДК 51

Т. В. Макарова (г. Ульяновск)

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА ИЗУЧЕНИЯ РАЗДЕЛА «РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ, СИСТЕМ»

Разработана технологическая карта изучения раздела «Решение тригонометрических уравнений, неравенств, систем». Карта содержит блочное планирование курса математики в 10-х классах. Технологическая карта расписана по отдельным блокам с указанием изучаемого пункта учебника, типа учебного занятия, установления межпредметных связей. К каждому уроку ставятся дидактические цели, указаны методы обучения, формы организации познавательной деятельности и контроля, включая самоконтроль, взаимоконтроль, контроль учителя и администрации.

Ключевые слова*: технологическая карта, тригонометрия.*

Технологическая карта предназначена для повышения эффективности подготовки учащихся 10-х классов к итоговой аттестации по алгебре и началам анализа за курс полной средней школы. Она предусматривает их подготовку к дальнейшему математическому образованию, так как анализ сдачи единого государственного экзамена показал, что ученики допускают много ошибок при выполнении заданий именно из раздела «Тригонометрия» или вообще не берутся за такие задания. Технологическая карта помогает устранять этот недостаток в получении тригонометрических знаний. Тема «Тригонометрические уравнения, неравенства, системы» школьного курса математики наиболее сложна для учащихся. Одной из причин этого является недостаточное количество программных часов, отводимое на изучение этой темы, а также поверхностное изложение некоторых важных вопросов, связанных с решением тригонометрических уравнений, отбором и исследованием корней, решением тригонометрических неравенств. Отличительной особенностью данной технологической карты от примерной программы по алгебре и началам анализа, изучающей тему «Тригонометрические уравнения, неравенства, системы», является то, что данная карта имеет прикладное и общеобразовательное значение, способствует развитию логического мышления учащихся, углублению и систематизации знаний по тригонометрии при подготовке к итоговой аттестации. Школьная программа по математике содержит лишь самые необходимые, максимально упрощенные знания по данной теме. Практика показывает громадный разрыв между содержанием школьной программы по математике и теми требованиями, которые налагают на учащихся при сдаче ЕГЭ. Поэтому данная карта призвана ликвидировать этот разрыв и подготовить учащихся к успешной сдаче ЕГЭ по теме «Тригонометрические уравнения, неравенства, системы». Карта ориентирована на расширение базового уровня знаний учащихся по математике, является предметно-ориентированной и дает учащимся возможность познакомиться с интересными, нестандартными вопросами тригонометрии, с весьма распространенными методами решения тригонометрических задач, проверить свои способности по математике. Вопросы, рассматриваемые в карте, выходят за рамки обязательного содержания. Вместе с тем, они тесно примыкают к основному курсу. Поэтому данная карта будет способствовать совершенствованию и развитию важнейших математических знаний и умений, предусмотренных школьной программой, поможет оценить свои возможности по математике. Данная карта рассчитана на учащихся 10-х классов, которым интересна математика, кому она понадобится при учебе и при подготовке к различного рода экзаменам, в частности, к ЕГЭ.

Технологическая карта расписана по отдельным блокам с указанием изучаемого пункта учебника, типа учебного занятия, установления межпредметных связей. К каждому уроку ставятся дидактические цели (что должен знать и уметь ученик), указаны методы обучения, формы организации познавательной деятельности и контроля, включая самоконтроль, взаимоконтроль, контроль учителя и администрации.

В приложении к технологической карте приведены все виды самостоятельных и контрольных работ, математических диктантов, материалов зачетов, карточек для устного опроса учащихся с разработанными к ним критериями оценок. Указаны назначения самостоятельных работ (обучающая и проверочная). Приводится список основной и дополнительной литературы.

За основу карты взят учебник [1]. Кроме того, использовалась литература, обеспечивающая работу по изучению курса алгебры и начала анализа в 10-м общеобразовательном классе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алгебра и начала анализа : учебник для 10–11 классов общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович и др. – 10-е изд. – М. : Мнемозина, 2009. – 384 с.

УДК 51

И. Н. Мамадалеев (р.п. Старая Кулатка, Ульяновская область)

ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Изучены площади фигур путем использования идеи равновеликости. Найдены нетрадиционные доказательства теорем о площадях треугольников. Применена теория равновеликости фигур для решения задач.

***Ключевые слова**: многоугольник, площадь, равновеликость.*

Работа состоит из трех частей.

В первой части работы были выведены формулы площадей некоторых многоугольников, при этом были использованы только идея равновеликости фигур и основные свойства площадей:

1) Равные многоугольники имеют равные площади;

2) Если многоугольник составлен из двух многоугольников, не имеющих внутренних точек, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников;

3) Площадь квадрата со стороной, равной единице длины, равна 1 (единице измерения площадей).

Во второй части работы были решены задачи о площадях с использованием тех же свойств площадей.

В третьей части работы были исследованы положения прямых, разбивающих фигуры на две равновеликие части.

В работе были рассмотрены такие задачи, как:

- На стороне параллелограмма была взята точка, была рассмотрена зависимость площади получившегося треугольника от площади параллелограмма. Также была решена аналогичная задача для точки, лежащей внутри параллелограмма;
- Исследование площадей параллелограммов с парой сторон, лежащих на параллельных прямых;
- Применение свойства медиан для решения задач;
- Задачи о разрезании фигур на две равновеликие части.

Практическая значимость работы определяется возможностью использования данного материала на уроках геометрии для расширения геометрического кругозора учащих

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Атанасян, Л. С. и др. Геометрия 7–9 класс. – М. : Просвещение, 2014.

УДК 51

А. С. Марянова (г. Ульяновск)

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Разобраны основные методы решения тригонометрических уравнений.

***Ключевые слова**: тригонометрические уравнения, методы решения.*

Тема «Решение тригонометрических уравнений» – это одна из самых сложных тем в школьном курсе математики. Тригонометрические уравнения возникают при решении задач по планиметрии, стереометрии, астрономии, физики и в других областях. Тригонометрические уравнения встречаются во второй части вариантов ЕГЭ математики профильного уровня.

Любой метод решения тригонометрических уравнений состоит в том, чтобы привести их к простейшим, то есть к уравнениям вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Простейшие тригонометрические уравнения учащиеся решать умеют. Другие являются специфическими именно для тригонометрии.

Главное отличие тригонометрических уравнений от алгебраических состоит в том, что в алгебраических уравнениях конечное число корней, а в тригонометрических – бесконечное, что усложняет отбор корней. Еще одной спецификой тригонометрических уравнений является неединственность формы записи ответа.

Опыт показывает, что учащиеся в недостаточной степени овладевают умением решать тригонометрические функции, часто допускают ошибки при их решении и не владеют способами их решения.

Выше изложенное побудило меня разработать методику решения тригонометрических уравнений и выделить основные способы решения тригонометрических уравнений.

Целью моего педагогического проекта является разработка методики обучения учащихся решению тригонометрических уравнений.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. проанализировать действующий учебник алгебры и начала анализа для выявления представленной в нем методики решения тригонометрических уравнений;

2. изучить стандарты образования по данной теме;

3. изучить статьи и учебно-методическую литературу по данной теме;

4. подобрать теоретический материал, связанный с решением тригонометрических уравнений;

5. рассмотреть различные методы решения тригонометрических уравнений;

6. разработать план-конспект урока.

Тригонометрическим уравнением называется уравнение, содержащее переменную под знаком тригонометрических функций.

Уравнения вида $\sin x = a$; $\cos x = a$; $\operatorname{tg} x = a$; $\operatorname{ctg} x = a$, где x – переменная, $a \in R$, называются простейшими тригонометрическими уравнениями.

Необходимых формул по тригонометрии не так уж много. Их нужно знать наизусть.

Формулы:

$\sin x = a \quad \Rightarrow \quad x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, где $k \in Z$;

$\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pi n$, где $n \in Z$;

$\sin x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in Z$;

$\sin x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in Z$;

$\cos x = a \quad \Rightarrow \quad x = \pm\arccos a + 2\pi n$, где $n \in Z$;

$\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$;

$\cos x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2\pi n$, где $n \in Z$;

$\cos x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pi + 2\pi n$, где $n \in Z$;

$\operatorname{tg} x = a \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, где $n \in Z$;

$\operatorname{ctg} x = a \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, где $n \in Z$.

Чтобы научиться успешно решать простейшие тригонометрические уравнения необходимо следующее:

- уметь отмечать точки на числовой окружности;
- уметь определять значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для точек числовой окружности;
- знать свойства основных тригонометрических функций;
- знать понятия арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса и уметь отмечать их на числовой окружности.

Некоторые из методов (например, замена переменной или разложение на множители) являются универсальными, то есть применяются и в других разделах математики.

Различают следующие методы решения тригонометрических уравнений:

– Замена переменной и сведение к квадратному уравнению;

– Разложение на множители;

– Однородные тригонометрические уравнения;

– Решение уравнений с применением:

а) формул понижения степени; б) преобразования суммы тригонометрических функций в произведение; в) преобразования произведения тригонометрических функций в сумму; г) формул тройного аргумента;

– Введение дополнительного угла.

Пример 1. Решить уравнение $\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x - \sin^2 4x = 0$.

Решение. Применив формулу понижения степени и преобразование суммы тригонометрических функций в произведение, получим уравнение

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} - \frac{1-\cos 6x}{2} - \frac{1-\cos 8x}{2} = 0,$$

$$(\cos 8x - \cos 2x) + (\cos 6x - \cos 4x) = 0,$$

$$-2\sin 3x \sin 5x - 2\sin x \sin 5x = 0,$$

$$-2\sin 5x(\sin 3x + \sin x) = 0,$$

$$-4\sin 5x \sin 2x \cos x = 0.$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{5}$, где $n \in Z$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in Z$.

Также в работе представлены конспекты уроков по теме «Обобщающий урок с элементами тренинга и тренининг-выбор».

Результат данной работы может быть использован в качестве учебного материала при подготовке к ЕГЭ, при составлении элективного курса для интересующихся математикой школьников.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алгебра и начала анализа. 10–11 кл. : учеб.-метод. пособие / М. И. Башмаков, Т. А. Братусь, Н. А. Жарковская и др. – М. : Дрофа, 2013. – 240 с.

2. Алгебра и начала анализа. 10 кл. : учебник для общеобразовательных учреждений / Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров, М. В. Ткачева, И. Е. Федорова, М. И. Шабунин. – 7-е изд., исправ. – М. : Мнемозина, 2007.

3. Ершова, А. П., Голобородько, В. В. Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и началам анализа для 10–11 классов. – М. : Илекса, 2013.

4. Контрольные и самостоятельные работы по алгебре : 10 класс : к учебнику А. Г. Мордковича «Алгебра и начала анализа. 10–11 классы» / М. А. Попов. – М. : Экзамен, 2016.

5. Райхмист, Р. Б. Задачник по математике для учащихся средней школы и поступающих в вузы: Учеб. пособие. – М.: Московский Лицей, 2013.

6. Галицкий, М. Л. Сборник задач по алгебре и началам анализа 10–11 класс : учеб. пособие. – М. : Просвещение, 1999.

7. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала анализа 10–11 класс : задачник для общеобразовательных учреждений. – М. : Мнемозина, 2014.

8. Лысенко, Ф. Ф., Кулабухов, С. Ю. и др. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2010 : учебно-тренировочные тесты / под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова – Ростов-на-Дону : Легион-М, 2013.

УДК 51

Н. В. Мельникова (г. Ульяновск)

ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС ПО ТЕМЕ «ПРОЦЕНТНЫЕ РАСЧЕТЫ»

Разработан элективный курс по теме «Процентные расчеты» для организации внеурочной деятельности с учащимися 7–8 классов.

***Ключевые слова**: проценты, процентные вычисления.*

С целью систематизации, углубления и обобщения знаний учащихся по методам и приемам решения задач на проценты учителями разрабатываются элективные курсы. Элективный курс по методам решения процентных задач целесообразно проводить с учащимися 7–8 классов, в таком случае останется достаточно времени в 9 классе для изучения других разделов и подготовки к ОГЭ. Элективный курс по данной теме разработан автором и читается несколько лет учащимся школы. Обратим внимание на некоторые моменты, касающиеся содержания и методических особенностей данного курса.

Элективный курс предназначен для организации внеурочной деятельности по нескольким взаимосвязанным направлениям развития личности, таким как общеинтеллектуальное, общекультурное, социальное. Программа предлагает ее реализацию в элективной форме, в 8 классах. Возможно продолжение указанного курса в 9 и 10 классе.

Основной целью данного учебного курса является обучение решению нестандартных задач по математике и информатике, а также подготовка к участию в олимпиадах по указанным предметам. Познакомить учащихся с математической классификацией типичных задач на проценты.

Задачи курса:

- сформировать умения производить процентные вычисления, необходимые для применения в практической деятельности;

- обучить решению основных задач на проценты с применением формул простого процентного роста и сложного процентного роста;
- привить учащимся основы экономической грамотности;
- помочь ученику оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы.

Данный курс «Процентные расчеты» демонстрирует учащимся применение математического аппарата к решению повседневных бытовых проблем каждого человека, вопросов рыночной экономики и задач технологии производства. Познавательный материал курса будет способствовать не только выработке умений и закреплению навыков процентных вычислений, но и формированию устойчивого интереса учащихся к процессу и содержанию деятельности, а также познавательной и социальной активности.

Курс рассчитан на 35 часов (1 час в неделю).

Таблица 1

Тематическое планирование с указанием количества часов, отводимых на освоение каждой темы

Раздел, тема	Кол-во часов	Из них (кол-во часов)	
		Теория	Практика
Проценты. Основные задачи на проценты	4	1	3
Процентные вычисления в жизненных ситуациях (операции с ценами)	5	2	3
Штрафы	5	2	3
Тарифы	5	2	3
Банковские операции	5	2	3
Задачи на сплавы, смеси, растворы	5	2	3
Решение задач по всему курсу	4	1	3
Защита зачетной работы	2	2	
ИТОГО	35	14	21

В результате изучения курса:

Учащиеся научатся

- понимать содержательный смысл термина «процент» как специального способа выражения доли величины, его роли в экономической и социальной жизни общества;
- переводить на язык процентов такие речевые обороты как «увеличить число в 2,5 раза», «уменьшить на четверть» и т. д.;
- делать обратный перевод;

• применять процентные вычисления в жизни, решать основные задачи на проценты, применять формулу простого процентного роста и формулу сложного процентного роста;

Учащиеся получат возможность

• соотносить процент с соответствующей дробью (особенно в некоторых специальных случаях: 50 % – 1/2; 20 % – 1/5; 25 % – 1/4 и т. д.);

• производить прикидку и оценку результатов вычислений;

• при вычислениях сочетать устные и письменные приемы, применять калькулятор, использовать приемы, рационализирующие вычисления.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Информатика. Математика. Программы внеурочной деятельности для основной школы: 7–9 классы / М. С. Цветкова, О. Б. Богомолова, Н. Н. Самылкина. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – 200 с.

2. Дрозина, В. В., Дильман В. Л. Механизм творчества решения нестандартных задач. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.

3. Никольский, С. Н., Потапов М. К., Решетников Н. Н. Алгебра в 7 классе : методические материалы. – М. : Просвещение, 2015.

УДК 51

А. Р. Насырова (г. Ульяновск)

ПАКЕТ КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПО РАЗДЕЛУ «РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ, СИСТЕМ»

Разработана методика, направленная на формирование у учащихся умений решать тригонометрические уравнения и неравенства и их системы.

Ключевые слова*: тригонометрические уравнения, тригонометрические неравенства, системы тригонометрических уравнений и неравенств.*

В настоящее время основной задачей перестройки школьного образования является переориентация на приоритет развивающей функции обучения. Это означает, что на первый план выходит задача интеллектуального развития личности, т. е. развитие учебно-познавательной деятельности. Пожалуй, ни один школьный предмет не может конкурировать с возможностями математики в воспитании мыслящей личности.

Уже несколько десятилетий тригонометрия, как отдельная дисциплина школьного курса математики не существует, она плавно растеклась не только в геометрию и алгебру основной школы, но и в алгебру и начала анализа.

Исторически сложилось, что тригонометрическим уравнениям и неравенствам уделялось особое место в школьном курсе. Еще греки на заре человечества, считали тригонометрию важнейшей из наук. Поэтому и мы, не оспаривая древних греков, будем считать тригонометрию одним из важнейших разделов школьного курса, да и всей математической науки в целом.

Тригонометрические уравнения и неравенства занимают одно из центральных мест в курсе математики средней школы, как по содержанию учебного материала, так и по способам учебно-познавательной деятельности, которые могут и должны быть сформированы при их изучении и применены к решению большого числа задач теоретического и прикладного характера.

В школьном математическом образовании с изучением тригонометрических уравнений и неравенств связаны несколько направлений:

1. Решение уравнений и неравенств;
2. Решение систем уравнений и неравенств;
3. Доказательство неравенств.

Анализ учебной, научно-методической литературы показывает, что большое внимание уделяется первому и второму направлениям.

Требованием нашего времени является необходимость усиления прикладных направлений в обучении математике. Как показал анализ содержания школьного математического образования, возможности решения тригонометрических уравнений, а особенно тригонометрических неравенств, в этом плане достаточно широки.

Также следует заметить, что решение тригонометрических уравнений и неравенств создает предпосылки для систематизации знаний учащихся, связанных со всем учебным материалом по тригонометрии (например, свойства тригонометрических функций, приемы преобразования тригонометрических выражений и т. д.) и дает возможность установить действенные связи с изученным материалом по алгебре (уравнения, равносильность уравнений, неравенства, тождественные преобразования алгебраических выражений и т. д.) [1].

Иначе говоря, рассмотрение приемов решения тригонометрических уравнений и неравенств предполагает своего рода перенос этих умений на новое содержание.

Актуальность исследования: анализ материала, посвященного решению тригонометрических уравнений и неравенств в учебных пособиях «Алгебра и начала анализа» для 10–11 классов разных авторов, учет целей изучения тригонометрических уравнений и неравенств, а также обязательных результатов обучения, связанных с рассматриваемой темой, свидетельствует о том, что перед учителем стоит задача - формирование у учащихся умение решать уравнения и неравенства каждого вида системы тригонометрических неравенств, развитие тем самым общих тригонометрических представлений.

Цель исследования: Разработать методику, направленную на формирование у учащихся умений решать тригонометрические уравнения и неравенства и их системы.

Объект исследования: процесс обучения математике.

Предмет исследования: методика формирования у учащихся умений решать тригонометрические уравнения, неравенства, системы.

Гипотеза исследования: Если выделить основные умения, необходимые при решении тригонометрических уравнений, неравенств, систем и разработать методику их формирования, то это будет способствовать качественному научению решать тригонометрические уравнения, неравенства, системы.

Под осознанным и качественным изучением тригонометрии мы понимаем процесс обучения, осуществляемый с учетом идей личностно ориентированного обучения, при реализации которого не допускается формальной передачи знаний и схоластической отработки умений, т.е. изучение тригонометрии должно опираться как на логическую, так и на образную составляющие мышления, при этом учащимся должны быть предоставлены возможности для дифференциации и индивидуализации.

В процессе исследования и проверки достоверности гипотезы необходимо было решить следующие задачи:

1. Провести анализ психолого-педагогической, учебной и методической литературы по проблеме исследования.
2. Выявить роль тригонометрических уравнений, неравенств, систем в обучении математики.
3. Выделить основы формирования умений, необходимых для решения тригонометрических уравнений, неравенств, систем.
4. Классифицировать методы решения тригонометрических уравнений, неравенств, систем.
5. Разработать методику формирования умений и навыков решать тригонометрические уравнения, неравенства, системы.
6. Провести экспериментальное исследование разработанной методики.

Для решения поставленных задач были использованы следующие методы исследования:

1. Анализ психолого-педагогической и методической литературы;
2. Анализ учебно-методических пособий, учебников, дидактических материалов;
3. Наблюдения, беседы с учителями.

Проработав соответствующую психолого-педагогическую и методическую литературу по данному вопросу, можно, сделать вывод о том, что умение и навыки решать тригонометрические уравнения и неравенства в школьном курсе алгебры и начал анализа являются очень важными, их развитие требует значительных усилий со стороны учителя математики.

Учитель сам обязан в достаточной мере владеть методиками формирования умений и навыков решать тригонометрические уравнения и неравенства. С учетом того, что тригонометрические уравнения и неравенства разделяются на несколько типов, то соответственно и методика для каждого типа различна.

Бесспорно, достичь поставленной цели с помощью только средств и методов предложенными авторами современных учебников, практически невозможно. Это связано с индивидуальными особенностями учащихся. Ведь в зависимости от уровня их базовых знаний по тригонометрии выстраивается линия возможностей изучения различных видов уравнений и неравенств на разных уровнях.

С решением уравнений, в которых переменная входит под знак одной или нескольких тригонометрических функций, так или иначе связаны многие задачи тригонометрии, стереометрии, физики и др. Процесс решения таких задач как бы синтезирует в себе практически все знания и умения, которые учащиеся приобретают при изучении элементов тригонометрии. Поэтому учитель сталкивается с довольно сложной проблемой выделения тех идей изучаемого материала, которые лежат в основе способов решения рассматриваемых задач, с целью их последующего обобщения и систематизации. Это важно и для осознанного усвоения учащимися теории, и для овладения некоторыми достаточно общими способами решения математических задач. Следует также заметить, что решение тригонометрических уравнений не только создает предпосылки для систематизации знаний учащихся, связанных с материалом тригонометрии (например, свойства тригонометрических функций, приемы преобразования тригонометрических выражений и т. д.), но и дает возможность установить действенные связи с изученным алгебраическим материалом (уравнение, равносильность уравнений, виды алгебраических уравнений, способы их решения, приемы преобразования алгебраических выражений и т. п.). В этом состоит одна из особенностей материала, связанная с изучением тригонометрических уравнений.

Другая особенность – в исключительном разнообразии таких уравнений. Именно это разнообразие влечет определенные трудности в их классификации; его следствием могут быть и затруднения в решении тригонометрических уравнений, в частности, – в выборе того приема, который целесообразно применить для получения искомого множества значений переменной.

Указанные особенности должны быть учтены учителем при разработке методики обучения школьников решению тригонометрических уравнений.

Тригонометрические уравнения, неравенства, системы занимают достойное место в процессе обучения математики и развитии личности в целом.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аджиева, А. Тригонометрические уравнения // Математика. Приложение к газете «Первое сентября», 2001. – № 33.

2. Адрова, И. А., Ромашко, И. В. Модульный урок в X классе по теме «Решение тригонометрических уравнений» // Математика в школе, 2001. – № 4. – С. 28–32.

3. Башмаков, М. И. Алгебра и начала анализа. 10–11. : учебное пособие для 10–11 кл. средней школы. – М. : Просвещение, 1998. – 335 с.

4. Гилемханов, Р. Г. Освободимся от лишней работы (при решений однородных триг. уравнений) // Математика в школе, 2000. – № 10. – С. 9.

5. Гнездовский, Ю. Ю., Горбузов, В. Н., Зайкин, М. И. Тригонометрические системы // Развивающий потенциал математики и его реализация в обучении (сборник научных и методических работ, предоставленных на региональную научно-практическую конференцию). – М. : Арзамас, 2002. – 334 с.

6. Калинин, А. К. О решении тригонометрических неравенств // Математика. Приложение к газете «Первое сентября», 1991. – № 6.

7. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала анализа. 10–11 кл. : учебник для общеобразовательных учреждений. – М. : Мнемозина, 2000. – 336с.

8. Немов, Р. С. Психология : учеб. для студ. высш. пед. учеб. заведений: В 3 кн. – 4-е изд. – М. : Гумакнит. изд. центр ВЛАДОС, 2003. – Кн. 2 : Общие основы психологии. – 608 с.

9. Пичурин, Л. Ф. О тригонометрии и не только о ней. – М. : Просвещение, 1985.

10. Решетников, Н. Н. Тригонометрия в школе. – М. : Педагогический университет «Первое сентября», 2006. – лк 1.

11. Токарева, А. Тригонометрические неравенства // Математика. Приложение к газете «Первое сентября», 2002. – № 44.

12. Шабунин, М. Тригонометрические уравнения. // Математика. Приложение к газете «Первое сентября», 1995. – № 12, 13.

13. Филатов, В. Г. О потере корней при решении тригонометрических уравнений // Математика в школе, 1991. – № 2. – С. 57–59.

14. Якимовская, И. С. Знания и мышление школьников. – М. : Просвещение, 1976.

УДК 51

Ю. Г. Огай (г. Ульяновск)

ПАКЕТ КОНТРОЛЬНО-ДИАГНОСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПО РАЗДЕЛУ «ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ»

Разработан пакет контрольно-диагностических материалов по разделу «Первообразная и интеграл». Представлен возможный вариант календарно-тематического планирования данного раздела с подробным описанием требований к уровню подготовки учащихся.

Ключевые слова: *первообразная, неопределенный интеграл, приложения определенного интеграла.*

Данный проект разработан в помощь учителям, работающим в 11-х классах без физико-математического уклона.

Проект представляет собой пакет контрольно-диагностических материалов по разделу «Первообразная и интеграл» с дидактическими рекомендациями к его использованию. Для удобства представлен возможный вариант календарно-тематического планирования данного раздела с подробным описанием требований к уровню подготовки учащихся.

Цель пакета – выявление уровня овладения учащимися системой знаний, предметными умениями и способами действия по данной теме.

Следует отметить, что тема интегралов лишь затрагивается в школьном курсе, на нее, как правило, выделяется мало часов в учебном плане. Кроме того, в материалах ЕГЭ практически не встречаются задания по данному разделу. Все это порождает несколько проблем: не хватает времени на достаточное закрепление и применение изучаемого материала, несерьезное отношение к теме со стороны самих учащихся, поверхностность изучения тем...

Частичным решением указанных проблем может послужить грамотный подбор заданий для проверочных работ, который позволит сократить время диагностики в пользу времени на отработку навыков, сократить время учителя на подготовку раздаточных материалов в пользу времени на подбор заданий для закрепления, «подстегнет» и мотивирует учащихся на серьезное отношение к теме.

Проект позволит не только разрешить перечисленные задачи, но и удобно распечатать все раздаточные материалы (просто отсканировав соответствующие страницы, специально оставленные без нумерации), сориентироваться в теме молодым специалистам, оптимально подобрать объем знаний и умений по теме, которые нужно будет преподнести учащимся.

Для удобства предлагается вариант КТП данного раздела. В нем указаны требования к уровню подготовки учащихся, что позволяет удобно сориентироваться в изучаемом материале и оптимально подобрать задания к каждому уроку.

Типы урока: к – комбинированный, пр – проблемный, кр – контроль знаний, о – обобщение знаний, кор – коррекция знаний, уп – учебный практикум.

Таблица 1

<table>
<tr><th>Тема раздела, урока</th><th>Тип</th><th>Вид контроля</th><th>Элементы содержания урока</th><th>Требования к уровню подготовки учащихся</th><th>Доп. оборудо-вание</th></tr>
<tr><td>Перво-образная и интеграл</td><td colspan="5">Основная цель:
1. Формирование представлений о понятии первообразной, неопределенного интеграла, определенного интеграла.
2. Овладение умением применения первообразной функции при решении задач на вычисление площадей криволинейных трапеций и других плоских фигур.</td></tr>
<tr><td>Перво-образная</td><td>К</td><td>Составление опорного конспекта, беседа</td><td rowspan="3">Дифференци-рование, интегрирование, первообразная, таблица первообразных, правила первообразных, неопределенный интеграл, таблица основных неопределенных интегралов, правила интегрирования</td><td rowspan="3">Знать понятие первообразной и неопределенного интеграла и как они вычисляются. Уметь находить первообразные суммы функций и произведения функции на число. Уметь применять полученные знания для решения учебных задач.</td><td>Иллю-страции и записи на доске</td></tr>
<tr><td>Перво-образная</td><td>Пр</td><td>Проблемные задачи, фронтальный опрос, упражнения</td><td>Заготовки записей на доске, конспекты</td></tr>
<tr><td>Перво-образная</td><td>Уп</td><td>Индиви-дуальный опрос, работа у доски</td><td>Разда-точный материал</td></tr>
</table>

Окончание табл. 1

<table>
<tr><th>Тема раздела, урока</th><th>Тип</th><th>Вид контроля</th><th>Элементы содержания урока</th><th>Требования к уровню подготовки учащихся</th><th>Доп. оборудование</th></tr>
<tr><td>Определенный интеграл</td><td>К</td><td>Составление опорного конспекта</td><td rowspan="3">Криволинейная трапеция, предел последовательности, площадь криволинейной трапеции, масса стержня, перемещение точки, определенный интеграл, пределы интегрирования, геометрический и физический смысл определенного интеграла, формула Ньютона - Лейбница, вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла, построение алгоритма действий</td><td rowspan="3">Знать формулу Ньютона-Лейбница и четкий алгоритм решения задач по теме, уметь применять ее для вычисления площади криволинейной трапеции в простейших задачах, объяснять изученные положения на собственных конкретных примерах, иметь представление о других возможных применениях определенного интеграла в математике и других науках</td><td>Иллюстрации и записи на</td></tr>
<tr><td>Определенный интеграл</td><td>Уп</td><td>Фронтальный опрос, решение упражнений</td><td>Конспекты учащихся</td></tr>
<tr><td>Определенный интеграл</td><td>Пр</td><td>Индивидуальный опрос, работа по карточкам</td><td>Раздаточный материал (с.р.2)</td></tr>
<tr><td>Зачет по теме «Первообразная и интеграл»</td><td>Кр
О
Кор</td><td>Опрос по теоретическому материалу, работа по карточкам</td><td>Опрос по теоретическому материалу, работа по карточкам</td><td>Уметь демонстрировать теоретические и практические знания и умения по теме «Первообразная и интеграл», аргументировать свои суждения, приводить примеры</td><td>Раздаточный материал</td></tr>
<tr><td>Контрольная работа №4
по теме «Первообразная и интеграл»</td><td>Кр</td><td>Решение контрольных заданий</td><td>Проверка и коррекция знаний</td><td>Уметь развернуто обосновывать суждения, обобщать и сис-тематизировать знания по теме, применять их к решению задач, решать прикладные задачи</td><td>Раздаточный материал</td></tr>
</table>

Данный проект послужит хорошим подспорьем для работы любого учителя математики, работающего в 11-м классе. Возможность использования готового материала для проведения целого комплекса работ по разделу «Первообразная и интеграл» позволит учителю сэкономить свое время в пользу времени, потраченного на отбор материалов и заданий для закрепления изучаемой темы, более качественно подготовиться к уроку.

Проект будет особенно полезен молодым специалистам, так как поможет сориентироваться в теме, понять, что должны знать и уметь учащиеся на каждом этапе ее изучения.

Следует отметить, что проект создан не механически, а действительно все материалы предлагались для решения учащимся 11-го общеобразовательного класса, занимающимся по линии А. Г. Мордковича (базовый уровень).

Выявлено, что представленный пакет КИМ соответствует требованиям к уровню подготовки учащихся и полностью согласуется с учебной программой 11-го класса в целом.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : самостоятельные работы для учащихся общеобразовательных учреждений / Л. А. Александрова ; под ред А. Г. Мордковича. – 4 изд., испр. и доп. – М. : Мнемозина, 2009. – 100 с.

2. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : контрольные работы для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / В. И. Глизбург ; под ред. А. Г. Мордковича. – М. : Мнемозина, 2009. – 32 с.

3. Сборник нормативных документов. Математика / сост. Э. Д. Днепров, А. Г. Аркадьев. – М. : Дрофа, 2008.

4. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. В 2 ч. Ч. 1 : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А.Г. Мордкович. – 10-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2009. – 399 с.

5. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / [А. Г.Мордкович и др.] ; под ред. А. Г.Мордковича. – 10-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2009. – 239 с.

6. Материал для зачета по теме «Первообразная и интеграл».

7. Гребенкина, О. Н. Материалы проекта Инфоурок (свидетельство о регистрации СМИ Эл № ФС77 - 60625).

УДК 51

В. Н. Першина (г. Ульяновск)

ИЗУЧЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

В работе обсуждается основная проблема изучения тригонометрии в школе, связанная с освоением идеи «числовой окружности» и введением тригонометрических функций числового аргумента, и предлагается трехэтапный путь решения ее.

Ключевые слова: *математика, тригонометрия, угол, числовая окружность, функция, формула, уравнение, неравенство.*

Тригонометрия традиционно является одной из важнейших составных частей школьного курса математики в старших классах. Ее роль в математическом образовании подчеркивает и тот факт, что в середине прошлого столетия она изучалась в школе как отдельная дисциплина. Однако со временем часть базовых понятий тригонометрии перешла в курсы алгебры и геометрии основной школы, а материал, связанный с функциями, уравнениями и неравенствами, – в курс алгебры и начал математического анализа. Раздел школьного курса математики «Тригонометрия» неоднократно претерпевал изменения как по содержанию, так и по количеству часов на его изучение. Так, до 1966 года в 9-х и 10-х классах изучалась отдельная дисциплина «Тригонометрия». Изучение курса строилось в той логической последовательности, в которой «осваивало тригонометрические закономерности человечество: от практических измерений – к формальным положениям науки, в полном соответствии с идеей М. В.Остроградского». Таким образом, с помощью тригонометрии ребенок имел возможность «примерить» на себя математический стиль мышления, просканировать свою предрасположенность, свой интерес к человеческой деятельности такого рода. С реформой А. Н. Колмогорова тригонометрия перестала рассматриваться как педагогический инструмент развития мышления, приобщения ребенка к основам научной картины мира. И, к сожалению, индуктивный характер изучения тригонометрии стал уступать место формально-логическому. В результате, тригонометрический материал стал постепенно «выжиматься» не только из основной школы, но и из курса старшей ступени. Сейчас, с одной стороны, возвращается прежний, разумный порядок ее изучения: в основной школе изучается тригонометрия треугольника, а в средней школе тригонометрия составляет целостный раздел курса алгебры и начал анализа, с другой стороны, при том количестве часов, которое уделяется на эту тему, ученикам не хватает времени на вдумчивое и глубокое ее освоение. В то же время тригонометрический материал входит в ЕГЭ и используется при проведении всевозможных олимпиад и конкурсов. Соответственно не снижается потребность определенной части учащихся в глубоком знании тригонометрии. Поэтому так важна методически грамотная организация изучения данного раздела, способствующая формированию универсальных учебных действий учащихся – одной из целей ФГОС второго поколении, в которых наряду с предметными выделяются также мета предметные и личностные образовательные результаты. Для достижения необходимых результатов используется системно-деятельностный подход.

Практика показывает, что основная проблема изучения тригонометрии в школе связана с освоением идеи «числовой окружности» и введением тригонометрических функций числового аргумента. Считается, что в школьной программе не уделяется должного внимания освоению идеи единичной окружности, а практическое решение проблемы доверяется учителю и его методическому «чутью». Преподавателю необходимо так организовать изучение материала, чтобы у учащихся возникли отчетливые геометрические представления, связанные с единичным кругом. Это требование может показаться, на первый взгляд, усложнением задачи преподавания, однако затраченное время с избытком окупится позже.

Тригонометрия возникла на геометрической основе, имела геометрический язык и применялась к решению геометрических задач. Ее содержанием считалось вычисление треугольников. Поэтому изучение темы «Соотношения между сторонами и углами треугольника» (геометрия, 8 класс): определение тригонометрических функций острого угла и нахождение двух сторон прямоугольного треугольника по одной его стороне и острому углу, вывод табличных значений тригонометрических функций для 30°, 45°, 60° – является первым этапом на пути решения обозначенной проблемы. В ходе работы акцентируется внимание учащихся на приемах построения «табличных» (30°, 45°, 60°) и связанных с ними углов без транспортира, что позволит в дальнейшем не только легче освоить радианную меру угла, но и быстрее находить значения тригонометрических функций, сводимые к значениям функций для «табличных» углов, а позднее хорошо решать простейшие тригонометрические уравнения. Одновременно с этим обратить внимание учащихся на тот факт, что большая часть тригонометрического материала, которую, действительно, лучше помнить, легко запоминается с опорой на наглядные образы, что запоминание фактов тригонометрии в виде таблиц является наименее продуктивным и «опасным», с точки зрения правильного воспроизведения усвоенного. Таким образом, впервые демонстрируется учащимся «единичная окружность» («тригонометрический круг») и предлагается сопоставить полученные результаты вычислений с увиденным.

Второй этап – изучение темы «Элементы тригонометрии» (алгебра, 10 класс). Поэтому основной целью освоения данной темы является плавный переход к тригонометрии любого угла. И снова особое место отводится изучению «тригонометрического» круга, так как воспроизведение его мысленно или на бумаге и знание теоремы Пифагора закладывают основу не только теории тригонометрии острого угла, но и теории тригонометрических функций любого действительного аргумента. В результате ученик получает возможность непосредственно увидеть справедливость изученных формул тригонометрии. В противном случае, он обречен на заучивание всех этих формул без достаточной мнемонической основы и оказывается в беспомощном положении, если та или иная формула ускользает из его памяти.

