

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Ульяновский государственный технический университет

Научно-методический совет по математике МОН РФ

Российская академия естественных наук

Средневолжское математическое общество

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

Ульяновск
2009

УДК 51 (04)

ББК 22 я43

П75

Рецензенты:

Д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой «Прикладная математика»
Ульяновского государственного университета А. А. Бутов

Д-р техн. наук, профессор кафедры «Информационные технологии»
Ульяновского государственного университета К. В. Кумунжиев

Редакционная коллегия:

А. С. Андреев (г. Ульяновск), А. В. Анкилов (г. Ульяновск, отв. секретарь),
В. И. Астафьев (г. Самара), К. К. Васильев (г. Ульяновск), П. А. Вельмисов
(г. Ульяновск, отв. редактор), П. К. Волков (г. Ханты-Мансийск),
А. И. Голованов (г. Казань), Ю. Н. Горелов (г. Самара), Ю. П. Гупало
(г. Москва), А. Г. Егоров (г. Казань), А. Н. Зарубин (г. Орел), В. А. Иванов
(г. Казань), Л. И. Каранджулов (г. София, Болгария), А. В. Карапетян
(г. Москва), Л. Ю. Коссович (г. Саратов), П. С. Красильников (г. Москва),
В. Р. Крашенинников (г. Ульяновск), В. Л. Леонтьев (г. Ульяновск),
Б. В. Логинов (г. Ульяновск), В. К. Манжосов (г. Ульяновск), С. И. Мартынов
(г. Ханты-Мансийск), Л. И. Могилевич (г. Саратов), Ю. Н. Санкин
(г. Ульяновск), Ю. Э. Сеницкий (г. Самара), А. П. Солдатов (г. Белгород),
Л. А. Сухарев (г. Саранск), М. Д. Тодоров (г. София, Болгария), Д. Я. Хусаинов
(г. Киев), Б. И. Чешанков (г. София, Болгария), П. А. Шаманаев (г. Саранск),
Г. П. Шиндяпин (г. Саратов), А. Г. Ягола (г. Москва).

УДК 51(04)

Прикладная математика и механика : сборник научных трудов. – Ульяновск
: УлГТУ, 2009. – 324 с.

В сборнике (выпуск 8) представлены статьи, посвященные аналитическим и численным методам решения задач механики сплошных сред (механики твердого деформируемого тела, газовой динамики, аэрогидроупругости). Часть работ посвящена проблемам устойчивости, оптимальному управлению, методам оптимизации, математической физике, теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, обработке изображений, динамике нелинейных систем.

Для специалистов в области прикладной математики и механики.

Статьи печатаются в авторской редакции.

ISBN 978-5-9795-0513-8

© Колл. авторов, 2009
© Оформление. УлГТУ, 2009

А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов (г. Ульяновск)

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ АЭРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Проведено численно-аналитическое исследование динамической устойчивости упругой пластины, сжатой (растянутой) продольным усилием, с учетом взаимодействия с потоком идеальной жидкости (газа). Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Аналитическое исследование проведено на основе построения положительно определенного функционала, соответствующего полученному интегро-дифференциальному уравнению с частными производными для прогиба пластины, получены условия устойчивости решений этого уравнения. Численно-аналитическое исследование проведено на основе метода Галеркина с последующей реализацией численного эксперимента в системе Mathematica, построена область устойчивости.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК №П1122, а также поддержана грантом РФФИ № 09-01-97005.

1. Постановка задачи

Рассмотрим плоскую задачу аэрогидроупругости о малых колебаниях, возникающих при бесциркуляционном обтекании упругой пластины-полосы потоком идеального несжимаемого газа (жидкости).

Пусть на плоскости xOy , в которой происходят совместные колебания пластины и газа, пластине соответствует на оси Ox отрезок $[0, l]$ (рис.1). В бесконечно удаленной точке скорость газа равна V и имеет направление, совпадающее с направлением оси Ox . Будем предполагать, что деформации пластины и возмущение однородного потока малы, т. е. $\bar{\varphi} = Vx + \varepsilon\varphi(x, y, t)$, $\bar{w} = \varepsilon w(x, t)$, $\varepsilon \ll 1$. Здесь \bar{w} и $\bar{\varphi}$ – соответственно деформация пластины и потенциал скорости возмущенного потока газа; x, y – декартовы координаты; t – время.

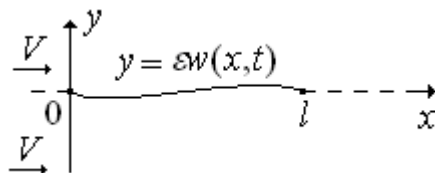


Рис.1. Двустороннее безотрывное обтекание пластины

Потенциал φ возмущенного потока удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G = R^2 \setminus [0, l], \quad (1)$$

граничным условиям (условиям непротекания)

$$\varphi_y^\pm = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \varphi_y(x, y, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), \quad x \in (0, l), \quad (2)$$

и условию отсутствия возмущений в бесконечно удаленной точке

$$(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2)_\infty = 0. \quad (3)$$

Аэродинамическое воздействие на пластину, зависящее от поперечной составляющей ее деформации $w(x, t)$, выражается через потенциал скорости $\varphi(x, y, t)$ по формуле

$$P(x, t) = \rho(\varphi_t^+ - \varphi_t^-) + \rho V(\varphi_x^+ - \varphi_x^-), \quad x \in (0, l), y = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим линейную модель малых колебаний упругой пластины с учетом силового воздействия потока P на нее:

$$M\ddot{w}(x, t) + Dw''''(x, t) + Nw''(x, t) + \beta_0 w(x, t) + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_2 \dot{w}''''(x, t) = P(x, t). \quad (5)$$

Здесь и в дальнейшем индексы x, y, t снизу обозначают производные по x, y, t ; штрих обозначает производную по x и τ , а точка – производную по t ;

ρ – плотность газа; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – изгибная жесткость пластины;

h – толщина пластины; $M = h\rho_n$ – погонная масса пластины; E, ρ_n – модуль упругости и линейная плотность пластины; N – сжимающая (растягивающая) пластину сила; β_2, β_1 – коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования; β_0 – коэффициент жесткости основания; ν – коэффициент Пуассона.

Пусть концы пластины закреплены жестко или шарнирно, тогда граничные условия для $w(x, t)$ имеют вид

$$1) w(x, t) = w'(x, t) = 0, \quad 2) w(x, t) = w''(x, t) = 0; \quad x = 0 \text{ или } x = l. \quad (6)$$

Так, например, условия 1) – 1): $w(0, t) = w'(0, t) = 0, w(l, t) = w'(l, t) = 0$ означают жесткое закрепление обоих концов, условия 1) – 2) – жесткое закрепление левого конца и шарнирное опирание правого и т. д.

Зададим также начальные условия

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x, 0) = f_2(x), \quad (7)$$

которые должны быть согласованы с краевыми условиями.

Таким образом, получили связанную начально-краевую задачу (1) – (7) для определения неизвестных функций $w(x, t)$ и $\varphi(x, y, t)$.

2. Определение силового воздействия потока

В области G , считая t параметром, введем комплексный потенциал $W = f(z, t) = \varphi + i\psi$, где $\psi = \psi(x, y, t)$ – функция тока, $z = x + iy$. Так как $f(z, t)$ – аналитическая функция комплексного переменного z , то $\psi_x = -\varphi_y$.

Тогда согласно (2) на границе области G имеем

$$\psi^\pm(x, 0, t) = -\omega(x, t) + C_\pm(t), \quad (8)$$

где $\omega(x,t) = \int_0^x (w_t + Vw_x) dx$, $x \in (0,l)$, $C_+(t), C_-(t)$ – произвольные функции.

С помощью функции $\zeta = -\sqrt{\frac{l-z}{z}}$ конформно отображим область G на верхнюю полуплоскость $H = \{\zeta : \text{Im}\zeta > 0\}$, при этом $\sqrt{\frac{l-z}{z}} > 0$ на верхнем берегу разреза $[0, l]$. В случае бесциркуляционного обтекания $if(z(\zeta), t)$ – однозначная аналитическая функция в полуплоскости H , а на границе ($\text{Im}\zeta = \xi = 0$) значения ее вещественной части равны

$$\text{Re}(if(x(\xi), t)) = \begin{cases} -\psi^+ = \omega(x(\xi), t) - C_+(t), \xi \in (-\infty, 0) \\ -\psi^- = \omega(x(\xi), t) - C_-(t), \xi \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Зависимость $x = x(\xi)$ определяется из формулы

$$\zeta = -\sqrt{\frac{l-z}{z}} \text{ при } z = x, \quad \zeta = \xi : x = \frac{l}{1 + \xi^2}, \quad -\infty < \xi < \infty.$$

Воспользовавшись интегралом Шварца для полуплоскости [2], будем иметь:

$$f(z(\zeta), t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \omega(x(\xi), t) \frac{d\xi}{\xi - \zeta} - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \omega(x(\xi), t) \frac{d\xi}{\xi - \zeta} + \\ + \frac{C_+(t)}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{d\xi}{\xi - \zeta} + \frac{C_-(t)}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi - \zeta} + C(t),$$

где $C(t)$ – произвольная функция времени.

Преобразуем полученное выражение, полагая $\xi = \pm \sqrt{\frac{l-x}{x}}$

$$f(z(\zeta), t) = -\frac{l}{2\pi} \int_0^l \frac{(C_+(t) - C_-(t)) dx}{x(l-x - \zeta^2 x)} - \frac{l\zeta}{\pi} \int_0^l \frac{\omega(x,t) dx}{\sqrt{x(l-x)(l-x - \zeta^2 x)}} + \\ + \frac{l\zeta}{2\pi} \int_0^l \frac{(C_+(t) + C_-(t)) dx}{\sqrt{x(l-x)(l-x - \zeta^2 x)}} + C(t).$$

Так как $\psi(0, +0, t) = \psi(0, -0, t)$, то из выражения (8) следует, что $C_+(t) \equiv C_-(t)$. Подставляя $\zeta = -\sqrt{\frac{l-z}{z}}$, получим

$$f(z, t) = \frac{\sqrt{z(l-z)}}{\pi} \int_0^l \frac{\omega(x,t) dx}{\sqrt{x(l-x)(z-x)}} - C_+(t) \frac{\sqrt{z(l-z)}}{\pi} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x(l-x)(z-x)}} + C(t).$$

Проинтегрируем предпоследнее слагаемое

$$\int_0^l \frac{\sqrt{z(l-z)}}{\sqrt{\tau(l-\tau)}} \frac{d\tau}{z-\tau} = \pi i.$$

Подставляя, получим

$$f(z,t) = \frac{\sqrt{z(l-z)}}{\pi} \int_0^l \frac{\omega(x,t) dx}{\sqrt{x(l-x)}(z-x)} + C_1(t),$$

где $C_1(t) = C(t) - \pi C_+(t)$.

В силу условия (3) $C_1(t) \equiv C_1 = const$. Без ограничения общности можно считать, что $C_1 = 0$. Поменяем переменную интегрирования x на τ в выражении для $f(z,t)$:

$$f(z,t) = \frac{\sqrt{z(l-z)}}{\pi} \int_0^l \frac{\omega(\tau,t)}{\sqrt{\tau(l-\tau)}(z-\tau)} d\tau. \quad (9)$$

Учитывая, что

$$\left(\frac{\sqrt{z(l-z)}}{z-\tau} \right)'_z = - \frac{\sqrt{\tau(l-\tau)}}{\sqrt{z(l-z)}} \left(\frac{\sqrt{\tau(l-\tau)}}{z-\tau} \right)'_\tau,$$

имеем

$$f'_z(z,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{\omega(\tau,t)}{\sqrt{\tau(l-\tau)}} \left(\frac{\sqrt{z(l-z)}}{z-\tau} \right)'_z d\tau = - \frac{1}{\pi \sqrt{z(l-z)}} \int_0^l \omega(\tau,t) \left(\frac{\sqrt{\tau(l-\tau)}}{z-\tau} \right)'_\tau d\tau.$$

Интегрируя по частям, получим следующее выражение для сопряженной комплексной скорости:

$$f'_z(z,t) = \frac{1}{\pi \sqrt{z(l-z)}} \int_0^l \frac{\partial \omega(\tau,t)}{\partial \tau} \frac{\sqrt{\tau(l-\tau)}}{z-\tau} d\tau. \quad (10)$$

Очевидно $f'_z(\infty,t) = (\varphi_x - i\varphi_y)_\infty = 0$, т. е. условие (3) выполняется.