Третий этап – изучение тем «Тригонометрические формулы» и «Тригонометрические уравнения и неравенства» (алгебра, 10 класс). Тригонометрические уравнения и неравенства занимают одно из центральных мест при развертывании линии уравнений, неравенств и вызывают значительные затруднения у большей части школьников. Для этого существуют вполне объективные причины. Во-первых, вводится много формул. Во-вторых, тригонометрические функции по существу единственные глубоко изучаемые периодические функции, которые имеют бесконечное множество корней. В процессе решения уравнений требуется сделать некоторый отбор его корней. Главная задача 10 класса – ввести основные понятия тригонометрии. Успешное введение основных понятий достигается, в том случае, если ученик поймет, что в окончательном определении тригонометрических функций никакие углы не участвуют – устанавливается соответствие между числами. Привлечение углов является всего лишь вспомогательным средством и промежуточным этапом, необходимость которого диктуется только методическими соображениями.

При изучении темы «Понятие угла» учащиеся учатся отмечать на пересечении единичной окружности и осей координат «опорные» точки, соответствующие углам 0°, 90°, 180°, 270°; потом точки, соответствующие углам 45°, 135°, 225°,315° (получаемые делением пополам координатных углов); затем точки, получаемые делением пополам вертикальных радиусов единичной окружности (30°, 150°, 210°, 330°), и, наконец, точки, получаемые делением пополам горизонтальных радиусов единичной окружности (60°, 120°, 240°, 300°). Изображению точек во втором и в третьем случаях помогает опора на интуитивно ясное свойство синуса острого угла: с увеличением угла от 0° до 90° значения синуса угла увеличиваются (принимая каждое свое значение только один раз). Учащиеся формулируют выводы: например, так как $\sin 30^\circ = 0{,}5$, то если на рисунке изображен острый угол, «синус» которого равен 0,5, этот угол содержит 30°. Затем десятиклассникам предлагаются небольшие самостоятельные работы, результаты которых напрямую зависят от тщательной отработки изучаемого материала. Так как материал излагается с опорой на ранее изученное, то у учащихся появляется возможность получить хорошие отметки за большое число несложных, но важных работ.

При изучении темы «Радианная мера угла» ученики обычно недопонимают необходимость выражать число радиан через число «пи». Чтобы снять всякие сомнения на этот счет, вместе с учениками откладываем углы в 1, 2, 3, 4, 5, 6 радиан (при этом необходимо откладывать 1, 2, 3, 4, 5, 6 раз дугу, равную ее радиусу). Эмпирическим путем получаем: ни одно новое деление не совпадет со старым. Таким образом, становится ясно, что число π и его доли играют важную роль. В результате, точки, соответствовавшие углам 0°, 90°, 180°, 270°, отождествляются с углами $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$. Аналогичная работа проводится с оставшимися тремя группами.

В итоге, можно надеяться на успешное решение простейших тригонометрических уравнений, так как умение правильно изображать на единичной окружности точки, соответствующие «табличным» значениям тригонометрических функций, должно быть сформировано.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Материалы курса «Тригонометрия в школе». Лекции 1-4. – М. : Педагогический университет, «Первое сентября», 2006.

2. Подласый, И. П. Педагогика: Новый курс: учеб. для студ. пед. вузов : в 2 кн. – М. : Гуманист : Владос, 2000. – кн.1 : Общие основы. Процесс обучения.

3. Малыгин, К. А. Элементы историзма в преподавании математики в средней школе. – М. : «Учпедгиз», 1956.

4. Столярова, И. В. О средствах организации обобщающего повторения в школьном курсе математики при изучении темы «Тригонометрические неравенства» // Актуальные вопросы методики обучения математике и информатики. – Ульяновск, 2015.

УДК 51

Т. А. Першина (г. Ульяновск)

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Изучается влияние исследовательской работы школьников на формирование их познавательного интереса к математике.

Ключевые слова: *математическое образование школьников, формирование познавательного интереса, исследовательские задачи, приемы педагогической поддержки.*

Математика является ключом к познанию окружающего мира, базой технического прогресса, важной компонентой развития личности. Поэтому целью математического образования является не только подготовка к поступлению в вуз, но и воспитание у школьника навыков алгоритмического мышления, умения логически рассуждать, ясно выражать свои мысли. Вместе с тем, математика позволяет развивать воображение, способность отличать гипотезу от факта, способность предугадать результат и наметить пути его получения.

На формирование познавательного интереса школьников лучше всего влияет самостоятельная работа поискового и исследовательского характера, в том числе решение задач с элементами исследования. Ответ в таких задачах не является очевидным и не может быть получен путем применения стандартных схем решения. Решение подобных задач имеет для ученика большое развивающее и воспитательное значение; оно способствует развитию мышления, математической и общей культуры. В процессе решения нестандартных задач развивается сообразительность, изобретательность, смекалка и другие, важные для жизни человека, качества. Однако исследования [1, 2] показывают, что в учебном процессе на самостоятельную работу учащихся отводится не более 13% урочного времени, причем абсолютное большинство этого времени тратится на закрепление материала, изложенного учителем.

Решение задач с элементами исследования в школе имеет свою специфику. В частности, с учетом требований возрастной психологии накладываются ограничения на тематику, характер и объем работы. Нужно учитывать пока еще невысокий образовательный уровень школьника, неразвитая способность к самостоятельному анализу, слабая концентрация внимания. В исследовательской работе школьника оцениваются не только полученные новые знания, но умение собирать необходимую информацию из разных источников, умение участвовать в дискуссиях, задавать вопросы, высказывать свою точку зрения.

Решая исследовательскую задачу, школьник познает много нового: знакомится с новой ситуацией, описанной в задаче, с новыми методами решения, новыми разделами математики, необходимыми для решения задачи. Правильно поставленное обучение решению нестандартных задач воспитывает у школьника, настойчивость в преодолении трудностей, честность и правдивость, уважение к труду других людей.

При решении исследовательской задачи у школьника часто возникают затруднения, поэтому следует ставить наводящие вопросы. Умение задавать наводящие вопросы – одно из важнейших умений учителя при руководстве исследовательской работой ученика. Учитель должен стремиться не к тому, чтобы задача была решена быстро и безошибочно, а к тому, чтобы она была решена творчески, чтобы из нее можно было извлечь как можно больше пользы для математического развития школьника. При определении задач и приемов педагогической поддержки школьника следует исходить из индивидуальных особенностей школьника.

Учитель должен помнить, что, руководя даже очень одаренным учеником, он, готовит из него не профессионального математика, а, прежде всего, всесторонне развитую личность. В процессе обучения у школьника, прежде всего, должно формироваться мировоззрение, взгляды, убеждения, развиваться творческие способности.

При решении задач исследовательского характера нужно, чтобы школьник проводил анализ ответа, например, отвечал на вопрос о существовании решения задачи, о количестве решений, об особых случаях и т. п. Для развития творческого мышления нужно постепенно формировать у школьника умение определять, какие частные случаи нужно выделить впоследствии.

Примеры задач исследовательского характера приведены, в частности, в работах [2–6].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Саранцев, Г. И. Методика обучения математике в средней школе : учебное пособие для студентов. – М. : Просвещение, 2002. – 224 с.

2. Совертков, П. И. Проектирование поисково-исследовательской деятельности учащихся и студентов по математике и информатике. – Сургут : РИО СурГПИ, 2004. – 167 с.

3. Делингер, И. А. Начала математического анализа. – Омск : Издатель-Полиграфист, 2002. – 158 с.

4. Теоретические основы подготовки и проведения уроков математики в средней школе : учебно-методическое пособие / сост. В. И. Седакова. – Сургут: РИО СурГПИ, 2003. – 82 с.

5. Воронько, Т. А. Задачи исследовательского характера // Математика в школе. – 2004, №38.3.

6. Мордкович, А. Г. Задачи исследовательского характера // Математика в школе. – 2004. – №8.

УДК 51

Е. В. Платонова (г. Ульяновск)

О ДОМАШНЕЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ ПО ТЕМЕ «ПРОИЗВОДНАЯ»

После обоснования важности темы «Производная» с точки зрения использования математических методов в практической жизни описана методика составления домашней контрольной работы по этой теме, ее роль в развитии обучающихся и использование ее результатов.

Ключевые слова: *производная, домашняя контрольная работа, личностно ориентированный подход к обучению.*

Актуальность темы «Производная» следует из того, что человек в повседневной деятельности постоянно сталкивается с решением задач, которые могут быть полностью описаны с помощью функций на математическом языке, а между тем производная является мощным орудием исследования функций.

Производная – одно из важнейших понятий математического анализа, дающее возможность введения нового метода исследования в решении задач. Изучение производных позволяет установить межпредметные связи математики со многими предметами, изучаемыми в школе. Почти во всех существующих учебниках математики преобладает техническая составляющая изложения материала.

Домашняя контрольная работа является обучающей, тренировочной и закрепляющей.

Цель работы – развитие интереса к изучаемому материалу, привлечение каждого ученика к работе. Контрольная работа позволяет отработать навыки по вычислению производной, которая является основой для изучения дальнейших тем раздела «Математический анализ».

Преподаватель в процессе выполнения домашней работы при необходимости консультирует учащихся, выявляя тем самым пробелы в изучении темы.

Самостоятельная работа оказывает значительное влияние на глубину и прочность знаний учащихся по теме «Производная», на развитие их познавательных способностей. Самостоятельная работа способствует развитию логического мышления, и требует комбинированного применения различных правил и теорем. Она показывает, насколько прочно усвоен учебный материал. При выполнении домашней самостоятельной работы можно пользоваться учебником и записями в тетрадях, таблицами и т. п. Все это создает благоприятный климат для слабых учащихся. В таких условиях они легко включаются в работу и выполняют ее. В самостоятельную работу включаются задания разного уровня. Учащиеся могут самостоятельно выбирать задания для решения. Каждому заданию присвоен уровень сложности, что стимулирует учащегося для получения более высокой оценки. Каждое задание домашней работы оценивается в бальной системе. Учащиеся, которые при выполнении работы набирают большое количество баллов освобождаются от написания итоговой контрольной работы по теме «Производная». На зачетном уроке с такими учащимися проводится собеседование по выполненной работе. Если учащийся не смог защитить свою работу, ему предлагается выполнить письменную контрольную работу. Домашняя контрольная работа дается на период изучения темы «Производная» и должна быть сдана в указанное время. По результатам анализа работ можно определить уровень усвоения темы и количество времени, которое нужно посвятить повторению и закреплению. Домашняя самостоятельная работа является обязательной для всех учащихся. По результату выполнения выставляется оценка. При невыполнении работы учащийся не допускается к написанию итоговой контрольной работы.

Данные условия определяют применение личностно ориентированного подхода при обучении, который способствует полноценному раскрытию способностей каждого учащегося и последующему его творческому развитию.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алгебра и начала анализа в 9–-10 классах : пособие для учителя / Л. О. Денищева, Ю. П. Дудницын, Б. М. Ивлев и др. – М. : Просвещение, 1988. – 272 с.
2. Учебник 11 класс. Алгебра и начало анализа. Ч. 1 / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – М. : Мнемозина, 2015.
3. ЕГЭ 2016. Математика. Типовые тестовые задания / под ред. Ященко И. В. – 2016. – 56 с.
4. ЕГЭ 2016. Математика. Типовые тестовые задания. Базовый уровень / под ред. Ященко И.В. – 2016. – 56с.
5. ЕГЭ 2016. Математика. 30 вариантов экзаменационных работ. Профильный уровень / под ред. Ященко И. В. – 2016. – 136с.
6. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015. Книга 1 / под ред. Лысенко Ф. Ф., Кулабухова С. Ю. – 2014. – 352 с.

УДК 51

О. Е. Польшакова (г. Ульяновск)

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ФУНКЦИИ» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Данная работа посвящена анализу изучения понятия функции в школьном курсе математики. Основная ее цель – выявить ключевые моменты в определении этого понятия, на которые необходимо обратить особое внимание школьников при изучении данной темы.

Ключевые слова: *переменная величина, функция, формула.*

В работе дается анализ основных трактовок понятия функции; классического подхода, опирающегося на понятие «переменная величина»; теоретико-множественного представления, которое позволяет значительно расширить понятие функции.

Рассматриваются вопросы, связанные со способами задания функции. Особое внимание уделяется аналитическому способу задания функции. Исследуется соотношение понятий «функция» и «формула». Рассматривается понятия о множестве определения и множестве значений функции. Подчеркивается важность этих понятий для корректного определения функции.

Рассматриваются важные классы функций: четные, нечетные, периодические. Определения данных классов подкреплены примерами. Особо подчеркивается, что при определении таких функций кроме закона соответствия важно следить за их областью определения.

Подготовлен комплект тестовых заданий по темам: числовые функции, сложная функция, четная, нечетная функции, периодические функции. Комплект тестовых заданий составлен в четырех вариантах и включает двенадцать вопросов. На каждый из них дается четыре ответа для выбора правильного из них. Вопросы в заданиях предлагаются в текстовой и графической формах. Задания рассчитаны на 45 минут работы школьника.

Данная работа может быть использована при работе на уроках в обычных, профильных классах и на факультативных занятиях по математике.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ананченко, К. О., Воробьев, Н. Т., Петровский, Г. Н. Алгебра : учебник для 9 класса общеобразовательных школ с углубленным изучением математики. – Минск : «Народная асвета», 1995.

2. Ананченко, К. О., Коваленко, В. С., Воробьев, Н. Т. и др. Алгебра и начала анализа : учебник для 10 класса с углубленным изучением математики общеобразовательной школы с русским языком обучения. – Минск : «Народная асвета», 2000.

3. Вирченко, Н. А., Ляшко, И. И., Швецов, К. И. Графики функции : справочник. – Киев : «Наукова думка», 1979.

4. Груденов Я. И. Изучение определений, аксиом, теорем. Пособие для учителей. – М. : Просвещение, 1981.

5. Кузнецова, Е. П., Муравьева, Л. Б., Шнеперман, Л. Б., Ящин, Б. Ю. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа. 10 класс. – Минск : «Народная асвета», 2000.

6. Майер, Р. А. Из опыта изучения функций и пределов в старших классах. – М. : Просвещение, 1981.

УДК 51

Т. В. Рыжова (г. Ульяновск)

ПАКЕТ КОНТРОЛЬНО-ДИАГНОСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПО ТЕМЕ «РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ. 6 КЛАСС»

В данном проекте разработан пакет контрольно-диагностических материалов по теме «Решение уравнений. 6 класс», составлены критерии при оценивании каждого вида заданий.

Ключевые слова: *Пакет контрольно-диагностических материалов, решение уравнений, 6 класс, оценивание.*

Целью данного педагогического проекта является разработка контрольно-оценочных материалов для выявления уровня овладения учащимися шестого класса предметными знаниями и умениями, метапредметными универсальными учебными действиями при освоении темы «Решение уравнений» и предоставления аналитических материалов по итогам контроля.

Дидактическая актуальность данной работы заключается в разработке пакета контрольно-диагностических материалов (КДМ) для организации системы формирующего оценивания учащихся шестого класса по теме «Решение уравнений» на основе требований ФГОСОО с учетом уровня обученности и индивидуальных образовательных способностей учащихся.

Практическая значимость данной работы – возможность каждому учителю применить КДМ пакета при организации формирующего оценивания каждого учащегося и для объективной оценки знаний в соответствии с требованиями ФГОСОО на основе индивидуального подхода.

Тема «Решение уравнений» является одной из основных в курсе математики. В шестом классе завершается начальный курс математики, поэтому особенно важно объективно оценить степень освоения учащимися способов решения линейных уравнений, а также решения задач с помощью составления уравнения.

Пакет КДМ содержит 3 комплекта вариантов контрольных работ по два варианта каждого уровня (А – для учащихся с низким уровнем обучаемости, В – со средним уровнем, С – с повышенным уровнем). Такая комплектация позволит учителю организовать дифференцированный контроль знаний учащихся на основе их индивидуальных способностей.

Структура варианта контрольной работы

Уровень	А	В	С
Заданий репродуктивного уровня	2 (28,6%)	2 (28,6%)	2 (28,6%)
Заданий конструктивного уровня	4(54,7%)	3(42,8%)	3(42,8%)
Заданий творческого уровня	1(16,7%)	2 (28,6%)	2 (28,6%)
Всего заданий	7	7	7

Текст контрольной работы уровня А

1. Упрости выражение:

а) приведя подобные слагаемые: $3n - 8n - 5n + 2 + 2n;$ (2 балла)

б) раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые:

$$-3(a-2)+6(a-4)-4(3a+2).$$(3 балла)

2. Реши уравнение: а) $0{,}4(x-4)-0{,}3(x-3)=1{,}7$ (3 балла);

б) $\frac{x}{-5}=\frac{-7}{10}$ (3 балла).

3. Найди значение x, при котором разность значений выражений $5(x-5)$ и $2(x-3)$ равна 11. (3 балла)

4. Путь в 195 км путешественники проплыли, двигаясь 3 ч на моторной лодке и 5 ч на теплоходе. Какова была скорость моторной лодки, если она вдвое меньше скорости теплохода? (3 балла)

5. Найди значение a, при котором уравнение $a(x-1)=1$ имеет корень $x=0$. (2 балла).

Критерии оценивания контрольной работы

Максимальная стоимость работы – 19 баллов.

«5» ставиться за 17–19 баллов;

«4» – за 13–16 баллов;

«3» – за 8–12 баллов.

Для каждого задания составлены указания к оцениванию. Например, для задания 3:

Указания	баллы
Правильно составлено уравнение, выполнено раскрытие скобок и приведение подобных слагаемых и получен ответ	3 балла
Правильно составлено уравнение, выполнено раскрытие скобок и приведение подобных слагаемых, но допущена вычислительная ошибка при получении окончательного ответа	2 балла
Правильно выполнено раскрытии скобок, но при приведении подобных слагаемых допущена ошибка	1 балл
В остальных случаях	0 баллов

Текст варианта контрольной работы уровня С

1. Найди корень уравнения: а) $-3(2x-0{,}8)=2(x+3{,}6)$ (2 балла);

б) $1\frac{2}{3}x-\frac{4}{9}=1\frac{5}{6}x-0{,}5$ (3 балла); в) $\frac{0{,}3}{0{,}5x-3}=\frac{-6}{9x+3}$ (3 балла)

2. Определи, при каком значении x значение выражения $\frac{x}{3}$ больше значения выражения $\frac{2x+6}{4}$ на 1. (2 балла)

3. В 8.00 утра турист отправился в поход со скоростью 4,8 км/ч. В 11.00 утра вслед за ним выехал велосипедист со скоростью 12 км/ч и прибыл в пункт назначения одновременно с туристом. Найди длину маршрута. (3 балла)

4. На координатной прямой выбраны точки А($2x+1$) и В(x). Определи, при каких значениях x длина отрезка АВ равна 2. (3 балла)

5. Найди корни уравнения $(2{,}5y-4)(6y+1{,}8)=0$. (3 балла).

Критерии: «5» ставится за 17–19 баллов, «4» – за 14–16 баллов, «3» – за 9–13 баллов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Федеральный государственный стандарт общего образования второго поколения (Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 декабря 2010 года)

2. Асмолов, А. Г. Системно-деятельностный подход в разработке стандартов нового поколения // Педагогика. – М., 2009. – № 4.

3. Гаиаишвили, М. Я. Самостоятельные и контрольные работы по математике, 6 класс. – М. : ВАКО, 2015.

4. Ершова, И. П., Голобородько, В. В. Самостоятельные и контрольные работы для 6 класса. – М. : Илекса, 2014.

5. Математика. 6 класс. Контрольные работы В НОВОМ формат е: (учебное пособие) / И. В. Шестокова. – М. : Интеллект-Центр, 2013.

6. Математика. 6 класс. Контрольные работы для учащихся общеобразовательных учреждений / В. И. Жохов, Л. Б. Крайнева. – 6-е изд-е, стер. – М. : Мнемозина, 2013.

7. Основина, В. А. Создание ОУ системы мониторинга качества образования в условиях введения государственных стандартов общего образования нового поколения : учебное пособие. – Ульяновск : УИПКПРО, 2012.

8. Симонов, В. П. Модель договорной оценки качества обучения на инновационной основе характеристики степени обученности личности [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.fa-kit.ru (дата обращения 09.02.16).

9. Симонов, В. П. Диагностика степени обученности учащихся : учебно-справочное пособие. – М. : MRA, 1999.

УДК 51

Н. Б. Рытько (г. Ульяновск)

ПАКЕТ КОНТРОЛЬНО-ДИАГНОСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПО РАЗДЕЛУ «ТЕЛА И ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ»

Предлагается пакет контрольно-диагностических материалов по разделу «Тела и поверхности вращения».

Ключевые слова*: математическое образование школьников, тела вращения, поверхности вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, контрольные и диагностические материалы.*

Важнейшей компонентой математического образования школьников является геометрия. Тела и поверхности вращения: цилиндр, конус, шар и сфера – согласно ФГОС [1,2] изучаются в 11 классе средней школы. Используется учебник [3], главы 6, 7.

Целью изучения этого материала является передача учащимся систематических сведений об основных видах тел и поверхностей вращения, развитие пространственного воображения и логического мышления в ходе решения задач. В процессе обучения учащиеся должны получить представление о прямых круговых цилиндре и конусе, о шаре, сфере и их элементах, о свойствах некоторых сечений тел и поверхностей вращения, уметь решать задачи на вычисление площадей поверхностей и объемов тел вращения, уметь решать задачи на комбинации многогранников и тел вращения. Задачи подобного типа обязан решать каждый выпускник школы; на это указывают, например, сборники задач [4, 5].

Предлагаемые контрольно-измерительные материалы содержат тесты следующих типов:

– теоретические тесты темам: «Цилиндр», «Конус», «Сфера», «Объем цилиндра и конуса», «Объем шара и площадь сферы», куда входят простейшие задачи на понимание пройденного теоретического материала;
– обобщающие тесты по каждой главе учебника [3];
– тесты-зачеты по темам: «Цилиндр», «Конус», «Сфера», «Объем цилиндра и конуса», «Объем шара и площадь сферы»;
– итоговый тест.

Каждый тест представлен в 4 вариантах. Кроме того, в пакет входит итоговая контрольная работа в 4 вариантах базового уровня сложности. Предлагаемые тесты можно использовать на любом этапе обучения как для работы в классе, так и в качестве домашнего задания.

Приведем пример итогового теста.

1) Какая фигура получается в сечении конуса плоскостью, проходящей через ось конуса?

2) Радиус основания цилиндра равен 5 см, а высота цилиндра равна 6 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее.

3) Лежит ли точка $A(5;-1;4)$ на сфере, заданной уравнением $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=4$? Почему?

4) Площадь осевого сечения цилиндра равна $12\sqrt{\pi}$ дм^2, а площадь основания равна 64 дм^2. Найдите высоту цилиндра.

5) Запишите формулу полной поверхности цилиндра.

Отметим, что выполнение предложенных тестов гарантирует выпускникам возможность успешного решения геометрических задач части 1 ЕГЭ по математике профильного уровня [5].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Федеральный государственный общеобразовательный стандарт основного общего образования (Стандарты второго поколения) – М. : Просвещение, 2011. – 48 с.

2. О концепции развития математического образования в Российской Федерации. Распоряжение Правительства России от 24 декабря 2013 года № 2506-р. Сайт Министерства образования и науки РФ. – Режим доступа: *http://минобрнауки.рф/документы/3894* (дата обращения 13.12.2015).

3. Геометрия. 10–11 классы : учеб. для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бузусов, С. Б. Кадомцев и др. – М. : Просвещение, 2009. – 255 с.

4. Иванов, А. П., Иванов, А. А. Тесты и контрольные работы по математике. – М. : изд-во МФТИ, 2008. – 108 с.

5. ЕГЭ. Математика, Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И. В. Ященко. – М. : Национальное образование, 2016. – 256 с.

УДК 51

Л. Р. Садрисламова (г. Ульяновск)

ПАКЕТ КОНТРОЛЬНО-ДИАГНОСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПО РАЗДЕЛУ «РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ»

Собранный пакет заданий предназначен для выявления уровня овладения учащимися знаниями, умениями и способами действий по теме «Показательные и логарифмические уравнения, неравенства и системы».

Ключевые слова*:* уравнения, неравенства, системы.

Подобранные задачи разделены на задачи для самостоятельной работы, зачетные и контрольные работы.

Самостоятельные работы рассчитаны как на отработку навыков, так и для их проверки. Предложено 8 самостоятельных работ, каждая из которых содержит четыре варианта.

Зачетные и контрольные работы предназначены для осуществления дифференцированного контроля знаний и умений. Предложено две зачетные и две контрольные работы в двух вариантах. Задания в зачетной работе взяты с избытком. На выполнение всей работы необходимо 60 мин, но ее можно использовать и на одном уроке, взяв некоторые задания как основные, а часть как дополнительные. Контрольные работы рассчитаны на весь урок. Задание первой контрольной работы состоит из шести уравнений, шести неравенств и двух систем. Вторая контрольная содержит четыре вычислительных примера, четыре уравнения, четыре неравенства, две системы уравнений и два примера. При написании этих работ проверяется обязательный уровень знаний и умений по данной теме. Для оценки контрольной работы предлагается следующий критерий. За каждый верно выполненный пример выставляется по 1 баллу из №1-№3. За задания №4-№5 выставляется по 2 балла. Оценки: «5» – 95%-100%; «4» – 80%-95%; «3» – от 60% до 75%; «2» – менее 60%.

Приведенный критерий дает ребенку право на ошибку.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. В 2 ч. – Ч. 2. Задачник (базовый уровень) / Мордкович А. Г. и др.

2. Алгебра и начала анализа. 11 класс. Контрольные работы (профильный уровень) / Глизбург В. И.

3. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Задачник (базовый и углубленный уровни) / Мордкович А. Г. и др.

4. Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и началам анализа для 10–11 классов / Ершова А. П., Голобородько В. В.

5. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Самостоятельные работы / Александрова Л. А.

УДК 51

С. А. Сотникова (г. Ульяновск)

СИСТЕМА УПРАЖНЕНИЙ ПО ТЕМЕ «РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ: ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ И С МОДУЛЕМ»

В данной работе подобраны задания по темам «Иррациональные уравнения и неравенства» и «Уравнения и неравенства с модулем». Все задания разбиты на блоки в соответствии с предпочтительным методом решения.

Ключевые слова: *иррациональные уравнения, иррациональные неравенства, уравнения с модулем, неравенства с модулем.*

Основная задача обучения математике в школе – обеспечить прочное и сознательное овладение учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену общества, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения образования.

За последние годы в процессе подготовки учащихся к ЕГЭ наметилась тенденция к усложнению заданий высокого уровня сложности, которые фигурируют в третьей части. Почти в каждом из вариантов есть задания с модулем и радикалами. В школьной программе мало времени отведено на решения подобных заданий. Поэтому целесообразно данные темы, предназначенные для учащихся 10 класса, изучить не только в рамках элективного курса, но и во внеклассной работе, в урочной деятельности. Это будет способствовать повышению математической подготовки учащихся, самоопределению в выборе профиля обучения, выявлению способностей ученика осваивать курс математики на повышенном уровне сложности.

Данная работа призвана помочь учителю в подборе заданий, необходимых для работы в классе, домашних заданий учащимся, самостоятельных работ и т. д. Достаточное количество однотипных заданий позволяет организовать различные виды работ.

Система заданий призвана помочь учащимся с любой степенью подготовленности в овладении способами деятельности, методами и приемами решения математических задач, повысить уровень математической культуры, способствует развитию познавательных интересов, мышления учащихся, умению оценить свой потенциал для дальнейшего обучения.

В данной работе подобраны задания по темам: Иррациональные уравнения и неравенства. Уравнения и неравенства с модулем. Все задания разбиты на блоки в соответствии с предпочтительным методом решения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шарыгин, И. В. Факультативный курс по математике. Решение задач. 10 кл. – М. : Просвещение, 1990.

2. Шарыгин, И. В. Факультативный курс по математике. Решение задач. 11 кл. – М. : Просвещение, 1991.

3. Егерев, В. К., Зайцев, В. В. и др. Сборник задач для поступающих в вузы : уч. пособие / под ред. Сканави М. И. – М. : Альянс-В, 2000.

4. Вавилов В. В. и др. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. – М. : Наука, 1987.

5. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / В. К. Егерев и др. ; под ред. М. И. Сканави. – М. : Высшая школа, 1998.

6. Сборник задач по алгебре для 10–11 классов : учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / М. И. Галицкий, А. М. Гольдман, Л. И. Звавич. – М. : Просвещение, 1994.

7. Бартенев, Ф. А. Нестандартные задачи по алгебре : пособие для учителей. – М. : Просвещение, 1976.

8. Канин, Е. С. Упражнения по началам математического анализа в 9–10 классах. – М. : Просвещение, 1986.

9. Олехин, С. Н., Потапов, М. К., Пасечник, П. И. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения : справочник. – М. : Факториал, 1997.

10. Симонов, А. Я. и др. Система тренировочных задач и упражнений по математике. – М. : Просвещение, 1994.

11. Мордкович, А. Г. Алгебра. Углубленное изучение. 9 класс : учебник. – М. : Мнемозина, 2009.

УДК 51

А. Ю. Тарасов (г. Ульяновск)

ПРОГРАММА СПЕЦКУРСА «ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ»

Предлагается вариативный курс для учащихся 9 класса. Данный курс способствует повышению интереса к предмету «математика», а как следствие ориентирует учащихся на выбор математического (естественно-научного) профиля в старших классах средней школы.

***Ключевые слова**: диофантовы уравнения, линейные уравнения.*

Рассматриваемый спецкурс входит в программу подготовки учащихся в соответствии с принципами личностного образования. Спецкурс «Диофантовы уравнения» входит в состав вариативных курсов, предназначенных ученикам 9 класса. В рамках данного спецкурса рассматриваются вопросы, связанные со сложностью решения алгебраических уравнений первой степени с целыми и натуральными числами. Изучение данных уравнений, составляющих основу многих математических моделей реальных физических процессов, позволяет проиллюстрировать многие интересные приложения математических методов. Предлагаемый спецкурс основывается на линейных уравнениях с двумя переменными и их системах. При рассмотрении линейного уравнения с двумя переменными в базовом школьном курсе изучаются только самые общие вопросы. Вопросы решения линейного уравнения с двумя переменными в целых (натуральных) числах и сама методика решения таких уравнений выходит за пределы школьного курса математики. В жизни много практических задач, математические модели которых базируются на линейных уравнениях с двумя переменными. Подобные задачи также часто встречаются и в вариантах различных математических олимпиад и конкурсов. Владение общими методами решения таких уравнений, которые в математике называются диофантовыми, значительно повышает кругозор учеников в сфере математики. Это позволяет школьникам повысить интерес к изучению математики, а как результат позволяет сориентировать их на выбор естественно-научного профиля в старших классах средней школы.

К важным задачам, которые решает данный спецкурс, можно отнести знакомство школьников с понятием диофантова уравнения и его историей появления в науке; возможность углубить знания истории математики в целом; проиллюстрировать важность математических методов при решении всевозможных задач науки и техники. А также научить школьников решать диофантовы уравнения первой степени с двумя переменными основными методами; научить решать текстовые задачи, в математические модели которых входят диофантовы уравнения первой степени с двумя переменными и (или) их системы.

К основным формам проведения занятий являются традиционные – лекционные, практические и семинарские занятия. Формы обучения носят как фронтальный, так и групповой, и индивидуальный характер. При изучении спецкурса используются также и современные информационно-компьютерные технологии. На курс отводится 12 часов (см. таблица 1):

Таблица 1

№ п/п	Тема занятия	Количество часов
1	Вводное занятие	1
2	Решение диофантовых уравнений способом перебора вариантов	1
3-4	Решение диофантовых уравнений с использованием алгоритма Евклида	2
5-6	Решение диофантовых уравнений с использованием цепной дроби	2
7	Метод рассеивания (измельчения) в решении диофантовых уравнений	1
8	Решение диофантовых уравнений различными способами. *Урок одной задачи (обобщающее занятие)*	1
9	Диофантовы уравнения и великие теоремы	1
10-11	Решение задач, с использованием различных диофантовых уравнений или их систем	2
12	Ученые-математики, внесшие свой вклад в развитие теории диофантовых уравнений	1
	Итого:	12

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Башмакова, И. Г. Диофант и диофантовы уравнения. – М. : Наука, 1972.

2. Фоминых, Ю. Ф. Диофантовы уравнения // Математика в школе, 1996. – №6.

3. Бабинская, И. Л. Задачи математических олимпиад. – М. : Просвещение, 1975.

4. Нудельман, А. Г. Формирование профессиональной ориентации учащихся в процессе изучения математики // Математика в школе, 1981. – №4. – С. 53–55.

5. Элективные ориентационные курсы и другие средства профильной ориентации в предпрофильнной подготовке школьников: уч.-метод. пос. – М. : АПК и ПРО, 2003.

УДК 51

Е. В. Терехина (г. Ульяновск)

ДИАГНОСТИЧЕСКАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО РАЗДЕЛУ «ТРИГОНОМЕТРИЯ»

Предлагается диагностическая контрольная работа по разделу «Тригонометрия» для обучающихся 10 классов общеобразовательных учреждений.

***Ключевые слова**: тригонометрия, диагностическая контрольная работа.*

Российское образование постоянно подвержено каким-то изменениям. Принципиальным отличием современных образовательных стандартов является усиление их ориентации на результаты образования. Причем, под результатом образования понимается не конкретная отметка в аттестате, а, прежде всего, умение применять полученные знания в жизни, умение организовать свою деятельность, ставить цели и продумывать пути их достижения. Большую помощь в этом может оказать своевременная диагностика знаний учащихся.

Поскольку все учителя и ученики заинтересованы в успешной сдаче ЕГЭ, в текст диагностических работ помещены задания из открытого банка ЕГЭ по математике, соответствующие изучаемой теме. Это позволяет проводить своевременную коррекцию умений и навыков учащихся, отслеживать их уровень подготовленности.

Основной целью составления диагностической работы является выявление проблемных зон в обучении. Назначение диагностической работы – оценить уровень овладения знаниями, умениями и навыками по разделу «Тригонометрия» математики обучающихся 10 классов общеобразовательных учреждений на данный период в системе подготовки к ЕГЭ, обучающихся по учебникам А. Г. Мордковича.

Результаты работы могут быть использованы для выявления пробелов в знаниях и умениях обучающихся и планирования дальнейшей работы для ликвидации выявленных пробелов. Работа носит диагностический характер, анализ ее результатов сможет оказать помощь учителю в организации повторения при подготовке учащихся к итоговой аттестации.

В соответствии с Кодификатором элементов содержания для проведения единого государственного экзамена по математике данная диагностическая работа проверяет следующие элементы содержания:

Код раздела	Код контроли-руемого элемента	Элементы содержания, проверяемые заданиями экзаменационной работы
1		**Алгебра**
1.2		***Основы тригонометрии***
	1.2.1	Синус, косинус, тангенс, котангенс
	1.2.2	Радианная мера угла
	1.2.3	Синус, косинус, тангенс и котангенс числа
	1.2.4	Основные тригонометрические тождества
	1.2.5	Формулы приведения
	1.2.6	Синус, косинус и тангенс суммы и разности
	1.2.7	Синус и косинус двойного угла
1.4		***Преобразования выражений***
	1.4.1	Преобразования выражений, включающих арифметические операции
	1.4.2	Преобразования выражений, включающих операцию возведения в степень
	1.4.4	Преобразования тригонометрических выражений
	1.4.6	Модуль (абсолютная величина) числа
2		***Уравнения и неравенства***
	2.1.4	Тригонометрические уравнения
	2.1.7	Равносильность уравнений, систем уравнений
3		***Функции***
	3.1.2	Множество значений функции
3.2		***Элементарное исследование функций***
	3.2.3	Периодичность функции
	3.2.4	Ограниченность функции
	3.2.6	Наибольшее и наименьшее значения функции

В соответствии с Кодификатором требований к уровню подготовки обучающихся для проведения единого государственного экзамена по математике данная диагностическая работа проверяет следующие умения:

Код раздела	Код контролируемого элемента	Требования (умения), проверяемые заданиями экзаменационной работы
2.1	2.1	Уметь решать уравнения и неравенства
1.1-1.3	1.1-1.3	Уметь выполнять вычисления и
3	3.2, 3.3	Уметь выполнять действия с функциями

Структура работы отвечает цели построения системы дифференцированного обучения в современной школе. Дифференциация обучения направлена на решение двух задач: формирования у всех учащихся математической подготовки, составляющей функциональную основу образования; одновременного создания условий, способствующих получению частью обучающихся подготовки повышенного уровня.

Работа состоит из двух частей.

Часть 1 проверяет знания, умения и навыки по разделу «Тригонометрия» на базовом уровне. Эта часть содержит 7 заданий.

При выполнении заданий первой части обучающиеся должны продемонстрировать определенную системность знаний и широту представлений. В ней проверяется не только владение базовыми алгоритмами, но и знание и понимание важных элементов содержания (понятий, их свойств, приемов решения задач и пр.)

Часть 2 проверяет знания, умения и навыки на повышенном и высоком уровнях. При решении этих задач обучающимся потребуется применять свои знания в измененной ситуации, создавать математические модели, выбирать способ решения и интерпретировать результат. Основное ее назначение – дифференцировать хорошо успевающих школьников по уровням подготовки, выявить наиболее подготовленную часть учеников. Эта часть содержит 4 задания разного уровня сложности, требующих развернутого ответа (с записью решения). Задания во второй части расположены по нарастанию сложности – от относительно простых до достаточно сложных, предполагающих свободное владение материалом и высокий уровень математического развития. При решении задач второй части обучающимся предстоит проанализировать ситуацию, самостоятельно разработать ее математическую модель и способ решения, привести обоснования, доказательства выполняемых действий и математически грамотно записать решение.

Результаты выполнения заданий 1 части позволяют судить о достижении учащимся уровня обязательной подготовки по данной теме, наличие которой принято оценивать с положительной отметкой «3».

Результаты выполнения заданий 2 части позволяют осуществить последующую, более тонкую дифференциацию учащихся по уровню математической подготовки и на этой основе выставить более высокую отметку.

№ п/п	Обозначение задания	Проверяемые умения	Коды проверяемых элементов содержания и элементы содержания	Уровень сложности	Максимальный балл	Время выполнения
1	B1	Владеть понятиями синуса, косинуса, тангенса, котангенса числового аргумента; применять основное тригонометрическое тождество.	1.2.3 Понятия синуса, косинуса, тангенса, котангенса числового аргумента; 1.2.4 Основное тригонометрическое тождество: упрощать выражение; находить значения выражения.	Б	1	3
2	B2	Уметь решать простейшие тригонометрические уравнения.	2.1.4 Решение тригонометрических уравнений. Общая формула решения уравнений cos $x= a$, sin $x=a$, tg $x=a$.	Б	1	5
3	B3	Уметь находить множество значений тригонометрической функции.	3.1.2 Множество значений тригонометрической функции.	Б	1	3
4	B4	Уметь выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений, используя соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента.	1.4.4 Зависимость между тангенсом и косинусом одного и того же аргумента. Зависимость между котангенсом и синусом одного и того же аргумента. Другие комбинации соотношений между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента: упрощать выражение; находить значение выражения.	Б	1	4
5	B5	Уметь решать тригонометрические уравнения.	2.1.4 Использование нескольких приемов при решении тригонометрических уравнений.	Б	1	4
6	B6	Уметь находить значение тригонометрических выражений.	1.4.4 Тождественные преобразования тригонометрических выражений: упрощать выражение, находить значение выражения.	Б	1	6
7	B7	Уметь находить период функции.	3.3.5 Периодичность функции: синуса, косинуса, тангенса и котангенса.	Б	1	5

№ п/п	Обозначение задания	Проверяемые умения	Коды проверяемых элементов содержания и элементы содержания	Уровень сложности	Максимальный балл	Время выполнения
8	С1	Уметь решать комбинированные уравнения.	2.1.4 Решение тригонометрических уравнений: решать, решать и отбирать корни по заданному условию.	П	2	10
9	С2	Уметь решать тригонометрические уравнения.	2.1.4 Использование нескольких приемов при решении тригонометрических уравнений.	П	3	15
10	С3	Уметь находить множество значений сложной функции.	3.3.5 Множество значений тригонометрической функции.	П	3	15
11	С4	Уметь решать уравнения с параметром	2.1 Уравнения с параметрами: решать, решать и отбирать корни по заданному условию.	В	4	20

На проведение работы отводится 90 минут (2 урока). Учащимся в начале работы выдаются тексты первой и второй частей, которые выполняются последовательно. За выполнение каждого задания обучающиеся получают определенное число баллов.

Часть 1	Часть 2			Сумма
Задания В1-В7	Задания С1-С4			
	С1	С2	С3-С4	
1	2	3	4	20

Таблица перевода тестовых баллов в оценку

Тестовый балл	Школьная оценка
0-5	2
6-9	3
10-12	4
13-20	5

Критерий оценивания задания С1

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ.	2
Обоснованно получен верный ответ, но не сделан отбор корней ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Критерий оценивания задания С2

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Обоснованно получен верный ответ, но не сделан отбор корней.	2
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

Критерий оценивания задания С3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	3
Произведены преобразования, верная последовательность всех шагов решения, неверно сделан вывод.	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

Критерий оценивания задания С4

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки.	3
Получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно.	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Учащимся разрешается использовать таблицу квадратов двузначных чисел. Калькуляторы не используются.

Работа состоит из 2 частей. Часть 1 включает задания базового уровня сложности. Часть 2 содержит задания повышенного и высокого уровней сложности. На выполнение работы отводится 90 мин.

При выполнении первой части нужно указывать только ответы. Решение заданий с полным ответом (задания части 2) и ответы к ним записываются листе. Текст задания переписывать не нужно, но не забудьте указать номер выполняемого задания.

Правильный ответ в зависимости от сложности каждого задания оценивается одним или несколькими баллами. Баллы, полученные за все выполненные задания, суммируются.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Математика. Повторение курса в формате ЕГЭ. Рабочая программа. 11-й класс : учебно-методическое пособие / под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. – Изд. 4-е. – Ростов-на- Дону : Легион, 2013. – 192 с.
2. ЕГЭ. Практикум по математике: Решение уравнений и неравенств. Преобразование алгебраических выражений / Ю. В. Садовничий. – М. : Экзамен, 2012. – 127 с.
3. ЕГЭ. Практикум по математике: подготовка к выполнению части С / И. Н. Сергеев, В. С. Панферов. – М. : Издательство «Экзамен», 2014. – 126 с.
4. Математика. ЕГЭ-2015. Тренажер по тригонометрии: задание С1 : учебно-методическое пособие / под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. – Изд.4-е. – Ростов-на-Дону : Легион, 2014. – 80 с.
5. Математика. 10 класс : диагностические работы для оценки освоения содержания программы / А. М. Борисова. – Волгоград : Учитель, 2015. – 68 с.

УДК 51

Ф. А. Хакимова (г. Ульяновск)

ПАКЕТ КОНТРОЛЬНО-ДИАГНОСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПО РАЗДЕЛУ «ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ»

Предлагается пакет контрольно-диагностических материалов по разделу «Прямые и плоскости в пространстве».

***Ключевые слова**: математическое образование школьников, геометрия, прямая и плоскость в пространстве, контрольно-диагностические материалы.*

Геометрия – важнейшая составляющая математического образования школьников. Целью изучения геометрии в средней школе согласно ФГОС [1] является формирование у школьников умения «распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры», умения «применять изученные свойства геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием». Изучение геометрии способствует развитию пространственного воображения, логического мышления, способствует формированию у школьника понимания роли аксиоматики в математике.

Изучение дисциплины ведется на основе программы министерства образования РФ по геометрии; используется учебник [2]. В изучаемый раздел включены две темы: «Параллельность прямых и плоскостей» и «Перпендикулярность прямых и плоскостей». В первой теме школьникам даются систематические сведения о параллельности прямых и плоскостей в пространстве, во второй – систематические сведения о перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве, вводится понятие углов между прямыми и плоскостями, между плоскостями. Учащиеся с помощью учителя знакомятся с приемами изображения пространственных фигур и тел на плоскости, обобщают и систематизируют свои знания из планиметрии о перпендикулярности прямых, о перпендикуляре и наклонных. При решении задач по изучаемой теме учителю следует приучать школьников постоянно опираться на известные факты и теоремы из планиметрии; приучать школьников заменять стереометрический чертеж последовательностью планиметрических чертежей; это будет способствовать выработке умения решать не только простые, но и сложные стереометрические задачи.

Предлагаемый пакет контрольно-диагностических материалов содержит поурочный дидактический материал, состоящий из:

– входного теста;
– набора тренировочных задач, в который включены 1–2 экзаменационные задачи;
– итогового теста;

и варианты контрольных работ по каждой теме.

Входной тест служит для организации самопроверки учащихся по изученному на уроке материалу. Вот типичные вопросы входного теста. «Заполните пропуски во фразе:

1. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она ______________.
2. Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они ______________.

и так далее…»

Набор тренировочных задач содержит 4–6 задач разного уровня сложности. Вот задача среднего уровня сложности. «В прямоугольном параллелепипеде ребра основания равны 12 см и 5 см. Найдите высоту параллелепипеда, если его диагональ наклонена к плоскости основания под углом 45^0.»

Итоговый тест содержит 3–4 вопроса разного уровня сложности и служит для проверки умения школьников использовать изученную теорию для обоснования практически значимых геометрических выводов. Вот пример такого вопроса. «Если одна из скрещивающихся прямых перпендикулярна плоскости, то будет ли другая прямая перпендикулярна этой же плоскости?»

Контрольная работа проводится с целью осуществления тематического контроля знаний учащихся, приобретения практически значимых умений, развития пространственного воображения. Контрольная работа содержит три уровня сложности:

– уровень А – уровень минимальной подготовки;
– уровень В – уровень обязательной подготовки;
– уровень С – уровень возможной подготовки.

Выполнение уровней А и В контрольной работы гарантирует выпускникам возможность решения геометрических задач части 1 ЕГЭ по математике профильного уровня; уровень С дает возможность решить геометрическую задачу части 2 ЕГЭ.

Вариант контрольной работы по теме:
«Перпендикулярность прямых и плоскостей».

Уровень А.

1. Если одна из двух параллельных прямых параллельна некоторой плоскости, то будет ли другая прямая параллельна этой же плоскости? Ответ обосновать.

2. Могут ли быть перпендикулярными к одной плоскости две стороны трапеции? Ответ обосновать.

3. Что называется расстоянием от точки до плоскости?

4. Сколько перпендикуляров можно провести из одной точки к плоскости? Ответ обосновать.

5. Может ли перпендикуляр быть длиннее наклонной, проведенной из этой же точки? Ответ обосновать.

6. Может ли угол между прямой и плоскостью быть равным 120^0? Ответ обосновать.

Уровень В.

7. Какой длины нужно взять перекладину, чтобы ее можно было положить концами на две вертикальные опоры высотой 8 м и 8 м, поставленные на расстоянии 3 м друг от друга?

8. Из одной точки проведены две наклонные к плоскости, одна из которых на 6 см длиннее другой. Проекции наклонных равны 17 см и 7 см. Найдите длины наклонных.

Уровень С.

9. Расстояние от точки K до каждой из вершин прямоугольника $ABCD$ равно 5 см. Зная, что площадь прямоугольника равна 16 см^2, а угол между диагоналями равен 30^0, найдите расстояние от точки K до плоскости ABC.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

7. Федеральный государственный общеобразовательный стандарт основного общего образования (Стандарты второго поколения) – М. : Просвещение, 2011. – 48 с.
8. Геометрия. 10–11 классы : учеб. для общеобразовательных учреждений : базовый и профильн. Уровни / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бузусов, С. Б. Кадомцев и др.] – М. : Просвещение, 2009. – 255 с.

УДК 51

М. А. Шлютова (г. Ульяновск)

ПРОГРАММА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА «ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ»

Разработана программа для учащихся 10-11 класса. Программа данного курса в сочетании с программой обязательного курса математики способствует пониманию учащихся приложений математического аппарата при моделировании прикладных задач в различных сферах жизнедеятельности.

***Ключевые слова**: математическое моделирование.*

Предлагаемый элективный курс предназначен для учеников 10–11 классов, обучающихся в общеобразовательных классах. Программа включает в себя некоторые разделы курса 10–11 классов и ряд дополнительных вопросов, непосредственно примыкающих к курсу «Математическое моделирование» и углубляющих его по основным темам. Цель курса – развить творческие способности учащихся, помогающие в овладении аппарата математического моделирования. Задачи курса – совершенствовать технику решения сложных математических задач, составлять математические модели реальных ситуаций.

Программа элективного курса рассчитана на 56 часов, 28 часов в 10-м классе и 28 часов в 11 классе (см. таблица 1).

Таблица 1

№ занятия	Содержание учебного материала	Кол-во часов
10 класс		**28**
1. Тождественные преобразования.		**11**
1-3	Преобразования числовых и алгебраических выражений.	3
4-7	Решение задач на нахождение процентов.	4
8-11	Решение задач с использованием формул прогрессии.	4
2. Уравнения и системы уравнений.		**17**
12-17	Решение уравнений с параметром.	6
18-23	Решение систем уравнений с параметром.	6
24-28	Решение уравнений и систем уравнений с параметром геометрическим методом.	5

11 класс		**28**
3. Производная, первообразная, интеграл и их применение в математическом моделировании.		**4**
1-2	Применение второй производной, ее механического смысла к решению задач, к исследованию функций.	2
3-4	Вычисление площадей с помощью интеграла; использование интеграла и производной в физических и геометрических задачах.	2
4. Решение тестовых задач.		**14**
5-7	Решение задач на проценты.	3
8-10	Решение задач на смеси и сплавы.	3
11-12	Решение задач на работу.	2
13-15	Решение задач на движение.	3
16-18	Решение задач экономического характера.	3
5. Решение геометрических задач.		**10**
19-23	Решение планиметрических задач.	5
24-28	Решение задач на комбинацию тел вращения и многогранников.	5

Этот курс поможет учащимся 10–11 классов систематизировать свои математические знания, поможет с разных точек зрения взглянуть на другие, уже известные темы, расширить круг математических вопросов, не изучаемых в школьном курсе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шарыгин, И. Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: учебное пособие для 10 класса средней школы. – М. : Просвещение, 2005.

2. Шарыгин, И. Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач : учебное пособие для 11 класса средней школы. – М. : Просвещение, 2005.

3. Сканави, М. И. Полный сборник решений задач для поступающих в вузы. – М. : Альянс-В, 2009.

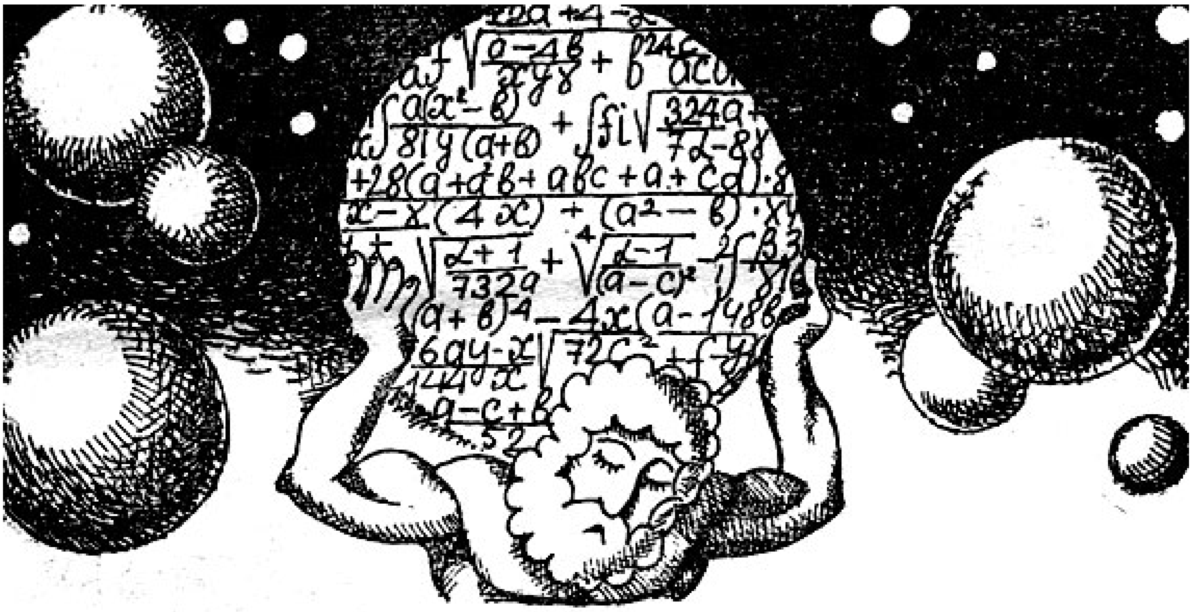
4. Сканави М. И. Сборник задач по математике. – М.: Высшая школа, 2013.

5. Пукас, Ю. О. Решаем задачи С6 по математике. Советы практика. – М. : ИЛЕКСА, 2014.

6. Карасев, В. А., Левшина, Г. Д. Решение задач с параметрами с помощью графиков функций. – М. : ИЛЕКСА, 2012.

Секция 4

СТУДЕНЧЕСКИЕ НАУЧНЫЕ РАБОТЫ



УДК 519.622

В. Ф. Алиева, Ю. Е. Кувайскова (г. Ульяновск)

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Проведено исследование эффективности применения численных методов для решения задачи Коши. Разработаны алгоритмы и программа для решения обыкновенных дифференциальных уравнений многошаговыми методами Адамса и методом Рунге-Кутты.

Ключевые слова: *задача Коши, многошаговые методы Адамса, метод Рунге-Кутты.*

Инженерные и научные задачи часто связаны с решением дифференциальных уравнений, так как с помощью последних описываются многие физические явления и многие технические процессы [1]. К сожалению, задачи, описываемые дифференциальными уравнениями, для многих практически важных случаев весьма сложны, и получить их точное решение оказывается затруднительно или невозможно. Эти трудности могут быть связаны с видом уравнения, поэтому получить точное решение дифференциального уравнения удается лишь в отдельных случаях.

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений предлагается использование численных методов. В работе проведено исследование эффективности численного решения задачи Коши методами Адамса [2–4] и Рунге-Кутты [2–4]. Применение численных методов требует расчетов на электронных вычислительных машинах. Поэтому в работе для реализации численного решения задачи Коши разработана программа на языке C++ в среде программирования Microsoft Visual Studio.

Будем рассматривать задачу Коши в виде:

$$\begin{aligned} &y'(x) = f(x, y),\ \ x \in [x_0, b], \\ &y(x_0) = y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где x_0 и y_0 – заданные числа.

Метод Адамса – конечноразностный многошаговый метод численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Идея многошаговых методов Адамса основана на том, что для вычисления очередного значения искомого решения используется не одно, а несколько значений, которые уже вычислены в предыдущих точках.

Из задачи Коши (1) следует, что:

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)dx. \quad (2)$$

где $p(x)$ – полином, аппроксимирующий $f(x, y(x))$.

Пусть $f_i = f_i(x_i, y_i)$, где y_i – приближенное решение задачи (1), и в качестве $p(x)$ возьмем полином, проходящий через l ранее найденных точек (x_j, f_j) $(j = (i-l+1), (i-l+2), (i-l+3), ..., i)$, включая текущую точку (x_j, f_j).

Если l = 1, то имеем явный метод Эйлера [2-3]

$$\begin{aligned} &y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, ..., n-1, \\ &y_i = y_0, \end{aligned} \quad (3)$$

если l = 2, то $p(x)$ – линейная функция, проходящая через две точки (x_{i-1}, f_{i-1}) и (x_i, f_i):

$$\begin{aligned} &p(x) = \frac{(x_i - x)}{h} \cdot f_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})}{h} \cdot f_i, \\ &p(x_{i-1}) = f_{i-1},\ p(x_i) = f_i. \end{aligned} \quad (4)$$

После интегрирования полинома получаем двухшаговый метод Адамса II порядка (метод Адамса-Башфорта) [3–4]:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (3f_i - f_{i-1}). \quad (5)$$

Если l = 3, то $p(x)$ – парабола, проходящая через точки (x_{i-2}, f_{i-2}), (x_{i-1}, f_{i-1}) и (x_i, f_i), а соответствующий трехшаговый метод Адамса III порядка имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} \cdot (23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}). \quad (6)$$

Формулу (6) легко получить, если перейти к новой системе координат, в которой координата x точки x_{i-1} равна нулю. Тогда:

$$p(x) = ax^2 + bx + c,$$
$$p(-h) = ah^2 - bh + c = f_{i-2},$$
$$p(0) = c = f_{i-1},$$
$$p(h) = ah^2 + bh + c = f_i.$$

Отсюда находим:

$$p(x) = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{2h^2} x^2 + \frac{f_i - f_{i-2}}{2h} x + f_{i-1}. \quad (7)$$

Интегрируя выражение (7) на отрезке [h, 2h], получим формулу (6).

Если $l = 4$, то интерполяционный многочлен является кубическим и получаем формулу Адамса IV порядка точности:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} \cdot (55 f_i - 59 f_{i-1} + 37 f_{i-2} - 9 f_{i-3}). \qquad (8)$$

Многошаговые методы требуют знания значений в первых l точках: $y_0, y_1, ..., y_{l-1}$. Выход из положения состоит в применении одношагового метода того же порядка точности до тех пор, пока не будет получено достаточное количество значений для проведения расчетов с помощью многошагового метода.

Методы Рунге-Кутты – важное семейство численных алгоритмов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем.

Метод Рунге-Кутты II порядка точности имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (K_1 + K_2),\, i = 0,1,...,n-1, \qquad (9)$$

где $K_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$, $K_2 = h \cdot f(x_i + h, y_i + K_1)$.

Метод Рунге-Кутты IV порядка точности определяется формулами:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} \cdot (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),\, i = 0,1,...,n-1, \qquad (10)$$

где $K_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$,

$K_2 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + K_1/2)$,

$K_3 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + K_2/2)$,

$K_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + K_3)$.

Точность расчетов существенным образом зависит от величины шага интегрирования h, поэтому важно правильно выбрать его начальное значение h_0 [5].

Выбор начального шага h_0 проведем на примере метода Рунге-Кутты IV порядка. Пусть ε – заданная точность. Поскольку метод Рунге-Кутты имеет точность четвертого порядка относительно шага h, должно выполняться условие $h^4 \approx \varepsilon$. Кроме того, отрезок $[x_0, b]$ должен быть разбит на четное число частей. Поэтому начальный шаг h_0 должен быть определен из двух условий:

$$h_0 \approx \sqrt[4]{\varepsilon}, \ \frac{b - x_0}{h_0} \text{ – четно.} \qquad (11)$$

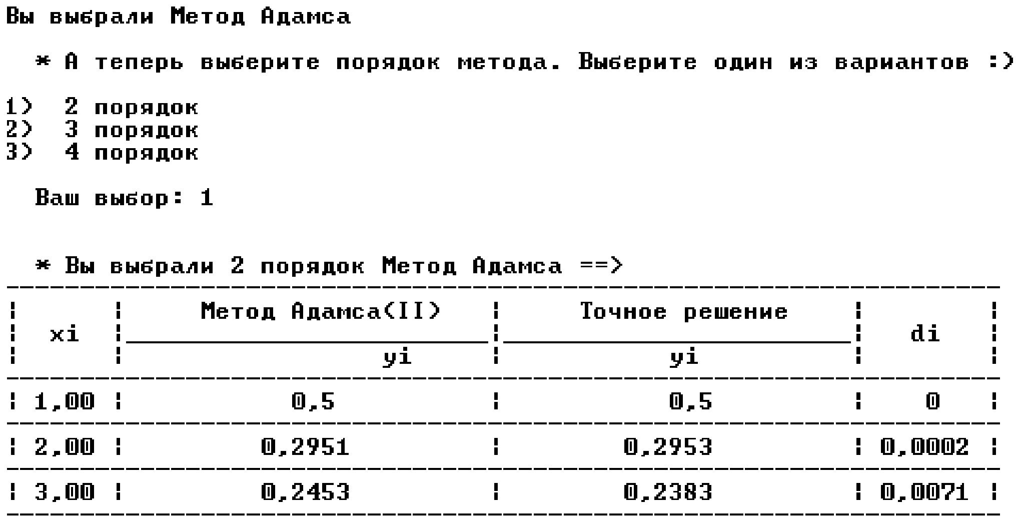
Наибольший шаг h_0, удовлетворяющий условиям (11), является грубым приближением начального шага. Для его уточнения поступаем следующим образом. Находим решение задачи Коши в точке $x_0 + 2h_0$ по формулам Рунге-Кутты с шагами h_0 и $2h_0$, получаем два значения y_2 и $\tilde{y}_2$. Путем увеличения или уменьшения шага в два раза (не обязательно однократного) подберем наибольшее значение h_0, при котором будет выполнено неравенство $\frac{1}{15}\left|y_2 - \tilde{y}_2\right| < \varepsilon$. Это и будет величина шага *h*, с которым решается задача Коши методом Рунге-Кутты IV порядка.

Рассмотренные методы решения задачи Коши реализованы на языке C++ в среде программирования Microsoft Visual Studio.

Для сравнения эффективности методов решена задача Коши, имеющая вид:

$$\begin{aligned} &x \cdot y' + y = 2 \cdot y^2 \cdot \ln(x),\ x \in [1;3], \\ &y(1) = 0{,}5. \end{aligned} \tag{12}$$

Перед выполнением численных расчетов программа запрашивает введение требуемой точности вычислений, затем программа рассчитывает шаг интегрирования и число разбиения отрезка. Потом пользователю предоставляется возможность выбора численного метода решения задачи Коши: метод Рунге-Кутты IV порядка, методы Адамса II, III и IV порядков. В результате вычислений на форме программы появляются заполненные таблицы с расчетами (Рис. 1).


Вы выбрали Метод Адамса

* А теперь выберите порядок метода. Выберите один из вариантов :)

1) 2 порядок
2) 3 порядок
3) 4 порядок

Ваш выбор: 1

* Вы выбрали 2 порядок Метод Адамса ==>

xi	Метод Адамса(II) yi	Точное решение yi	di
1,00	0,5	0,5	0
2,00	0,2951	0,2953	0,0002
3,00	0,2453	0,2383	0,0071

Рисунок 1 – Результаты решения задачи Коши методом Адамса II порядка

Для сравнения точности численных расчетов была решена задача Коши, соответствующее точное решение имеет вид:

$$y(x) = \frac{1}{2\ln(x) + 2}. \tag{13}$$

Погрешность численных расчетов определялась как максимальное значение модуля отклонений приближенного и точного решений (13) в узловых точках:

$$d_i = \max_i \left|y_i - y(x_i)\right|, \tag{14}$$

где y_i – приближенное решение задачи Коши в точке x_i, $y(x_i)$ – точное решение задачи Коши в точке x_i.

В таблице 1 представлены результаты сравнения решения задачи Коши рассмотренными методами с шагом $h = 0{,}25$.

Таблица 1

Результаты численных расчетов

Численный метод	Погрешность вычислений $d_i = \max\limits_i \lvert y_i - y(x_i) \rvert$
Рунге-Кутты (IV)	0,0001
Адамса (II)	0,0530
Адамса (III)	0,0084
Адамса (IV)	0,0158

Сравним схемы четвертого порядка точности в методах Рунге-Кутты и Адамса с точки зрения организации вычислительного процесса. Чтобы сделать один шаг по методу Рунге-Кутты, необходимо вычислить функцию четыре раза, а в методе Адамса только один раз, так как в трех предшествующих точках функция была уже вычислена на предыдущих шагах, и вычислять ее снова нет необходимости. В этом заключается главное достоинство метода Адамса.

Главный недостаток метода Адамса заключается в том, что при его применении первые шаги приходится делать с помощью другого метода, например, с помощью метода Рунге-Кутты или разложения по формуле Тейлора с достаточно большим числом членов, и только после этого можно перейти на расчет по схеме Адамса. Если при решении уравнения требуется менять шаг, то в методе Рунге-Кутты это не составит труда, поскольку каждый шаг делается независимо от предыдущего, а в методе Адамса нужно после каждой смены шага заново проводить расчет первых точек с помощью другого метода. Как видно из таблицы 1 найденное решение задачи Коши (12) методом Рунге-Кутты получилось более точное. Поэтому сегодня при компьютерных расчетах предпочтение часто отдается более удобному методу Рунге-Кутты.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шуп, Т. Е. Прикладные численные методы в физике и технике. – М. : Высш. шк., 1990. – 255с.

2. Бахвалов, Н. С., Жидков, Н. П., Кобельков, Г. М. Численные методы. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 632 с.

3. Вержбицкий, В. М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. – М. : Высшая школа, 2001. – 382 с.

4. Самарский, А. А., Гулин, А. В. Численные методы. – М. : Наука, 1989. – 432 с.

5. Кувайскова, Ю. Е. Численные методы. Лабораторный практикум : учебное пособие. – Ульяновск : УлГТУ, 2014. – 113 с.

УДК 537.8

Г. А. Анкилов, А. В. Анкилов, Р. М. Мефтахутдинов (г. Ульяновск)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УДЕЛЬНОГО ЗАРЯДА ЭЛЕКТРОНА В СИСТЕМЕ MATHCAD

В системе Mathcad автоматизировано экспериментальное определение удельного заряда электрона тремя разработанными методами: автоматическим, полуавтоматическим и методом аппроксимации.

Ключевые слова: *удельный заряд электрона, аппроксимация эксперимента.*

1. Введение

Удельным зарядом частицы называют ее заряд, приходящийся на единицу массы. Для электрона удельный заряд равен *e/m*, где *e* – заряд электрона, *m* – его масса. В данной работе для определения удельного заряда электрона используется электромагнитный аналог магнетрона.

Рассмотрим движение заряженной частицы в электрическом и магнитном полях. Известно, что на частицу, обладающую зарядом q и движущуюся со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, действует сила Лоренца

$$\vec{F}_л = q \cdot [\vec{v}, \vec{B}]. \qquad (1)$$

Сила Лоренца направлена перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы $\vec{v}$ и $\vec{B}$. Если $q > 0$, то направление $\vec{F}_л$ совпадает с направлением векторного произведения $[\vec{v}, \vec{B}]$. Если $q < 0$, то $\vec{F}_л$ и $[\vec{v}, \vec{B}]$ противоположно направлены. Когда заряженная частица движется одновременно и в электрическом, и в магнитном полях, сила, действующая на нее, определяется как

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}], \qquad (2)$$

где $\vec{E}$ – напряженность электрического поля.

В настоящей работе электронным аналогом магнетрона является вакуумный диод, помещенный в однородное магнитное поле, перпендикулярное электрическому полю между катодом и анодом. Диод имеет цилиндрические коаксиальные катод и анод. Электрическое поле такой системы электродов неоднородно. Его эквипотенциальные поверхности будут представлять собой коаксиальные цилиндрические поверхности. Разность потенциалов между катодом и эквипотенциальной поверхностью, отстоящей на расстояние r от оси симметрии диода, равна

$$U(r) = \frac{\ln r/r_к}{\ln r_a/r_к} U_a, \tag{3}$$

где $r_к$ и r_a – радиусы анода и катода; U_a – разность потенциалов между катодом и анодом.

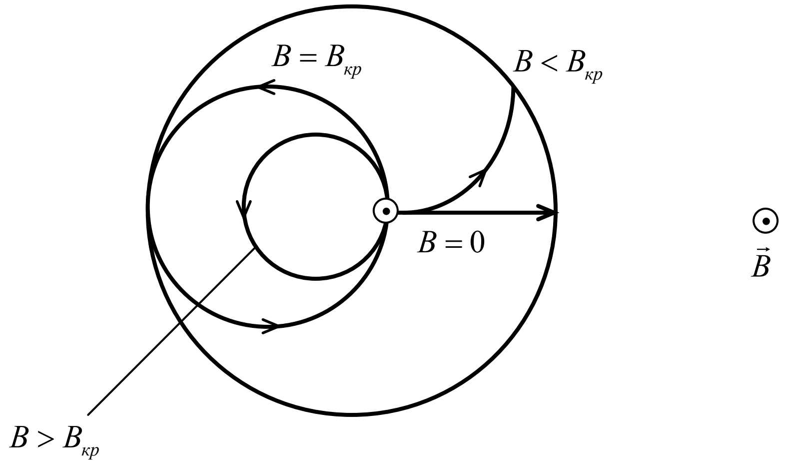


Рисунок 1 – Примерные траектории движения электрона в межэлектродном пространстве при различных значениях магнитной индукции

В отсутствии магнитного поля электрон ускорялся бы электрическим полем и двигался к аноду вдоль радиуса диода. «Включение» магнитного поля приводит к искривлению траектории под действием силы Лоренца, направленной перпендикулярно вектору скорости электрона (рис. 1). При некотором критическом значении магнитной индукции $B_{кр}$ электрон будет двигаться по касательной к поверхности анода. В случае $B \geq B_{кр}$ электрон не попадает на анод и возвращается к катоду. Точный расчет траектории электрона весьма сложен, что обусловлено неоднородностью электрического поля между анодом и катодом. Вблизи катода напряженность электрического поля наибольшая, и если $r_к << r_a$, то электроны, покинувшие катод, будут ускоряться главным образом в прикатодной области. При дальнейшем движении величина их скорости будет практически неизменна. В случае постоянства магнитной индукции $\vec{B}$ сила Лоренца, действующая на электроны, не изменяется по величине и направлена перпендикулярно вектору скорости $\vec{v}$. Таким образом, приближенно можно считать, что подавляющую часть пути между катодом и анодом электроны пройдут с постоянной по модулю скоростью по траектории близкой к окружности некоторого радиуса R. Тогда из второго закона Ньютона, записанного для электрона в проекции на направление центростремительного ускорения, имеем

$$eBv = \frac{mv^2}{R}, \tag{4}$$

где e и m – заряд и масса электрона соответственно.

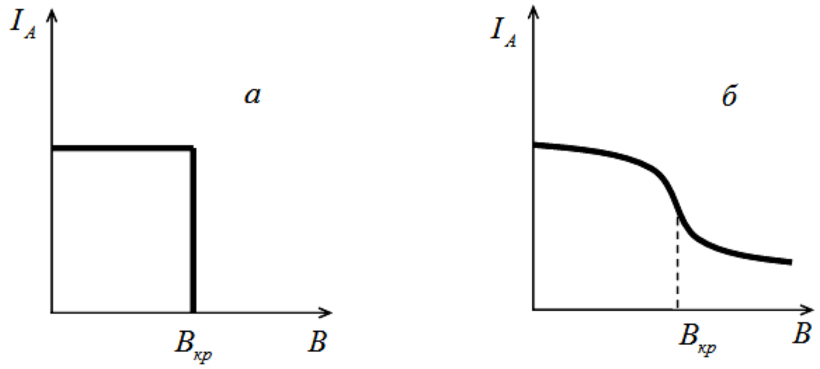


Рисунок 2 – Вид идеальной (а) и реальной (б) зависимостей $I_a(B)$

При $B<B_{кр}$ электрон обязательно попадает на анод и примет участие в образовании анодного тока I_a. При $B > B_{кр}$ электрон не может попасть на анод, т. е. хотя и движется в межэлектродном пространстве, но не участвует в образовании анодного тока. Если бы в электронном пучке все электроны имели одинаковую скорость, то при заданном анодном напряжении и $B = B_{кр}$ анодный ток скачком обращался бы в нуль (рис. 2а). Этого нет в реальном случае, так как электроны не могут иметь одинаковые скорости уже в силу различных начальных условий (термоэлектроны вылетают из нити накала с разными скоростями, подчиняющимися распределению Максвелла). Поэтому реальная зависимость $I_a(B)$ имеет вид плавной спадающей кривой (рис. 2б).

Электрон, покинувший катод, разгоняется вблизи него, приобретая кинетическую энергию, равную работе кулоновской силы, действующей на электрон со стороны электрического поля:

$$\frac{mv^2}{2} = eU_a. \tag{5}$$

Решая совместно (4) и (5) с учетом $B = B_{кр}$, получим

$$\frac{e}{m} = \frac{2U_a}{R^2 B_{кр}^2}. \tag{6}$$

Так как $R = (r_a - r_к)/2 \approx r_a/2$, то

$$\frac{e}{m} = \frac{8U_a}{r_a^2 B_{кр}^2}. \tag{7}$$

Знaя заряд электрона e, из (7) нетрудно определить массу электрона

$$m = \frac{e r_a^2 B_{кр}^2}{8U_a}. \tag{8}$$

Таким образом, соотношения (7) и (8) будут определять удельный заряд и массу электрона, если при заданной величине U_a найдено значение магнитной индукции $B_{кр}$, при котором электроны перестают попадать на анод, а ток в цепи анода стремится к нулю.

2. Описание эксперимента

В лабораторной установке используется не реальный магнетрон, а его модель, состоящая из вакуумного диода с цилиндрическими электродами и соленоида, создающего осевое магнитное поле. Диод помещен внутри соленоида так, что оси катода, анода и соленоида совпадают между собой. В установке предусмотрена возможность изменения анодного напряжения. Анодный ток фиксируется микроамперметром. Блок питания соленоида позволяет плавно изменять ток I_c, протекаемый по соленоиду и определяемый амперметром. Индукция магнитного поля соленоида пропорциональна току через соленоид:

$$B = kI_c, \tag{9}$$

где k зависит от характеристик соленоида, его значение указано на панели лабораторного стенда. Тогда расчетным соотношением для определения e/m будет выражение

$$\frac{e}{m} = \frac{8U_a}{r_a^2 k^2 I_{c,кр}^2}. \tag{10}$$

Радиус анода r_a указан на панели стенда.

Снимаем зависимости анодного тока от тока через соленоид $I_a = f(I_c)$ для двух значений анодного напряжения U_a. Результаты измерений представлены в таблице 1.