Выразим теперь правую часть (4) через функцию деформации $w(x,t)$. Для этого перейдем в (9) к пределу $z \rightarrow x \pm i0, x \in (0,l)$. Согласно формулам Сохоцкого [2] будем иметь

$$\varphi^\pm + i\psi^\pm = \pm \frac{\sqrt{x(l-x)}}{\pi} \int_0^l \frac{\omega(\tau,t)}{\sqrt{\tau(l-\tau)}(x-\tau)} d\tau,$$

следовательно

$$\varphi_t^+ - \varphi_t^- = \frac{2\sqrt{x(l-x)}}{\pi} \int_0^l \frac{\partial \omega(\tau,t)}{\partial t} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(l-\tau)}(x-\tau)}.$$

Из формулы (10) при $z \rightarrow x \pm i0, x \in (0,l)$ согласно формулам Сохоцкого находим

$$\varphi_x^\pm + i\psi_x^\pm = \pm \frac{1}{\pi \sqrt{x(l-x)}} \int_0^l \frac{\partial \omega(\tau,t)}{\partial \tau} \frac{\sqrt{\tau(l-\tau)}}{x-\tau} d\tau,$$

следовательно,

$$\varphi_x^+ - \varphi_x^- = \frac{2}{\pi \sqrt{x(l-x)}} \int_0^l \frac{\partial \omega(\tau,t)}{\partial \tau} \frac{\sqrt{\tau(l-\tau)}}{x-\tau} d\tau.$$

Согласно формуле (4) запишем выражение для аэродинамического

воздействия на пластину

$$P(x,t) = \frac{2\rho\sqrt{x(l-x)}}{\pi} \int_0^l \frac{\partial\omega(\tau,t)}{\partial t} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(l-\tau)}(x-\tau)} + \frac{2\rho V}{\pi\sqrt{x(l-x)}} \int_0^l \frac{\partial\omega(\tau,t)}{\partial\tau} \frac{\sqrt{\tau(l-\tau)}}{x-\tau} d\tau. \quad (11)$$

Преобразуем правую часть этого равенства к более удобному для исследования виду. С этой целью введем функцию

$$K(\tau,x) = 2\ln \left| \frac{\sqrt{x(l-\tau)} + \sqrt{\tau(l-x)}}{\sqrt{x(l-\tau)} - \sqrt{\tau(l-x)}} \right|, \quad (12)$$

$\tau, x \in [0, l]$, $\tau \neq x$. Нетрудно видеть, что $K(\tau, x) \geq 0$, $K(\tau, x) = K(x, \tau)$.

Учитывая, что

$$\frac{\partial K(\tau, x)}{\partial\tau} = \frac{2\sqrt{x(l-x)}}{\sqrt{\tau(l-\tau)}(x-\tau)}, \quad \frac{\partial K(\tau, x)}{\partial x} = -\frac{2\sqrt{\tau(l-\tau)}}{\sqrt{x(l-x)}(x-\tau)},$$

запишем (11) в виде

$$P(x,t) = \frac{\rho}{\pi_0} \int_0^l \frac{\partial\omega(\tau,t)}{\partial t} \frac{\partial K(\tau, x)}{\partial\tau} d\tau - \frac{V\rho}{\pi_0} \int_0^l \frac{\partial\omega(\tau,t)}{\partial\tau} \frac{\partial K(\tau, x)}{\partial x} d\tau, \quad x \in (0, l). \quad (13)$$

Проинтегрируем первый интеграл в правой части (13) по частям. Учитывая, что $\omega(0, t) = 0$ и $K(l, x) = 0$, получим

$$P(x,t) = -\frac{\rho}{\pi_0} \int_0^l \frac{\partial^2\omega(\tau,t)}{\partial t \partial\tau} K(\tau, x) d\tau - \frac{V\rho}{\pi_0} \int_0^l \frac{\partial\omega(\tau,t)}{\partial\tau} \frac{\partial K(\tau, x)}{\partial x} d\tau, \quad x \in (0, l).$$

Подставляя выражение для $\omega(\tau, t)$, окончательно запишем

$$P(x,t) = -\frac{\rho}{\pi_0} \int_0^l (\ddot{w}(\tau, t) + V\dot{w}'(\tau, t)) K(\tau, x) d\tau - \frac{V\rho}{\pi_0} \int_0^l (\dot{w}(\tau, t) + Vw'(\tau, t)) \frac{\partial K(\tau, x)}{\partial x} d\tau, \quad (14)$$

$$x \in (0, l).$$

Если решение $w(x, t)$ системы уравнений (14), (5) найдено, то, полагая в (9) $z = x + iy$ и отделяя вещественную часть, получим потенциал $\varphi(x, y, t)$.

3. Исследование устойчивости

Рассмотрим систему уравнений (5), (14). Исключая $P(x, t)$, запишем уравнение для определения деформации пластины

$$\begin{aligned} M\dot{w}(x, t) + Dw'''(x, t) + Nw''(x, t) + \beta_0 w(x, t) + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_2 \dot{w}'''(x, t) = \\ = -\frac{\rho}{\pi_0} \int_0^l (\ddot{w}(\tau, t) + V\dot{w}'(\tau, t)) K(\tau, x) d\tau - \frac{V\rho}{\pi_0} \int_0^l (\dot{w}(\tau, t) + Vw'(\tau, t)) \frac{\partial K(\tau, x)}{\partial x} d\tau, \end{aligned} \quad (15)$$

где $x \in (0, l)$, а ядро $K(\tau, x)$ определено выражением (12).

Получим достаточные условия устойчивости решения интегродифференциального уравнения (15) по отношению к возмущениям начальных условий. Введем функционал

$$\Phi = \int_0^l \{M\dot{w}^2 + Dw''^2 - Nw'^2 + \beta_0 w^2\} dx + I(t) + J(t), \quad (16)$$

$$I(t) = \frac{\rho}{\pi_0} \int_0^l dx \int_0^l \dot{w}(x,t) \dot{w}(\tau,t) K(\tau,x) d\tau, \quad J(t) = -\frac{\rho V^2}{\pi} \int_0^l dx \int_0^l w'(x,t) w'(\tau,t) K(\tau,x) d\tau. \quad (17)$$

Найдем производную от Φ по t

$$\dot{\Phi} = 2 \int_0^l \{ M \dot{w} \ddot{w} + D w'' \dot{w}'' - N w' \dot{w}' + \beta_0 w \dot{w} \} dx + \dot{I}(t) + \dot{J}(t).$$

Для функции $w(x,t)$, являющейся решением уравнения (15), это равенство примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} = 2 \int_0^l \left\{ -\dot{w} \left[D w'''' + N w'' + \beta_0 w + \beta_1 \dot{w} + \beta_2 \dot{w}'' + \frac{\rho}{\pi_0} \int_0^l (\dot{w}(\tau,t) + V \dot{w}'(\tau,t)) K(\tau,x) d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{V\rho}{\pi} \int_0^l (\dot{w}(\tau,t) + V \dot{w}'(\tau,t)) \frac{\partial K(\tau,x)}{\partial x} d\tau \right] + D w'' \dot{w}'' - N w' \dot{w}' + \beta_0 w \dot{w} \right\} dx + \dot{I}(t) + \dot{J}(t). \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнение (15) получено при любых способах закрепления упругой пластины. Проведем интегрирование по частям с учетом условий (6):

$$\int_0^l \dot{w} w'''' dx = \int_0^l \dot{w}'' w'' dx, \quad \int_0^l \dot{w} w'' dx = -\int_0^l \dot{w}' w' dx, \quad \int_0^l \dot{w} \dot{w}'''' dx = \int_0^l \dot{w}''^2 dx. \quad (19)$$

Пусть выполняются неравенства

$$\beta_1 \geq 0, \quad \beta_2 \geq 0, \quad (20)$$

тогда с учетом (19) выражение для $\dot{\Phi}$ примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} = 2 \int_0^l \left\{ -\dot{w} \left[\frac{\rho}{\pi_0} \int_0^l (\dot{w}(\tau,t) + V \dot{w}'(\tau,t)) K(\tau,x) d\tau + \frac{V\rho}{\pi} \int_0^l (\dot{w}(\tau,t) + V \dot{w}'(\tau,t)) \frac{\partial K(\tau,x)}{\partial x} d\tau \right] - \right. \\ \left. - \beta_2 \dot{w}''^2 - \beta_1 \dot{w}'^2 \right\} dx + \dot{I}(t) + \dot{J}(t) \leq 2 \int_0^l \left\{ -\dot{w} \left[\frac{\rho}{\pi_0} \int_0^l (\dot{w}(\tau,t) + V \dot{w}'(\tau,t)) K(\tau,x) d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{V\rho}{\pi} \int_0^l (\dot{w}(\tau,t) + V \dot{w}'(\tau,t)) \frac{\partial K(\tau,x)}{\partial x} d\tau \right] \right\} + \dot{I}(t) + \dot{J}(t). \end{aligned} \quad (21)$$

Изменяя порядок интегрирования и используя условия (6), проведем интегрирование по частям

$$\begin{aligned} \int_0^l dx \int_0^l \dot{w}(x,t) \dot{w}(\tau,t) \frac{\partial K(\tau,x)}{\partial x} d\tau = \int_0^l d\tau \int_0^l \dot{w}(x,t) \dot{w}(\tau,t) \frac{\partial K(\tau,x)}{\partial x} dx = \int_0^l \dot{w}(x,t) \dot{w}(\tau,t) K(\tau,x) \Big|_{x=0}^{x=l} d\tau - \\ - \int_0^l d\tau \int_0^l \dot{w}'(x,t) \dot{w}(\tau,t) K(\tau,x) dx = - \int_0^l dx \int_0^l \dot{w}'(\tau,t) \dot{w}(x,t) K(\tau,x) d\tau. \end{aligned} \quad (22)$$

В последнем равенстве поменяли местами переменные интегрирования x и τ (учитывая, что $K(\tau,x) = K(x,\tau)$).

Аналогично получим

$$\int_0^l dx \int_0^l \dot{w}(x,t) w'(\tau,t) \frac{\partial K(\tau,x)}{\partial x} d\tau = - \int_0^l dx \int_0^l \dot{w}'(x,t) w'(\tau,t) K(\tau,x) d\tau, \quad (23)$$

где в последнем равенстве возвратились к прежнему порядку интегрирования.

Преобразуем интегралы $\dot{I}(t)$, $\dot{J}(t)$, учитывая, что $K(\tau, x) = K(x, \tau)$:

$$\dot{I}(t) = \frac{d}{dt} \frac{\rho}{\pi} \int_0^l dx \int_0^l \dot{w}(x, t) \dot{w}(\tau, t) K(\tau, x) d\tau = \frac{2\rho}{\pi} \int_0^l dx \int_0^l \dot{w}(x, t) \dot{w}(\tau, t) K(\tau, x) d\tau, \quad (24)$$

$$\dot{J}(t) = -\frac{2\rho V^2}{\pi} \int_0^l dx \int_0^l \dot{w}'(x, t) w'(\tau, t) K(\tau, x) d\tau. \quad (25)$$

С учетом (22)-(25) неравенство (21) примет вид

$$\dot{\Phi} \leq 0. \quad (26)$$

Интегрируя (26) от 0 до t , получим:

$$\Phi(t) \leq \Phi(0). \quad (27)$$

Учитывая неравенства, полученные в [3]:

$$0 \leq \int_0^l dx \int_0^l \dot{w}(x, t) \dot{w}(\tau, t) K(\tau, x, l) d\tau \leq \pi \int_0^l \dot{w}^2(x, t) dx, \quad (28)$$

$$0 \leq \int_0^l dx \int_0^l w'(x, t) w'(\tau, t) K(\tau, x, l) d\tau \leq 1,3257 \cdot l \int_0^l w'^2(x, t) dx, \quad (29)$$

оценим $\Phi(t)$, $\Phi(0)$:

$$\Phi(0) = \int_0^l \left\{ M\dot{w}_0^2 + Dw_0''^2 - Nw_0'^2 + \beta_0 w_0^2 \right\} dx + \frac{\rho}{\pi} \int_0^l dx \int_0^l \dot{w}(x, 0) \dot{w}(\tau, 0) K(\tau, x) d\tau - \quad (30)$$

$$- \frac{\rho V^2}{\pi} \int_0^l dx \int_0^l w'(x, 0) w'(\tau, 0) K(\tau, x) d\tau \leq \int_0^l \left\{ (M + \rho l) \dot{w}_0^2 + Dw_0''^2 - Nw_0'^2 + \beta_0 w_0^2 \right\} dx,$$

$$\Phi(t) = \int_0^l \left\{ M\dot{w}^2 + Dw''^2 - Nw'^2 + \beta_0 w^2 \right\} dx + I(t) + J(t) \geq \quad (31)$$

$$\geq \int_0^l \left\{ M\dot{w}^2 + Dw''^2 - \left(N + \frac{1,3257 \cdot l \rho V^2}{\pi} \right) w'^2 + \beta_0 w^2 \right\} dx,$$

где $\dot{w}_0 = \dot{w}(x, 0)$, $w_0 = w(x, 0)$, $w_0' = w'(x, 0)$, $w_0'' = w''(x, 0)$.