Таблица 1. Зависимость анодного тока от тока через соленоид

U_A=5В												
I_c,А	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
I_A,мА	91,0	86,0	80,0	72,0	50,0	25,0	17,0	14,0	12,0	10,3	8,5	7,8
U_A=6В												
I_c,А	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
I_A,мА	127,0	120,0	118,0	110,0	74,0	45,0	30,0	21,0	18,0	16,0	14,0	12,0
U_A=7В												
I_c,А	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
I_A,мА	158,0	156,0	151,0	132,0	98,0	66,0	40,0	27,0	24,0	21,0	19,0	17,0

3. Численные методы определения удельного заряда электрона

Для примера покажем расчеты для U_A=5*В*.

Для нахождения значений $I_{c,кр}$ используем три методики в разработанной программе в системе MathCAD 14 [1].

а) Полуавтоматический метод. Необходимо проанализировать расположение точек и ввести номера точек, через которые проходит круто спадающий участок графика и пологий участок его правой части. После чего программа по методу наименьших квадратов автоматически находит и проводит две прямые, одна из которых будет продолжением круто спадающей левой части графика, а другая – продолжением пологого участка его правой части. Затем автоматически рассчитывается точка пересечения этих прямых, т. е. критическое значение тока соленоида $I_{c,кр} = 0{,}947$ (рис. 3).

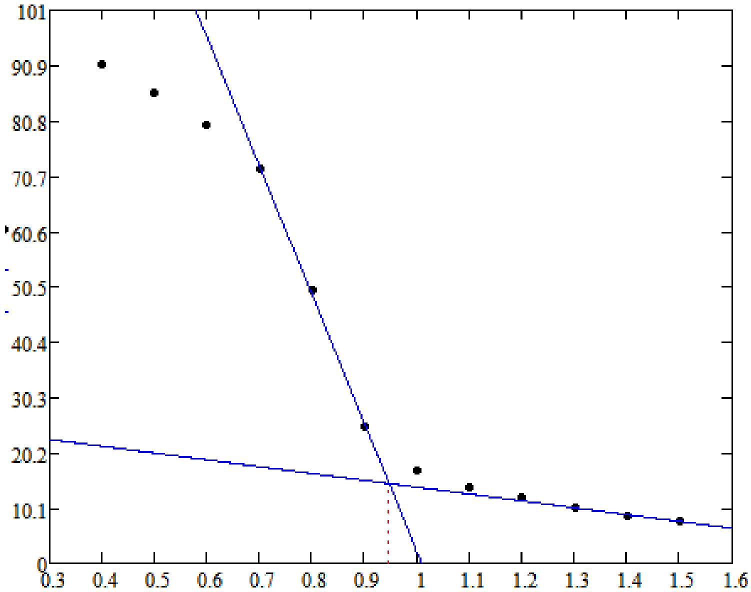


Рисунок 3 – Определение удельного заряда электрона полуавтоматическим методом

б) Автоматический метод. Программа автоматически анализирует приращения функции и находит номера точек, через которые проходит круто спадающий участок графика и пологий участок его правой части. После чего аналогично первому методу проводит две прямые и рассчитывает критическое значение тока соленоида $I_{c,кр} = 0{,}959$ (рис. 4).

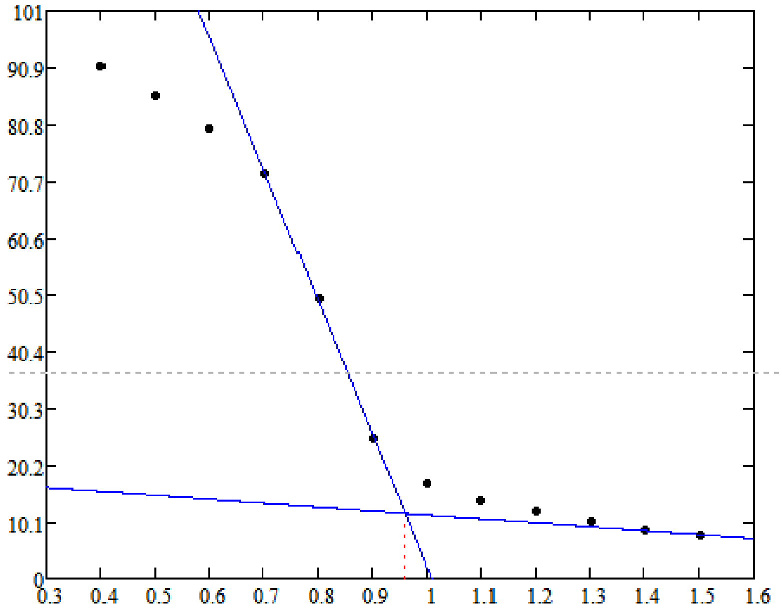


Рисунок 4 – Определение удельного заряда электрона автоматическим методом в) Метод аппроксимации. По методу наименьших квадратов ищем аппроксимирующую эксперимент кривую в виде разложения по полной системе тригонометрических функций $\left\{\sin\left(\frac{\pi k(x-0,4)}{1,5-0,4}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ на отрезке $[0,4;1,5]$. Тогда функция примет вид $f(x)=f_1(x)+\sum_{k=1}^{N}C_k\sin\left(\frac{\pi k(x-0,4)}{1,5-0,4}\right)$, где $y=f_1(x)$ – уравнение хорды, стягивающей крайние точки, а коэффициенты C_k вычисляются программой по методу наименьших квадратов. Экспериментально получено, что наилучший порядок аппроксимации $N=n-3$ (рис. 5), где n – число экспериментов.

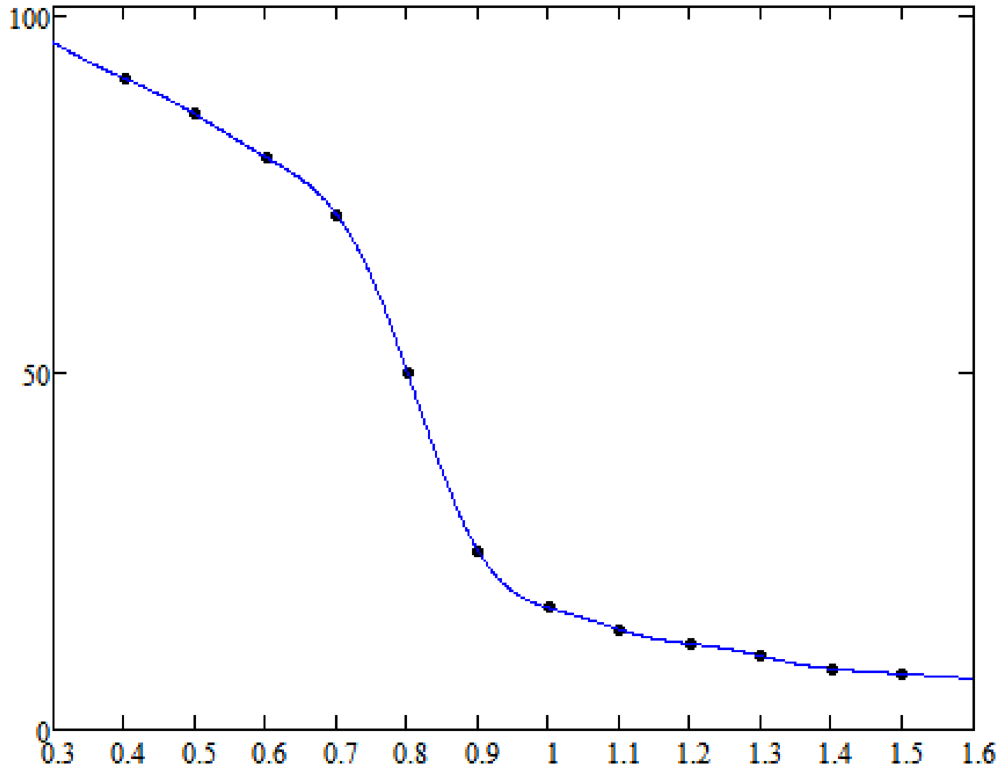


Рисунок 5 – Аппроксимирующая эксперимент кривая

Невязка найденного решения $\delta=1,1\cdot10^{-14}$. Таким образом, найдена практически интерполирующая кривая. Следовательно, можно теоретически определить значения анодного тока в любой точке на отрезке $[0,4;1,5]$.

Затем находится точка перегиба на круто спадающем участке графика и проводится касательная. А для пологого участка его правой части прямая строится аналогично второму методу и рассчитывает критическое значение тока соленоида $I_{c,кр}$ = 0,932 (рис. 6).

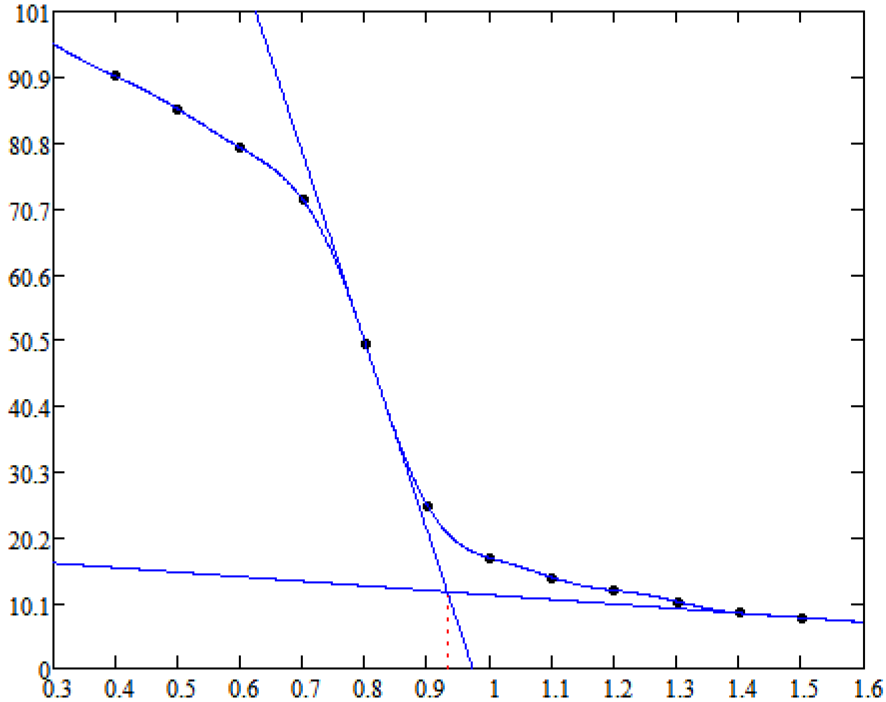


Рисунок 6 – Определение удельного заряда электрона методом аппроксимации

Используя соотношение (10), определяем по всем трем методам значения удельного заряда электрона.

Затем по точкам пологого участка его правой части строится экстраполяционная кривая (рис. 7). По характеру расположения точек для экстраполяции выбрана гипербола, найденная по методу наименьших квадратов.

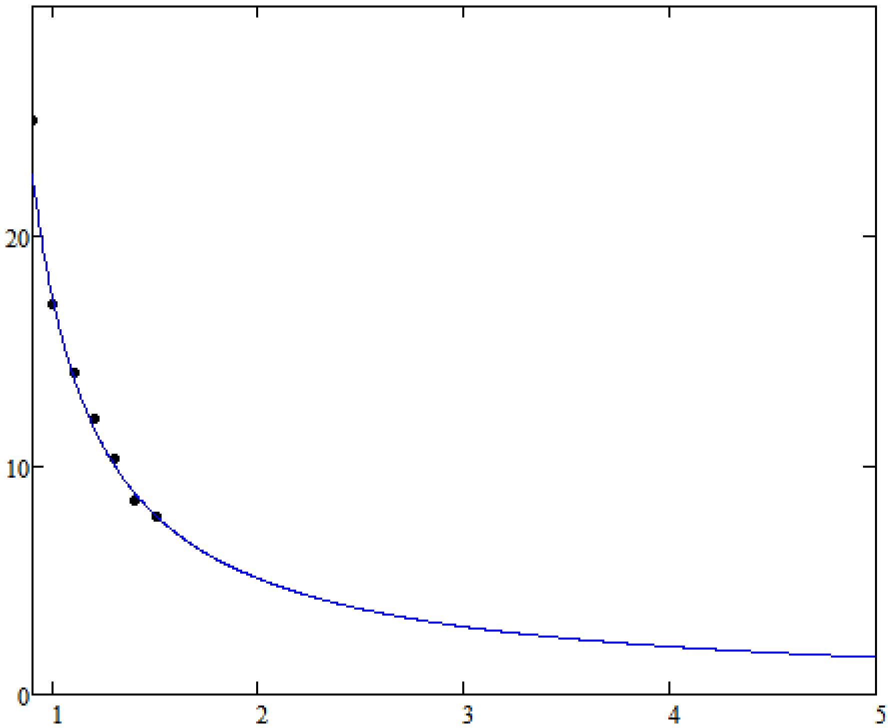


Рисунок 7 – Экстраполяционная кривая

Следовательно, можно теоретически определить значения анодного тока в любой точке на интервале $(1,5;\infty)$.

Соединяем интерполяционную и экстраполяционную кривые (рис. 8).

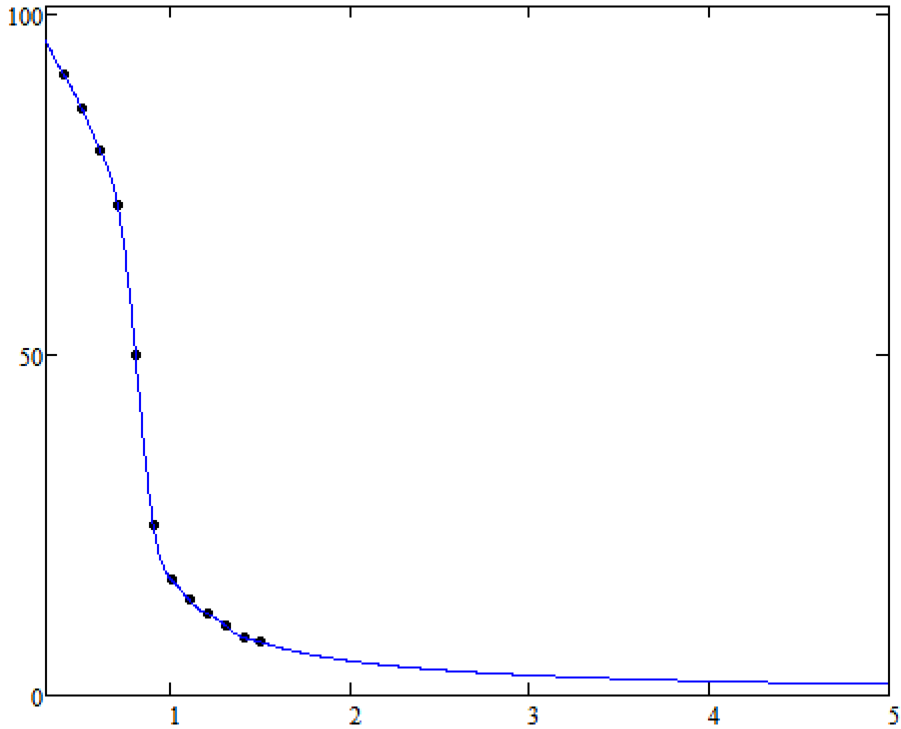


Рисунок 8 – Аппроксимирующая эксперимент кривая

Таким образом, найдена аппроксимирующая эксперимент кривая.

Получены относительные погрешности найденного удельного заряда электрона всеми тремя методами:

$$1)\ \frac{e}{m} = 1,70 \cdot 10^{11}\ \text{Кл/ кг}, \quad \Delta = 7,5\%;$$

$$2)\ \frac{e}{m} = 1,67 \cdot 10^{11}\ \text{Кл/ кг}, \quad \Delta = 8,3\%;$$

$$3)\ \frac{e}{m} = 1,79 \cdot 10^{11}\ \text{Кл/ кг}, \quad \Delta = 2,7\%.$$

Как видим, наилучшую погрешность дает метод аппроксимации.

Аналогично, произведены исследования для напряжений $U_A = 6B$, $U_A = 7B$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кирьянов, Д. В. Mathcad 14. – СПб. : БХВ-Петербург, 2007. – 704 с.

УДК 519.248

А. Д. Барт, Ю. Е. Кувайскова (г. Ульяновск)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕХНИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

Задача технической диагностики сводится к исследованию работоспособности технического объекта. В работе для решения данной задачи предлагается использование методов машинного обучения, позволяющих по значениям контролируемых (входных) параметров объекта «научить» алгоритм выдавать верный результат об исправной или неисправной работе объекта. Причем алгоритм заранее не программируют, а именно обучают в процессе.

Ключевые слова: *машинное обучение, техническая диагностика.*

Будем рассматривать объект, техническое состояние которого определяется по значениям некоторых характеристик, фиксируемых через равные промежутки времени. По значениям контролируемых параметров объекта возможно построение адекватной математической модели и дальнейшего прогнозирования значений соответствующих характеристик [1–2]. Если по предсказанным значениям возможен выход параметров за предельно допустимые значения, следовательно, процесс нарушен: принимается соответствующее решение, связанное со снижением нагрузки на объект или его аварийной остановкой [3–4]. Для раннего предупреждения об аварийных ситуациях необходимо по значениям контролируемых характеристик объекта диагностировать работу объекта как исправную или неисправную.

Работа посвящена изучению методов извлечения полезной информации из входных данных и принятия дальнейших действий на основе анализа полученной информации. Одними из таких методов являются методы машинного обучения [5–7]. Целью работы является исследование применения методов машинного обучения для решения задач технической диагностики [8]. Применение методов машинного обучения для диагностики технического состояния объекта сводится к задаче классификации.

Используется множество методов классификации: логистическая регрессия, байесовские классификаторы, деревья (леса) решений, методы опорных векторов, нейронные сети и другие [6, 7, 9].

Одним из эффективных алгоритмов классификации является *персептронный алгоритм*. Однослойный персептрон – это линейный алгоритм классификации, принцип работы которого основан на модели нервной клетки – нейрона. Представляет собой пример нейронной сети с одним скрытым слоем [9].

Пусть $X \in R^n$ – множество объектов; Y – множество допустимых ответов. Будем считать, что $x = (x^0, x^1, ..., x^n) \in \{-1\} \times X$, где $x^j = f_j(x), j \geq 1$ – признаковое описание объекта, а $x_0 = -1$ – дополнительный константный признак; $Y = \{0,1\}$. Задана обучающая выборка $\{(x_j y_j)\}_{j=1}^{l}$. Значения признаков $x^j = f_j(x)$ рассматриваются как импульсы, поступающие на вход нейрона, которые складываются с весами $w_1, ..., w_n$. Если суммарный импульс превышает порог активации w_0, то нейрон возбуждается и выдает на выходе 1, иначе выдается 0. Таким образом, нейрон вычисляет *n*-ю булеву функцию вида

$$a(x) = \varphi(\sum_{j=1}^{l} w_j x^j - w_0) = \varphi(f(x_j, w)), \tag{1}$$

где $\varphi(z) = [z \geq 0], f(x_j, w) = \left\langle w, x_j \right\rangle$.

Для настройки вектора весов воспользуемся методом стохастического градиента. Возьмем квадратичную функцию потерь:

$$Q(w) = \sum_{j=1}^{l} (a(x_j) - y_j)^2, \tag{2}$$

а в качестве функции активации возьмем сигмоидную функцию:

$$\varphi(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}. \tag{3}$$

Согласно принципу минимизации эмпирического риска задача сводится к поиску вектора, доставляющего минимум функционала

$$Q(w) \to \min_{w}. \tag{4}$$

В соответствии с методом градиентного спуска:

$$w = w - \eta \nabla Q(w), \tag{5}$$

где $\eta > 0$ – величина шага в направлении антиградиента, называемая также темпом обучения.

Темп обучения выбираем, решая задачу одномерной минимизации:

$$\eta = \arg\min_{w} Q(w - \eta \nabla Q(w)). \tag{6}$$

Будем выбирать прецеденты $(x_j y_j)$ по одному в случайном порядке, для каждого делать градиентный шаг и сразу обновлять вектор весов:

$$w = w - \eta(a(x_j, w) - y_j)(1 - \varphi(f(x_j, w)))\varphi(f(x_j, w))x_j. \tag{7}$$

Значение функционала оцениваем:

$$Q = (1 - \lambda)Q + \lambda \varepsilon_j, \tag{8}$$

где $\varepsilon_j = (a(x_j, w) - y_j)^2$, параметр $\lambda = 1/l$, l – объем выборки.

Итерационный процесс останавливается после того, как изменение значения функционала Q становится меньше заданной константы:

$$\left|Q_n - Q_{n-1}\right| < \delta. \qquad (9)$$

Логистическая регрессия применяется для предсказания вероятности возникновения некоторого события по значениям множества признаков. Для этого вводится зависимая переменная y, принимающая лишь одно из двух значений – 0 (событие не произошло) и 1 (событие произошло), и множество независимых переменных (также называемых признаками, предикторами или регрессорами) – вещественных $x_1, x_2, ..., x_n$, на основе значений которых требуется вычислить вероятность принятия того или иного значения зависимой переменной.

Делается предположение о том, что вероятность наступления события $y = 1$ равна:

$$P\{y = 1 \mid x\} = f(z), \qquad (10)$$

где $z = \theta^T x = \theta_1 x_1 + ... + \theta_n x_n$, x – вектор, столбец значений независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, θ – вектор, столбец параметров (коэффициентов регрессии) $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$, $f(z)$ – логистическая функция (иногда также называемая сигмоидом или логит-функцией):

$$f(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}. \qquad (11)$$

Так как y принимает лишь значения 0 и 1, то вероятность второго возможного значения равна:

$$P\{y = 0 \mid x\} = 1 - f(z) = 1 - f(\theta^T x). \qquad (12)$$

Для краткости функцию распределения y при заданном x можно записать в таком виде:

$$P\{y \mid x\} = f(\theta^T x)^y (1 - f(\theta^T x))^{1-y}, y \in \{0,1\}. \qquad (13)$$

Фактически, это есть распределение Бернулли с параметром $f(\theta^T x)$.

Для подбора параметров $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ необходимо составить обучающую выборку, состоящую из наборов значений независимых переменных и соответствующих им значений зависимой переменной y. Формально, это множество пар $(x^{(1)}, y^{(1)}), ..., (x^{(m)}, y^{(m)})$, где $x^j \in R^n$ – вектор значений независимых переменных, а $y^{(j)} \in \{0,1\}$ – соответствующее им значение y. Каждая такая пара называется обучающим примером.

Для оценивания параметров используется метод максимального правдоподобия, согласно которому выбираются параметры θ, максимизирующие значение функции правдоподобия на обучающей выборке:

$$\theta = \arg\max_{\theta} L(\theta) = \arg\max_{\theta} \prod_{j=1}^{m} P\{y = y^{(j)} \mid x = x^{(j)}\}. \qquad (14)$$

Максимизация функции правдоподобия эквивалентна максимизации ее логарифма:

$$\begin{aligned} \ln L(\theta) &= \sum_{j=1}^{m} \log P\{y = y^{(j)} \mid x = x^{(j)}\} = \\ &= \sum_{j=1}^{m} y^{(j)} \ln f(\theta^T x^{(j)}) + (1 - y^{(j)}) \ln(1 - f(\theta^T x^{(j)})). \end{aligned} \qquad (15)$$

Для максимизации этой функции может быть применен метод градиентного спуска. Он заключается в выполнении следующих итераций, начиная с некоторого начального значения параметров θ:

$$\theta = \theta + \alpha \nabla \ln L(\theta) = \theta + \alpha \sum_{j=1}^{m} (y^{(j)} - f(\theta^T x^{(j)})) x^{(j)}, \alpha > 0. \qquad (16)$$

На практике также применяют метод Ньютона и стохастический градиентный спуск.

Эта модель часто применяется для решения задач классификации – объект x можно отнести к классу $y = 1$, если предсказанная моделью вероятность $P\{y = 1 \mid x\} > 0{,}5$, и к классу $y = 0$ в противном случае.

Основная идея *метода опорных векторов* – перевод исходных векторов в пространство более высокой размерности и поиск разделяющей гиперплоскости с максимальным зазором в этом пространстве.

Каждый объект данных представлен как вектор (точка) в p-мерном пространстве (последовательность p чисел). Каждая из этих точек принадлежит только одному из двух классов. Нас интересует, можем ли мы разделить точки гиперплоскостью размерностью (p–1). Это типичный случай линейной разделимости. Таких гиперплоскостей может быть много. Поэтому вполне естественно полагать, что максимизация зазора между классами способствует более уверенной классификации. То есть, можем ли мы найти такую гиперплоскость, чтобы расстояние от нее до ближайшей точки было максимальным. Это бы означало, что расстояние между двумя ближайшими точками, лежащими по разные стороны гиперплоскости, максимально. Если такая гиперплоскость существует, то она называется оптимальной разделяющей гиперплоскостью, а соответствующий ей линейный классификатор называется оптимально разделяющим классификатором.

Предположим, что имеется обучающая выборка $\{(x_1c_1),...,(x_nc_n)\}, x_i \in R^n, c_i \in [-1;1]$.

В данном методе строится классифицирующая функция *F*, заданная в виде

$$F(x) = sign((w,x)+b), \tag{17}$$

где *w* − вектор нормали к разделяющей гиперплоскости, а *b* – вспомогательный параметр. Если *b* = 0, то разделяющая гиперплоскость проходит через начало координат. В зависимости от значения классифицирующей функции, объекты попадают в разные классы. Объекты, для которых $F(x)=1$ попадают в один класс, а объекты с $F(x)=-1$ соответственно – в другой класс. Выбор данной функции *F*(*x*) неслучаен, так как любую гиперплоскость для некоторых *w* и *b* можно представить уравнением

$$(w,x)+b=0. \tag{18}$$

Далее нам нужно определить такие *w* и *b,* для которых расстояние до каждого класса было бы максимальным. Данное расстояние будет равно $1/\|w\|$.

Задачу нахождения максимума $1/\|w\|$ можно свести к задаче нахождения минимума $\|w\|^2$:

$$\begin{cases} \arg\min\limits_{w,b}\|w\|^2 \\ c_j((w,x_j)+b) \ge 1, j=1...,n \end{cases}. \tag{19}$$

Данная задача является задачей линейного программирования и решается с помощью множителей Лагранжа. В итоге получим:

$$w=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j c_j x_j \text{ и } b=(w,x_j)-c_j, \tag{20}$$

где $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_n)$ − вектор двойственных переменных, $\lambda_j \ge 0$.

Проведенное исследование показало, что методы машинного обучения могут быть использованы для решения задачи технической диагностики – по значениям контролируемых (входных) параметров объекта диагностировать об исправной или неисправной работе объекта. Алгоритм логистической регрессии и метод опорных векторов лучше всего использовать для задачи классификации на основе разделимости, т. е. методы основаны на четком разделении множества объектов на классы. Причем в алгоритме логистической регрессии используется *S*-образная линия, которая разделяет объекты на классы. В методе опорных векторов находится граница, которая разделит объекты на классы с наиболее большей шириной. Алгоритм обучения персептрона также может использоваться в задачах классификации, прогнозирования, распознавания образов, но эти алгоритмы в большинстве случаев являются очень трудоемкими и требуют большого количества вычислительных затрат.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-38-00211 мол_а.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кувайскова, Ю. Е. Методика структурно-параметрической идентификации системы временных рядов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук, 2013. – Т. 15, № 4-4. – С. 914–918.

2. Кувайскова, Ю. Е., Клячкин, В. Н., Бубырь, Д. С. Прогнозирование состояния технического объекта на основе мониторинга его параметров // XII всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014 Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН : сб. – 2014. – С. 7616–7626.

3. Клячкин, В. Н., Кувайскова, Ю. Е., Бубырь, Д. С. Прогнозирование состояния объекта с использованием систем временных рядов // Радиотехника, 2015. – № 6. – С. 45–47.

4. Клячкин, В. Н., Кувайскова, Ю. Е., Алешина, А. А., Кравцов, Ю. А. Информационно-математическая система раннего предупреждения об аварийной ситуации // Известия Самарского научного центра Российской академии наук, 2013. – Т. 15, № 4-4. – С. 919–923.

5. Воронцов, К. В. Вычислительные методы обучения по прецедентам (www.MachineLearning.ru).

6. Боровский, А. А. Перспективы применения технологий машинного обучения к обработке больших массивов исторических данных // Кибернетика и программирование, 2015. – №1. – С. 77–114.

7. Вапник, В. Н., Червоненкис, А. Я. Теория распознавания образов. – М. : Наука. 1974. – 416 с.

8. Основы технической диагностики / П. П. Пархоменко и др. – М. : Энергия, 1976. – 462 с.

9. Уоссермен, Ф. Нейрокомпьютерная техника: Теория и практика. – М. : Мир. 1992. – 184 с.

УДК 519.711.3

Е. А. Будников, А. А. Воронцов (г. Пенза)

ИССЛЕДОВАНИЕ В МАГНИТОСТРИКЦИОННЫХ НАКЛОНОМЕРАХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

В статье рассмотрено моделирование магнитных полей магнитострикционных наклономеров. Проведено математическое моделирование результирующей напряженности магнитного поля магнитострикционных наклономеров и ее составляющих – созданных токовым импульсом и постоянным магнитом.

Ключевые слова: *магнитное поле, моделирование магнитных полей, двухкоординатный магнитострикционный наклономер, напряженность магнитного поля, расчет напряженности.*

Чувствительность, разрешающая способность и диапазон измерений магнитострикционных устройств и приборов непосредственно зависят от используемого в них первичного преобразователя [1–3]. Интерес к математическим моделям процессов и явлений в системах, в которых используются или возможно использование магнитострикционных преобразователей перемещений обусловлен множеством работ, в частности [4–8]. Основными элементами первичного магнитострикционного преобразователя (ПМП) магнитострикционного наклономера (МН) состоит из волновода, источника импульсного тока и постоянного магнита (ПМ).

При протекании в МН в среде волновода или волновода (ВЛ) токового импульса создается круговое магнитное поле напряженностью $\overline{H}_{KP}$ вдоль всей длины ВЛ. В месте взаимодействия кругового магнитного поля $\overline{H}_{KP}$ и поля, созданного постоянным магнитом $\overline{H}_{П}$, формируется результирующее магнитное поле $\overline{H}_{r}$, которое находится в соответствии с рисунком 1 в виде векторной суммы напряженностей двух полей (принцип суперпозиций для напряженностей магнитного поля) согласно выражению

$$\overline{H}_{r} = \overline{H}_{П} + \overline{H}_{KP}, \tag{1}$$

абсолютное значение которого с учетом взаимноперпендикулярности векторов $\overline{H}_{П}$ и $\overline{H}_{KP}$ определится в соответствии с выражением

$$H_{r}^{2} = H_{П}^{2} + H_{KP}^{2}. \tag{2}$$

Одну из составляющих результирующей напряженности магнитного поля, созданную токовым импульсом $\overline{H}_{KP}$, можно рассчитать согласно известным выражениям, определяемым по закону полного тока [4]:

$$\bar{H}_{KP} = \frac{i \cdot \bar{j}}{2 \cdot \pi \cdot r_{ВЛ}} \qquad (3)$$

и

$$\bar{H}_{KPB} = \frac{r \cdot i \cdot \bar{j}}{2 \cdot \pi \cdot r_{ВЛ}^2}, \qquad (4)$$

где $\overline{H}_{KP}$ – напряженность магнитного поля, созданного токовым импульсом вне ВЛ; $\overline{H}_{KPB}$ – напряженность магнитного поля, созданного токовым импульсом внутри ВЛ; i – амплитудное значение токового импульса, измеряемое в Амперах; $r_{ВЛ}$ – радиус ВЛ в м; r – текущий радиус внутри проводника в м; j – единичный вектор по касательной к окружности.

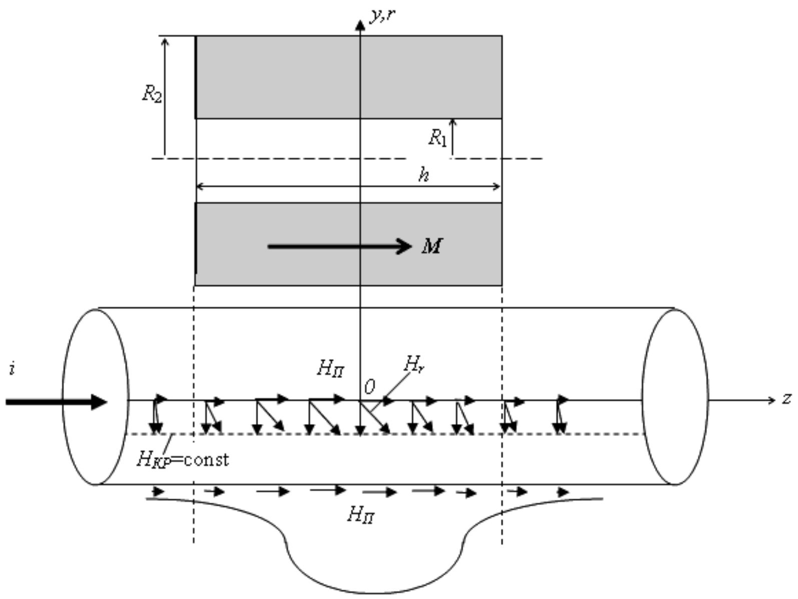


Рисунок 1 – Формирование крутильных колебаний

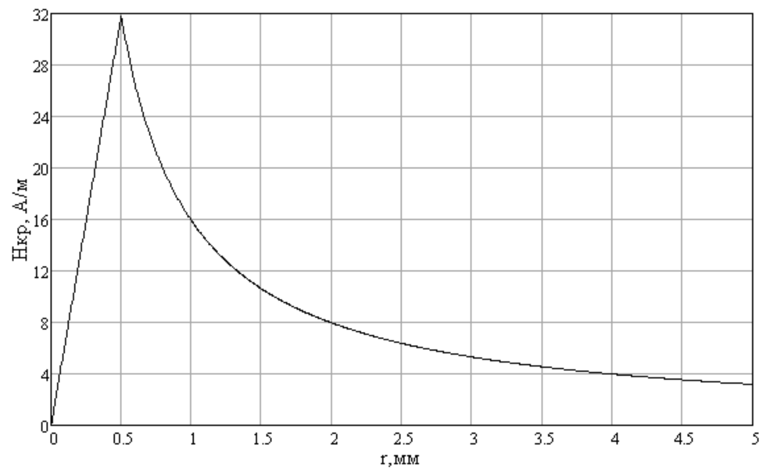


Рисунок 2 – Результаты моделирования зависимости напряженности магнитного поля $\bar{H}_{KP}$, созданного токовым импульсом от расстояния r, отсчитываемого от центра ВЛ в плоскости его сечения

Результаты моделирования зависимости напряженности магнитного поля, созданного токовым импульсом от расстояния r, отсчитываемого от центра ВЛ в плоскости его сечения, приведены на рисунке 2. Для моделирования был использован ВЛ радиусом $r_{ВЛ}$ = 0,5 мм и токовый импульс i = 100мА.

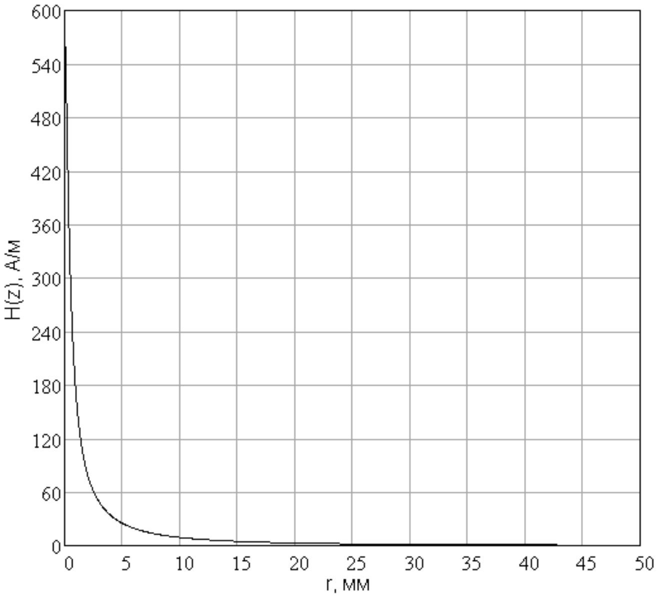


Рисунок 3 – Результаты моделирования зависимости напряженности магнитного поля $\overline{H}_П$, созданного КПМ от расстояния r, отсчитываемого от боковой поверхности ПМ в горизонтальной плоскости, проходящей через его центр

Составляющую напряженности магнитного поля, созданную ПМ $\overline{H}_П$ различной формы, можно рассчитать по формулам, изложенным в [1].

Так, для кольцевого ПМ (КПМ) согласно [1] ее значение определится по формуле:

$$H_Z(r) = \frac{1}{\pi} h_M \cdot \mathrm{M} \int_{d_M}^{D_M} \frac{E(k_2)\rho \cdot d\rho}{\left[\left[(r-\rho)^2 + \frac{h_M^2}{4}\right] \cdot \left[(r+\rho)^2 + \frac{h_M^2}{4}\right]\right]^{\frac{1}{2}}}, \tag{5}$$

где $H_Z(r)$ – проекция вектора напряженности КПМ на ось OZ, r – расстояние от центра КПМ до точки расчета напряженности магнитного поля, D_M, d_M – соответственно внешний и внутренний радиусы КПМ, h_M – высота КПМ, М – намагниченность, ρ – полярный радиус, $E(k_2) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k_2^2 (\sin\varphi)^2}\, d\varphi$ – полный эллиптический интеграл второго рода, $k_2^2 = \dfrac{4 \cdot r \cdot \rho}{(r+\rho)^2 + \frac{h_M^2}{4}}$.

Результаты моделирования зависимости напряженности магнитного поля, созданного КПМ от расстояния r, отсчитываемого от боковой поверхности КПМ в горизонтальной плоскости, проходящей через его центр, рассчитанные согласно выражению 5, приведены на рисунке 3. Для моделирования был использован КПМ с внешним D_M и внутренним d_M диаметрами равными $D_M = 110$ мм и $d_M = 90$ мм соответственно, высотой $h_M = 1$ мм и значением остаточной индукции $B_r = 0{,}01$ Тл.

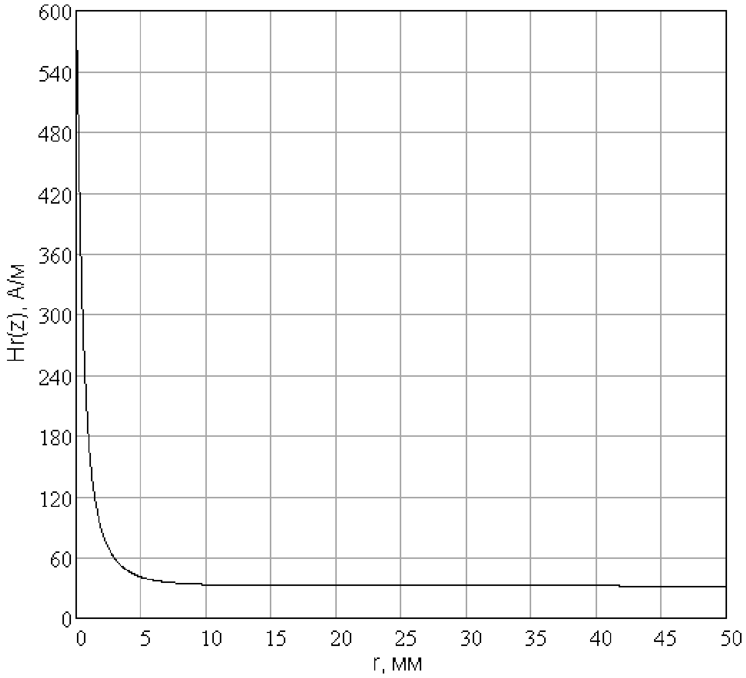


Рисунок 4 – Результаты моделирования зависимости результирующей напряженности магнитного поля, $\bar{H}_r$ от расстояния r, отсчитываемого от боковой поверхности ПМ в горизонтальной плоскости, проходящей через центр ПМ

Наложение магнитных полей, созданных токовым импульсом и ПМ, порождает результирующее магнитное поле, результаты моделирования зависимости напряженности которого от расстояния r, для рассматриваемых примеров (рисунки 2 и 3), приведены на рисунке 4. Расстояние r отсчитывается от боковой поверхности ПМ до ближайшей точки на поверхности ВЛ в горизонтальной плоскости, проходящей через центр ПМ и измеряется в метрах.

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что существенные отличия в значениях напряженностей магнитных полей, созданных ПМ и результирующей (рисунки 3 и 4) наблюдаются лишь при отдалении ВЛ от ПМ (в приведенных примерах $r > 2$ мм).

Таким образом, влияние составляющих на значение результирующей напряженности магнитного поля будет зависеть от многих факторов, основными из которых являются размеры ПМ и его значение остаточной намагниченности, диаметр ВЛ и значение токового импульса, а также расстояние от ВЛ до ПМ.

В заключении необходимо отметить, что под воздействием магнитного поля со значением результирующей напряженности $\overline{H}_r$ происходит формирование ультразвуковой волны кручения, являющейся носителем информации об измеряемой величине. Это свидетельствует об актуальности приведенных математических моделей и методиках расчета магнитных полей ДМН.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта УМНИК на тему «Исследование и разработка блока обработки информации магнитострикционных преобразователей линейных перемещении на ультразвуковых волнах кручения».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Купалян, С. Д. Теоретические основы электротехники. Ч. 3. Электромагнитное поле. – Изд. 3-е, испр. и доп. – М. : Энергия, 1970. – 248 с.
2. Сальников, И. И. Размерная селекция бинарных изображений локальных объектов при анализе аэрофотоснимков // Телекоммуникации. – М. : Наука и технологии, 2015. – № 2. – С. 17–23.
3. Сальников, И. И. Оценка влияния диапазона электромагнитных волн на потенциально-возможную скорость передачи данных в средствах реализации информационной потребности человека [Текст] // XXI век: Итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – Пенза : ПензГТУ, 2015. – № 3 (25). – С. 18–22.
4. Брызгалин, В. В., Сальников, И. И. Программное средство для анализа и обработки растровых изображений [Текст] // XXI век: Итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – Пенза : ПензГТУ, 2015. – № 3 (25). – С. 23–29.
5. Сальников, И. И. Методы и алгоритмы сегментации бинарных изображений на основе построчного анализа [Текст] // XXI век: Итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – Пенза: ПензГТУ, 2014. – № 3 (19). – С. 208.
6. Сальников, И. И. Методы построчного и следящего поэлементного анализа сложных бинарных изображений [Текст] // XXI век: Итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – Пенза : ПензГТУ, 2013. – № 10 (14). – С. 53–60.
7. Сальников, И. И. Критерии отнесения устройств и систем обработки информации к интеллектуальным [Текст] // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – Пенза : ПГТА, 2012. – № 1 (5). – С. 11–15.

8. Бурмистров, А. В., Сальников, И. И. Метод формирования линейных контуров на аэрофотоснимках сельской местности // Современные проблемы науки и образования. – Пенза : Издательский Дом «Академия Естествознания», 2013. – № 5. – С. 152.

9. Слесарев, Ю. Н., Воронцов, А. А., Родионов, С. В. Математическое моделирование и расчет магнитных полей магнитострикционных преобразователей угловых перемещений, содержащих сплошной постоянный магнит // XXI век: Итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – Пенза : ПензГТУ, 2015. – № 3 (25). – С. 169-175.

10. Слесарев, Ю. Н., Воронцов, А. А., Родионов, С. В. Исследование и моделирование блока обработки сигнала магнитострикционных преобразователей линейных перемещений на ультразвуковых волнах кручения [Текст] // Современные информационные технологии. – Пенза : ПензГТУ, 2015. – № 21. – С. 195–198.

11. Slesarev, Yu. N., Vorontsov, A. A., Rodionov, S. V. The mathematical modeling and calculation of magnetic fields two-co-ordinate magnetostrictive tiltmeters taking into account skin-effect // Наука и технологии. – SCIEURO, London, 2015. – № 1. – С. 8–18.

12. Слесарев, Ю. Н., Воронцов, А. А., Родионов, С. В., Зелик, А. М. Моделирование магнитной системы конструкций двухкоординатных магнитострикционных наклономеров с расположением магниточувствительных элементов под углом 90 градусов // Новое слово в науке: перспективы развития : сб. – Чебоксары, 2014. – № 1 (1). – С. 238–240.

13. Слесарев, Ю. Н., Родионов, С. В., Конопацкий, Ю. В., Воронцов, А. А. Математическое моделирование и исследования новых конструкций подкласса двухкоординатных магнитострикционных наклономеров // Современные информационные технологии. – Пенза : ПензГТУ, 2014. – № 20. – С. 45–50.

14. Воронцов, А. А. Математическое моделирование магнитных полей в двухкоординатных магнитострикционных наклономерах : дис. ... канд. техн. наук. – Пенза, 2013. – 160 с.

15. Слесарев, Ю. Н., Воронцов, А. А., Володин, В. А., Шабнов, Р. В. Исследование оптимального значения результирующей напряженности магнитного поля в двухкоординатных магнитострикционных наклономерах с использованием сплошных постоянных магнитов // Информационные технологии. Радиоэлектроника. Телекоммуникации. – Тольятти, Поволжский государственный университет сервиса, 2013. – № 3. – С. 299–305.

УДК 519.246.8

А. Р. Габитова, Ю. Е. Кувайскова (г. Ульяновск)

ПРИМЕНЕНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОГНОСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КОНТРОЛИРУЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ ОБЪЕКТА

Для исследования прогностических свойств контролируемых параметров объекта предлагается использование фрактальных методов, позволяющих определить некоторые важные характеристики, такие как трендоустойчивость, наличие квазипериодических циклов и т. п. Эффективность подхода продемонстрирована на примере исследования прогностических свойств вибраций гидроагрегата.

Ключевые слова: *фрактальные методы, временной ряд, трендоустойчивость, квазипериодичность, прогностические свойства.*

Для раннего предупреждения об аварийных ситуациях на технических объектах необходимо высокоточное прогнозирование состояния объекта [1–4]. Техническое состояние объекта характеризуется совокупностью контролируемых параметров, регистрируемых в результате мониторинга объекта и образующих систему временных рядов. Для получения прецизионных прогнозов требуется адекватная реальной ситуации математическая модель, описывающая динамику исследуемых процессов. Для построения адекватной модели и выявления ее структуры необходимо исследование прогностических свойств параметров объекта.

Для исследования прогностических свойств параметров объекта предлагается использование фрактальных методов [5–7]. Применение фрактальных анализов позволяет избежать ограничений применения корреляционного анализа, что определяется возможностью их эффективного использования при рассмотрении нестационарных случайных процессов и проведения количественной оценки меры регулярности временного ряда.

Применение фрактальных методов обусловлено тем, что динамика исследуемых процессов обладает фрактальными свойствами, т. е. временные ряды являются самоподобными и имеют сильно изрезанную форму. Чтобы описать сложную структуру процессов используется понятие фрактальной размерности D [8].

Пусть L – неограниченная область в евклидовом пространстве с размерностью d. Разобьем L на кубические ячейки со стороной $\varepsilon << L$ и объемом ε^d. Пусть $N(\varepsilon)$ – суммарное количество занятых ячеек. Тогда фрактальная размерность изучаемого объекта вычисляется по формуле:

$$D = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \qquad (1)$$

Если при разбиении временного ряда на участки значения фрактальной размерности будут различными, то временной ряд является мультифракталом.

Мультифрактал в общем случае характеризуется некоторой нелинейной функцией $\tau(q)$, определяющей поведение статистической суммы $Z(q,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$:

$$Z(q,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(q)}, \qquad (2)$$

где $p_i(\varepsilon) = \lim_{N \to \infty} \frac{n_i(\varepsilon)}{N}$ – вероятность того, что наугад взятая точка находится в ячейке *i*, $n_i(\varepsilon)$ – количество точек в *i*-й ячейке.

Спектр обобщенных фрактальных размерностей D_q, характеризующих данное распределение точек в области *L*, определяется:

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}, \qquad (3)$$

где $\tau(q) = \lim_{\varepsilon \to \infty} \frac{\ln Z(q,\varepsilon)}{\ln \varepsilon}$.

Если $D_q = D = const$, т. е. не зависит от q, то данное множество точек представляет собой монофрактал, который характеризуется всего лишь одной величиной – фрактальной размерностью D. Если функция D_q меняется с q, то рассматриваемое множество точек является мультифракталом. Функция D_q показывает, насколько неоднородным является исследуемое множество точек L.

Величина фрактальной размерности вычисляется через показатель Херста. Для исследования фрактальных свойств временных рядов Херст ввел безразмерное отношение посредством деления размаха на стандартное отклонение наблюдений R/S:

$$R/S = (a \cdot N)^H, \qquad (5)$$

где R/S – нормированный размах, N – число наблюдений, a – константа, H – показатель Херста.

Показатель Херста, в свою очередь, связан с фрактальной размерностью D соотношением:

$$D = 2 - H. \qquad (6)$$

Показатель Херста позволяет классифицировать временные ряды следующим образом. Если $H = 0{,}5$, то ряд представляет собой случайное блуждание. Диапазон $0 \le H < 0{,}5$ соответствует антиперсистентному или эргодическому ряду. Если $0{,}5 < H < 1$ имеется персистентный или трендоустойчивый ряд.

Выявление квазипериодичностей основано на разложении фазовой траектории временного ряда на квазициклы [6-7]. Фазовая траектория представляет собой соединение соседних точек ряда прямой или кривой линией. Фазовая траектория дает геометрическое изображение отдельных движений, состояний равновесия, периодических, хаотических движений и определяет «логику» поведения ряда.

Для исследования мультифрактальных свойств процессов используется метод максимумов модулей вейвлет-преобразований [9].

В общем виде вейвлет-преобразование функции распределения $g(x)$ определяется формулой:

$$W(a,b)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)dx, \qquad (7)$$

где a – параметр масштаба, b – пространственная координата или момент времени, ψ – солитоноподобная функция (вейвлет), представляющий собой вторую производную функции Гаусса.

Наличие локального сингулярного поведения $g(x)$ в точке x_0 приводит к возрастанию $W(a,x_0)$ при $x\to x_0$ и может быть описано экспонентой Гельдера $h(x_0)$ [5, 8], которая определяет вейвлет-коэффициенты для малых значений масштаба a:

$$W(a,x_0)\sim a^{h(x_0)}. \qquad (9)$$

Чем быстрее коэффициенты уменьшаются при $a\to 0$, тем более регулярна функция в этой точке.

В качестве объекта исследования привлечены данные по вибрациям гидроагрегата [10–11]. Данные регистрировались по 8 каналам, получено 8 временных рядов по 109 наблюдений каждый.

Для каждого ряда определены фрактальные характеристики – фрактальная размерность, показатель Херста и преобладающие квазициклы. Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1

Фрактальные характеристики вибраций гидроагрегата

Временной ряд	Показатель Херста (H)	Фрактальная размерность (D)	Преобладающие квазициклы
X_1	0,897	1,103	2, 3, 4
X_2	0,814	1,186	2, 3, 4
X_3	0,855	1,145	2, 3, 4
X_4	0,678	1,322	2, 3
X_5	0,595	1,405	2, 3, 4, 5, 6
X_6	0,902	1,097	2, 3
X_7	0,852	1,148	2, 3
X_8	0,524	1,476	2, 3, 4, 5

Значения фрактальной размерности $D > 1$ для всех временных рядов свидетельствует, что все ряды являются фрактальными, т. е. обладают самоподобными свойствами.

Показатель Херста для временных рядов X_5 и X_8 близок к 0,5. Это свидетельствует, что данные ряды представляют собой случайное блуждание, т. е. не обладают устойчивой тенденцией. Для остальных временных рядов показатель Херста находится в интервале $0,5 < H < 1$, следовательно, эти ряды обладают заметной трендоустойчивостью, т. е. если ряд возрастает (убывает) в текущий момент, то он будет сохранять эту тенденцию некоторое время в будущем.

Во всех временных рядах преобладают квазициклы, длиной 2 и 3. Следовательно, в рассматриваемых временных рядах наблюдаются совместные виды цикличности. Для временных рядов X_5 и X_8 наблюдаются более длинные виды квазицикличностей.

Таким образом, исследуемые случайные процессы демонстрируют «подобие» динамических свойств.

Все рассматриваемые ряды являются неоднородными фракталами, т. е. мультифракталами. Исследуем свойства временного ряда X_1 методом максимумов модулей вейвлет-преобразований. На Рис. 1 показан график обобщенной фрактальной размерности D_q процесса X_1.

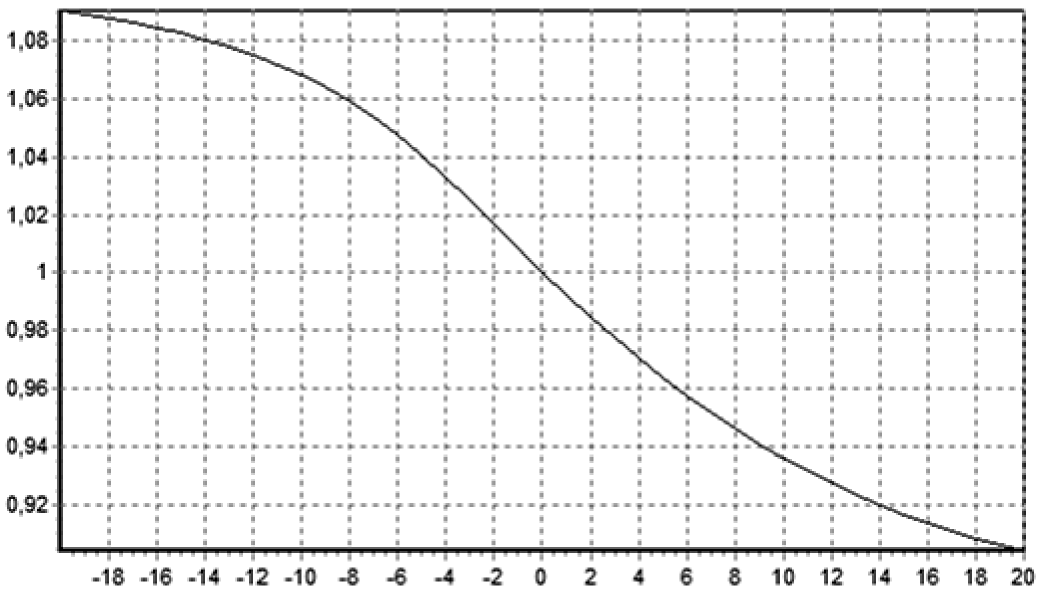
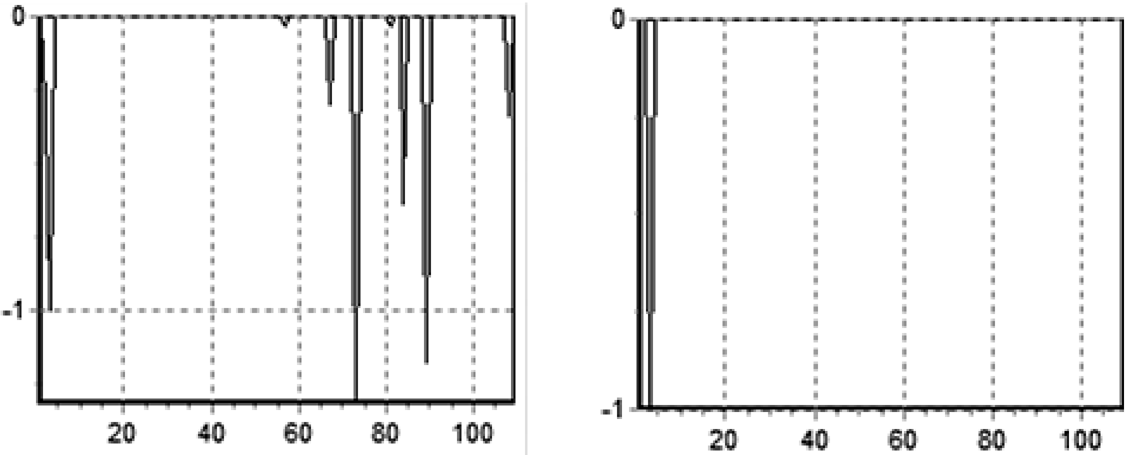


Рисунок 1 – Обобщенная фрактальная размерность D_q ряда X_1

Рассмотрим поведение вейвлет-коэффициентов на малых масштабах $a = 0,1$ и $a = 0,01$. Коэффициенты $W(a, x_0)$ (рис. 2) близки к нулю в окрестности некоторой точки, следовательно, процесс является регулярным в этой точке. Аналогичные действия выполняем для каждой точки временного ряда X_1.



а) б)

Рисунок 2 – а) Коэффициенты вейвлет-преобразования при a = 0,1;
б) Коэффициенты вейвлет-преобразования при a = 0,01

Аналогично проведено исследование методом максимумов модулей вейвлет-преобразований мультифрактальных свойств всех временных рядов. Выявлена заметная регулярность процессов X_1, X_2, X_3, X_6 и X_7.

Проведенное исследование позволяет сделать вывод, что вибрации гидроагрегата обладают фрактальными свойствами, являются мультифракталами. Временные ряды X_1, X_2, X_3, X_4, X_6 и X_7 являются трендоустойчивыми; все исследуемые процессы содержат совместные квазипериодические компоненты; ряды X_1, X_2, X_3, X_6 и X_7 являются регулярными в большинстве точек, а в динамике рядов X_5 и X_8 отсутствует значимая корреляция, т. е. процессы представляют собой случайное блуждание.

Следовательно, временные ряды X_1, X_2, X_3, X_4, X_6 и X_7 обладают сильной прогнозируемостью, а ряды X_5 и X_8 не обладают выраженными прогностическими свойствами.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-38-00211 мол_а.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Клячкин, В. Н., Кувайскова, Ю. Е., Алешина, А. А., Кравцов, Ю. А. Информационно-математическая система раннего предупреждения об аварийной ситуации // Известия Самарского научного центра Российской академии наук, 2013. – Т. 15, № 4-4. – С. 919–923.

2. Кувайскова, Ю. Е., Клячкин, В. Н., Бубырь, Д. С. Прогнозирование состояния технического объекта на основе мониторинга его параметров // XII всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014 Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН : сб. – 2014. – С. 7616–7626.

3. Клячкин, В. Н., Кувайскова, Ю. Е., Бубырь, Д. С. Прогнозирование состояния объекта с использованием систем временных рядов // Радиотехника, 2015. – № 6. – С. 45–47.

4. Кувайскова Ю. Е. Методика структурно-параметрической идентификации системы временных рядов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук, 2013. – Т. 15, № 4-4. – С. 914–918.

5. Валеев, С. Г., Кувайскова, Ю. Е., Губайдуллина, С. А Применение мультифрактального анализа при описании временных рядов в технике и экономике // Вестник Ульяновского государственного технического университета, 2008. – № 2 (42). – С. 23–27.

6. Кувайскова, Ю. Е., Фоменко, К. С. Применение фрактальных методов для анализа многомерных временных рядов // Информатика и вычислительная техника 2015. VII Всероссийская научно-техническая конференция аспирантов, студентов и молодых ученых (ИВТ-2015) : сб. – Ульяновск, 2015. – С. 327–331.

7. Кувайскова, Ю. Е. Исследование прогностических свойств многомерных временных рядов // Информатика, моделирование, автоматизация проектирования : сб. науч. тр. VII Всероссийской школы-семинара аспирантов, студентов и молодых ученых (ИМАП-2015). – Ульяновск, 2015. – С. 153–158.

8. Божокин, С. В., Паршин, Д. А. Фракталы и мультифракталы. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с.

9. Muzy, J. F., Bacry, E., Arneodo, A. Wavelets and multifractal formalism for singular signals: application to turbulence data // Phys. Rev. Lett., 1991. – Vol. 67. – P. 3515.

10. Клячкин, В. Н., Кувайскова, Ю. Е., Алешина, А. А. Моделирование вибраций гидроагрегата на основе адаптивных динамических регрессий // Автоматизация. Современные технологии. – 2014. – № 1. – С. 30–34.

11. Клячкин, В. Н., Кувайскова, Ю. Е., Алешина, А. А. О возможности совместного описания характеристик гидроагрегата адаптивными регрессиями // Вектор науки Тольяттинского государственного университета, 2013. – № 1 (23). – С. 40–41.

УДК 519.61

Е. Р. Исянова, И. В. Кокин, Ю. Е. Кувайскова (г. Ульяновск)

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Работа посвящена исследованию эффективности использования различных численных методов для решения систем нелинейных уравнений. Рассмотрены методы Ньютона, Бройдена и Брауна, проведен сравнительный анализ эффективности их работы.

Ключевые слова: *система нелинейных уравнений, численные методы, метод Ньютона, метод Брауна, метод Бройдена.*

Необходимость в решении систем нелинейных уравнений возникает как самостоятельная задача при моделировании нелинейных объектов, а также как промежуточный этап при решении ряда других задач, например, при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений неявными методами или при решении нелинейных краевых задач [1–2].

Для большинства практических задач отсутствует аналитическое выражение для функции, а значит и для ее производной. В этом случае приходится прибегать к аппроксимации якобиана или линеаризации векторной функции. Одним из способов аппроксимация якобиана является метод Бройдена [1–4], а линеаризации функции – метод Брауна [3].

Проведено исследование эффективности применения методов Ньютона [2, 4, 5], Бройдена и Брауна для решения систем нелинейных уравнений.

Постановка задачи. Пусть требуется решить систему вида:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ ... \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где функции f_1, f_2, ..., f_n – нелинейные вещественнозначные функции n вещественных переменных x_1, x_2,..., x_n.

Введем обозначения

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \ F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ ... \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ ... \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix}, \ 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (1) можно записать в виде:

$$F(x) = 0. \tag{2}$$

Метод Ньютона. Пусть

$$F'(x) = J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $J(x)$– матрица Якоби или якобиан.

Тогда итерационный процесс Ньютона для n-мерного случая будет иметь вид:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[J(x^{(k)}) \right]^{-1} \cdot F(x^{(k)}). \tag{4}$$

Эту формулу, требующую обращения матриц на каждой итерации, можно переписать в неявном виде:

$$F'\left(x^{(k)}\right)\left(x^{(k+1)} - x^{(k)}\right) = -F\left(x^{(k)}\right). \tag{5}$$

Применение (5) предполагает при каждом $k = 0, 1, 2, ...$ решение линейной алгебраической системы

$$F'\left(x^{(k)}\right)p^{(k)} = -F\left(x^{(k)}\right) \tag{6}$$

относительно векторной поправки $p^{(k)} = \left(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, ..., p_n^{(k)}\right)^T$, а затем прибавление этой поправки к текущему приближению для получения следующего:

$$x^{(k+1)} = x^k + p^{(k)}. \tag{7}$$

К решению таких линейных систем можно привлекать самые разные методы как прямые, так и итерационные в зависимости от размерности n решаемой задачи и специфики матриц Якоби $J(x^{(k)})$ (например, можно учитывать их симметричность, разреженность и т. п.).

При достаточной гладкости $F(x)$ и хорошем начальном приближении $x^{(0)}$ сходимость порождаемой методом Ньютона последовательности (x_k) к решению x^* будет квадратичной.

Фактором, осложняющим применение метода Ньютона, является необходимость решения n-мерных линейных задач на каждой итерации (обращения матриц в (4) или решения систем линейных алгебраических уравнений в (5)), вычислительные затраты на которые растут с ростом n непропорционально быстро.

Метод Бройдена. Основной сложностью при использовании метода Бройдена является выбор начальной аппроксимации матрицы Якоби.

На практике для обеспечения хорошего начала итерационного процесса один раз используют конечно-разностную аппроксимацию производных, а на следующих шагах матрица аппроксимируется по методу Бройдена.

Для начального вектора формируется матрица Якоби на основе конечно-разностной аппроксимации производных $J_0\left(x^{(0)}\right)$ и аналогично методу Ньютона находится вектор очередного приближения

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x \tag{11}$$

из решения системы уравнений

$$J_0\left(x^{(0)}\right)\Delta x = -F\left(x^{(0)}\right). \tag{12}$$

На следующих шагах поиска матрица Якоби рассчитывается по формуле пересчета Бройдена

$$J^{(k+1)} = J^{(k)} + \frac{\left(y^{(k)} - J^{(k)}\Delta x^{(k)}\right)\left(\Delta x^{(k)}\right)^T}{\left(\Delta x^{(k)}\right)^T \Delta x^{(k)}}, \tag{13}$$

где $y^{(k)} = F\left(x^{(k+1)}\right) - F\left(x^{(k)}\right)$.

Весь процесс поиска решения повторяем по той же самой схеме до тех пор, пока не будет получено решение с заданной точностью.

Метод Брауна. В отличие от пошаговой линеаризации векторной функции $F(x)$, приведшей к методу Ньютона, Брауном предложено проводить на каждом итерационном шаге поочередную линеаризацию компонент вектор-функции $F(x)$, т. е. линеаризовать в системе (1) сначала функцию f_1, затем f_2 и т. д., и последовательно решать получаемые таким образом уравнения. Рассмотрим вывод расчетных формул метода Брауна в двумерном случае.

Пусть требуется найти решение системы

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}, \tag{14}$$

и пусть уже получены приближениях x_k, y_k.

Подменим первое уравнение системы (14) линейным, полученным по формуле Тейлора для функции двух переменных:

$$f(x,y) \approx f(x_k, y_k) + f_x'(x_k, y_k)\cdot(x - x_k) + f_y'(x_k, y_k)\cdot(y - y_k) = 0. \tag{15}$$

Отсюда выражаем x (обозначим этот результат через $\widetilde{x}$):

$$\widetilde{x} = x_k - \frac{1}{f_x'(x_k, y_k)}\left[f(x_k, y_k) + f_y'(x_k, y_k)(y - y_k)\right]. \tag{16}$$

При $y = y_k$ находим значение $\widetilde{x}_k$ переменной $\widetilde{x}$:

$$\widetilde{x}_k = x_k - \frac{f(x_k, y_k)}{f_x'(x_k, y_k)}, \tag{17}$$

которое будем считать лишь промежуточным приближением (т. е. не x_{k+1}), поскольку оно не учитывает второго уравнения системы (14).

Подставив в $g(x, y)$ вместо x переменную $\widetilde{x} = \widetilde{x}(y)$, придем к некоторой функции $G(y) = g(\widetilde{x}, y)$ только одной переменной y. Это позволяет линеаризовать второе уравнение системы (14) с помощью формулы Тейлора для функции одной переменной:

$$g(\widetilde{x}, y) \approx G(y_k) + G'(y_k)(y - y_k) = 0. \tag{18}$$

Производная функции $G(y)$

$$G'(y) = g_x'(\widetilde{x}, y) \cdot x_y' + g_y'(\widetilde{x}, y). \tag{19}$$

Дифференцируя по y равенство (16), получаем выражение

$$\widetilde{x}_y' = -\frac{f_y'(x_k, y_k)}{f_x'(x_k, y_k)}, \tag{20}$$

подстановка которого в равенство (19) при $y = y_k, \widetilde{x} = \widetilde{x}_k$ дает

$$G'(y_k) = -g_x'(\widetilde{x}_k, y_k) \cdot \frac{f_y'(x_k, y_k)}{f_x'(x_k, y_k)} + g_y'(\widetilde{x}_k, y_k). \tag{21}$$

При известных значениях $G(y_k) = g(\widetilde{x}_k, y_k)$ и $G'(y_k)$ теперь можно разрешить линейное уравнение (18) относительно y (назовем полученное значение y_{k+1}):

$$y_{k+1} = y_k - \frac{G(y_k)}{G'(y_k)} = y_k - \frac{g(\widetilde{x}_k, y_k) \cdot f_x'(x_k, y_k)}{f_x'(x_k, y_k) \cdot g_y'(\widetilde{x}_k, y_k) - f_y'(x_k, y_k) \cdot g_x'(\widetilde{x}_k, y_k)}. \tag{22}$$

Заменяя в (16) переменную y найденным значением y_{k+1}, приходим к значению x_{k+1}:

$$x_{k+1} = \widetilde{x}(y_{k+1}) = x_k - \frac{1}{f_x'(x_k, y_k)} \cdot \left[f(x_k, y_k) + f_y'(x_k, y_k) \cdot (y_{k+1} - y_k) \right]. \tag{23}$$

Таким образом, реализация метода Брауна решения двумерных нелинейных систем вида (14) сводится к следующему.

При выбранных начальных значениях каждое x_0, y_0 последующее приближение по методу Брауна находится при $k = 0, 1, 2, ...$ с помощью совокупности формул

$$\widetilde{x}_k = x_k - \frac{f(x_k, y_k)}{f_x'(x_k, y_k)}, \tag{24}$$

$$q_k = \frac{g(\widetilde{x}_k, y_k) \cdot f_x'(x_k, y_k)}{f_x'(x_k, y_k) \cdot g_y'(\widetilde{x}_k, y_k) - f_y'(x_k, y_k) \cdot g_x'(\widetilde{x}_k, y_k)}, \tag{25}$$

$$p_k = \frac{f(x_k, y_k) - q_k \cdot f_y'(x_k, y_k)}{f_x'(x_k, y_k)}, \tag{26}$$

$$x_{k+1} = x_k - p_k, \quad y_{k+1} = y_k - q_k, \tag{27}$$

счет по которым должен выполняться в той очередности, в которой они записаны.

В ходе вычислений следует контролировать немалость знаменателей расчетных формул. Заметим, что функции f и g в этом методе неравноправны, и перемена их ролями может изменить, ситуацию со сходимостью.

Решение системы нелинейных уравнений. Описанные методы решения систем нелинейных уравнений реализованы в среде программирования Microsoft Visual C++. С помощью разработанной программы были получены результаты решения системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \cos(x_1 - 1) + x_2 - 1 = 0, \\ \sin x_2 + 2 \cdot x_1 - 1{,}6 = 0 \end{cases} \qquad (28)$$

соответствующими методами при задании различных точностей.

Достигнутая точность численных расчетов оценивалась как норма разности приближенного решения на текущей и предыдущей итерациях:

$$\left\| x^k - x^{k-1} \right\| = \max_i \left| x_i^k - x_i^{k-1} \right|, \; i = 1, \ldots, n, \qquad (29)$$

где x^k – приближенное значение вектора решений на k-й итерации, x_i^k – приближенное значение i-й компоненты вектора решений на k-й итерации.

В таблице 1 представлены результаты сравнения эффективности использования численных методов для решения систем нелинейных уравнений.

Таблица 1

Результаты сравнения эффективности методов

Численный метод	Приближенное решение x^k	Число итераций k	Достигнутая точность $\left\| x^k - x^{k-1} \right\|$
Требуемая точность вычислений $\varepsilon = 10^{-3}$			
Ньютона	$\begin{pmatrix} 0{,}789 \\ 0{,}022 \end{pmatrix}$	4	0,000008
Бройдена	$\begin{pmatrix} 0{,}789 \\ 0{,}022 \end{pmatrix}$	6	0,0005
Брауна	$\begin{pmatrix} 0{,}789 \\ 0{,}022 \end{pmatrix}$	4	0,000007
Требуемая точность вычислений $\varepsilon = 10^{-6}$			
Ньютона	$\begin{pmatrix} 0{,}788902 \\ 0{,}022199 \end{pmatrix}$	5	0,000000002
Бройдена	$\begin{pmatrix} 0{,}788902 \\ 0{,}022199 \end{pmatrix}$	8	0,0000003
Брауна	$\begin{pmatrix} 0{,}788902 \\ 0{,}022199 \end{pmatrix}$	5	0,00000006

Методы Ньютона и Брауна имеют квадратичную скорость сходимости по сравнению с методом Бройдена, имеющего сверхлинейную сходимость.

В смысле вычислительных затрат метод Брауна более громоздкий, чем метод Ньютона, и рассчитывать на его эффективность можно лишь в случае, когда фигурирующие в нем частные производные заменяются разностными отношениями. Однако применение метода Ньютона требует подсчета и обращения якобиана на каждом итерационном шаге, а в методе Бройдена подсчет якобиана происходит только на первом шаге.

Поэтому при решении систем нелинейных уравнений с небольшой точностью приближенных вычислений удобнее воспользоваться методом Бройдена, у которого количество итерационных шагов при численном решении будет незначимо отличаться от числа шагов при решении системы методами Брауна и Ньютона. Если требуется найти решение системы нелинейных уравнений с высокой точностью, то целесообразнее применить метод Ньютона или метод Брауна с заменой частных производных разностными отношениями.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дэннис, Дж., Шнабель, Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений : пер. с англ. – М. : Мир, 1988. – 440 с.

2. Турчак, Л. И., Плотников, П. В. Основы численных методов. – М. : Физматлит, 2002. – 304 с.

3. Ветошкин, А. М. Структура квазиньютоновских методов минимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2010. – Т. 50, № 5. – С. 817–831.

4. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. – М. : Высшая школа, 2002. – 840 с.

5. Умбет, М. Б. Решение систем нелинейных уравнений с использованием численных методов // Международный научно-исследовательский журнал, 2015. – № 2-1 (33). – С. 99–101.

УДК 004.771

И. Н. Калягин, А. А. Воронцов (г. Пенза)

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ОБЛАЧНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЯХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЙ

В данной статье рассматривается динамика развития облачных технологий на российском и мировом рынках, выделяются особенности развития облачных сервисов, причины изменений.

Ключевые слова: *облачные технологии, облачный сервис, динамика, развитие, рынок облачных технологий.*

В течение последнего десятилетия все большее развитие в сфере информационных технологий занимают облачные сервисы. Они активно используются в системах образования, науки, медицины, бизнеса, входят в повседневную жизнь[1–3].

Первые идеи создания таких технологий, которые в будущем будут именоваться «облачными», были высказаны учеными еще в 60–70-х годах. Так, Д. К. Р. Ликлайдер говорил о необходимости создания такой сети, из которой каждый человек на земле сможет получать и данные, и различные программы, а Джон Маккарти утверждал, что вычислительные мощности будут предоставляться как услуга (сервис).