Таким образом, из (27), (30), (31) получим

$$\int_0^l \left\{ M\dot{w}^2 + Dw''^2 - \left(N + \frac{1,3257 \cdot l \rho V^2}{\pi} \right) w'^2 + \beta_0 w^2 \right\} dx \leq \quad (32)$$

$$\leq \int_0^l \left\{ (M + \rho l) \dot{w}_0^2 + Dw_0''^2 - Nw_0'^2 + \beta_0 w_0^2 \right\} dx.$$

Рассмотрим краевую задачу для уравнения $\psi^{IV}(x) = -\lambda \psi''(x)$, $x \in [0, l]$ с краевыми условиями (6). Эта задача является самосопряженной и полностью определенной. Действительно, интегрируя по частям, нетрудно убедиться, что

$$\int_0^l u(x) v^{IV}(x) dx = \int_0^l v(x) u^{IV}(x) dx, \quad \int_0^l u(x) v''(x) dx = \int_0^l v(x) u''(x) dx,$$

$$\int_0^l u(x)u^{IV}(x)dx > 0, \quad -\int_0^l u(x)u''(x)dx > 0,$$

для любых функций $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющих рассматриваемым краевым условиям и имеющих на $[0, l]$ непрерывные производные четвертого порядка. Для функции $w(x, t)$ запишем неравенство Рэлея [4]:

$$\int_0^l w(x, t)w^{IV}(x, t)dx \geq -\lambda_1 \int_0^l w(x, t)w''(x, t)dx,$$

где λ_1 – наименьшее собственное значение рассматриваемой краевой задачи. Интегрируя по частям, представим это неравенство в виде:

$$\int_0^l w'^2(x, t)dx \geq \lambda_1 \int_0^l w^2(x, t)dx. \quad (33)$$

Далее, воспользовавшись неравенством Буняковского, будем иметь

$$w^2(x, t) \leq l \int_0^l w'^2(x, t)dx. \quad (34)$$

Пусть выполняется условие

$$N < \lambda_1 D - \frac{1,3257 \cdot l \rho V^2}{\pi}, \quad (35)$$

тогда с учетом (33) – (35) из (32) получаем неравенство

$$\left(\lambda_1 D - N - \frac{1,3257 \cdot l \rho V^2}{\pi} \right) \frac{w^2(x, t)}{l} \leq \int_0^l \left\{ (M + \rho l) \dot{w}_0^2 + (D + \lambda_1^{-1} |N|) w_0''^2 + \beta_0 w_0^2 \right\} dx,$$

из которого следует, что малым отклонениям начальных значений \dot{w}_0 , w_0'' соответствуют малые отклонения $w(x, t)$, т. е. решение уравнения (15) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (20) и (35). Тогда решение $w(x, t)$ уравнения (15) устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений прогибов, скоростей и кривизн w_0 , \dot{w}_0 , w_0'' , если $w(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (6).

Замечание. Из неравенства (32) следует устойчивость $\dot{w}(x, t)$, а из неравенств (32), (33) – устойчивость $w'(x, t)$ в среднем (в интегральном смысле) по отношению к возмущениям начальных значений w_0 , \dot{w}_0 , w_0'' при выполнении указанных в теореме условий.

4. Исследование динамики на основе метода Галеркина

Решение уравнения (15) будем искать методом Галеркина, подчинив искомую функцию $w(x, t)$ краевым условиям (6). Согласно методу Галеркина решение уравнения (15) ищется в виде

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(t) g_k(x), \quad (36)$$

где $g_k(x)$ – базисные функции, подобранные так, чтобы выполнялись заданные краевые условия, а функции $a_k(t)$ определяются из условия ортогональности невязки уравнения ко всем базисным функциям.

В качестве базисных возьмем функции

$$g_k(x) = A_k \cos \gamma_k x + B_k \sin \gamma_k x + C_k \operatorname{ch} \gamma_k x + D_k \operatorname{sh} \gamma_k x, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (37)$$

Коэффициенты A_k, B_k, C_k, D_k и параметр γ_k выберем так, чтобы на каждом из концов отрезка $[0, l]$ выполнялось одно из следующих условий:

$$1) g_k(x) = g'_k(x) = 0; \quad 2) g_k(x) = g''_k(x) = 0; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (38)$$

Тогда функция $w(x, t)$ в виде (36) будет удовлетворять условиям (6). Заметим, что γ_k и $g_k(x)$ – собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$g^{IV}(x) = \gamma^4 g(x) \quad (39)$$

с граничными условиями (38). Задача (39), (38) – самосопряженная и полностью определенная, следовательно, система функций $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональна на $[0, l]$. В этом случае согласно теореме о разложении любую функцию $U(x)$, четырехкратно непрерывно дифференцируемую в $(0, l)$ и удовлетворяющую соответствующим краевым условиям, можно разложить в ряд $U(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k(x)$, абсолютно и равномерно сходящийся в $(0, l)$.

Условия ортогональности невязки уравнения (15) к базисным функциям $\{g_m(x)\}_{m=1}^n$ позволяют записать систему уравнений для $a_m(t)$:

$$\left[D\gamma_m^4 a_m(t) + M a_m''(t) + \beta_2 \gamma_m^4 a_m'(t) + \beta_1 a_m'(t) + \beta_0 a_m(t) \right] \delta_m - \\ - N(t) \sum_{k=1}^n a_k(t) \int_0^l g'_k(x) g'_m(x) dx + \frac{\rho}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_0^l (a_k''(t) g_k(\tau) + V a_k'(t) g'_k(\tau)) K_{1m}(\tau) d\tau - \quad (40)$$

$$- \frac{\rho V}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_0^l (a_k'(t) g_k(\tau) + V a_k(t) g'_k(\tau)) K_{2m}(\tau) d\tau = 0,$$

$$\delta_m = \int_0^l g_m^2(x) dx, \quad K_{1m}(\tau) = \int_0^l g_m(x) K(\tau, x) dx, \quad K_{2m}(\tau) = \int_0^l g'_m(x) K(\tau, x) dx, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Условия ортогональности невязки начальных условий (7) к базисным функциям позволяют найти начальные условия $a_m(0)$, $a'_m(0)$:

$$a_m(0) = \frac{1}{\delta_m} \int_0^l f_1(x) g_m(x) dx, \quad a'_m(0) = \frac{1}{\delta_m} \int_0^l f_2(x) g'_m(x) dx. \quad (41)$$

Таким образом, получили задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (40) с начальными условиями (41).

5. Устойчивость решения в первом приближении

При $n = m = 1$ из (40) получим

$$Aa_1''(t) + Ba_1'(t) + C(t)a_1(t) = 0, \quad (42)$$

где

$$A = M\delta_1 + \frac{\rho}{\pi_0} \int_0^l g_1(\tau) K_{11}(\tau) d\tau, \quad B = (\beta_1 + \beta_2 \gamma_1^4) \delta_1,$$

$$C(t) = (D\gamma_1^4 + \beta_0) \delta_1 - N(t) \int_0^l g_1'^2(x) dx - \frac{\rho V^2}{\pi} \int_0^l g_1'(\tau) K_{21}(\tau) d\tau.$$

Получим достаточные условия устойчивости по Ляпунову для произвольного решения этого уравнения. Поскольку уравнение линейное, то достаточно исследовать устойчивость тривиального решения $a_1(t) \equiv 0$.

Введем функционал:

$$\Phi = Aa_1'^2(t) + C(t)a_1^2(t). \quad (43)$$

Предполагая, что $B \geq 0$, для производной $\frac{d\Phi}{dt}$ будем иметь

$$\dot{\Phi}(t) \leq 2a_1'(t)(-Ba_1'(t) - C(t)a_1(t)) + 2C(t)a_1(t)a_1'(t) = -2Ba_1'^2(t) \leq 0,$$

следовательно, $\Phi(t) \leq \Phi(0)$. Учитывая (43), получим:

$$Aa_1'^2(t) + C(t)a_1^2(t) \leq Aa_1'^2(0) + C(0)a_1^2(0).$$

Отсюда следует

Теорема 2. Решения уравнения (42) $a_1(t)$ и производная $a_1'(t)$ устойчивы по Ляпунову, если выполняются условия

$$A > 0, B \geq 0, C(t) > 0 \quad (44)$$

Проанализируем условия устойчивости (44) для конкретных типов закреплений и проведем численный анализ условий устойчивости для различных типов закреплений.

Приведем вид базисных функций для разных видов закреплений:

$$\text{ж-ж: } g_1(x) = \sin \gamma_1 x - \text{sh} \gamma_1 x - 1,018(\cos \gamma_1 x - \text{ch} \gamma_1 x), \quad \gamma_1 = \frac{4,73}{l},$$

$$\text{ж-ш: } g_1(x) = \sin \gamma_1 x - \text{sh} \gamma_1 x - \cos \gamma_1 x + \text{ch} \gamma_1 x, \quad \gamma_1 = \frac{3,93}{l},$$

$$\text{ш-ж: } g_1(x) = \sin \gamma_1 x - 0,028 \text{sh} \gamma_1 x, \quad \gamma_1 = \frac{3,93}{l},$$

$$\text{ш-ш: } g_1(x) = \sin \gamma_1 x, \quad \gamma_1 = \frac{3,14}{l},$$

где введены обозначения: ж – жесткое закрепление конца ($g_1(x) = g_1'(x) = 0, x = 0, l$), ш – шарнирное ($g_1(x) = g_1''(x) = 0, x = 0, l$).

Численные значения интегральных членов в условиях устойчивости приведены в таблице 1.

Таблица 1

	$\int_0^l g_1(\tau)K_{11}(\tau)d\tau$	$\int_0^l g_1'(\tau)K_{21}(\tau)d\tau$	$\int_0^l g_1'^2(\tau)d\tau$	$\delta_1 = \int_0^l g_1^2(\tau)d\tau$
ж-ж	$2,662 \cdot l^2$	14,437	12,6915/l	$1,03863 \cdot l$
ж-ш	$2,605 \cdot l^2$	11,949	11,5038/l	$1,00628 \cdot l$
ш-ж	$0,717 \cdot l^2$	17,436	5,7479/l	$0,50149 \cdot l$
ш-ш	$1,342 \cdot l^2$	4,954	4,9348/l	$0,5 \cdot l$

Из приведенной таблицы следует, что область устойчивости на плоскости (V, N) определяется неравенствами $V \geq 0$, $N < a_0 - a_1 V^2$, где a_0, a_1 – положительные постоянные.

Проведем сравнение результатов теорем 1 и 2 на плоскости (V, N) .

Будем считать, что пластина находится в потоке воздуха ($\rho = 1$) и изготовлена из алюминия ($E = 7 \cdot 10^{10}$), концы пластины закреплены шарнирно. Тогда при $h = 0,005$ получим $D = 806,7$. Пусть длина пластины $l = 2$, основание отсутствует – $\beta_0 = 0$.