Первый облачный сервис был запущен компанией Amazon – «Elastic Compute cloud (EC2)» в 2006 году, а следом рынок облачных технологий пополнился предложениями Google, Sun и IBM.

С 2010 года начинают появляться облачные сервисы, ориентированные не только на разработчиков ПО, но и на обычных пользователей. А с 2012 года начинается активное использование облачных технологий в различных сферах деятельности, «облака» входят в повседневную жизнь пользователей [4–6].

Менее чем за 10 лет облачные технологии стали одним из господствующих направлений в сфере развития информационных технологий, заняли главенствующее место в жизни обычных пользователей. И это объясняется, прежде всего, особенностями облачных сервисов.

От других программных продуктов облачные сервисы отличаются следующими параметрами:

– предоставление необходимых ресурсов пользователю по требованию;

– широкий сетевой доступ (ресурсы доступны по сети для любого устройства: телефона, планшета, ноутбука);

– возможность объединения физических и виртуальных ресурсов поставщика для обслуживания клиентов по модели множественной аренды;

– отсутствие географической привязанности пользователей к источникам ресурсов;

– практически мгновенная эластичность (ресурсы могут предоставляться и возвращаться поставщику практически мгновенно, а также возможна настройка автоматического изменения объемов предоставляемых ресурсов в зависимости от спроса);

– измеримость сервиса (использованные ресурсы: объемы хранения, полоса пропускания, пользовательские сессии могут иметь количественную оценку, в связи с этим становится возможным модель оплаты облачных сервисов по факту потребления).

Рынок облачных технологий постоянно увеличивается [1–3]. По данным аналитического центра TAdviser, российский рынок облачных вычислений в 2013 году вырос вдвое по отношению к 2012 году и составил 10,97 млрд рублей.

Согласно данным, предоставленным IKS-Consulting, продажи услуг на российском облачном рынке за 2014 год составили около 13 млрд рублей, т. е. рост составил 35%. Большую часть на рынке занимают облачные сервисы, предоставляющие программное обеспечение как услугу, Software as a service (SaaS). Данные технологии позволяют не приобретать программный продукт, а воспользоваться им удаленно через Интернет при возникновении потребности, при этом пользователь не управляет инфраструктурой «облака», имея доступ только к пользовательским настройкам конфигурации приложения. За 2014 год на долю SaaS пришлось 89% выручки (около 11,7 млрд рублей).

Другой облачный сервис – Infrastructure as a service (IaaS) – принес только 9%. Инфраструктура как сервис предоставляет пользователю виртуальный сервер, и клиент может запустить на нем необходимое ему программное обеспечение.

Доля Платформ как сервисов (Platform as a Service, PaaS) за 2014 год составила всего лишь 2%. Пример такого решения – *Amazon Web Services*, где предлагается много сервисов для предоставления различных услуг: хранение данных, аренда виртуальных серверов, предоставление вычислительных мощностей [7-8].

Что касается прогнозов на будущее, то, по мнению IKS-Consulting, к 2018 году российский рынок облачных технологий будет оцениваться в 32 млрд рублей, а ежегодные темпы роста составят 27%. Доминирующими останутся SaaS-решения, а доля сегмента IaaS не сможет превысить 10%.

Динамика мирового рынка облачных технологий аналогична российскому, здесь также наблюдается стремительный рост объемов продаж. В 2014 году объем данного рынка превысил $17 млрд, т. е. вырос на 45%. Самые высокие темпы роста демонстрирует компания Microsoft: в первом квартале 2015 года объемы продаж облачных сервисов увеличились на 96% по сравнению с аналогичным периодом в 2014 году. Существенный рост показали и другие значимые компании этой области: Google (74%), IBM (56%), Salesforce (34%). Однако лидерство продолжает удерживать компания Amazon, ее доля составляет почти 30% рынка.

Основную часть мирового облачного рынка, так же как и российского, занимают SaaS-решения, их процент выручки – 70%, что в денежном эквиваленте равняется приблизительно $39,8 млрд. Оставшуюся часть практически поровну делят IaaS-решения (8,7 млрд) и PaaS (8,1 млрд). Явное преобладание SaaS-продуктов можно объяснить тем, что основной спрос, как среди отдельных пользователей, так и в компаниях, приходится на приложения, в то время как PaaS-решения набирают популярность в основном из-за необходимости компаний производить аналитику больших объемов данных [3–5].

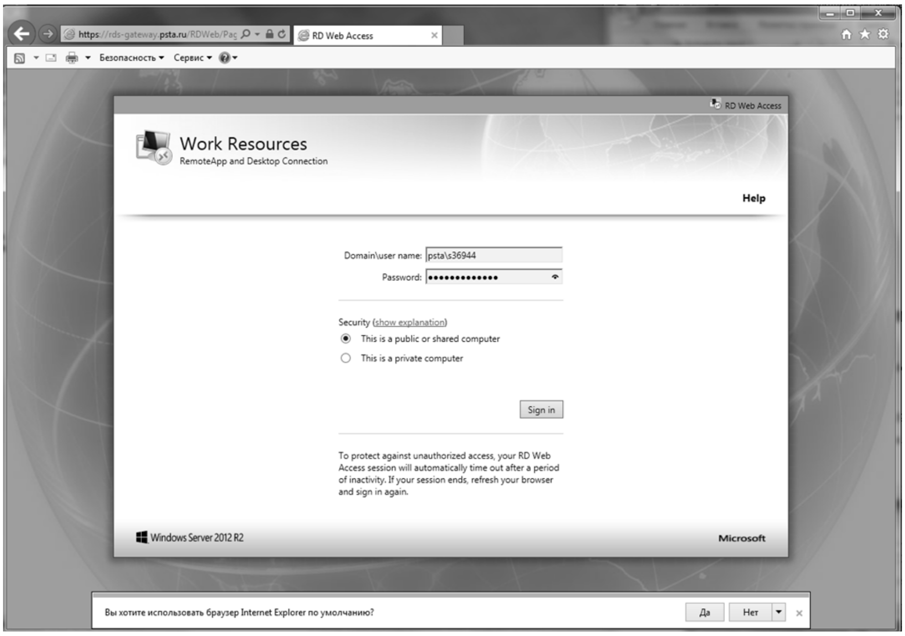


Рисунок 1 – Подключение к частному облаку ПензГТУ

Согласно прогнозам аналитиков компании International Data Corporation (IDC), к 2018 году инвестиции на рынке облачных технологий составят $127,5 млрд, а рост – 22,8%, что в шесть раз превышает прогнозируемый рост глобального ИТ-рынка.

Рынок облачных сервисов продолжает развиваться: появляются новые разработчики, действующие поставщики ищут способы удержать свои позиции. С каждым годом облачные технологии становятся более востребованными. Происходит активный переход производителей и поставщиков сервисов к облачным вычислениям, во многом это связано с непростыми экономическими условиями компаний, которые стремятся к сокращению затрат на построение целостной ИТ-инфраструктуры, заменяя капитальные расходы на операционные.

Рисунок 2 – Подключение к виртуальной машине частного облака ПензГТУ

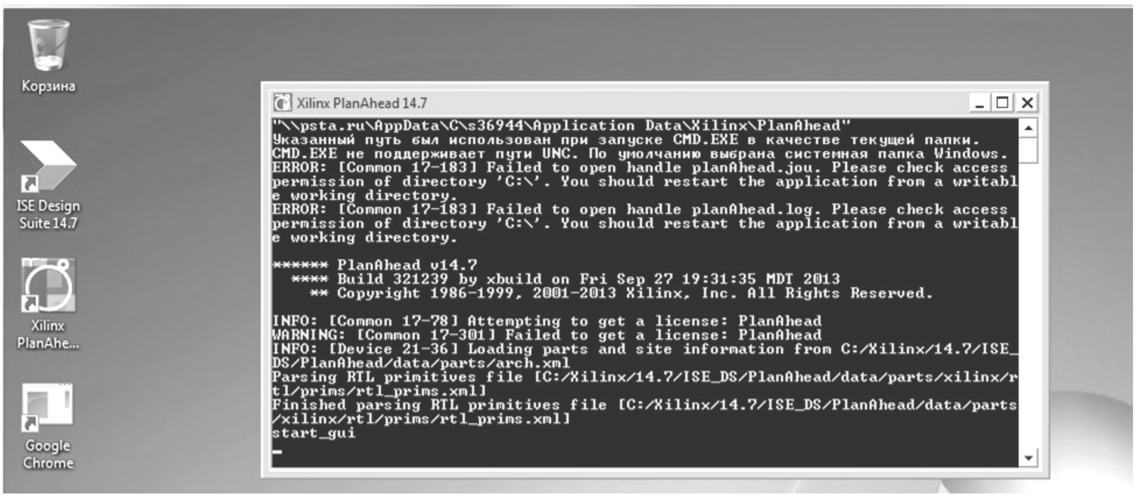


Рисунок 3 – Работа на виртуальной машине частного облака ПензГТУ

Необходимо отметить, что в последнее время стали появляться частные облака не только в бизнесе, но и в образовательном процессе. Их использование помогает работать с программным обеспечением, требовательному к ресурсам. Для их использования необходим браузер и выход в интернет. Так, для подключения к рабочему столу виртуальной машины частного облака Пензенского государственного технологического университета необходимо запустить WEB-браузер и в адресную строку ввести URL: https://rds-gateway.psta.ru/rdweb. В появившемся окне ввести свои идентификаторы, то есть имя пользователя и пароль (рисунок 1), выбрать виртуальную машину с установленном ПО (рисунок 2) и подключиться к ней (рисунок 3).

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания высшим учебным заведениям (проект № 3036).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Печерский, С. В., Печерская, Н. С. Особенности построения узла доступа к телематическим услугам связи в вузе // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – Пенза : ПензГТУ, 2014. – № 3 (19). – С. 196–199.

2. Печерский, С. В. Эффективная конфигурация системы управления учебными курсами Moodle для ее интеграции с системой рейтинговой оценки работы студентов ПензГТУ [Текст] // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – Пенза : ПензГТУ, 2013. – № 10 (14). – С. 131–134.

3. Печерский, С. В. Особенности использования системы управления учебными курсами Moodle при построении образовательного портала вуза // Современные информационные технологии. – Пенза : ПензГТУ, 2012. – № 15. – С. 102–103.

4. Бершадская, Е. Г., Евстифеев, Д. С. Оценка возможностей управления работой переводческого бюро с помощью электронных технологий // Международный студенческий научный вестник. – Пенза : ООО «Информационно-технический отдел Академии Естествознания», 2015. – № 3-2. – С. 264–265.

5. Печерский, С. В., Мошечков, В. В., Егоров, В. А. Особенности построения Web-портала вуза на базе CMS TYPO3 // Современные информационные технологии. – Пенза : ПензГТУ, 2013. – № 17. – С. 233–234.

6. Печерский, С. В., Бобков, Н. Ю., Печерская, Т. Н., Танасов, Д. И. Образовательный интернет-портал отделения железнодорожного транспорта ГАПОУ ПО «Пензенский многопрофильный колледж» // Современные информационные технологии. – Пенза : ПензГТУ, 2015. – № 21. – С. 152–155.

7. Бершадская, Е. Г. Анализ технологий поддержки научных исследований // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – Пенза : ПензГТУ, 2015. – № 3 (25). – С. 11–17.

8. Володин, В. А., Маркин, Д. И., Бершадская, Е. Г. К вопросу повышения точности геопозиционирования с использованием сотовой связи

9. // Современные наукоемкие технологии. – Пенза : Издательский Дом «Академия Естествознания», 2014. – № 5-2. – С. 87–88.

10. Бершадская, Е. Г., Володин, В. А., Маркин, Д. И. Обзор перспективных сервисов в навигационных системахприменительно к задаче позиционирования пользователей мобильных устройств // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – Пенза : ПензГТУ, 2014. – № 3 (19). – С. 119–122.

УДК 519.213.3

А. А. Кичерова (г. Тюмень)

ФОРМУЛА РОСТА

Получены формулы, позволяющие вычислить рост супругов, рост дочери и сына по сумме ростов родителей с учетом среднего квадратичного отклонения.

Ключевые слова: *коэффициент корреляции, теория вероятности, рост родителей, рост детей.*

Очень часто встречаются ситуации, когда две различные измеряемые величины связаны друг с другом довольно тесно, хотя и не предельно жестко. В математической статистике такие величины называют случайными в том смысле, что при их измерении получают статистический набор значений, несколько отличающихся друг от друга. Можно ли оценить тесноту статистической связи между двумя значениями, полученных при измерении случайных величин? Есть ли зависимость между ростом супругов? Зависит ли рост ребенка от роста родителей? Можно ли вычислить рост своего ребенка при достижении им взрослого возраста и как это сделать?

Предположим, что рост жены зависит от роста мужа на корреляционное значение r и рост детей зависит от суммы ростов родителей на корреляционное значение r.

В теории корреляции выводятся формулы, позволяющие вычислить коэффициент корреляции r, изменяющийся от 0 (связи не обнаружено) до 1 (связь 100%-ная), и записать линейное уравнение для связи между X и Y (его называют уравнением регрессии).

Наличие связи между ростом родителей и ростом их детей представляется заранее очевидным, предопределенным генетически. Из повседневных наблюдений ясно, что у высоких родителей более высокие дети, чем у низких, и нужно найти лишь показатели этой связи. Мною были собраны данные по 125 парам «муж–жена» и их детей в возрасте 16–20 лет (учащиеся школ и ТюмГНГУ). Анализируя данные, можно сделать вывод, что чем больше в среднем рост мужа, тем больше рост его супруги (хотя, конечно, существуют и такие пары, которые сильно выпадают из общей тенденции).

Расположив данные в таблице, проводим некоторые вычисления, а именно: среднее арифметическое каждого столбца (рост мужа (Y), жены (X), дочери и сына) и среднее арифметическое суммы ростов родителей. Полученные данные понадобятся для дальнейших исследований.

Следующий этап – вычисление СКО. Среднее квадратичное отклонение – в теории вероятности и статистике наиболее распространенный показатель рассеивания значений случайной величины относительно ее математического ожидания. Вычисляют СКО по формуле:

$$Sx=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \qquad (1)$$

и аналогично для величины Y. Полученные результаты на этом этапе являлись последними недостающими данными для вычисления коэффициента корреляции, который вычисляется по следующей формуле, которая известна из теории учебника и задачника В. Е. Гмурмана:

$$r=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{s_x\cdot s_y}\approx 0{,}35. \qquad (2)$$

Корреляция – статистическая взаимосвязь двух или нескольких случайных величин. При этом изменения значений одной или нескольких из этих величин сопутствуют систематическому изменению значений другой или других величин. Математической мерой корреляции двух случайных величин служит коэффициент корреляции *r*. Сильной обычно считают связь, начиная с *r* = 0,7. Полученная сила связи довольно значительная: величины роста супругов коррелируют между собой статистически значимо. Тем самым математически доказывается, что рост партнера учитывается в большинстве супружеских пар, хотя отнюдь не во всех.

Аналогичные расчеты были проведены по детям (*A* – дочь; *B* – сын) и их родителям, на основе которых был сделан вывод: рост детей в большей степени зависит от суммы ростов родителей.

Получив значение корреляции, можем записать два уравнения регрессии: одно из них позволяет найти *Y* (рост мужа), если известен *X*, а второе – найти *X* (рост жены), если задан *Y* (формулы взяты из теории учебника и задачника В. Е. Гмурмана):

$$y-\bar{y}=r\frac{s_y}{s_x}(x-\bar{x}); \qquad (3)$$

$$x-\bar{x}=r\frac{s_x}{s_y}(y-\bar{y}). \qquad (4)$$

Подставив все найденные значения в формулы 3 и 4, получим окончательно для прогнозирования роста супругов:

$$Y = 0{,}39x+112{,}3; \qquad (5)$$

$$X = 0{,}24y+122{,}2. \qquad (6)$$

А также формулы для расчета ростов детей:

$$\text{Рост дочери} = 0{,}5*(x+y)+0{,}175; \qquad (7)$$

$$\text{Рост сына} = 0{,}235*(x+y)+96{,}7. \qquad (8)$$

Конечно, интересно было бы дать прогноз величины роста дочери или сына за много лет до того, как они станут взрослыми или даже появятся на свет. Для этого можно воспользоваться выведенными уравнениями регрессии (7) и (8).

Так как коэффициент корреляции составил больше нуля, значит статическая связь между ростом мужа и жены, родителей и детей существует и она довольно значительна. Таким образом, мы выяснили, что рост детей в паре в большинстве зависит от суммы ростов родителей и по этим данным вывели эмпирические формулы (5, 6, 7 и 8), которыми могли бы воспользоваться мужчины и женщины, собирающиеся вступить в брак, и спрогнозировать будущий рост своих детей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Баранов, М. А., Горобец, Б. С. Взаимосвязан ли рост супругов? Как спрогнозировать рост детей по росту их родителей? // Математика в школе : научно-теорет. и метод. журн., 2009. – № 9. – С. 23–26.

2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – 3-е изд. – М. : Высшая школа, 1979. – 400 с.

3. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для вузов. – 5-е изд. – М. : Высшая школа, 1977.

УДК 519.852

Н. В. Плешко (г. Ульяновск)

ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ГРАФИЧЕСКИХ ИНТЕРПРЕТАЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В работе представлен новый подход к решению практических задач о принятии решений в повседневных ситуациях методами динамического программирования с помощью представления результатов в виде наглядных графических интерпретаций. Метод иллюстрируется на примере задачи о замене оборудования, стандартно решаемой путем составления таблиц и выписывания рекуррентных соотношений. Метод является простым и может быть использован при проведении математических кружков и факультативов даже со школьниками.

Ключевые слова: *динамическое программирование, замена оборудования, графы.*

В последние годы математические методы все шире входят в такие области деятельности человека, которые были ранее достаточно далеки от математики. Математические модели все чаще используются не только в физике и информатике, но и становятся уже совершенно традиционными в экономике [3, 5, 7, 12], в управлении и менеджменте [16, 20], в теории принятия управленческих решений [17], применяются в биологии и медицине, при моделировании действия тех или иных лекарственных веществ [10, 15], при составлении расписаний и сменных графиков [2, 5, 13], в социальной работе [9], в системах голосования [8], при анализе деятельности магазинов и других обслуживающих систем [4, 5, 19].

Чрезвычайно важную роль в методах математического моделирования, применяемого при решении прикладных задач играют методы динамического программирования [6, 14, 18]. Однако традиционные методы требуют применения выписывания рекуррентных соотношений, что является достаточно громоздким и малодоступным, допустим, для выпускника средней школы, либо для человека, имеющего высшее, но не математическое образование. В то же время данные методы могут быть весьма полезными и для данных категорий лиц, если изложить их в более простой, наглядной и доступной форме. Например, каждому человеку время от времени приходится иметь дело с банками (либо инвестированием средств в те или иные предприятия и структуры, либо получая кредиты). В работе [11] представлен алгоритм, позволяющий решать подобные задачи без выписывания рекуррентных соотношений. В настоящем исследовании мы представляем описание еще одной практической задачи, которую можно решить методами динамического программирования без составления рекуррентных соотношений – задачи о замене изношенного оборудования на новое, с которой также сталкивается почти каждый человек. Традиционно эти задачи решаются с помощью составления большого количества громоздких таблиц и выписывания длинных формул [1, 18]. Мы предлагаем рассмотреть метод решения задач динамического программирования с помощью составления графов.

Рассмотрим задачу о замене оборудования из учебника автора Хемди А. Таха [18, упр. 10.3.3, №2].

Задача 1. «Мой тринадцатилетний сын занимается собственным бизнесом – косит газоны десяти клиентам. Каждому клиенту он косит газон три раза в год, получая за один скошенный газон 50 долл. На протяжении первого года затраты на содержание и использование косилки равны 120 долл., и через год они увеличиваются на 20%. Одногодичная косилка может быть продана за 150 долл., и с каждым годом ее стоимость уменьшается на 10%. Мой сын планирует продолжить свой бизнес, пока ему не исполнится 16 лет, и считает, что более выгодно менять косилку через каждые два года. Он объясняет это тем, что цена новой косилки увеличивается за год лишь на 10%. Справедливо ли его решение?»

Для начала составим таблицу с данными задачи.

Таблица 1

Зависимости стоимости косилки и затрат
на ее содержание от возраста сына

Возраст сына	13	14	15	16
Стоимость новой косилки (долл.)	200	$200 \cdot 1{,}1 = 220$	$220 \cdot 1{,}1 = 242$	$242 \cdot 1{,}1 = 266{,}2$
Затраты на содержание (долл.)	120	$120 \cdot 1{,}2 = 144$	$144 \cdot 1{,}2 = 172{,}8$	$172{,}8 \cdot 1{,}2 = 207{,}36$

Таблица 2. Зависимость остаточной стоимости косилки от ее возраста

Возраст Косилки	1 год	2 года	3 года	4 года
Остаточная стоимость (долл.)	150	$150 \cdot 0{,}9 = 135$	$135 \cdot 0{,}9 = 121{,}5$	$121{,}5 \cdot 0{,}9 = 109{,}35$

Пусть в конце рабочего периода мальчика косилка продается.

Прибыль, которую получит мальчик за один год, составляет $10 \cdot 3 \cdot 50 = 1500$ долл.

Удобство данного метода в том, что решение задачи помещается на одном графике, что существенно сокращает оформление решения. Приведем этот график.

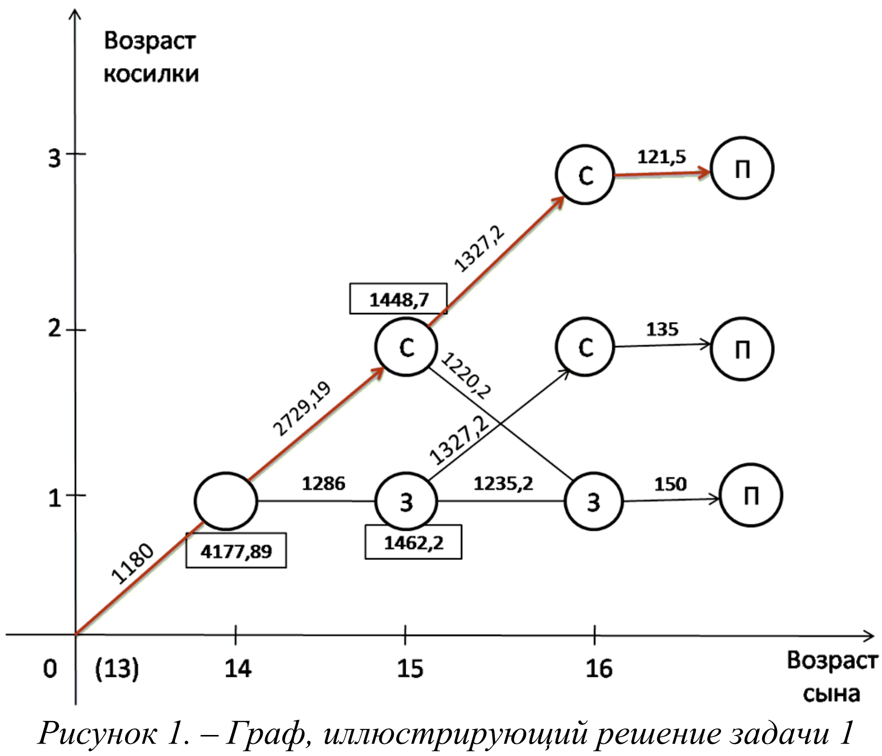


Рисунок 1. – Граф, иллюстрирующий решение задачи 1

График располагается на координатной плоскости. На оси абсцисс будем указывать возраст сына, на оси ординат – возраст оборудования. Способ деления на этапы естественный – по годам. То есть, когда мальчику 13 лет – это первый этап, 14 лет – 2 этап и т.д. Действия начинаются в начале координат, когда сыну 13 лет. Это первый этап. На этом этапе он должен приобрести косилку. Также этот шаг сопровождается затратами на содержание косилки и получением прибыли за год. Через год мы оказываемся в точке (14, 1). Это значит, что мальчику исполнилось 14 лет, а косилке – 1 год. На втором этапе мальчику следует сделать выбор, сохранить косилку (С) еще на один год пользования или заменить ее (З), то есть продать и купить новую. Таким образом, если он решит сохранить косилку, то через год мы окажемся в точке (15,2). Это значит, что мальчику исполнится 15 лет, а косилке – 2 года. Если он решит заменить косилку, то мы окажемся в точке (15, 1). Это значит, что мальчику через год будет 15 лет, а новая косилка, которую он приобретет в 14 лет, устареет на 1 год. На третьем этапе в каждой из точек, (15,1) и (15,2), снова нужно принимать решение, сохранить или заменить оборудование, поэтому график будет постепенно разветвляться.

Когда мы, аналогично рассуждая на каждом этапе, достроим график, то переходим к следующему действию. Над каждым отрезком, соединяющим точки, нужно посчитать соответствующие прибыли, пользуясь таблицами. Рассмотрим, например, состояние системы в точке (15,2). Если мальчик примет решение сохранить оборудование, тогда в течение года он получит прибыль 1500, и также будут производиться затраты на содержание косилки. Мальчику будет 15 лет, значит, затраты на содержание будут составлять 172,8 долл. И прибыль в таком случае будет 1500 – 172,8 = 1327,2 долл. Над отрезком, соединяющим точки (15,2) и (16,3) фиксируем чистую прибыль 1327,2 долл. Если же мальчик примет решение заменить оборудование, значит, продается двухлетняя косилка, далее покупается новая с учетом того, что мальчику 15 лет (так как стоимость косилки зависит от этапа, на котором производится покупка), затем производятся затраты на содержание новой косилки и в течение года мальчик зарабатывает 1500 долл. Чистая прибыль составит 135 – 242 – 172,8 + 1500 = 1220,2 долл. Фиксируем ее на соответствующем отрезке. Аналогичным способом рассчитываем прибыли на остальных отрезках.

Последнее действие в решении – выбрать самый оптимальный «путь» от начального состояния управления (начала координат) до момента продажи оборудования так, чтобы прибыль была максимальной. Используется принцип Беллмана: оптимальным считается не наилучшее решение на данном этапе, а наилучшее с учетом всех его последствий на всех остальных этапах.

Принимаем метод обратной прогонки, то есть решаем задачу от последнего этапа к первому. Оптимальный «путь» показан на графике красными стрелочками, и максимальная прибыль составляет 4177,89 + 1180 = 5357,89 долл.

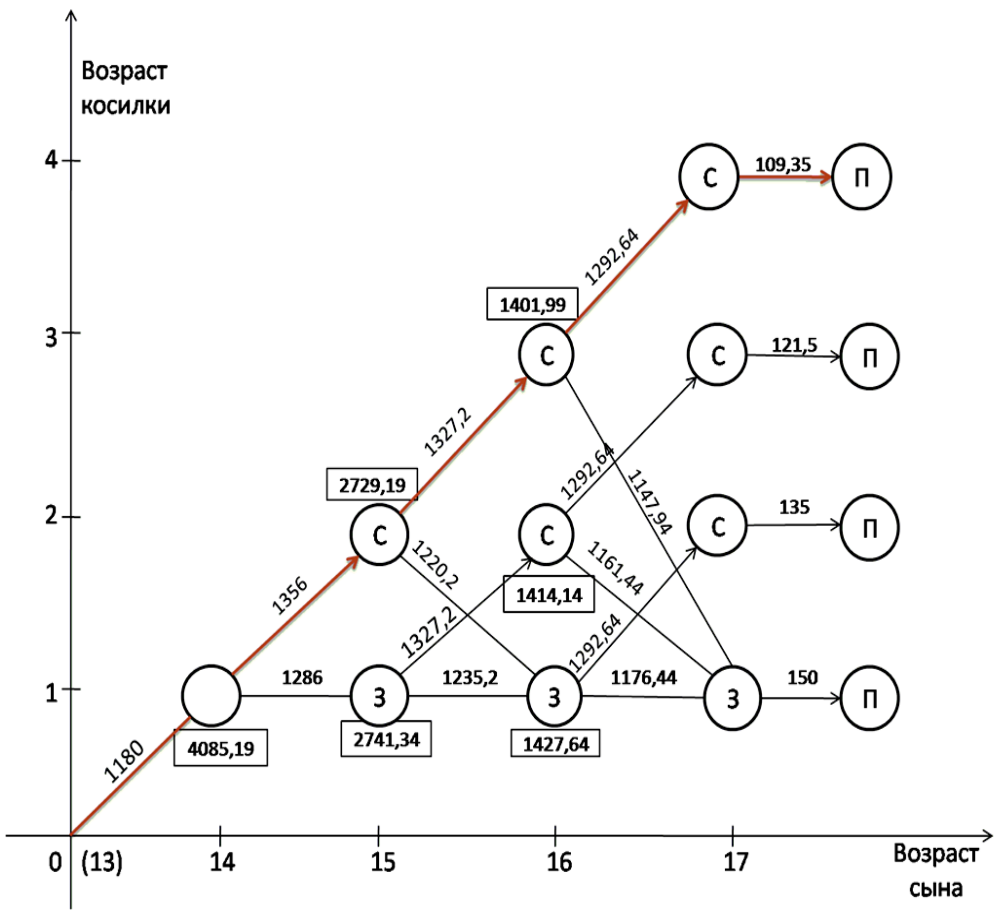


Рисунок 2 – Граф, иллюстрирующий решение задачи 2

Оптимальный «путь» мы определяли для того, чтобы ответить на вопрос задачи. Решение сына оказалось несправедливым, так как если менять косилку через два года, то прибыль окажется не максимальной. Максимальную прибыль он получит в случае, если не будет заменять косилку вообще.

Таким образом, решение задачи без пояснений занимает менее одной страницы. В случае, если мы будем использовать табличный метод, и выписывать рекуррентные соотношения, то решение займет около двух страниц без пояснений. Также графический метод удобен тем, что не нужно выписывать рекуррентные соотношения, а чистые прибыли и условно-оптимальные решения на каждом этапе можно посчитать устно или в случае громоздких чисел, воспользоваться калькулятором.

Преимущество графического метода состоит также в том, что если рассмотреть усложненную задачу (пусть мальчик планирует заниматься бизнесом, пока ему не исполнится 17 лет – задача 2), то традиционный метод решения будет занимать более двух страниц, в то время как график увеличится незначительно (рис. 2), решение будет также занимать менее одной страницы.

Решение усложненной задачи показывает, что максимальная прибыль будет достигаться только в том случае, если на каждом этапе принимать решение сохранить оборудование. Максимальная прибыль составит 4085,19 + 1180 = 5265,19 долл.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акулич, Л. И. Математическое программирование в примерах и задачах : учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. – М. : Высшая школа, 1986. – 319 с.

2. Афанасьев, М. Ю., Багриновский, К. А., Матюшок, В. М. Прикладные задачи исследования операций : учебное пособие. – М. : Инфра-М, 2006. – 352 с.

3. Васильева, Е. Г., Инхеева, Л. И., Улымжиев, М. Д. Применение линейной алгебры в экономике. – Улан-Уде : ВСГТУ, 2004. – 17 с.

4. Вентцель, Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. – М. : Наука, 1980. – 208 с.

5. Верник, А. Н., Эткин, А. Е., Эткина, Г. П. Математические методы и модели в экономике. – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – 208 с.

6. Волков, И. К. Загоруйко, Е. А. Исследование операций : учеб. для вузов / под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М. : Изд-во МГТУ им. Баумана, 2002. – 436 с.

7. Высшая математика для экономистов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Прутко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман ; под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2004. – 471 с.

8. Глухов, В. П., Глухова, Н. В. Математическое моделирование как средство повышения интереса к математике // Актуальные вопросы методики обучения математике, физике и информатике : материалы Всероссийского конкурса науч. тр. студентов пед. вузов «Будущие учителя – школе» и Всероссийской научно-практической конференции препод. мат., физ. и информ. школ и вузов – Ульяновск, 2012. – С. 101–105.

9. Глухова, Н. В. О мотивации изучения математических дисциплин студентами, обучающимися по направлению подготовки «Социальная работа» // Проблемы современного математического образования высшей школе : материалы Международной заоч. науч. конф. – Ульяновск : УлГПУ, 2013. – С. 130–134.

10 Глухова, Н. В. Математические модели для магистров-биологов : учебное пособие. – Ульяновск : УлГПУ, 2016. – 90 с.

11. Глухова, Н. В. Новая методика изучения темы «динамическое программирование» на примере задачи об инвестировании для студентов, обучающихся экономике и управлению // Фундаментальные исследования, 2014. – № 8, Ч. 4. – С. 950–954.

12. Глухова, Н. В., Череватенко, О. И. Линейное программирование в управлении персоналом: учебное пособие для направления подготовки бакалавров 080400.62. – Ульяновск : УлГПУ, 2013. – 70 с.

13. Горлач, Б. А. Исследование операций : учебный комплекс для студентов вузов, обучающихся по экономическим и техническим специальностям. – Самара : Аэропринт, 2008. – 370 с.

14. Грешилов, А. А. Прикладные задачи математического программирования : учебное пособие – 2-е изд. – М. : Логос, 2006. – 288 с.

15. Евстигнеев, Д. А., Кузнецова, И. В., Глухова, Н. В. Анализ действия блокаторов калиевых каналов тетраэтиламмония и 4-аминопиридина на электрическую активность миелинизированных нервных волокон амфибий. – Ульяновск : УВАУ ГА, УлГПУ, 2009. – 431 с.

16. Исследование операций и математические модели в экономике. Лабораторные работы для студентов специальности «Управление персоналом» : учебно-методическое пособие / сост. Н. В. Глухова. – Ульяновск : УлГПУ, 2009. – 44 с.

17. Розен В. В. Математические модели принятия решений в экономике. – М. : Высшая школа, 2002. – 288 с.

18. Таха Х. А. Введение в исследование операций. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

19. Теория вероятностей с элементами математической статистики и анализа систем массового обслуживания. Часть 2. Математическая статистика. Элементы теории случайных процессов и теории массового обслуживания : учебное пособие для студентов специальности «Управление персоналом» / сост. Н. А. Волкова, Н. В. Глухова. – Ульяновск : УлГПУ, 2010. – 76 с.

20. Шикин, Е. В., Чхартишвили, А. Г. Математические методы и модели в управлении. – М. : Дело. – 2004. – 440 с.

УДК 517.984

Д. А. Спиридонов, Б. А. Горлач (г.Самара)

МНОГОМЕРНЫЕ СИМПЛЕКСЫ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассмотрен и подробно изучен один из методов оптимизации на примере решения задачи поиска экстремального значения функции нескольких переменных симплекс методом, выявлены его сильные и слабые стороны.

Ключевые слова: *симплекс, оптимизация, экстремум, гипертетраэдр.*

В современной экономике и производственной деятельности особое внимание уделяется задачам оптимизации и методам их решения.

Поэтому сегодня, оптимизация глубоко изучается в современной математике. В этом разделе объединены разнообразные методы, которые позволяют решать важные экономические задачи. Например, это задачи о распределении инвестиций по различным проектам и компаниям, оптимизации срока замены и технического обслуживания оборудования, нахождении требуемого объема выпуска продукции, формировании объема запасов и распределении ресурсов.

Если в задаче имеется несколько возможных вариантов решения, то всегда существует один – оптимальный из них. Например, мы выбираем поставщиков, материалы, качество продукции и так далее. При этом незначительное изменение в плане может дать значительный выигрыш в снижении затрат.

Нахождение оптимальных решений обеспечивается использованием математического программирования.

Очевидно, что задачи оптимизации связаны с такими дисциплинами как теория вероятности, статистика и анализ данных. С их помощью, используя реальные данные, становится возможной оценка состояния системы и последующие применение принципов оптимального управления.

Для поиска экстремума функции без использования производных целесообразно использовать симплексный метод. Благодаря своей простоте и наглядности он широко используется в решении различных оптимизационных задач. Данный метод детально разработан в разделе высшей математики «математическое программирование» и внедрен в практику вычислительной техники. Его суть состоит в последовательном приближении точек исследуемого пространства к точке с экстремумом функции.

Механизм работы симплексного метода в двумерном пространстве R^2, где симплексы представляют собой равносторонние треугольники, хорошо изучен и не вызывает трудностей. В n-мерном пространстве метод работает аналогично, но в этом случае симплекс представляет собой (n+1)- угольный «гипертетраэдр».

Перед тем как приступить непосредственно к поиску экстремального значения, необходимо убедиться в его существовании и характере. Если функция выпуклая, то она имеет локальный минимум, вогнутая – максимум. Для определения характера выпуклости следует построить матрицу коэффициентов квадратичной формы функции и найти главные миноры. При положительных значениях всех миноров функция выпуклая.

Рассмотрим алгоритм метода для поиска экстремума выпуклой функции нескольких переменных $u(x_1,..x_n)$.

1. Начальную вершину M_0 с координатами $X_0(x_0^1;\ldots;x_0^n)$ выбираем произвольно. Далее определяем координаты остальных n вершин Mi первого симплекса:

$$\begin{gathered}
\mathrm{M}_1(x_0^1+p, x_0^1+q, \ldots x_0^n+q),\\
\mathrm{M}_2(x_0^1+q, x_0^2+p, \ldots x_0^n+q),\\
\ldots\\
\mathrm{M}_n(x_0^1+q, x_0^2+q, \ldots x_0^n+p),
\end{gathered} \tag{1}$$

где параметры p и q отвечают за равность сторон симплекса [1]

$$p=\left(\frac{\sqrt{n+1}-1}{n\sqrt{2}}\right)d; \tag{2}$$

$$q=\left(\frac{\sqrt{n+1}+n-1}{n\sqrt{2}}\right)d. \tag{3}$$

Параметр d определяет размер симплекс треугольника.

2. На втором шаге просчитываются значения функции во всех точках гипертетраэдра $u(X_0)\ldots u(X_n)$. При определении минимума (максимума) функции необходимо из полученных значений выбрать вершину с максимальным (минимальным) значением $u_{max}=max\{u_0,u_1,\ldots u_k,..,u_n\} = u_k$, $k=(\overline{1,n}\,)$.

3. Относительно вершины $M_k(X_k)$ исходного симплекса строим новый симплекс с вершиной $M_{n+1}(X_{n+1})$, противоположной вершине u_k. Координаты вершины M_{n+1} определяем по формуле:

$$x_{i+n+1}^{n+1}=\frac{2}{n}\sum_{r=1}^{n} x_{i+r}-x_{i+0}. \tag{4}$$

4. Определяем значение функции $u_{n+1}=u(X_{n+1})$ и сравниваем его с значением u_k. Если выполняется неравенство $u_{n+1} > u_k$, значит точка минимума находится внутри нового симплекса и за наименьшее значение

функции u_{min} принимаем минимальное значение в вершине нового симплекса. Иначе, если неравенство $u_{n+1} > u_k$ не выполняется, то продолжаем выполнение итераций с шага 2.

Пример. Определить экстремальное значение функции

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$$

Чтобы определить существование и характер экстремума построим матрицу коэффициентов квадратичной формы функции u:

$$K(x, y, z) = (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$M1 = |1| > 0;\ M2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0;\ M3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Положительные значения всех главных миноров указывают на то, что функция u выпукла во всей бесконечной области ее существования и, следовательно, имеет локальный минимум.

Размер симплекса зададим d=1, тогда при n=3 параметр

$$p\left(\frac{\sqrt{3+1}-1}{3\sqrt{2}}\right)1 = 0{,}9428=; \qquad q=\left(\frac{\sqrt{3+1}+3-1}{3\sqrt{2}}\right)1 = 0{,}2357;$$

Начальной точке M_0 тетраэдра $M_0M_1M_2M_3$ зададим координаты $X_0(0;0;0)$, тогда координаты оставшихся вершин определяются по формуле (1):

$$X_1 = (p; q; q) = (0{,}9428; 0{,}2357; 0{,}2357);$$
$$X_2 = (p; q; q) = (0{,}2357; 0{,}9428; 0{,}2357);$$
$$X_3 = (p; q; q) = (0{,}2357; 0{,}2357; 0{,}9428);$$

В этих точках функция принимает следующие значения: $u(X_0)=0;\ u(X_1)=2{,}41;\ u(X_2)=3{,}82;\ u(X_3)= -3{,}24$;

Выбираем максимальное значение функции в вершинах исходного тетраэдра.

$$u_{max} = max\ \{u_0; u_1; u_2; u_3\} = max\ \{0; 2{,}41; 3{,}82; -3{,}24\} = 3{,}82 = u_2$$

Находим координаты точки $M_4(X_4)$ симметричной точке $M_2(X_2)$ относительно плоскости $M_0M_1M_3$ по формуле (4):

$$X4(0{,}5499;\ -0{,}6285;\ 0{,}5499).$$

Значение $u(X_4)= -3{,}71$. Так как $u(X_4)<u(X_2)$, то значит точка минимума не «накрыта». Итерации следует продолжать. Максимальное значение функция принимает в вершине M_1 второго симплекса, поэтому симметрично ей, относительно плоскости $M_1M_2M_3$ построим новый симплекс с вершиной M_5. Данные последующих итераций представлены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты поиска экстремума функции

Xi	x_i^1	x_i^2	x_i^3	*u(Xi)*	u_{min}
X0	0	0	0	0	
X1	0,942809	0,235702	0,235702	2,414214	
X2	0,235702	0,942809	0,235702	3,828427	
X3	0,235702	0,235702	0,942809	-3,24264	-3,24264
X4	0,549972	-0,62854	0,549972	-3,71405	-3,71405
X5	-0,26189	0,130946	0,91662	-4,57379	-3,24264
X6	0,113486	-1,1174	1,370565	-9,32611	-9,32611
X7	0,032009	-1,31237	0,948629	-8,25399	-8,25399
X8	-0,62757	-0,90401	1,607237	-10,7203	-10,7203
X9	-0,05949	-2,35347	1,701001	-11,3031	-11,3031
X10	-0,41439	-1,60422	2,170573	-12,8125	-12,8125
X11	-0,76631	-1,92876	2,703912	-13,8526	-13,8526
X12	-0,19923	-3,02029	2,77642	-12,2678	-13,8526
X13	-0,86046	-2,01538	3,399603	-13,8206	-13,8206
X14	*-1,16155*	*-0,67862*	*2,739638*	*-12,1601*	*-13,8526*

На 12 шаге выполнилось неравенство $u_{n+1} > u_k$ из чего следует, что минимальное значение функции $u_{min} = -13{,}85$. Точное минимальное значение функции $u_{min} = u(-1;-2;3) = -14$.

При относительно медленной работе, метод дает значение, близкое к оптимальному. Преимуществом данного метода является использование небольшого числа параметров, определенных заранее.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Горлач, Б. А. Математика: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2006. – 911 с.

2. Горлач, Б. А. Математический анализ. – СПб. : Лань, 2013. – 608 с.

УДК 519.248

К. А. Федорова, Ю. Е. Кувайскова (г. Ульяновск)

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДОВ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ В ЗАДАЧАХ ТЕХНИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ

Техническая диагностика сводится к определению работоспособности объекта. Проведено исследование возможности применения аппарата нечеткого логического вывода об исправной или неисправной работе технического объекта. Определен алгоритм нечеткой логики для решения задачи технической диагностики.

Ключевые слова: *нечеткая логика, техническая диагностика.*

Задачей технической диагностики [1] является обеспечение исправной и надежной работы технического объекта. Для диагностирования технического состояния объекта возможно прогнозирование контролируемых параметров объекта с целью раннего предупреждения об опасных и аварийных ситуациях [2–4].

Для обеспечения стабильной работы технического объекта предлагается применение методов нечеткой логики [5–6]. Методы нечеткой логики позволяют описать процесс принятия решения по управлению объектом на естественном языке с использованием привычных для человека качественных оценок и учесть опыт экспертов для динамического управления процессом [7].

Диагностика объектов на исправные и неисправные является задачей классификации. Классификация обычно состоит из двух частей:

1) определение рассматриваемых классов;
2) назначение элементов классам.

Существует три типа методов назначения в соответствии с получаемым результатом:

1) двоичный: элемент либо принадлежит, либо не принадлежит классу;
2) вероятностный: элемент, вероятно, принадлежит двоичному классу;
3) градационный: элемент имеет степень принадлежности какому-либо классу.

Для диагностики объектов необходима разработка базы правил нечеткой логики. Целью базовых правил нечеткой логики является формализация и применение человеческого умозаключения.

Применяются правила следующего типа: IF «утверждение» THEN «результат». Например: IF «высокая температура» AND «высокое давление» THEN «хорошая вентиляция» AND «открытый клапан».

Базы правил нечеткой логики основываются на базе знаний, построенной на основе человеческого опыта. Процесс логического вывода включает следующие этапы: фаззификация (введение нечеткости), нечеткий логический вывод (база правил) и дефаззификация (приведение к четкости).

Для описания нечетких множеств вводятся понятия нечеткой и лингвистической переменных.

Нечеткая переменная описывается набором (N, X, A), где N – это название переменной, X – универсальное множество (область рассуждений), A – нечеткое множество на X.

Значениями лингвистической переменной могут быть нечеткие переменные, т. е. лингвистическая переменная находится на более высоком уровне, чем нечеткая переменная. Каждая лингвистическая переменная состоит из:

- названия;
- множества своих значений – базового терм-множества T, элементы которого представляют собой названия нечетких переменных;
- универсального множества X;
- синтаксического правила G, по которому генерируются новые термы с применением слов естественного или формального языка;
- семантического правила P, которое каждому значению лингвистической переменной ставит в соответствие нечеткое подмножество множества X.

Алгоритмы нечеткого вывода различаются главным образом видом используемых правил, логических операций и разновидностью метода дефаззификации. Для решения задачи технической диагностики предлагается модель нечеткого вывода Mamdani [8-9].

В системах типа Mamdani (Рис. 1) база знаний строится из нечетких высказываний вида «β есть α» с помощью связок «И», «Если…, то…» .

Предположим, что базу знаний образуют два нечетких правила:

Правило 1: если x есть A_1 и y есть B_1, то z есть C_1,

Правило 2: если x есть A_2 и y есть B_2, то z есть C_2,

где x и y – имена входных переменных, z – имя переменной вывода, A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 – некоторые заданные функции принадлежности, при этом четкое знание z_0 необходимо определить на основании приведенной информации и четких знаний x_0, y_0.

Этапы нечеткого вывода реализуются следующим образом:

1) Фаззификация: находятся степени истинности для предпосылок каждого правила:

$$A_1(x_0), A_2(x_0), B_1(y_0), B_2(y_0). \quad (1)$$

2) Вывод: находятся уровни отсечения для предпосылок каждого из правил с использованием операций минимум:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= A_1(x_0) \wedge B_1(y_0),\\ \alpha_2 &= A_2(x_0) \wedge B_2(y_0)\end{aligned}, \tag{2}$$

где $\wedge$ – операция логического минимума.

Затем находятся усеченные функции принадлежности:

$$\begin{aligned}C_1'(z) &= (\alpha_1 \wedge C_1(z)),\\ C_2'(z) &= (\alpha_2 \wedge C_2(z)).\end{aligned} \tag{3}$$

3) Композиция: с использованием операции максимум (обозначается как «∨») производится объединение найденных усеченных функций, что приводит к получению итогового нечеткого подмножества для переменной выхода с функцией принадлежности:

$$\mu_\Sigma(z) = C(z) = C_1'(z) \vee C_2'(z) = (\alpha_1 \wedge C_1(z)) \vee (\alpha_2 \wedge C_2(z)). \tag{4}$$

4) Приведение к четкости для получения z_0 производится методом центра тяжести:

$$z_0 = \frac{\int\limits_\Omega z\mu_\Sigma(z)dz}{\int\limits_\Omega \mu_\Sigma(z)dz}. \tag{5}$$

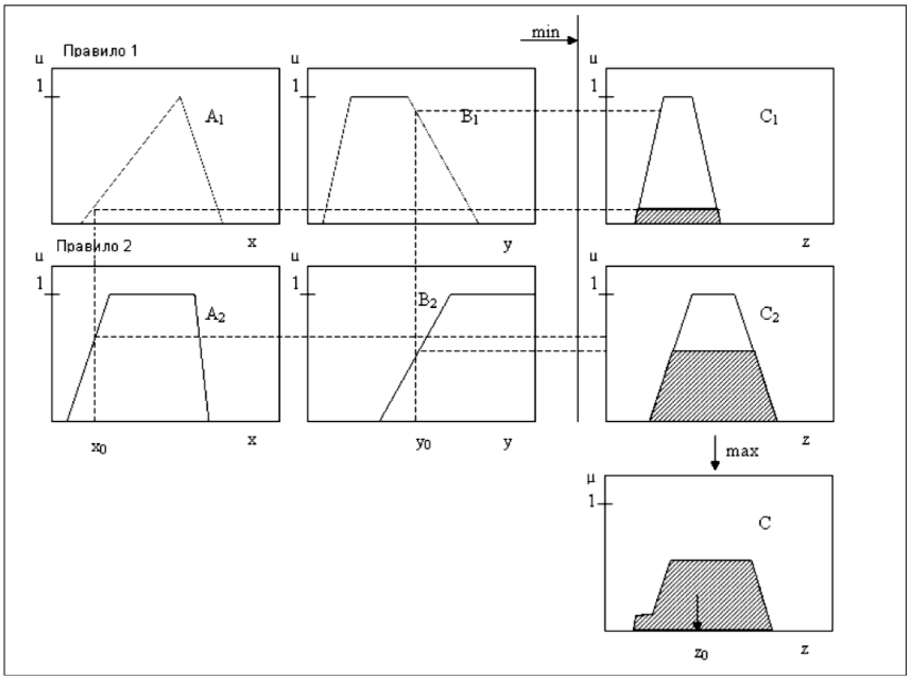


Рисунок 1 – Реализация алгоритма Matmdani

Проведенное исследование показало возможность использования методов нечеткого логического вывода в задачах технической диагностики. Аппарат нечеткой логики может быть применен на этапе принятия решения по управлению объектом в случае, если прогнозируемые значения контролируемых показателей объекта вышли за предельно допустимые значения.

К достоинствам методов нечеткой логики можно отнести их успешное использование во встроенных системах контроля и анализа информации, при этом происходит подключение человеческой интуиции и опыта оператора. По сравнению с вероятностным методом, нечеткий метод позволяет резко сократить объем производимых вычислений, что, в свою очередь, приводит к увеличению быстродействия нечетких систем.

В качестве недостатков применения нечеткой логики можно отметить отсутствие стандартной методики конструирования нечетких систем; невозможность математического анализа нечетких систем существующими методами; применение нечеткого подхода по сравнению с вероятностным не приводит к повышению точности вычислений.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-38-00211 мол_а.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

10. Биргер, И. А. Техническая диагностика. – М. : Машиностроение, 1978. – 240 с.

11. Кувайскова, Ю. Е., Клячкин, В. Н., Бубырь, Д. С. Прогнозирование состояния технического объекта на основе мониторинга его параметров // XII всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014 : сб. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. – 2014. – С. 7616–7626.

12. Клячкин, В. Н., Кувайскова, Ю. Е., Бубырь, Д. С. Прогнозирование состояния объекта с использованием систем временных рядов // Радиотехника, 2015. – № 6. – С. 45–47.

13. Клячкин, В. Н., Кувайскова, Ю. Е., Алешина, А. А., Кравцов, Ю. А. Информационно-математическая система раннего предупреждения об аварийной ситуации // Известия Самарского научного центра Российской академии наук, 2013. – Т. 15, № 4-4. – С. 919–923.

14. Заде, Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М. : Мир, 1976. – 166 с.

15. Ярушкина, Н. Г. Основы теории нечетких и гибридных систем. – М. : Финансы и статистика, 2004. – 320 с.

16. Титов, В. С., Бобырь, М. В., Тевс, С. С. Выбор оптимальных параметров управления технологическим процессом методами нечеткой логики // Промышленные АСУ и контроллеры, 2003. – № 5. – С. 21–23.

17. Леоненков, А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб. : БХВ-Петербург, 2003. – 736 с.

18. Штовба, С. Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. – М. : Горячая линия-Телеком, 2007. – 288 с.

УДК 517.248

М. К. Федорова, В. Н. Клячкин (г. Ульяновск)

МНОГОМЕРНЫЙ СТАТИСТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ СРЕДНЕГО УРОВНЯ И РАССЕЯНИЯ ПРОЦЕССА

Предложен алгоритм многомерного статистического контроля процесса по двум критериям: стабильности среднего уровня на базе статистики Хотеллинга и стабильности рассеяния на основе обобщенной дисперсии. Для повышения чувствительности контроля к возможным нарушениям процесса предложено при его мониторинге анализировать неслучайные структуры и использовать предупреждающую границу.

Ключевые слова: *алгоритм Хотеллинга, обобщенная дисперсия.*

Наиболее распространенным инструментом статистического контроля независимых параметров процесса является карта Шухарта. Как правило, используются двойные карты – одновременно проверяются две нулевые гипотезы: о равенстве средних заданному значению и о равенстве дисперсии некоторому номинальному значению. Для контроля стабильности среднего уровня процесса применяются карты средних, медиан, индивидуальных наблюдений, для контроля его рассеяния – карты размахов, стандартных отклонений, дисперсий [1–3]. Эти инструменты применяются к самым разнообразным процессам: в машиностроении, металлургии, радиотехнике, экологии и т. д. [3–4].

При многомерном контроле процесса, в котором состояние объекта определяется несколькими коррелированными параметрами, также могут быть использованы различные статистические инструменты [2, 3, 5], наиболее распространенным из них является карта Хотеллинга, основное назначение которой – мониторинг изменения среднего уровня многопараметрического процесса, то есть проверка нулевой гипотезы о равенстве вектора средних заранее заданному вектору. Для контроля многомерного рассеяния, то есть для проверки нулевой гипотезы о равенстве ковариационной матрицы процесса некоторой заданной матрице, предложено несколько различных подходов [6–7], наиболее эффективным из них оказалась карта обобщенной дисперсии [8–10] и ее модификации.

Эффективность контроля оценивается по его чувствительности к возможным нарушениям процесса. Для повышения чувствительности используются различные подходы: анализ структур специального вида на карте, применение предупреждающей границы, модификации карт на основе алгоритмов кумулятивных сумм и экспоненциально взвешенных скользящих средних и другие.

Алгоритм Хотеллинга для проверки гипотезы о равенстве вектора средних заданному вектору предполагает расчет для каждой t-ой мгновенной выборки $(t = 1,...,m)$ статистики Хотеллинга

$$T_t^2 = n(\overline{X}_t - \mu_0)^T S^{-1} (\overline{X}_t - \mu_0)\,, \tag{1}$$

n – объем мгновенной выборки, $\overline{X}_t$ – вектор средних в мгновенных выборках, $\overline{X}_t = (\overline{x}_{t1} ... \overline{x}_{tp})^T$, $\overline{x}_{ij}$ – среднее значение в t-ой мгновенной выборке по j-му параметру $(j = 1,..., p)$; μ_0 – вектор средних, $\mu_0 = (\mu_1 ... \mu_p)^T$, где

$$\mu_j = \frac{1}{mn} \sum_{t=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ijt} \tag{2}$$

(x_{ijt} – результат i-го наблюдения за j-м параметром в t-й мгновенной выборке).

Оценки компонент ковариационной матрицы S размерности $p \times p$, определяющие рассеяние показателей качества и степень тесноты их связи, вычисляются по формуле

$$s_{jk} = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{t=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (x_{ijt} - \mu_j)(x_{ikt} - \mu_k)\,,\ j,k = 1,..., p\,. \tag{3}$$

При нормальном ходе процесса должно выполнятся условие

$$T_t^2 < T_{кр}^2\,, \tag{4}$$

где $T_{кр}^2$ – граница критической области.

Если ковариационная матрица известна, статистика Хотеллинга имеет хи-квадрат распределение; в этом случае положение контрольной границы на заданном уровне значимости (вероятность ложной тревоги) α определяется по таблицам квантилей этого распределения

$$T_{кр}^2 = \chi_{1-\alpha}^2 (p)\,. \tag{5}$$

При неизвестной ковариационной матрице статистика

$$F = \frac{n-p}{p(n-1)} \cdot T^2 \tag{6}$$

имеет нецентральное F-распределение Фишера с p и $(n-p)$ степенями свободы и параметром нецентральности

$$\lambda^2 = n(\mu - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0)\,. \tag{7}$$

При оценивании компонент ковариационной матрицы с использованием текущих мгновенных выборок по формуле (3) граница критической области определяется по формуле

$$T_{кр}^2 = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{1-\alpha}(p, mn-m-p+1), \quad (8)$$

где $F_{1-\alpha}(k_1, k_2)$ – квантиль F-распределения Фишера с числами степеней свободы в числителе k_1, в знаменателе – k_2.

Основной критерий нарушения стабильности процесса – выход статистики Хотеллинга (1) за контрольную границу (5–8). Однако применение этого критерия далеко не всегда обеспечивает достаточно оперативное выявление возможных нарушений процесса. Для повышения эффективности используется несколько подходов. Одним из них является выявление на карте структур специального вида, появление которых может свидетельствовать о нарушении процесса. Такими структурами могут быть тренд, приближение к оси абсцисс или к контрольной границе, резкие скачки значений статистики Хотеллинга, цикличность. При этом под трендом понимается наличие заданного количества точек только на возрастание, или, наоборот, на убывание. Приближение к оси абсцисс – это расположение точек в нижней трети диапазона между этой осью и контрольной границей, а приближение к контрольной границе, напротив, – в верхней трети. Анализируются также резкие скачки. Под цикличностью понимается расположение определенного количества точек в шахматном порядке: то выше, то ниже. Расчет количества точек в таких структурах основан на расчете вероятности ее появления: если эта вероятность соизмерима с уровнем значимости, то структура из заданного числа точек должна рассматриваться как неслучайная, т. е. свидетельствующая о возможном нарушении процесса.

Эффективность контрольных карт также может быть повышена путем использования, наряду с контрольной границей UCL (Upper Control Limit), предупреждающей границы UWL (Upper Warning Limit). Расположение нескольких точек подряд (от двух до четырех) в зоне между предупреждающей и контрольной границами также может быть свидетельством о нарушении процесса.

Рассмотренные подходы по повышению чувствительности алгоритма Хотеллинга могут быть использованы и при контроле многомерного рассеяния процесса.

Контроль многомерного рассеяния процесса сводится к проверке гипотезы о равенстве ковариационной матрицы процесса $\sum$ заданному значению $\sum_0$. В качестве критерия для проверки этой гипотезы предложено использовать обобщенную дисперсию – определитель ковариационной матрицы S_t, компоненты которой определяются по формулам (3), $|S_t|$ есть обобщенная дисперсия t-й мгновенной выборки.

Также вычисляются оценки средней ковариации по всей совокупности выборок

$$\bar{s}_{jk} = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} s_{jkt}\ , \tag{9}$$

которые образуют ковариационную матрицу S; ее определитель $|S|$ используется в качестве оценки целевой обобщенной дисперсии $|\sum_0|$.

Контрольные границы (положение границ критической области) для обобщенной дисперсии определяются из соотношений

$$m_{|s|} \pm u_{1-\alpha/2}\sigma_{|s|}, \tag{10}$$

где $u_{1-\alpha/2}$ – квантиль нормального распределения порядка $1 - \alpha/2$, α – уровень значимости; если принять значение, соответствующее правилу «трех сигма»: $\alpha = 0{,}0027$, тогда $u_{1-\alpha/2} = 3$; математическое ожидание обобщенной дисперсии $m_{|s|} = b_1|\sum_0|$; стандартное отклонение $\sigma_{|s|} = \sqrt{b_2}\,|\sum_0|$; коэффициенты

$$b_1 = \frac{1}{(n-1)^p}\prod_{j=1}^{p}(n-j); \tag{11}$$

$$b_2 = \frac{1}{(n-1)^{2p}}\prod_{j=1}^{p}(n-j)[\prod_{k=1}^{p}(n-k+2) - \prod_{k=1}^{p}(n-k)], \tag{12}$$

тогда положение верхней UCL и нижней LCL границ обобщенной дисперсии определяется по формуле

$$\left.\begin{matrix} UCL \\ LCL \end{matrix}\right\} = |\textstyle\sum_0|\ (b_1 \pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{b_2}\ ). \tag{13}$$

Эффективность контроля обычно оценивается с помощью специальной характеристики, называемой средней длиной серий: это количество наблюдений от момента нарушения процесса до момента обнаружения этого нарушения. Основными типами нарушений, связанными с изменением рассеяния, являются два: скачкообразное и постепенное увеличение рассеяния. На рис. 1 показаны графики средней длины серий $L(d)$ в зависимости от характеристики превышения фактической обобщенной дисперсии при нарушении процесса $|\sum|$ над целевой дисперсией $|\sum_0|$

$$d = |\textstyle\sum|/\,|\sum_0| \geq 1. \tag{14}$$

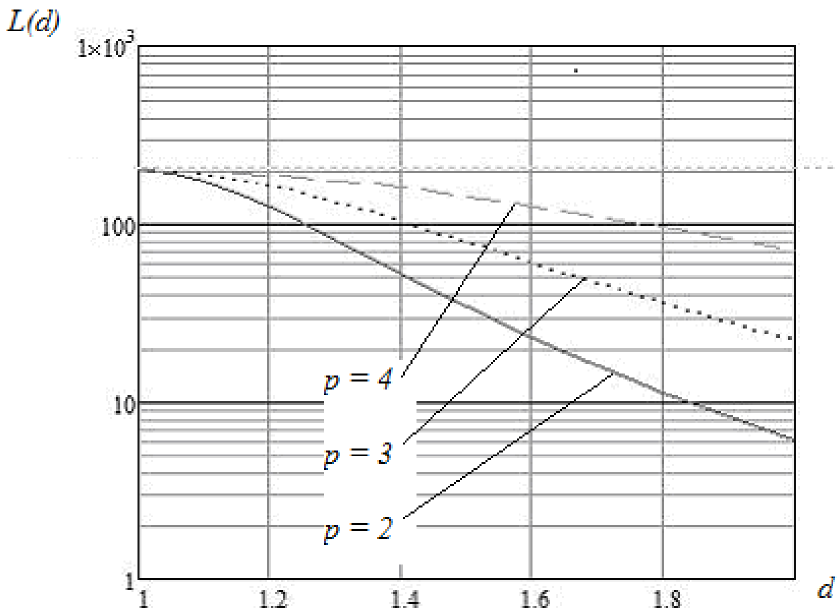


Рисунок 1 – Кривые средней длины серий для обобщенной дисперсии

Кривые построены в полулогарифмических координатах при количестве контролируемых показателей p = 2, 3, 4 в системе Mathcad. Из рисунка, в частности, следует, что для обнаружения увеличения обобщенной дисперсии в 1,5 раза при контроле двух показателей потребуется в среднем 34 выборки, поэтому, как и для алгоритма Хотеллинга, необходимо использование специальных методов повышения чувствительности контроля.

По аналогии с алгоритмом контроля процесса на базе алгоритма Хотеллинга [11–12] предлагается следующий алгоритм многомерного статистического контроля процесса одновременно по двум критериям: по обеспечению стабильности среднего уровня и рассеяния процесса.

1. Проведение статистического контроля в условиях отлаженного процесса (по обучающей выборке), исследование корреляционной матрицы и разделение контролируемых параметров на группы независимых и коррелированных.

2. Анализ процесса с целью установления параметров многомерного контроля по алгоритму Хотеллинга (ковариационная матрица и контрольные границы) и по алгоритму обобщенной дисперсии (целевая ковариационная матрица и контрольные границы).

3. Постоянный мониторинг процесса с построением карт Хотеллинга и обобщенной дисперсии на основе параметров, установленных при анализе процесса, с выявлением возможных нарушений процесса на основе наличия неслучайных структур и использования предупреждающей границы.

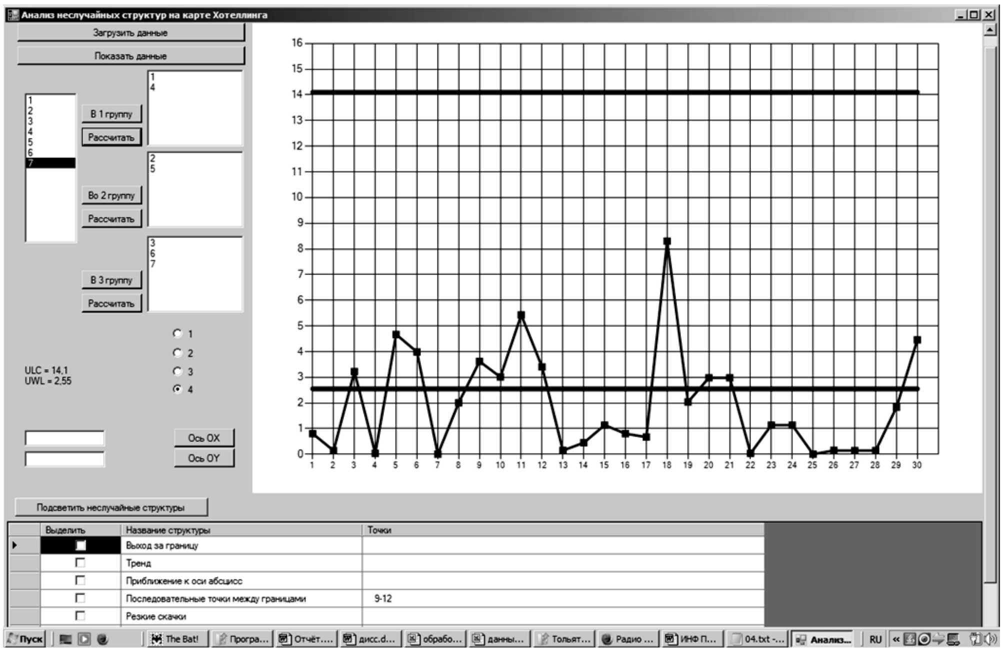


Рисунок 2 – Нарушение по группе параметров X_1, X_4 обнаружено картой с предупреждающей границей

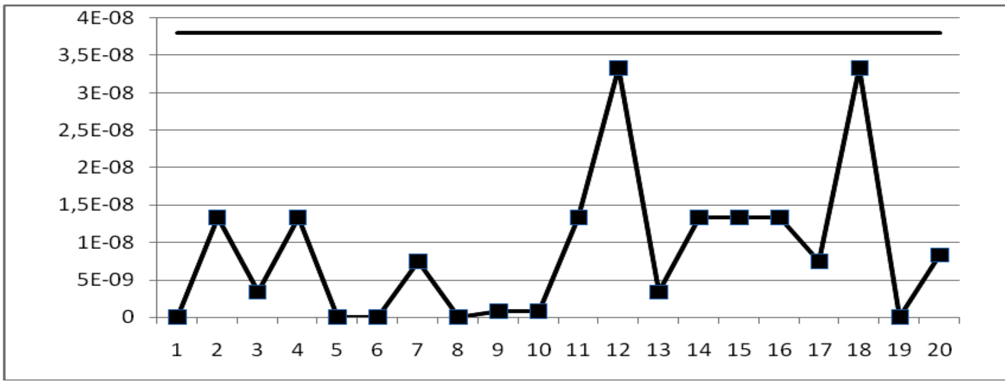


Рисунок 3 – Карта обобщенной дисперсии не выявила нарушения

В качестве примера на рис. 2–3 показаны примеры построения карт Хотеллинга и обобщенной дисперсии для различных процессов. Карта Хотеллинга (рис. 2) построена для мониторинга качества очистки питьевой воды и свидетельствует о нарушении процесса: четыре точки подряд расположены между предупреждающей и контрольной границами. Карта обобщенной дисперсии на рис. 3 свидетельствует о стабильности рассеяния толщины металлизации отверстий при изготовлении печатной платы.

Исследование выполнено в рамках государственного задания №2014/232 на выполнение работ в сфере научной деятельности Минобрнауки России и при финансовой поддержке РФФИ, проект №15-48-02038.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Уиллер, Д., Чамберс, Д. Статистическое управление процессами. Оптимизация бизнеса с использованием контрольных карт Шухарта ; пер. с англ. − М. : Альпина Бизнес Букс, 2009. − 409 с.

2. Montgomery, D. C. Introduction to statistical quality control, New York, John Wiley and Sons, 2009. – 754 p.

3. Клячкин, В. Н. Статистические методы в управлении качеством: компьютерные технологии. – М. : Финансы и статистика, ИНФРА-М, 2009. – 304 с.

4. Клячкин, В. Н. Оценка стабильности состояния окружающей среды с помощью контрольных карт // Экологические системы и приборы 2011. – № 2. – С. 19–21.

5. Клячкин, В. Н. Контроль процесса с использованием карты экспоненциально взвешенных скользящих средних // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2003. – №1. – С. 49–51.

6. Клячкин, В. Н. Модели и методы статистического контроля многопараметрического технологического процесса. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 196 с.

7. Клячкин, В. Н. Многомерный статистический контроль рассеивания показателей качества технологического процесса // Известия вузов. Машиностроение. – 2002. – № 6. – С. 45–51.

8. Клячкин, В. Н., Святова Т. И. Статистический контроль рассеяния в многопараметрическом процессе // Автоматизация. Современные технологии. – 2013. – № 12. – С. 22–25.

9. Святова, Т. И., Клячкин, В. Н. Многомерный статистический контроль технологического рассеяния процесса // Радиотехника, 2014. – № 11. – С. 123–126.

10. Клячкин, В. Н., Святова, Т. И. Методы статистического контроля по критерию многомерного рассеяния // Радиопромышленность, 2015. – № 4. – С. 147–153.

11. Клячкин, В. Н. Выбор контрольных карт для мониторинга многопараметрического процесса // Автоматизация. Современные технологии. – 2004. – № 6. – С. 26–28.

12. Клячкин, В. Н., Михеев, А. Ю. Идентификация режима статистического контроля многопараметрического технологического процесса // Автоматизация. Современные технологии. – 2011. – № 2. – С. 27–31.

УДК 517.62

К. С. Ширкунова, Ю. Е. Кувайскова (г. Ульяновск)

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

В статье описываются методы решения линейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка. Получено численное решение линейной краевой задачи второго порядка методом конечных разностей и противопотоковым методом. Проведено сравнение эффективности численных методов решения краевых задач.

Ключевые слова: *краевая задача, метод конечных разностей, противопотоковый метод.*

Задачи, связанные с решением ОДУ, часто возникают в науке и технике. Хотя отличие между задачей Коши и задачами, в которых граничные условия заданы в двух или нескольких точках, может показаться незначительным, они существенно различаются по своей трудности. Существует множество методов решения краевых задач применяемых в различных случаях [1–3].

В данной работе исследуется эффективность применения метода конечных разностей и противопотокового метода для решения линейной краевой задачи второго порядка.

Метод конечных разностей для решения краевых задач известен уже давно [4–5]. Однако на практике его применение было ограничено в связи с тем, что требовался огромный объем ручных вычислений при решении систем алгебраических уравнений большой размерности.

В настоящее время, с появлением быстродействующих компьютеров, этот метод стал удобен для практического использования и является одним из наиболее эффективных при решении различных задач математической физики [6].

Краевая задача для ОДУ второго порядка имеет вид:

$$\begin{aligned} &y''(x) = f(x, y, y'), x \in [a, b] \\ &\alpha_1 y(x) + \beta_1(x) = \gamma_1, \\ &\alpha_2 y(x) + \beta_2(x) = \gamma_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где в краевых условиях считается, что $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0, i = 1,2$.

Будем рассматривать линейное ОДУ втрого порядка в виде:

$$\begin{aligned} &y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), x \in [a, b], \\ &y(a) = y_a, y(b) = y_b. \end{aligned} \quad (2)$$

Метод конечных разностей – численный метод решения дифференциальных уравнений, основанный на замене производных разностными схемами [3–5].

Разностная схема – это конечная система алгебраических уравнений, поставленная в соответствие какой-либо дифференциальной задаче, содержащей дифференциальное уравнение и дополнительные условия (например, краевые условия или начальное распределение) [4].

Рассмотрим краевую задачу вида

$$\begin{aligned} & y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), a < x < b, \\ & y(a) = y_a, x = a, \\ & y(b) = y_b, x = b, \end{aligned} \tag{3}$$

и будем решать ее конечно-разностным методом, заменяя дифференциальные операторы отношением конечных разностей с использованием формул численного дифференцирования.

Для этого введем конечно-разностную сетку с шагом h: $x_i = a + ih, i = 0..n$.

Поскольку ОДУ в (3) описывает поведение функции $y(x)$ внутри расчетной области $x \in (a,b)$, то производные 1-го и 2-го порядков можно аппроксимировать с помощью отношения центральных разностей со 2-м порядком аппроксимации:

$$\begin{aligned} & y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2), i = 1..n-1, \\ & y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2), i = 1..n-1, \\ & \{p(x_i), q(x_i), f(x_i)\} \equiv \{p_i, q_i, f_i\}, i = 1..n-1. \end{aligned} \tag{4}$$

Подставляя (4) в ОДУ из (3), получим следующую конечно-разностную схему:

$$\begin{aligned} & \frac{2y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{p_i(y_{i+1} - y_{i-1})}{2h} + q_i y_i = f_i + O(h^2), i = 1..n-1, \\ & y_0 = y_a, i = 0, \\ & y_n = y_b, i = n, \end{aligned} \tag{5}$$

которую можно представить в виде системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i, i = 1..n-1, \tag{6}$$

где $a_i = \dfrac{1}{h^2} - \dfrac{p_i}{2h}, b_i = -\dfrac{2}{h} + q_i, c_i = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{p_i}{2h},\ d_i = f_i.$

При $i = n-1$ последнее слагаемое в левой части также известно и равно $c_{n-1}y_n = c_{n-1}y_b$.

Поэтому система линейных алгебраических уравнений (6) приобретает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 0,\\
&b_1 y_1 + c_1 y_2 = d_1^*, d_1^* = d_1 - a_1 y_a, i = 1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i\ , i = 2,..,n-2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{n-1} y_{n-2} + b_{n-1} y_{n-1} = d_i^*, d_{n-1}^* = d_{n-1} - c_{n-1} y_b, i = n-1,\\
&c_{n-1} = 0.
\end{aligned} \qquad (7)
$$

Здесь коэффициенты a_i и c_{n-1} полагаются равными нулю только после вычисления правых частей d_1^* и d_{n-1}^*.