1) Для шарнирно закрепленных концов наименьшее собственное значение $\lambda_1 = \pi^2 / l^2 = 2,467$ и условие (35) запишется в виде $N < 1990,13 - 0,844 \cdot V^2$. Третье условие (44) примет вид

$$(D\gamma_1^4 + \beta_0)\delta_1 - N(t)\int_0^l g_1'^2(x)dx - \frac{\rho V^2}{\pi} \int_0^l g_1'(\tau)K_{21}(\tau)d\tau > 0 \Rightarrow N < 1990,13 - 0,639 \cdot V^2.$$

Вершина у парабол совпадает, но коэффициенты при V^2 отличаются на $\Delta = 0,205$.

2) Для жестко закрепленных концов наименьшее собственное значение $\lambda_1 = 4\pi^2 / l^2 = 9,87$, и условие (35) запишется в виде $N < 7961,81 - 0,844 \cdot V^2$. Третье условие (44) примет вид $N < 8206,826 - 0,721 \cdot V^2$. В данном случае вершины у парабол не совпадают, но коэффициенты при V^2 отличаются только на $\Delta = 0,123$.

6. Численный эксперимент

Рассмотрим пример механической системы. Рабочая среда – идеальный газ ($\rho = 1$, $V = 30$), пластина изготовлена из алюминия ($E = 7 \cdot 10^{10}$, $\rho_{nl} = 8480$). Выберем следующие параметры механической системы $l = 2$, $h = 0,005$, $M = \rho_{nl} h = 42,4$, $\nu = 0,31$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 806,7$, $\beta_0 = 4$, $\beta_1 = 0,1$, $\beta_2 = 0,2$ (все значения приведены в системе СИ). Пусть начальные условия имеют вид $w(x,0) = 0,01 \cdot x^3(l-x)^3$, $\dot{w}(x,0) = -0,005 \cdot x^4(l-x)^4$ (начальные

условия согласуются как с жестким, так и шарнирным закреплением концов пластины).

1. Шарнирное закрепление концов пластины

С помощью математической системы Mathematica для данных значений параметров получим графики функции $w(x,t) = \sum_{k=1}^4 a_k(t) \sin \gamma_k x$, $\gamma_k = \frac{k\pi}{l}$ при $x_* = l/4, t \geq 0$ и $x_* \in [0, l], t = t_0$ при различных значениях N (Рис. 2 – 5).

1) $N = 1000$. При этих значениях параметров по теореме 1 колебания пластины устойчивы:

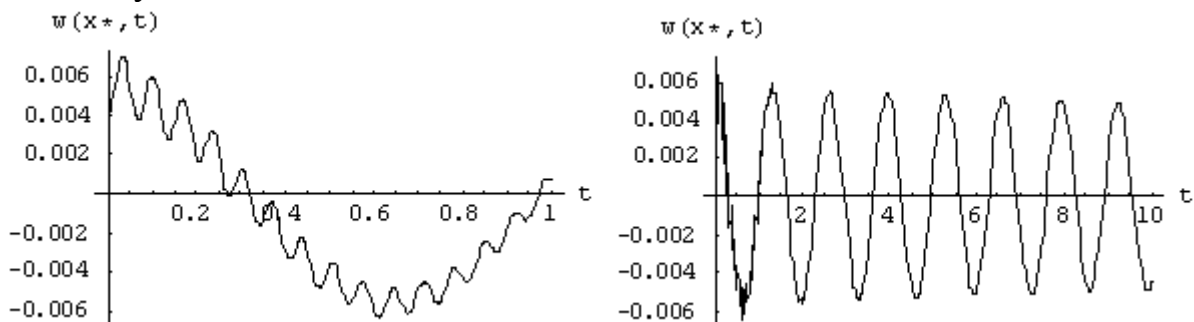


Рис.2. Деформация пластины в точке $x_* = l/4$

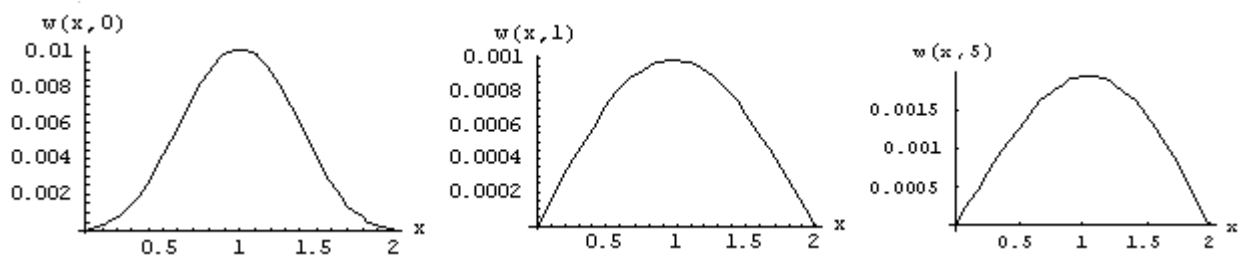


Рис.3. Прогиб пластины в различные моменты времени

2) $N = 2000$. При этих значениях параметров условие (35) теоремы 1 не выполняется, поэтому нельзя гарантировать устойчивость колебаний пластины:

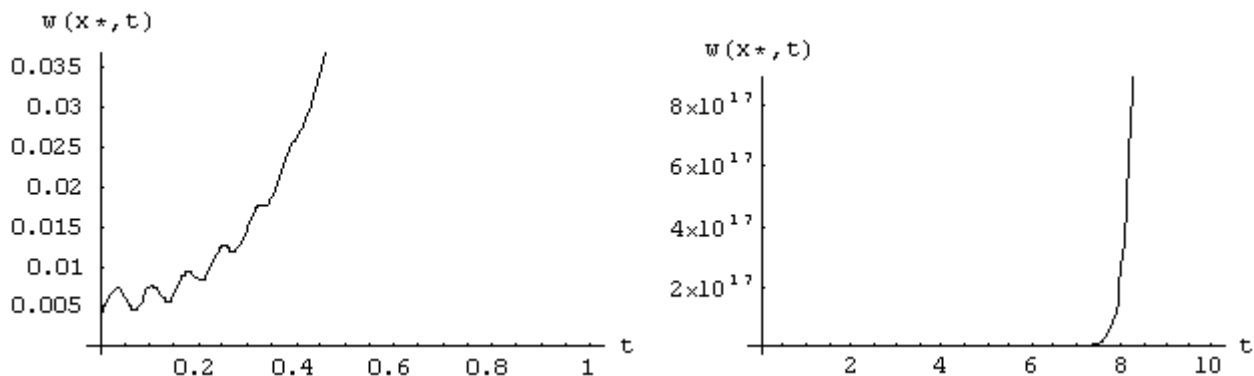


Рис.4. Деформация пластины в точке $x_* = l/4$

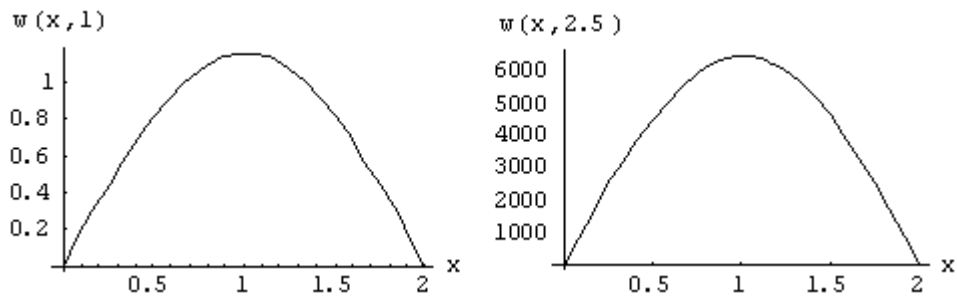


Рис.5. Прогиб пластины в различные моменты времени

Очевидно, что происходит нарушение устойчивости колебаний.

Исследуем сходимость приближений. При $N = 1000$ рассмотрим графики функций $a_1(t), a_2(t), a_3(t), a_4(t)$ (Рис. 6), разницу между вторым и третьим, третьим и четвертым приближениями (Рис. 7).

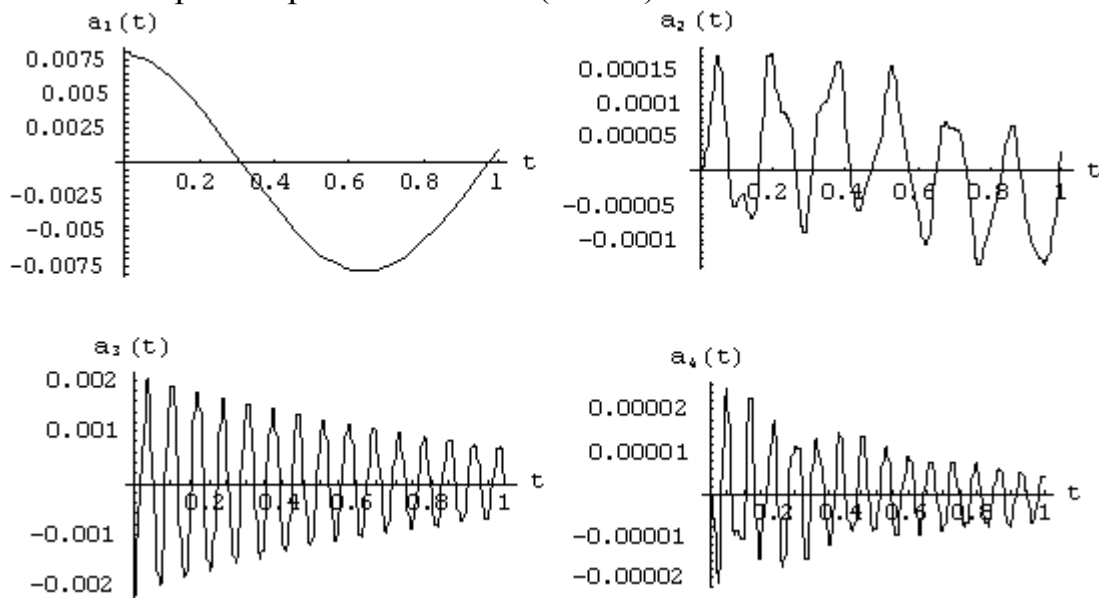


Рис.6. Графики функций $a_1(t), a_2(t), a_3(t), a_4(t)$

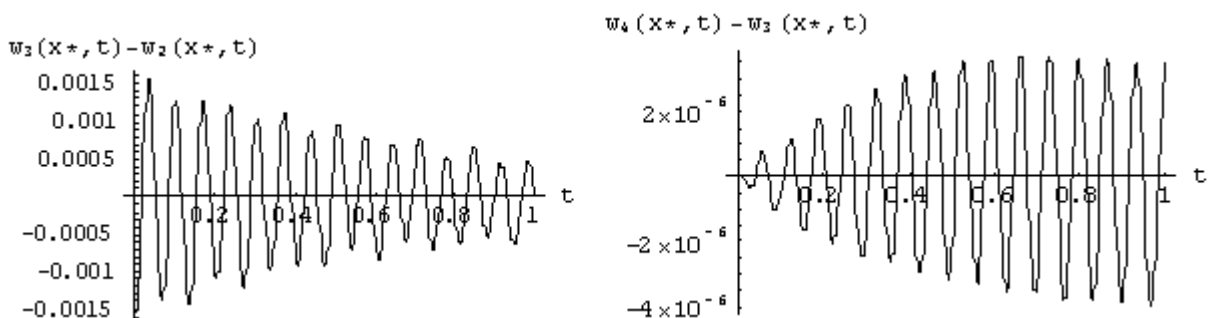


Рис.7. Разница между третьим и вторым, четвертым и третьим приближениями

II. Жесткое закрепление концов пластины

С помощью математической системы Mathematica для данных значений параметров получим графики функции $w(x, t) = \sum_{k=1}^4 a_k(t)g_k(x)$ при $x_* = l/4, t \geq 0$ и $x_* \in [0, l], t = t_0$ при различных значениях N (Рис. 8 – 10). В случае жестко

закрепленных концов $g_k(x) = \sin \gamma_k x - \operatorname{sh} \gamma_k x + \frac{\cos \gamma_k l - \operatorname{ch} \gamma_k l}{\sin \gamma_k l + \operatorname{sh} \gamma_k l} (\cos \gamma_k x - \operatorname{ch} \gamma_k x)$,