Противопотоковый метод является частным случаем метода конечных разностей.

Рассмотрим формулу левой аппроксимации $f'(x_i)$ с остаточным членом

$$f'(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + \frac{f''(\varepsilon_{i-1})}{2} h. \qquad (8)$$

Формула правой аппроксимации $f'(x_i)$ с остаточным членом

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{f''(\varepsilon_{i+1})}{2} h. \qquad (9)$$

Согласно формулам (8) и (9) можно записать равенства:

$$
\begin{aligned}
y'(a) &= \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} + O(h) = \frac{-3y(x_0) + 4y(x_1) + y(x_2)}{2h} + O(h^2),\\
y'(b) &= \frac{y(x_n) - y(x_{n-1})}{h} + O(h) = \frac{y(x_{n-2}) + 4y(x_{n-1}) + 3y(x_n)}{2h} + O(h^2).
\end{aligned} \qquad (10)
$$

При аппроксимации граничных условий в (1) двухточечными разностными отношениями первого порядка, имеем

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 y(x_0) + \beta_1 \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} + O(h) = \gamma_1,\\
&\alpha_2 y(x_n) + \beta_2 \frac{y(x_n) - y(x_{n-1})}{h} + O(h) = \gamma_2.
\end{aligned} \qquad (11)
$$

Отсюда после отбрасывания слагаемого $O(h)$ (с заменой $y(x_i)$ на y_i) и упрощения получаем краевые условия для разностного уравнения

$$
\begin{aligned}
&(h\alpha_1 - \beta_1) y_0 + \beta_1 y_1 = \gamma_1 h,\\
&-\alpha_2 y_{n-1} + (h\beta_2 + \alpha_2) y_n = \gamma_2 h.
\end{aligned} \qquad (12)
$$

Наличие ограничения на шаг h в методе конечных разностей второго порядка характеризует его как условно устойчивый метод. Если отказаться от аппроксимации всех производных с порядком $O(h^2)$ и использовать в роли $y'(x_i)$ правые или левые разностные отношения первого порядка точности, связывая их выбор со знаком p_i, а именно, рассматривая вместо (5) разностное уравнение

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h}, если\ p_i > 0 \\ \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h}, если\ p_i < 0 \end{cases} + q_i y_i = f_i. \quad (13)$$

При i =1,2,…,n – 1 придем к противопотоковому методу

$$\begin{cases} y_{i-1} - (2 + hp_i - h^2 q_i) y_i + (1 + hp_i) y_{i+1} = h^2 f_i, если\ p_i > 0, \\ (1 - hp_i) y_{i-1} - (2 - hp_i - h^2 q_i) y_i + y_{i+1} = h^2 f_i, если\ p_i < 0, \end{cases} \quad (14)$$

имеющему первый порядок точности независимо от точности аппроксимации краевых условий.

При условии $q(x) < 0, \forall\, x \in [a;b]$ диагональное преобладание в методе (14) будет при любой величине шага $h > 0$. Отсюда следует его безусловная устойчивость, правда в ущерб точности; последнее означает необходимость проведения вычисления до некоторой фиксированной малой величины, чем это требует метод второго порядка (5), если они оба одновременно применимы.

Описанные методы были программно реализованы с помощью языка С++ в среде Visual Studio 2010.

Для сравнения эффективности рассмотренных методов получены результаты решения краевой задачи второго порядка

$$\begin{aligned} & y'' + \frac{y'}{x+2} + \frac{(4x+7)y}{4(x+2)^2} = \frac{1}{\sqrt{x+2}}, \\ & y(2) = 2, \\ & y(2{,}3) = 8{,}6y', \end{aligned} \quad (15)$$

при задании различных шагов аппроксимации h.

Для определения точности численных расчетов для каждого метода была вычислена погрешность по формуле:

$$\Delta = \max_i \left| f_h(x_i) - f_{h/2}(x_i) \right|, \quad (16)$$

где $f_h(x_i)$ – значение функции в узле x_i при шаге h, $f_{h/2}(x_i)$ – значение функции в узле x_i при шаге h/2.

В таблице 1 представлены результаты сравнения методов при h = 0,1 (точность вычислений ε = 0,1).

Таблица 1

Сравнение методов при $h = 0{,}1$

x	Метод конечных разностей (h)	Метод конечных разностей ($h/2$)	Противо-потоковый метод (h)	Противо-потоковый метод ($h/2$)
2,0	2,000000	2,000000	2,000000	2.000000
2,1	2,024690	2,030030	2,030030	2.029994
2,2	2,049083	2,049237	2,049237	2.049232
2,3	2,073190	2,073417	2,073417	2.073411
погрешность	0,008322		0,008341	

По результатам вычислений мы видим, что заданная точность достигнута и разностный метод оказался эффективнее, чем противопотоковый. Это обусловлено тем, что для использования противопотокового метода требуется меньший шаг сетки, чем для метода конечных разностей.

Проведено сравнение методов при задании шагов сетки $h = 0{,}01$ (точность вычислений $\varepsilon = 0{,}01$) и $h = 0{,}001$ (точность вычислений $\varepsilon = 0{,}001$). Результаты представлены соответственно в таблицах 2 и 3.

Таблица 2

Сравнение методов при $h = 0{,}01$

x	Метод конечных разностей (h)	Метод конечных разностей ($h/2$)	Противо-потоковый метод (h)	Противо-потоковый метод ($h/2$)
2,0	2,000000	2,000000	2,000000	2,000000
…	…	…	…	…
2,3	2,073578	2,073559	2,073591	2,073618
погрешность	0,001498		0,001450	

Таблица 3

Сравнение методов при $h = 0{,}001$

x	Метод конечных разностей (h)	Метод конечных разностей ($h/2$)	Противо-потоковый метод (h)	Противо-потоковый метод ($h/2$)
2,0	2,000000	2,000000	2,000000	2,000000
…	…	…	…	…
2,3	2,075163	2,053192	2,073234	2,073815
погрешность	0,021971		0,00150	

При задании шагов сетки $h = 0{,}01$ и $h = 0{,}001$ противопотоковый метод оказался эффективнее, а при $h = 0{,}001$ требуемая точность вычислений методом конечных разностей не достигнута. Это связано с тем, что метод конечных разностей является условно устойчивым в связи с наличием ограничения на шаг h.

Результаты сравнения решений показывают, что при уменьшении шага точнее оказывается противопотоковый метод, а при увеличении шага использование метода конечных разностей оказывается оправданным.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Березин, И. С., Жидков, Н. П. Методы вычислений. Том II. – М. : ГИФМЛ, 1959. – 620 с.

2. Калиткин Н. Н. Численные методы. – М. : Наука, 1978. – 512 с.

3. Вержбицкий, В. М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. – М. : Высшая школа, 2001. – 382 с.

4. Годунов, С. К., Рябенький, В. С. Введение в теорию разностных схем. – М. : Физматгиз, 1962. – 340 с.

5. Самарский, А. А., Николаев, Е. С. Методы решения сеточных уравнений. – М. : Наука, 1978. – 592 с.

6. Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М. : Мир, 1980. – 512 с.

УДК 519.86

С. В. Юдина, М. А. Кузнецова, Е. П. Захарчук, О. А. Кузнецова (г. Самара)

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ИНСТРУМЕНТА ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ И ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ДОСТИЖЕНИЯ СОГЛАСОВАНИЯ ИНТЕРЕСОВ АГЕНТОВ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ОГРАНИЧЕННОГО РЕСУРСА

В работе разработан программный инструмент, который позволяет смоделировать сценарий поведения агентов в активной системе, стремящихся достигнуть равновесия при помощи различных механизмов распределения ограниченного ресурса. Данный инструмент разработан для автоматизации решения задачи распределения ограниченного ресурса в рамках курса экономико-математическое моделирование.

Ключевые слова: *приоритетные механизмы распределения ресурсов, анализ экономических интересов участников системы, моделирование стратегий поведения участников в активной системе.*

В рамках курса экономико-математическое моделирование изучаются механизмы распределения ресурсов. Рассматривается активная система, состоящая из центра и трех агентов. Каждый элемент системы обладает собственной целевой функцией. У Центра в распоряжении находится количество ресурса в размере R, которое он должен полностью распределить между агентами, в соответствии с их заявками s_i. Агенты, в свою очередь, должны реализовать полученное количество ресурса $x_i(s_i)$ по определенной общей цене p за единицу. Функции затрат агентов зависят от объема полученного ресурса и равны

$$c_1(x_1) = 10 \cdot x_1^2, \quad (1)$$

$$c_2(x_2) = 20 \cdot x_2^2, \quad (2)$$

$$c_3(x_3) = 30 \cdot x_3^2. \quad (3)$$

Целевой функцией центра и агентов будет функция максимизации прибыли.

В зависимости от поступивших заявок, Центр определяет, может ли он удовлетворить потребности каждого агента в полном объеме, если такая возможность есть, то существует равновесная ситуация, в которой запросы агентов удовлетворяются полностью. Если же сумма заявок агентов на ресурс больше количества ресурса, имеющегося у центра, т.е. возникает дефицит ресурса, то складывается ситуация неравновесия и возникает задача распределения ограниченного ресурса, для решения которой используются различные механизмы распределения.

На основании механизма прямых приоритетов распределение ресурса будет осуществляться путем уменьшения всех заявок на число γ, равное отношению количества ресурса, располагаемого центром , к суммарным заявкам агентов.

В процессе изучения механизмов распределения ресурсов при распределении ограниченного ресурса между несколькими агентами студентами осуществляется оценка эффективности различных механизмов при одношаговой игре и их сравнение. При этом существует проблема изучения и визуализации динамического процесса достижения согласованного взаимодействия. Соответствующие разработки велись ведущими учеными института проблем управления им. Трапезникова, например в работе Буркова В. Н., Джавахадзе Г. С., Диновой Н. И., Щепкина Д. А. «Применение игрового имитационного моделирования для оценки эффективности экономических механизмов»;

Возникшая проблемная ситуация определяет постановку цели данной исследовательской работы: разработка программного инструмента, позволяющего достичь ситуации равновесия при распределении ресурса между агентами с использованием различных механизмов и визуализация процесса согласования.

Для достижения поставленной цели предлагается разработать информационную систему на базе приложения Microsoft Excel. Выбор приложения определяется его доступностью и простой реализации. Основным (первым) этапом создания системы является построение ее блок-схемы (модели).

В основе модели будет лежать уже готовая математическая модель стандартных механизмов распределения ограниченного ресурса.

В данной работе воспользуемся двумя классами приоритетных механизмов – прямых приоритетов, в которых функция приоритета каждого агента является возрастающей функцией его заявки на ресурс и обратных приоритетов, в которых функция приоритета зависит от эффективности агента и убывает с ростом заявки агента на ресурс.

Математическая модель распределения ограниченного ресурса на основе прямых приоритетов.

$$\Pi(x_n) = R \cdot p - \text{c} \to max, i = \overline{1..n}\,, \tag{4}$$

$$\begin{cases} \text{п}_1(x_1) = x_1 \cdot p - 10 \cdot x_1^2 \to max \\ \text{п}_2(x_2) = x_2 \cdot p - 20 \cdot x_2^2 \to max \\ \text{п}_3(x_3) = x_3 \cdot p - 30 \cdot x_3^2 \to max \\ \sum_{i=1}^{n} s_i > R \\ x_i = min\{s_i, \gamma s_i\} \\ \gamma = \frac{R}{\sum_{i=1}^{n} s_i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = R \\ x_i, R, p > 0 \end{cases} \tag{5}$$

где Π – прибыль; R – запас ресурса центра; p – цена; c – издержки; x_i – объем полученного ресурса; s_i – заявка агента; γ – коэффициент, равный отношению количества ресурса, располагаемого центром, к суммарным эффектам использования ресурсов всех агентов.

Процедура решения данной задачи является механизмом распределения ресурсов.

В механизме обратных приоритетов, распределение ресурса зависит от эффекта A_i использования ресурса x_i, полученного в зависимости от заявки S_i. Таким образом, механизм будет работать путем увеличения всех заявок на число γ, равное отношению количества ресурса, располагаемого центром, к суммарным эффектам использования ресурсов всех агентов. Итак, математическая модель распределения ресурса на основе механизма обратных приоритетов будет выглядеть следующим образом:

$$\Pi(x_n) = R \cdot p \to max \tag{6}$$

$$\begin{cases} \text{п}_1(x_1) = x_1 \cdot p - 10 \cdot x_1^2 \to max \\ \text{п}_2(x_2) = x_2 \cdot p - 20 \cdot x_2^2 \to max \\ \text{п}_3(x_3) = x_3 \cdot p - 30 \cdot x_3^2 \to max \\ \sum_{i=1}^{n} s_i > R \\ x_i = min\left\{s_i, \gamma \frac{A_i}{s_i}\right\} \\ \sqrt{\gamma} = \frac{R}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{A_i}} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = R \\ x_i, R, p > 0 \end{cases} \tag{7}$$

где Π — прибыль; R — запас ресурса центра; p — цена; c — издержки; x_i — объем полученного ресурса; s_i — заявка агента; γ — коэффициент, равный отношению количества ресурса, располагаемого центром, к суммарным эффектам использования ресурсов всех агентов; A_i — эффекта использования ресурса x_i.

На основании данных математических моделей, была построена блок-схема алгоритма работы данного приложения, которая изображена на рисунке 1.

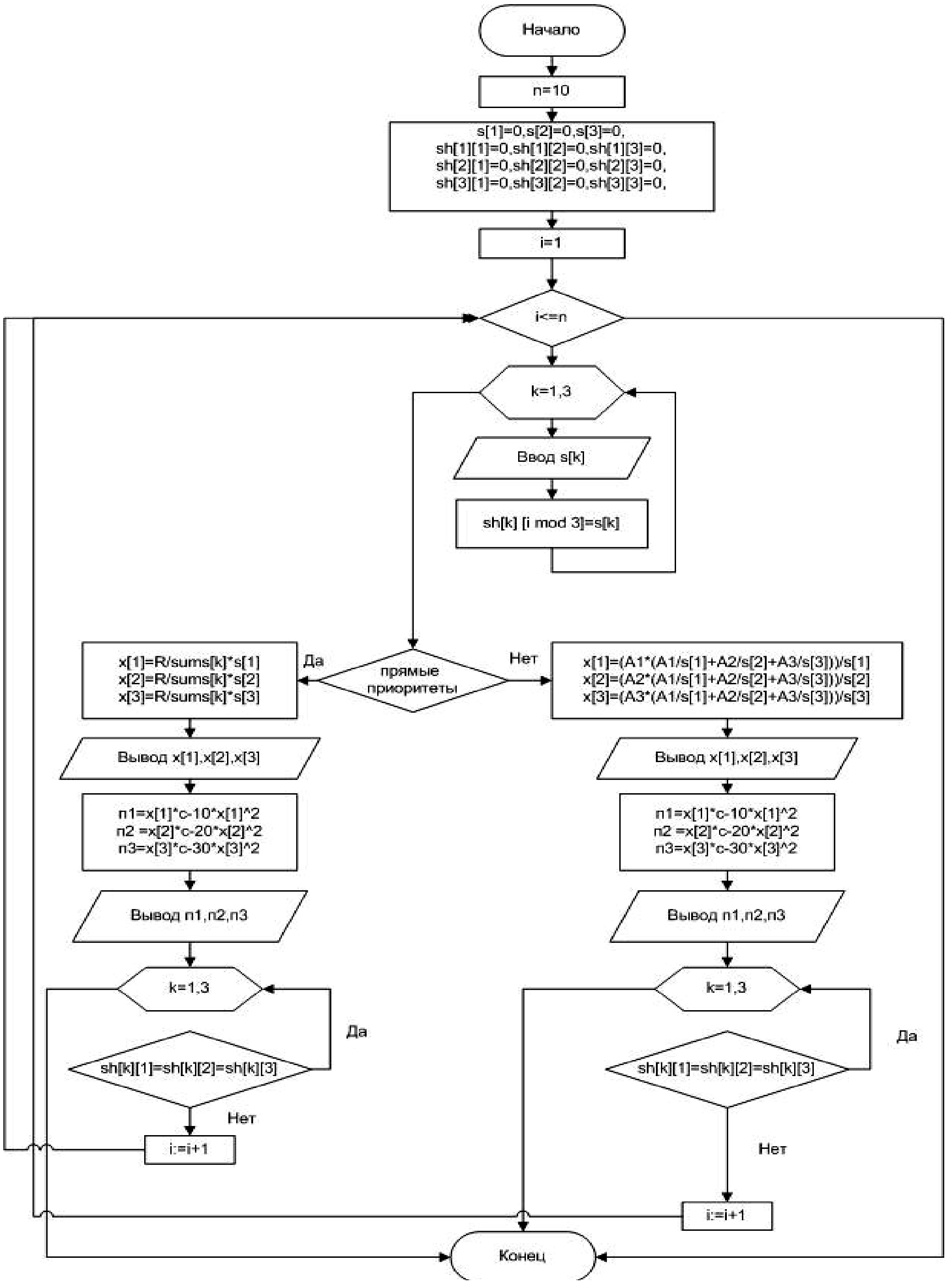


Рисунок 1 – блок-схема алгоритма работы

На основании алгоритма, представленного на блок-схеме, было разработано программный инструмент в Microsoft Excel с помощью макросов.

Запустив приложение, пользователю необходимо ввести в i-ой итерации три заявки S, причем сумма этих заявок не должна превышать объема ограниченного ресурса центра

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq R, \tag{8}$$

в случае не выполнения этого условия, программа выдаст ошибку. Затем ему предстоит выбрать механизм распределения ресурса. Если пользователем будет выбран механизм прямых приоритетов, то распределение Центром ресурсов агентам происходит путем увеличения числа заявок на число γ и считается по формулам:

$$X[1]=\frac{R}{\sum Sk} \cdot S, \tag{9}$$

$$X[2]=\frac{R}{\sum Sk} \cdot S, \tag{10}$$

$$X[3]=\frac{R}{\sum Sk} \cdot S. \tag{11}$$

Если же будет выбран механизм обратных приоритетов, то распределение управляющим органом ограниченных ресурсов будет происходить путем уменьшения числа введенных заявок на число γ и считается по формулам:

$$X[1]=\frac{R\cdot(A1\cdot(^{A1}/_{S[1]}+^{A2}/_{S[2]}+^{A3}/_{S[3]}))}{S[1]}, \tag{12}$$

$$X[2]=\frac{R\cdot(A2\cdot(^{A1}/_{S[1]}+^{A2}/_{S[2]}+^{A3}/_{S[3]}))}{S[2]}, \tag{13}$$

$$X[3]=\frac{R\cdot(A3\cdot(^{A1}/_{S[1]}+^{A2}/_{S[2]}+^{A3}/_{S[3]}))}{S[3]}. \tag{14}$$

Затем вычисляется прибыль агентов по формулам:

$$P[1]=x[1]\cdot c-10x[1]^2, \tag{15}$$

$$P[2]=x[2]\cdot c-20x[2]^2, \tag{16}$$

$$P[3]=x[3]\cdot c-30x[3]^2. \tag{17}$$

Если выполняется условие, такое что три последовательно введенных заявок каждого из агент является одним и тем же числом, то есть они одинаковы, то агенты добились равновесия и дальнейшее изменение заявок не имеет смысла. Если условие постоянства заявок не выполняется, тогда агенты подают заявки заново с целью достижения равновесия и получения максимальной прибыли, итерация уже будет $i = i + 1$.

Разработанный программный инструмент позволяет смоделировать работу рассматриваемых механизмов в динамике для изучения процесса достижения равновесия.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бурков, В. Н., Джавахадзе, Г. С., Динова, Н. И., Щепкин, Д. А. Применение игрового имитационного моделирования для оценки эффективности экономических механизмов. – М. : ИПУ РАН, 2003. – 51 с.

2. Кузнецова, О. А. Экономико-математическое моделирование. – Уч. п. электронный ресурс кафедры.

3. Гришанов, Г. М., Павлов, О. В. Исследование систем управления : учебное пособие. – Самара : Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2005. – 128 с.

4. Баркалов, П. С., Буркова, И. В., Глаголев, А. В., Колпачев, В. Н. Задачи распределения ресурсов в управлении проектами. – М. : ИПУ РАН, 2002. – 65 с.

5. Коргин, Н. А. Эквивалентность и неманипулируемость неанонимных приоритетных механизмов распределения ресурсов // Управление большими системами: сборник трудов, 2009. – № 26.1. – С. 319–347.

6. Иванов, Д. Ю. Организация внутрифирменного управления. – Самара : Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2014.

7. Новиков, Д. А., Петраков, С. Н. Курс теории активных систем. – М. : СИНТЕГ, 1999. – 104 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ф.И.О	Ученая степень, ученое звание, место работы, E-mail
Абаимова Наталья Викторовна	*Учитель математики средней школы № 28 г. Ульяновска*
Абулеев Марат Хайдарович	*Учитель математики средней школы № 28 г. Ульяновска*
Алиева Венера Фатиховна	*Студентка Ульяновского государственного технического университета. E-mail: av_alieva.venera@mail.ru*
Анкилов Андрей Владимирович	*Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: ankil@ulstu.ru*
Анкилов Григорий Андреевич	*Студент Ульяновского государственного технического университета*
Ахметова Гюзяль Абузяровна	*Учитель математики Старокулаткинской средней школы № 1 Ульяновской области. E-mail: guz08@mail.ru*
Багдеева Гульнара Наилевна	*Учитель математики средней школы № 45 г. Ульяновска*
Барт Анастасия Дмитриевна	*Студентка Ульяновского государственного технического университета. E-mail: nastya.bart.1995@mail.ru*
Будников Евгений Анатольевич	*Студент Пензенского государственного технологического университета. E-mail: avadon58@mail.ru*
Воронцов Александр Анатольевич	*Канд. техн. наук, доцент Пензенского государственного технологического университета. E-mail: Aleksander.Vorontsov@gmail.com*
Габитова Альбина Рашитовна	*Студентка Ульяновского государственного технического университета. E-mail: ale4k1996@mail.ru*
Горинович Юлия Сергеевна	*Учитель математики средней школы № 57 г. Ульяновска*
Горлач Борис Алексеевич	*Доктор техн. наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики Самарского государственного аэрокосмического университета*
Гумирова Вероника Павловна	*Учитель математики Ульяновского городского лицея при Ульяновском государственном техническом университете. E-mail: v.gumirova@yandex.ru*
Давыдова Елена Васильевна	*Учитель математики Ульяновского городского лицея при Ульяновском государственном техническом университете*
Дубова Марина Алексеевна	*Учитель математики средней школы № 6 им. И.Н. Ульянова г. Ульяновска*
Егорова Лариса Сергеевна	*Учитель математики лицея №45 при Ульяновском государственном техническом университете*

Захарчук Елизавета Павловна	*Студентка Самарского национального исследовательского университета имени С.П. Королева. E-mail: mkuz195@mail.ru*
Иванова Галина Николаевна	*Учитель математики средней школы № 44 г. Ульяновска*
Инкина Матина Михайловна	*Учитель математики средней школы № 76 города Ульяновска*
Исянова Екатерина Рафаэлевна	*Студентка Ульяновского государственного технического университета. E-mail: Kir201294@mail.ru*
Калугина Лидия Ивановна	*Учитель математики средней школы № 45 г. Ульяновска*
Калягин Иван Николаевич	*Студент Пензенского государственного технологического университета. E-mail: ink2809@gmail.com*
Карасева Анна Георгиевна	*Учитель математики Ульяновского городского лицея при Ульяновском государственном техническом университете*
Карягина Татьяна Владимировна	*Учитель математики Ульяновского городского лицея при Ульяновском государственном техническом университете.*
Киндеева Галина Юрьевна	*Учитель математики средней школы №76 г. Ульяновска*
Кичерова Анастасия Александровна	*Студент Тюменского индустриального университета. E-mail: kicherova.2011@mail.ru*
Клячкин Владимир Николаевич	*Доктор техн. наук, профессор кафедры «Прикладная математика и информатика» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: v_kl@mail.ru*
Кокин Игорь Вячеславович	*Студент Ульяновского государственного технического университета. E-mail: Ulyanovsk999@mail.ru*
Кормилицина Светлана Валентиновна	*Учитель математики Майнского многопрофильного лицея*
Кувайскова Юлия Евгеньевна	*Канд. техн. наук, доцент кафедры «Прикладная математика и информатика» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: u.kuvaiskova@mail.ru*
Кужугалиева Валентина Владимировна	*Учитель математики Лицея № 16 г. Димитровграда при Ульяновском государственном техническом университете*
Кузнецова Марина Александровна	*Студентка Самарского национального исследовательского университета имени С.П. Королева. E-mail: mkuz195@mail.ru*
Кузнецова Ольга Александровна	*Канд. эконом. наук, доцент кафедры ММЭ Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева. E-mail: mkuz195@mail.ru*

Ланкова Оксана Владимировна	*Учитель математики средней школы №76 города Ульяновска*
Макарова Татьяна Викторовна	*Учитель математики средней школы № 6 им. И.Н. Ульянова г. Ульяновска*
Мамадалеев Илдар Нариманович	*Учитель математики Старокулаткинской средней школы № 1*
Марянова Анна Сергеевна	*Учитель математики средней школы № 57 г. Ульяновска*
Мельникова Наталия Валерьевна	*Учитель математики средней школы № 61 города Ульяновска. E-mail: melnikova68_68@mail.ru*
Мефтахутдинов Руслан Максутович	*Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Физика» Ульяновского государственного технического университета*
Насырова Альфия Ревкатовна	*Учитель математики лицея при Ульяновском государственном университете*
Огай Юлия Геннадьевна	*Учитель математики физико-математического лицея № 38 г. Ульяновска*
Першина Валентина Николаевна	*Учитель математики средней школы № 56 г. Ульяновска*
Першина Татьяна Алексеевна	*Учитель математики Ульяновского городского лицея при Ульяновском государственном техническом университете.*
Платонова Елена Васильевна	*Учитель математики МАОУ «Физико-математический лицей №38 г.Ульяновска» E-mail: eplatonova38@yandex.ru*
Плешко Надежда Валерьевна	*Студент Ульяновского государственного педагогического университета имени И.Н. Ульянова. E-mail: 79020047984@yandex.ru*
Польшакова Ольга Евгеньевна	*Учитель математики средней школы № 45 г. Ульяновска*
Рыжова Татьяна Валерьевна	*Учитель математики средней школы № 57 г. Ульяновска*
Рытько Наталья Борисовна	*Учитель математики средней школы № 56 г. Ульяновска*
Садрисламова Лилия Радисовна	*Учитель математики физико-математического лицея № 38 г. Ульяновска*
Сотникова Светлана Анатольевна	*Учитель математики Ульяновского городского лицея при Ульяновском государственном техническом университете.*
Спиридонов Дмитрий Александрович	*Студент Самарского национального исследовательского университета им. академика С.П. Королева. E-mail: dmitry_alexandrovich@mail.ru*
Тарасов Александр Юрьевич	*Учитель математики средней школы № 28 г. Ульяновска*

Терехина Елена Владимировна	*Учитель математики Лицея при Ульяновском государственном техническом университете № 45 г. Ульяновска*
Федорова Ксения Андреевна	*Студентка Ульяновского государственного технического университета. E-mail: ksyunya-fedorova@bk.ru*
Федорова Мария Константиновна	*Студентка Ульяновского государственного технического университета. E-mail: mashulka3031_94@mail.ru*
Хакимова Флюра Аминовна	*Учитель математики средней школы № 29 г. Ульяновска*
Ширкунова Кристина Сергеевна	*Студентка Ульяновского государственного технического университета. E-mail: kristinashirkunova19@mail.ru*
Шлютова Марина Александровна	*Учитель математики Лицея при Ульяновском государственном техническом университете № 4 г. Ульяновска*
Юдина Светлана Владимировна	*Студентка Самарского национального исследовательского университета имени С.П. Королева. E-mail: mkuz195@mail.ru*

СОДЕРЖАНИЕ

Секция 3. Непрерывность образования от школы к вузу

Н. В. Абаимова
Программа спецкурса «Избранные вопросы математики» …………… 6

М. Х. Абулеев
Учебно-методический комплекс по спецкурсу «Математические модели в физике и технике» ……………………………………………… 9

Г. А. Ахметова
Приемы решения иррациональных уравнений и неравенств ………… 11

Г. Н. Багдеева
Деятельностный подход в обучении математике ……………………… 14

Ю. С. Горинович
Пакет контрольно-диагностических материалов по разделу «алгебраические дроби» ………………………………………………… 16

В. П. Гумирова
Актуальные проблемы преподавания математики в школе …………… 18

Е. В. Давыдова
Показательные и логарифмические уравнения, неравенства, системы .. 20

М. А. Дубова
О роли математики в школьном образовании ………………………….. 22

Л. С. Егорова
Развитие логического мышления школьников на уроках математики .. 24

Г. Н. Иванова
Принципы методической подготовки к ЕГЭ по математике ………….. 26

М. М. Инкина
Развитие логического мышления у учащихся в процессе обучения математике ……………………………………………………………….. 27

Л. И. Калугина
Содержание элективного курса «Математика в нашей жизни» ……... 31

А. Г. Карасева
Элементы теории вероятностей, комбинаторики и статистики ……… 34

Т. В. Карягина
Пакет контрольно-диагностических материалов по разделу «Первообразная и интеграл» …………………………………………….. 35

Г. Ю. Киндеева
Пакет контрольно-диагностических материалов по разделу «Тригонометрия» ……………………………………………………… 37

С. В. Кормилицина
Пакет контрольно-диагностических материалов по разделу «Решение уравнений, неравенств, систем: рациональных, иррациональных, с модулем» ……………………………………………………………... 39

В. В. Кужугалиева
Пакет контрольно-диагностических материалов по разделу «Решение тригонометрических уравнений, неравенств, систем» ………………… 41

О. В. Ланкова
Пакет контрольно-диагностических материалов по разделу «Решение показательных и логарифмических уравнений, неравенств и систем» . 43

Т. В. Макарова
Технологическая карта изучения раздела «Решение тригонометрических уравнений, неравенств, систем» ………………… 45

И. Н. Мамадалеев
Площади многоугольников ……………………………………………… 47

А. С. Марянова
Методы решения тригонометрических уравнений …………………….. 48

Н. В. Мельникова
Элективный курс по теме «Процентные расчеты» …………………… 51

А. Р. Насырова
Пакет контрольно-измерительных материалов по разделу «Решение тригонометрических уравнений, неравенств, систем» ………………... 53

Ю. Г. Огай
Пакет контрольно-диагностических материалов по разделу «Первообразная и интеграл» …………………………………………….. 58

В. Н. Першина
Изучение тригонометрии в школьном курсе математики …………… 62

Т. А. Першина
Исследовательская деятельность на уроках математики ……………… 66

Е. В. Платонова
О домашней контрольной работе по теме «Производная» ……………. 68

О. Е. Польшакова
Методика изучения темы «Функции» в школьном курсе математики 70

Т. В. Рыжова
Пакет контрольно-диагностических материалов по теме «Решение уравнений. 6 класс» ………………………………………………………. 71

Н. Б. Рытько
Пакет контрольно-диагностических материалов по разделу «Тела и поверхности вращения» …………………………………………………….. 74

Л. Р. Садрисламова
Пакет контрольно-диагностических материалов по разделу «Решение показательных и логарифмических уравнений, неравенств и систем» . 76

С. А. Сотникова
Система упражнений по теме «Решение уравнений и неравенств: иррациональных и с модулем» ………………………………………… 77

А. Ю. Тарасов
Программа спецкурса «Диофантовы уравнения» ……………………... 79

Е. В. Терехина
Диагностическая контрольная работа по разделу «Тригонометрия» … 81

Ф. А. Хакимова
Пакет контрольно-диагностических материалов по разделу «Прямые и плоскости в пространстве» ……………………………………………. 87

М. А. Шлютова
Программа элективного курса «Элементы математического моделирования» ……………………………………………………………... 90

Секция 4. Студенческие научные работы

В. Ф. Алиева, Ю. Е. Кувайскова
Исследование эффективности численных методов решения задачи Коши ………………………………………………………………………. 94

Г. А. Анкилов, А. В. Анкилов, Р. М. Мефтахутдинов
Определение удельного заряда электрона в системе Mathcad ………… 99

А. Д. Барт, Ю. Е. Кувайскова
Применение методов машинного обучения для решения задачи технической диагностики ……………………………..……………..…... 107

Е. А. Будников, А. А. Воронцов
Исследование в магнитострикционных наклономерах магнитных полей ………………………………………………………………….. 113

А. Р. Габитова, Ю. Е. Кувайскова
Применение фрактальных методов для исследования прогностических свойств контролируемых параметров объекта ..……. 119

Е. Р. Исянова, И. В. Кокин, Ю. Е. Кувайскова
Исследование эффективности численных методов для решения систем нелинейных уравнений ……………………………...…… 125

И. Н. Калягин, А. А. Воронцов
Перспективы развития облачных технологий в компьютерных сетях образовательных учреждений ……………………………………….. 131

А. А. Кичерова
Формула роста ………………………………………………………… 136

Н. В. Плешко
Возможности применения графических интерпретаций при решении практических задач методами динамического программирования ….. 138

Д. А. Спиридонов, Б. А. Горлач
Многомерные симплексы в задачах оптимизации …………………….. 145

К. А. Федорова, Ю. Е. Кувайскова
Исследование применимости методов нечеткой логики в задачах технической диагностики ……..……………………………………… 149

М. К. Федорова, В. Н. Клячкин
Многомерный статистический контроль среднего уровня и рассеяния процесса ………………………………………………………………… 153

К. С. Ширкунова, Ю. Е. Кувайскова
Численное решение линейной краевой задачи методом конечных разностей ……………………………………………………………….. 160

С. В. Юдина, М. А. Кузнецова, Е. П. Захарчук, О. А. Кузнецова
Разработка программного инструмента для реализации и визуализации процесса достижения согласования интересов агентов при распределении ограниченного ресурса …………………………….. 165

Сведения об авторах ……………………………………………….. 171

Требования к оформлению

электронных текстов статей в сборник научных трудов
«Математические методы и модели: теория, приложения
и роль в образовании»

1. Объем текста статьи – до 20 страниц.
2. **Редактор – Microsoft Word 2000, 2003, 2007. Формат А4. Шрифт** – Times New Roman (**14**). Межстрочный интервал – одинарный (Word). **Поля** – левое, правое, верхнее – **25 мм**, нижнее – **30 мм.** Отступ (красная строка) – **10 мм.** Не допускается использования табуляции и пробелов для формирования отступа первой строки абзаца!
3. При оформлении формул использовать редактор формул Microsoft Equation 3.0. **Установки редактора формул:** размеры: **14 – 11 – 9 – 16 – 11**, стиль переменных и функций – курсив. Номера формул указываются в скобках с правой стороны, формулы центрируются. Выравнивание по ширине.
4. При оформлении рисунков в документе не допускается использование панели Рисование Microsoft Word непосредственно в тексте документа! Рекомендуется использование вставки рисунка из буфера, из файла без привязки. Формат графических файлов bmp. Названия рисунков (обязательно) даются снизу по центру рисунка шрифтом Times New Roman 12 pt, курсив.
5. Названия таблиц (обязательно) и сами таблицы печатаются шрифтом Times New Roman 14 pt.
6. С первой строки УДК работы (от левого края), далее пустая строка, И. О. Фамилия авторов (строчными буквами, от левого края, полужирный шрифт), далее пустая строка, НАЗВАНИЕ (прописными буквами, от левого края, полужирный шрифт), далее пустая строка, затем **обязательно краткая аннотация работы** до 10 строк (строчными буквами, по ширине, курсив, шрифт Times New Roman 12), далее пустая строка, затем текст статьи, далее пустая строка, затем БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.
7. Диск с файлами, содержащими текст статьи, файлы рисунков и сведения об авторах (научная степень, научное звание, должность, место работы, e-mail авторов) необходимо предоставить на кафедру «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета по адресу: г. Ульяновск, ул. Северный венец, 32, Вельмисову П. А. Файлы можно также выслать на электронный адрес velmisov@ulstu.ru
8. *Тексты статей, оформленные с нарушениями данных требований, не включаются в сборник научных трудов.*

Научное электронное издание

Математические методы и модели:
теория, приложения и роль в образовании
Международная научно-техническая конференция
(Россия, г. Ульяновск, 28–30 апреля 2016 г.)

Сборник научных трудов
Часть 2

Под общей редакцией П. А. Вельмисова

Технический редактор: Ю. С. Лесняк

ЭИ № 893. Объем данных 2,7 Мб.

ЛР № 020640 от 22.10.97.

Печатное издание
Подписано в печать 02.12.2016. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 10,46. Тираж 150 экз. Заказ № 332.

Ульяновский государственный технический университет
432027, г. Ульяновск, Сев. Венец, 32.
ИПК «Венец» УлГТУ, 432027, г. Ульяновск, Сев. Венец, 32.
Тел.: (8422) 778-113
E-mail: venec@ulstu.ru
http://www.venec.ulstu.ru