где γ_k – корни уравнения $\cos \gamma_k l \operatorname{ch} \gamma_k l = 1$, т. е. $\gamma_k l = 4,73; 7,8532; 10,9956; \dots$

1) $N = 6800$. При этих значениях параметров по теореме 1 колебания пластины устойчивы:

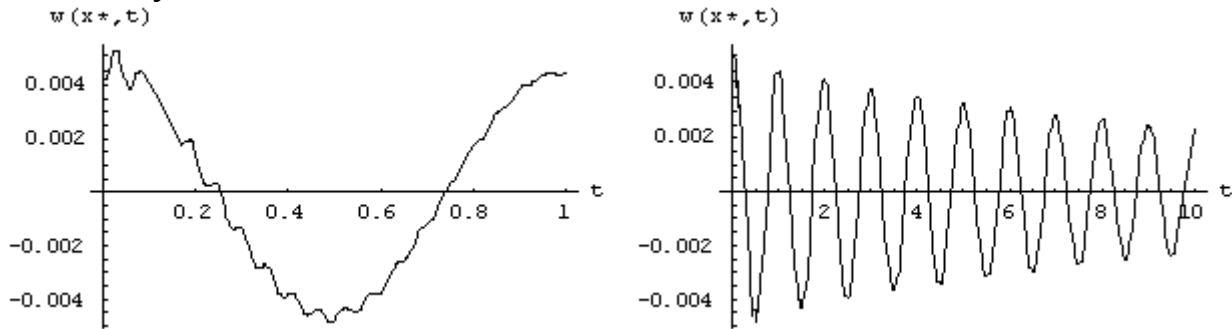


Рис.8. Деформация пластины в точке $x_* = l/4$

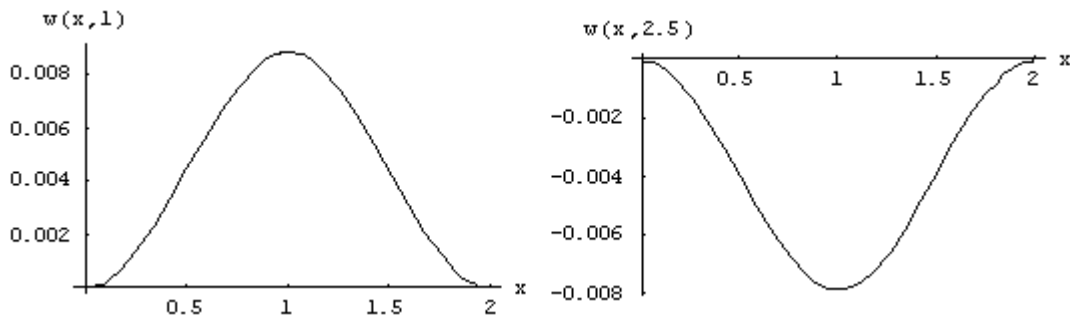


Рис.9. Прогиб пластины в различные моменты времени

2) $N = 7800$. При этих значениях параметров условие (35) теоремы 1 не выполняется, поэтому нельзя гарантировать устойчивость колебаний пластины:

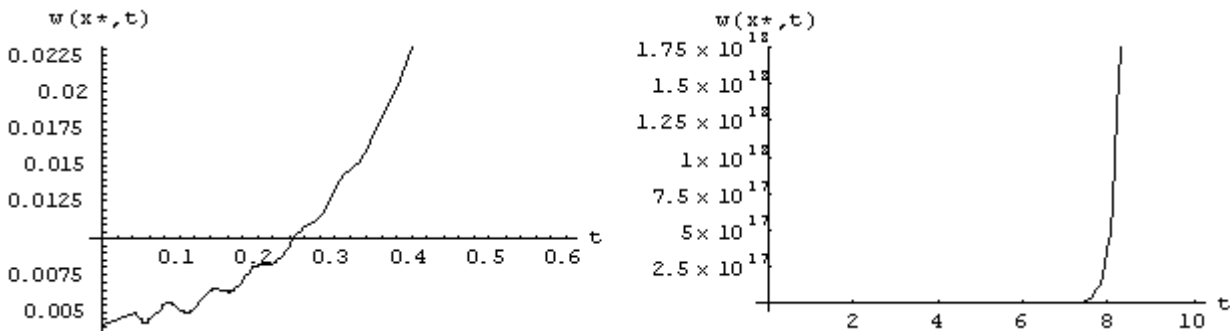


Рис.10. Деформация пластины в точке $x_* = l/4$

7. Сравнение аналитических и численно-аналитических расчетов

Рассмотрим пример механической системы, приведенной в пункте 6.

1) Проведем сравнение аналитически полученных областей устойчивости для точного решения (теорема 1), его первого приближения (теорема 2) и численно полученной области для решения системы (40) в четвертом приближении на плоскости «сжимающее усилие – скорость потока» (N, V) .

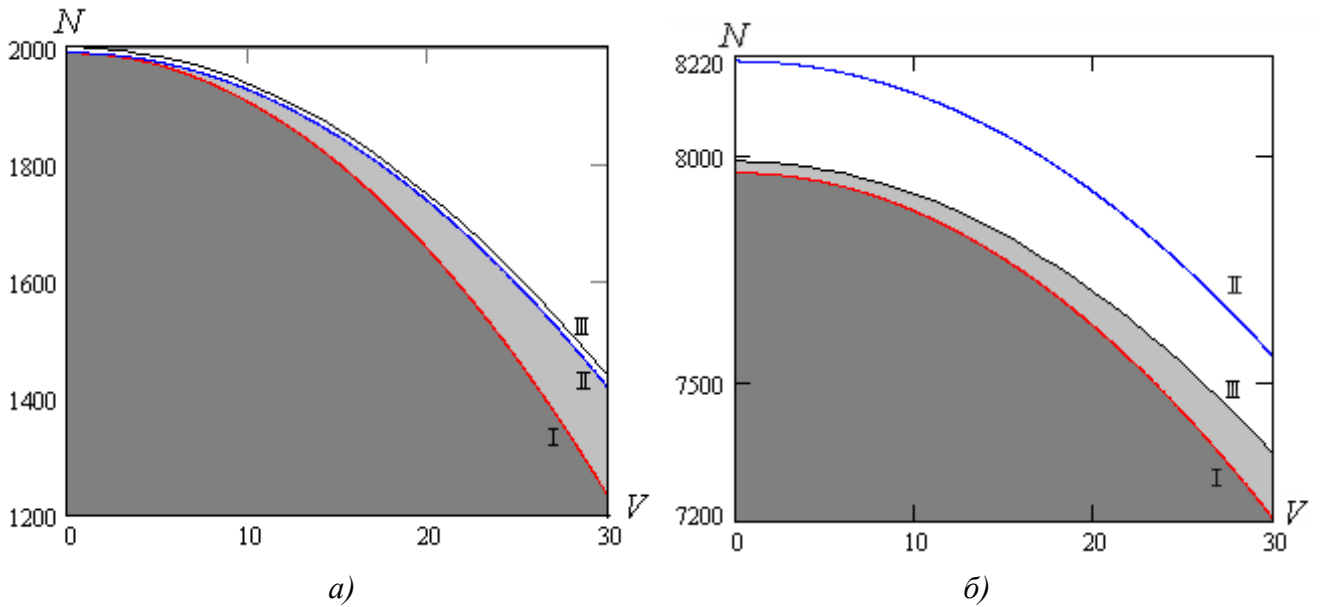


Рис.11. Области устойчивости на плоскости (N, V)

(а – для шарнирно закрепленных концов пластины, б – для жестко закрепленных)

На рис. 11: кривая I – граница аналитической области устойчивости точного решения (кривая $N = 1990,13 - 0,844 \cdot V^2$ для рис. 11а и $N = 7961,81 - 0,844 \cdot V^2$ для рис. 11б), II – граница аналитической области устойчивости решения в первом приближении, III – граница области устойчивости, полученная численно для решения в четвертом приближении.

Из рис. 11б видно, что в случае жестко закрепленных концов пластины первое приближение недостаточно хорошо согласуется с точным решением, поэтому исследуем изменение области устойчивости с увеличением порядка приближения:

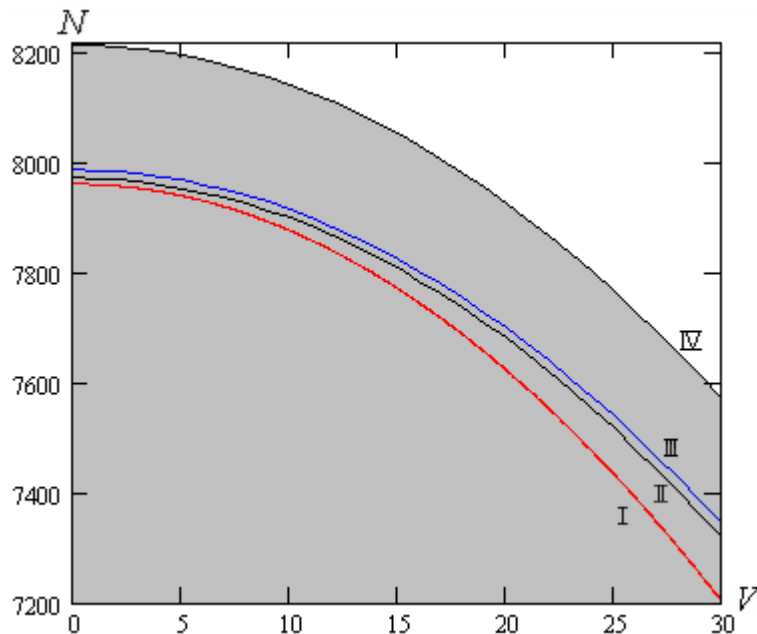


Рис.12. Области устойчивости

На рис. 12: кривая I – граница аналитической области устойчивости точного

решения, II, III, IV – границы областей устойчивости, полученные численно для решения в шестом, четвертом и втором приближениях соответственно.

Как видно из рис. 12, границы областей устойчивости приближенных решений сходятся к границе предполагаемой достаточной и необходимой области устойчивости, которая неплохо согласуется с достаточной областью устойчивости, полученной аналитически.

Из приведенных графиков следует, что область устойчивости на плоскости (V, N) определяется неравенствами $V \geq 0$, $N < a_0 - a_1 V^2$, где a_0, a_1 – положительные постоянные.

2) Проведем сравнение аналитически полученных областей устойчивости для точного решения (теорема 1) и численно полученной области для решения системы (40) в четвертом приближении на плоскости «толщина пластины – скорость потока» (h, V) .

Возьмем параметры механической системы $l = 2$, $N = 1000$, $\nu = 0,31$, $\beta_0 = 4$, $\beta_1 = 0,1$, $\beta_2 = 0,2$. При изменении толщины пластины одновременно изменяются масса и изгибная жесткость пластины.

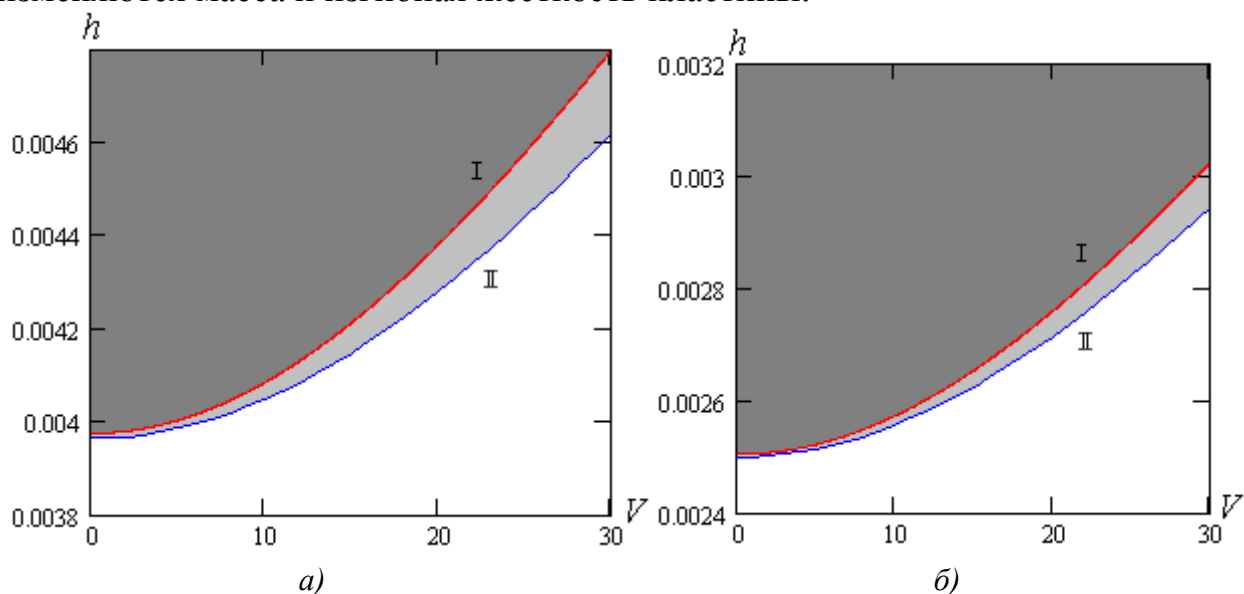


Рис.13. Области устойчивости (а – для шарнирно закрепленных концов пластины, б – для жестко закрепленных)

На рис. 13: кривая I – граница аналитической области устойчивости точного решения (кривая $h = 10^{-3} \cdot \sqrt[3]{0,053V^2 + 62,8}$ для рис. 13а и $h = 10^{-3} \cdot \sqrt[3]{0,01325 \cdot V^2 + 15,7}$ для рис. 13б), II – граница области устойчивости, полученная численно для решения в четвертом приближении.

Из приведенных графиков следует, что область устойчивости на плоскости (V, h) определяется неравенствами $V \geq 0$, $h > 0$, $h > \sqrt[3]{a_0 + a_1 V^2}$, где a_0, a_1 – положительные постоянные.

8. Случай свободного правого конца

Получим достаточные условия устойчивости решения интегро-дифференциального уравнения (15) по отношению к возмущениям начальных условий в случае, когда левый конец пластины закреплен жестко, а правый свободен, тогда граничные условия для $w(x,t)$ имеют вид

$$w(0,t) = w'(0,t) = w''(l,t) = w'''(l,t) = 0, \quad (45)$$

а сжимающее (растягивающее) усилие $N = 0$.

Рассмотрим функционал (16) для этого случая. В силу условий (45) выполняются равенства:

$$\int_0^l \dot{w} w'''' dx = \int_0^l \dot{w}'' w'' dx, \quad \int_0^l \dot{w} \dot{w}'''' dx = \int_0^l \dot{w}''^2 dx.$$

Пусть выполняются неравенства (20), тогда, учитывая, что $K(\tau,0) = K(\tau,l) = 0$, получим неравенство (27). Учитывая неравенства, полученные в [3]:

$$0 \leq \int_0^l dx \int_0^l \dot{w}(x,t) \dot{w}(\tau,t) K(\tau,x,l) d\tau \leq \pi \int_0^l \dot{w}^2(x,t) dx, \quad (46)$$

$$0 \leq \int_0^l dx \int_0^l w'(x,t) w'(\tau,t) K(\tau,x,l) d\tau \leq \pi \int_0^l w'^2(x,t) dx, \quad (47)$$

оценим $\Phi(t)$, $\Phi(0)$:

$$\Phi(0) = \int_0^l \{ M \dot{w}_0^2 + D w_0''^2 + \beta_0 w_0^2 \} dx + \frac{\rho}{\pi_0} \int_0^l dx \int_0^l \dot{w}(x,0) \dot{w}(\tau,0) K(\tau,x) d\tau - \quad (48)$$

$$- \frac{\rho V^2}{\pi} \int_0^l dx \int_0^l w'(x,0) w'(\tau,0) K(\tau,x) d\tau \leq \int_0^l \{ (M + \rho l) \dot{w}_0^2 + D w_0''^2 + \beta_0 w_0^2 \} dx,$$

$$\Phi(t) = \int_0^l \{ M \dot{w}^2 + D w''^2 + \beta_0 w^2 \} dx + I(t) + J(t) \geq \int_0^l \{ M \dot{w}^2 + D w''^2 - l \rho V^2 w'^2 + \beta_0 w^2 \} dx, \quad (49)$$

где $\dot{w}_0 = \dot{w}(x,0)$, $w_0 = w(x,0)$, $w_0'' = w''(x,0)$.

Таким образом, из (27), (48), (49) получим

$$\int_0^l \{ M \dot{w}^2 + D w''^2 - l \rho V^2 w'^2 + \beta_0 w^2 \} dx \leq \int_0^l \{ (M + \rho l) \dot{w}_0^2 + D w_0''^2 + \beta_0 w_0^2 \} dx. \quad (50)$$

Краевая задача для уравнения $\psi^{IV}(x) = -\lambda \psi''(x)$, $x \in [0,l]$ с краевыми условиями (45) не является самосопряженной и полностью определенной, поэтому, в отличие от пункта 3, воспользоваться неравенством Рэля невозможно. Для перехода от $w''^2(x,t)$ к $w'^2(x,t)$ воспользуемся неравенством Коши-Буняковского:

$$\left(\int_0^x w''(x,t) dx \right)^2 \leq \left(\int_0^x w''^2(x,t) dx \right) \left(\int_0^x 1 dx \right). \quad (51)$$

Аналогично для w' . Исходя из этих неравенств, можно для граничных

условий (45) получить следующие оценки

$$\int_0^l w''^2(x,t) dx \geq \frac{2}{l^2} \int_0^l w'^2(x,t) dx, \quad \int_0^l w'^2(x,t) dx \geq \frac{w^2(x,t)}{l}. \quad (52)$$

Пусть выполняется условие

$$D > \frac{l^3}{2} \rho V^2, \quad (53)$$

тогда с учетом (52) из (50) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^l \{ (M + \rho l) \dot{w}_0^2 + D w_0''^2 + \beta_0 w_0^2 \} dx &\geq \int_0^l \{ M \dot{w}^2 + D w''^2 - l \rho V^2 w'^2 + \beta_0 w^2 \} dx \geq \\ &\geq \int_0^l \left\{ M \dot{w}^2 + \left(\frac{2D}{l^2} - l \rho V^2 \right) w'^2 + \beta_0 w^2 \right\} dx \geq \left(\frac{2D}{l^3} - \rho V^2 \right) w^2(x,t), \end{aligned} \quad (54)$$

из которого следует теорема.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (20) и (53). Тогда решение $w(x,t)$ уравнения (15) (при $N=0$) устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений прогибов, скоростей и кривизн w_0, \dot{w}_0, w_0'' , если $w(x,t)$ удовлетворяет краевым условиям (45).

Замечание. Из неравенства (54) следует устойчивость $\dot{w}(x,t)$ и $w'(x,t)$ в среднем (в интегральном смысле) по отношению к возмущениям начальных значений w_0, \dot{w}_0, w_0'' при выполнении указанных в теореме условий.

Проведем исследование динамики упругого элемента на основе метода Галеркина. Согласно методу Галеркина решение уравнения (15) будем искать в виде (36). Так как функция $w(x,t)$ удовлетворяет условиям (45), то и функции $g_k(x)$ должны удовлетворять граничным условиям:

$$g_k(0) = g_k'(0) = g_k''(l) = g_k'''(l) = 0; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (55)$$

Краевая задача $g^{IV}(x) = \gamma^4 g(x)$ с граничными условиями (55) является самосопряженной и полностью определенной, следовательно, в качестве $g_k(x)$ можно взять собственные функции задачи:

$$g_k(x) = \cos \lambda_k x - ch \lambda_k x - \varepsilon_k (\sin \lambda_k x - sh \lambda_k x), \quad (56)$$

при этом $\varepsilon_k = (\cos \gamma_k + ch \gamma_k)(\sin \gamma_k + sh \gamma_k)$, $\lambda_k = \gamma_k / l$, где γ_k – корни уравнения $\cos \gamma \cdot ch \gamma + 1 = 0$.

Условия ортогональности невязки уравнения (15) к базисным функциям $\{g_m(x)\}_{m=1}^n$ позволяют записать систему уравнений для $a_m(t)$ (40) с начальными условиями (41).

В первом приближении при $n = m = 1$ из (40) также получим уравнение (42), поэтому теорема 2 справедлива в случае, когда левый конец пластины жестко закреплен, а правый конец свободный.

Рассмотрим пример механической системы, приведенной в пункте 6.

Решая задачу Коши (40), (41) с помощью математической системы Mathematica для данных значений параметров, получим графики функции $w(x,t) = \sum_{k=1}^4 a_k(t)g_k(x)$ при $x_* = l/4, t \geq 0$ и $x_* \in [0, l], t = t_0$ при различных значениях V и начальных условиях $w(x,0) = 0,01 \cdot x^3(l-x)^4$, $\dot{w}(x,0) = -0,005 \cdot x^4(l-x)^5$.

1) $V = 10$

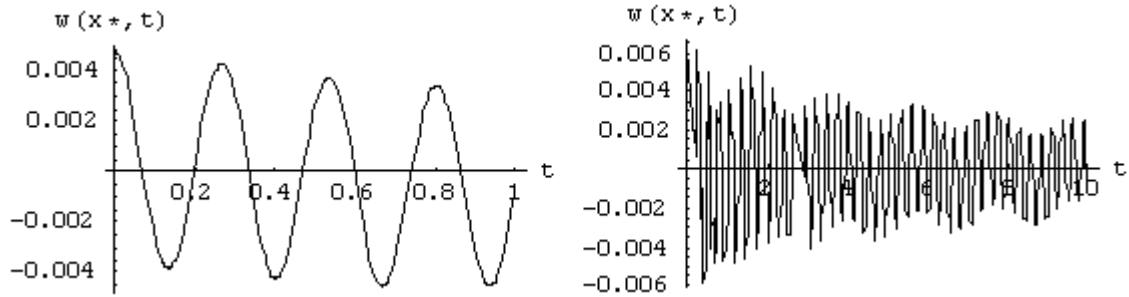


Рис.14. Деформация пластины в точке $x_* = l/4$

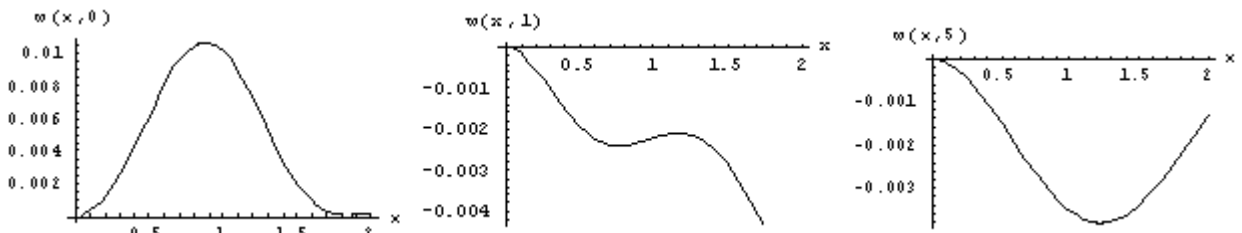


Рис.15. Прогиб пластины в различные моменты времени

2) $V = 30$

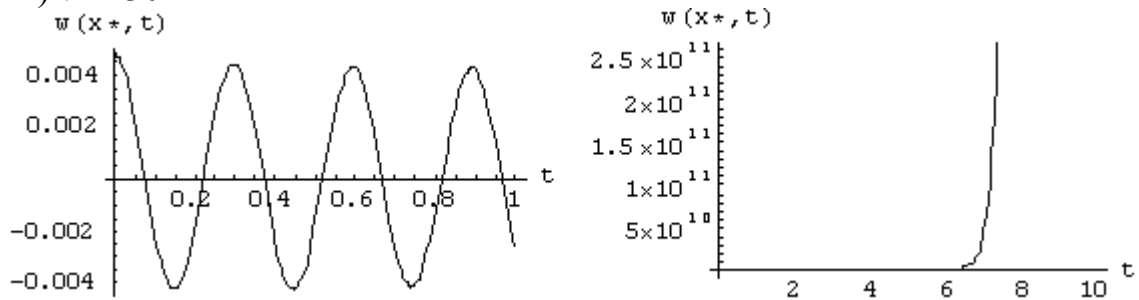


Рис.16. Деформация пластины в точке $x_* = l/4$

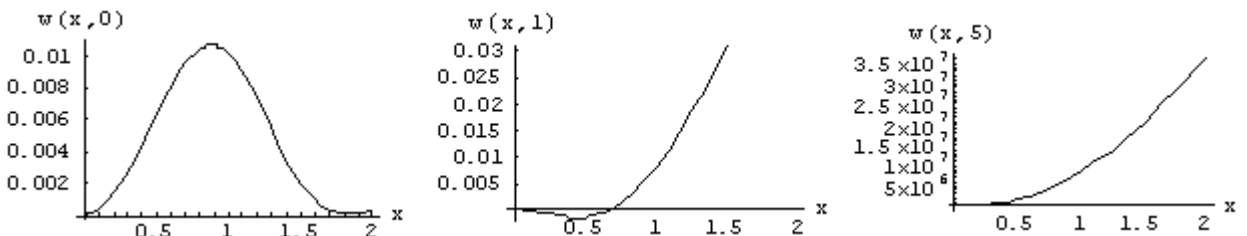


Рис.17. Прогиб пластины в различные моменты времени

Проведем сравнение аналитически полученных областей устойчивости для точного решения (теорема 3) и численно полученной области для решения

системы (40) в четвертом приближении на плоскости «толщина пластины – скорость потока» (h, V) .

Возьмем параметры механической системы $l = 2$, $\nu = 0,31$, $\beta_0 = 4$, $\beta_1 = 0,1$, $\beta_2 = 0,2$. При изменении толщины пластины одновременно изменяются масса и изгибная жесткость пластины.

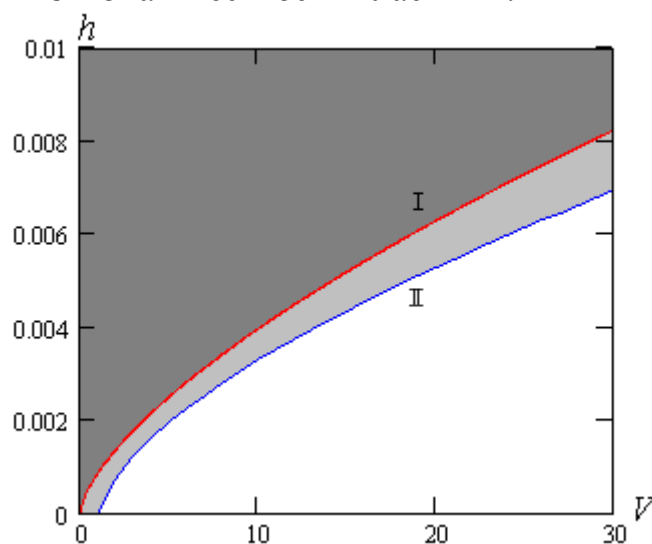


Рис.18. Области устойчивости на плоскости (h, V)

На рис. 18: кривая I – граница аналитической области устойчивости точного решения (кривая $h = 0,000853 \cdot \sqrt[3]{V^2}$), II – граница области устойчивости, полученная численно для решения в четвертом приближении.

Из приведенных графиков следует, что область устойчивости на плоскости (V, h) определяется неравенствами $V \geq 0$, $h > a \cdot \sqrt[3]{V^2}$, где a – положительная постоянная.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вельмисов, П. А. Устойчивость вязкоупругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии / П. А. Вельмисов, Ю. А. Решетников. – Саратов : изд-во СГУ, 1994. – 176 с.
2. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1987. – 688 с.
3. Анкилов, А. В. Оценка повторных интегралов с ядрами, имеющими логарифмическую особенность / А. В. Анкилов. – Вузовская наука в современных условиях: тезисы докладов 43-й научно-технической конференции УлГТУ. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – С. 131.
4. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. – М. : Наука, 1968. – 503 с.

Е. И. Барыкина, Р. А. Браже, Р. М. Мефтахутдинов (г. Ульяновск)

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ДВУМЕРНЫХ НАНОКРИСТАЛЛАХ

Выведено уравнение Френеля для двумерных наноразмерных кристаллов. Показано, что в двумерных кристаллах отсутствует двойное лучепреломление даже в оптически анизотропных классах симметрии. Определены условия, при которых в таких кристаллах возможна отрицательная оптическая рефракция.

1. Введение

Развитие нанотехнологий, синтез наноразмерных материалов, в том числе кристаллических, перспективы их применения в наноэлектронике и нанофотонике обусловили возрастание интереса к двумерным кристаллическим структурам, в частности к их оптическим свойствам. Хотя анизотропия оптических свойств трехмерных кристаллов хорошо известна [1], кристаллооптика двумерных кристаллов не является ее тривиальным частным случаем. В связи с этим, целью настоящей работы является вывод аналога основного уравнения кристаллооптики (уравнения Френеля) для двумерных кристаллов и исследование их оптических свойств.

2. Общие закономерности

При изучении распространения света в кристаллах среду можно считать магнито-изотропной (относительная магнитная проницаемость $\mu \approx 1$), но электрически анизотропной (относительная диэлектрическая проницаемость является тензором $\hat{\epsilon}$). Связь векторов напряженности электрического поля \vec{E} и магнитного поля \vec{H} с векторами индукции электрического поля \vec{D} и магнитного поля \vec{B} задается материальными уравнениями

$$\vec{D} = \epsilon_0 \hat{\epsilon} \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \quad (1)$$

Здесь ϵ_0 и μ_0 – соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума. Электромагнитные свойства среды описываются уравнениями Максвелла:

$$\text{rot} \vec{H} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{D} = 0, \quad \text{rot} \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{H} = 0. \quad (2)$$

В случае распространения в такой среде плоских монохроматических электромагнитных волн

$$\vec{D} = \vec{D}_m \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})], \quad \vec{H} = \vec{H}_m \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})], \quad (3)$$

где ω и \vec{k} – соответственно частота и волновой вектор волны, а \vec{r} – радиус-вектор точки наблюдения, из (1)–(3) следует волновое уравнение

$$\text{rot rot } \vec{E} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \vec{E} = 0$$

или

$$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\varepsilon} \vec{E} = 0. \quad (4)$$

Здесь $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ – электромагнитная постоянная (скорость света в вакууме).

Если волновое число является действительным, система (2) принимает вид

$$[\vec{k} \vec{H}] = \omega \vec{D}, \quad (\vec{k} \vec{H}) = 0, \quad [\vec{k} \vec{E}] = -\omega \mu_0 \vec{H}, \quad (\vec{k} \vec{D}) = 0, \quad (5)$$

а волновое уравнение (4) запишется в следующей форме:

$$[\vec{k} [\vec{k} \vec{E}]] + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\varepsilon} \vec{E} = 0. \quad (6)$$

Плотность потока энергии волны задается вектором Пойнтинга

$$\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}]. \quad (7)$$

Из (5), (7) следует, что вектора \vec{k} , \vec{S} , \vec{E} , \vec{D} компланарны (лежат в плоскости кристалла), а вектор \vec{H} перпендикулярен им.

3. Уравнение Френеля

Представим (6) как систему уравнений для декартовых компонент \vec{E} :

$$\left(n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon_{ij} \right) E_j = 0, \quad (8)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $i, j = 1, 2$.

Выбирая систему координат, в которой тензор ε_{ij} принимает диагональный вид, и приравнивая нулю определитель системы (8), получаем для двумерных кристаллов дисперсионное уравнение, называемое основным уравнением кристаллооптики или уравнением Френеля:

$$n_x^2 \varepsilon_{xx} + n_y^2 \varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} = 0. \quad (9)$$

Такое же уравнение получается из уравнения Френеля для трехмерных кристаллов [2], если в нем положить $n_z = 0$, $\varepsilon_{zz} = 0$.

4. Оптические свойства двумерных кристаллов

В зависимости от класса симметрии двумерные кристаллы делятся на две группы [3]: оптически анизотропные (классы 2 и $2mm$) и оптически изотропные (классы 4 , $4mm$, 6 , $6mm$). В оптически изотропных кристаллах $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon = \text{const}$, и уравнение Френеля (3) становится уравнением окружности:

$$n_x^2 + n_y^2 = n^2, \quad (10)$$

где $n = \sqrt{\varepsilon}$. В оптически анизотропных двумерных кристаллах (9) сводится к уравнению эллипса:

$$\frac{n_x^2}{\varepsilon_{yy}} + \frac{n_y^2}{\varepsilon_{xx}} = 1. \quad (11)$$

Из изложенного следует основное отличие оптических свойств двумерных кристаллов от трехмерных – в них отсутствует двойное лучепреломление даже в оптически анизотропных классах симметрии.

5. Отрицательная оптическая рефракция в двумерных кристаллах

При наличии сильной анизотропии в двумерных кристаллах классов 2 и $2mm$ возможно явление отрицательной оптической рефракции, аналогичное описанному в [4] для необыкновенного луча в трехмерных кристаллах с сильным двулучепреломлением. Иллюстрация такой возможности показана на рис. 1 с помощью построения Гюйенса для линии скоростей точечного источника.

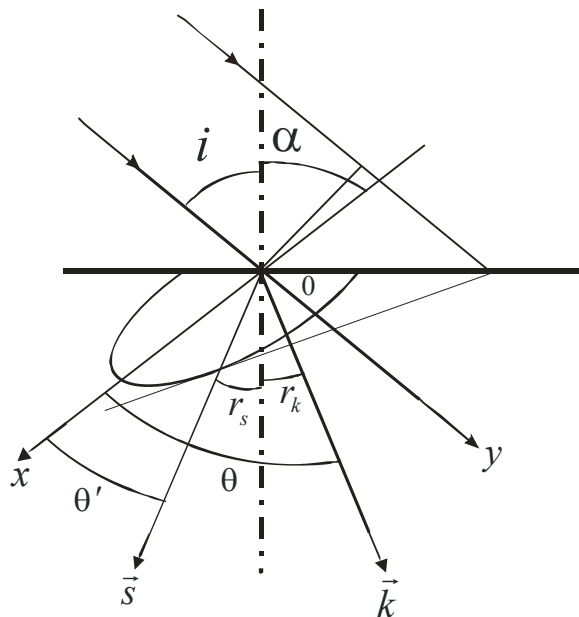


Рис. 1. Построение Гюйенса для сильно анизотропного двумерного кристалла.

Пусть луч света под углом i падает на двумерный кристалл, скользя по его поверхности. Угол между нормалью, лежащей в плоскости кристалла, и осью x системы координат x, y , в которой тензор ε_{ij} приводится к диагональному виду, равен α . \vec{k} и \vec{s} – соответственно волновой вектор, перпендикулярный к фронту преломленной волны, и ее лучевой вектор, сонаправленный с вектором Пойнтинга. Определим условия, при которых лучевой вектор будет отклоняться в обратную от направления падения сторону и возникает отрицательная рефракция.

Показатель преломления n' зависит от угла θ между осью x и волновым вектором. Действительно, подставляя в (11) $n_x = n' \cos \theta$, $n_y = n' \sin \theta$, получаем

$$n' = \sqrt{\frac{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx} \cos^2 \theta + \varepsilon_{yy} \sin^2 \theta}}. \quad (12)$$

Связь угла θ с углом θ' между осью x и лучевым вектором найдем, переписав (11) в виде

$$\frac{k_x^2}{\varepsilon_{yy}} + \frac{k_y^2}{\varepsilon_{xx}} = \frac{\omega^2(k)}{c^2}. \quad (13)$$

Далее

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{v_{zp,y}}{v_{zp,x}} = \frac{\partial \omega / \partial k_y}{\partial \omega / \partial k_x}. \quad (14)$$

Дифференцируя (13) по k_y и k_x , получаем

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_y} = \frac{c^2 k_y}{\omega \varepsilon_{xx}}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial k_x} = \frac{c^2 k_x}{\omega \varepsilon_{yy}},$$

Откуда

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\varepsilon_{yy} k_y}{\varepsilon_{xx} k_x} = \frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} \operatorname{tg} \theta. \quad (15)$$

Угол падения, соответствующий данному углу преломления, может быть найден из закона Снеллиуса:

$$\sin i = n' \sin r_k, \quad (16)$$

где n' определяется выражением (12).

Рассмотрим предельный случай, когда $r_s = 0$ и $\theta' = \alpha$, $\theta = \alpha + r_k$. Из (12), (15), (16) получаем для этого предельного случая

$$\sin i = \sqrt{\varepsilon_{yy}} \operatorname{tgr}_k \left\{ 1 + \operatorname{tg}^2 r_k + (a^2 - 1) \left[1 - \cos^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 r_k) + \sin 2\alpha \operatorname{tgr}_k \right] \right\}^{-1/2}, \quad (17)$$

где $\operatorname{tgr}_k = -\frac{a^2 - 1}{a^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \operatorname{tg} \alpha$, $a = \sqrt{\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}}}$.

На рис. 2, 3 показаны поверхности задаваемые уравнением (17) для случаев $0 < a \leq 1$ (a) и $a \geq 1$ (b). Отрицательная рефракция наблюдается, если a и α принимают значения из незаштрихованной области рис. 2, с, d и 3, с, d. Чем больше ε_{yy} , тем шире эта область. Из рис. 2 видно, что для $0 < a \leq 1$ с $\varepsilon_{yy}^2 = 1,2$ a изменяется от 0 до 0,47, т.е. ε_{xx}^2 должно быть больше 2,6. Для случая $a \geq 1$ отрицательная рефракция начинается с $a = 6,1$ или $\varepsilon_{xx}^2 \leq 0,2$. С увеличением ε_{yy} степень анизотропии снижается.

Выращивая двумерные нанокристаллы с достаточно большой разницей ϵ_{xx} и ϵ_{yy} , можно реализовать в них отрицательную рефракцию скользящей по поверхности кристалла световой волны.

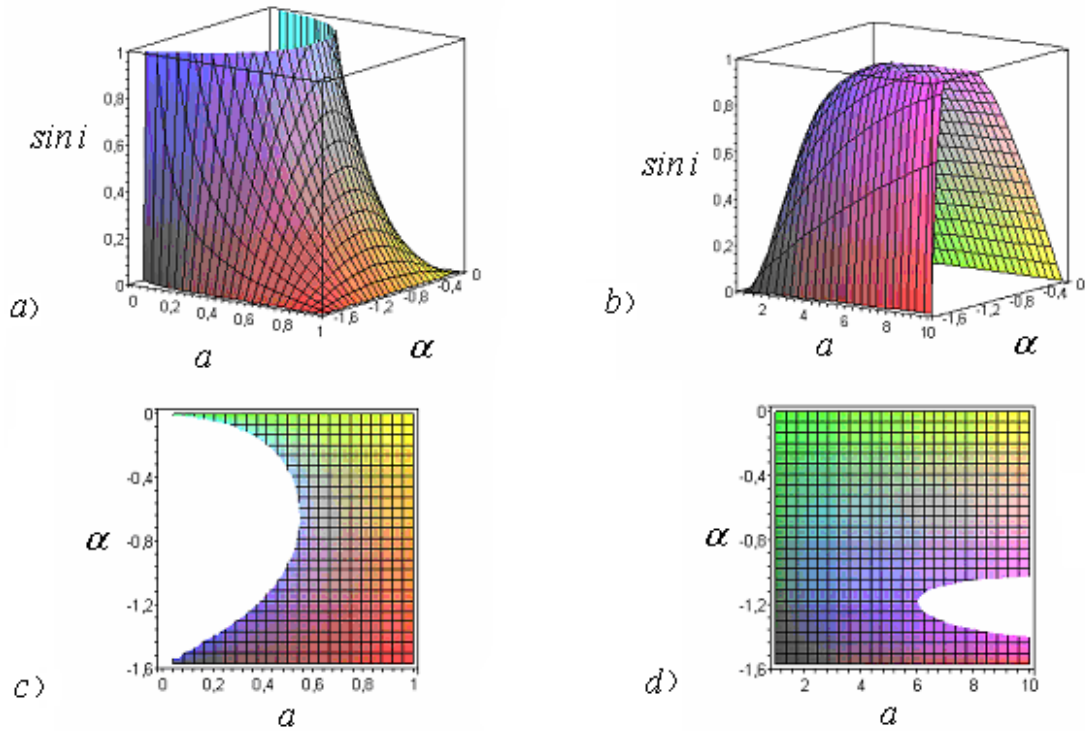


Рис. 2. Поверхности, задаваемые уравнением (17) и их проекции (c, d) на плоскость (α, a) для $\epsilon_{yy}^2=1,2$.

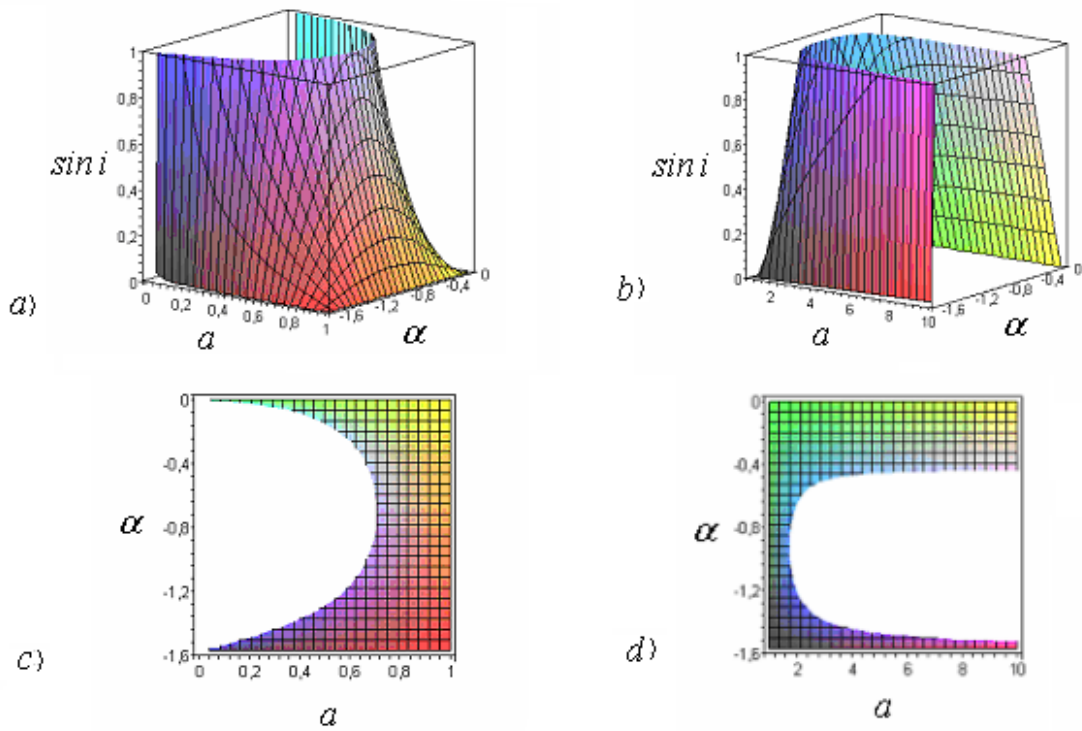


Рис. 3. Поверхности, задаваемые уравнением (17) и их проекции (c, d) на плоскость (α, a) для $\epsilon_{yy}^2=2,4$.

6. Заключение

Распространение скользящих по поверхности двумерных нанокристаллов электромагнитных волн, в том числе светового диапазона, имеет ряд особенностей по сравнению с их распространением в трехмерных кристаллах. Прежде всего это касается отсутствия в двумерных кристаллах двойного лучепреломления. При этом двумерные кристаллы классов симметрии 2 и $2mm$ являются оптически изотропными, а в кристаллах классов симметрии 4 , $4mm$, 6 , $6mm$ скорость распространения электромагнитных волн зависит от направления распространения (аналог необыкновенной волны в трехмерных кристаллах).

В случае достаточно сильной анизотропии двумерных кристаллов в них возможна отрицательная оптическая рефракция, аналогичная отрицательной рефракции необыкновенного луча в трехмерных кристаллах с сильным двулучепреломлением.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Современная кристаллография. Т. 4. Физические свойства кристаллов / Л. А. Шувалов, А. А. Урусовская, И. С. Желудев и др. – М. : Наука, 1981. – 496 с.
2. Виноградова М. Б. Теория волн / М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
3. Барыкина Е. И. “Левые” двумерные кристаллы / Е. И. Барыкина, Р. А. Браже // Тез. докл. 2 Межд. конф. молодых ученых “Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика” – Саратов : Изд-во Гос УНЦ “Колледж”, 2007. – С. 43–44.
4. Браже Р. А. Отрицательная оптическая рефракция в кристаллах с сильным двулучепреломлением / Р. А. Браже, Р. М. Мефтахутдинов. // ЖТФ. – 2007. – Т. 77. – Вып. 6. – С. 116–118.

Р. А. Браже, А. А. Гришина (г. Ульяновск)

ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ДВУМЕРНЫХ НАНОКРИСТАЛЛАХ

Описаны особенности протекания следующих явлений переноса в двумерных кристаллах: теплопроводности, электропроводности, диффузии, термоэлектрических явлений, гальваномагнитных явлений, термомагнитных явлений. Представлены матрицы соответствующих кинетических коэффициентов для всех классов симметрии двумерных кристаллов.

1. Введение

В свое время Л.Д. Ландау [1] показал, что двумерные кристаллические структуры не могут существовать в виде бесконечной по площади поверхности, так как тепловые флуктуации будут «размывать» их. Однако, ввиду медленного (логарифмического) характера расходимости функции флуктационного смещения такой поверхности, размеры пленки, при которых она еще проявляет «твердо-кристаллические» свойства, могут оказаться достаточно большими. В последнее время, в связи с успехами в области нанотехнологий, синтезом нанотрубок и других двумерных кристаллических структур с отличной от нуля кривизной [2] интерес к двумерным кристаллам снова возрос. Весьма важной с практической точки зрения является и проблема теоретического описания явлений переноса в таких двумерных системах, обладающих анизотропией. Исследованию симметрии кинетических коэффициентов, позволяющих рассчитать потоки соответствующих физических величин, и посвящена настоящая работа.

2. Явления переноса

2.1. Теплопроводность. В линейном приближении явление теплопроводности в кристаллах описывается законом Фурье [3]:

$$q_i = -\kappa_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (1)$$

Здесь q_i – плотность теплового потока, $\partial T / \partial x_j$ – компоненты градиента температуры, κ_{ij} – тензор коэффициентов теплопроводности. В соответствии с принципом Онсагера этот тензор симметричен: $\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$.

Если разрешить (1) относительно $\partial T / \partial x_j$, то получим

$$\frac{\partial T}{\partial x_j} = -r_{ij} q_i, \quad (2)$$

где r_{ij} – симметричный тензор коэффициентов теплового сопротивления.

2.2. Электропроводность. Для не слишком сильных электрических полей, когда можно воспользоваться линейным приближением, уравнение электропроводности представляется законом Ома [3]:

$$j_i = -\sigma_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \sigma_{ij} E_j. \quad (3)$$

Здесь j_i – плотность потока заряда (плотность тока), $\partial \varphi / \partial x_j$ – компоненты градиента электрического потенциала, E_j – вектор напряженности электрического поля, σ_{ij} – симметричный тензор коэффициентов электропроводности. Разрешая (3) относительно E_j , получаем

$$E_j = \rho_{ij} j_i, \quad (4)$$

где ρ_{ij} – симметричный тензор удельных сопротивлений.

2.3. Диффузия. При наличии градиента концентрации свободных носителей заряда (электронов или дырок) возникает диффузионный ток [4], плотность которого для электронов

$$j_{dni} = e D_{nij} \frac{dn}{dx_j}, \quad (5)$$

и для дырок

$$j_{dpi} = -e D_{pij} \frac{dp}{dx_j}. \quad (6)$$

Здесь e – элементарный заряд, равный заряду электрона, взятому со знаком «плюс»; n и p – соответственно концентрации электронов или дырок; D_{nij} и D_{pij} – симметричные тензоры коэффициентов диффузии для электронов или дырок соответственно.

В полупроводниковом кристалле, при наличии в нем как электрического поля, так и градиента концентрации носителей заряда, одновременно существуют и дрейфовые, и диффузионные токи:

$$j_{ni} = en\mu_{nij} + e D_{nij} \frac{dn}{dx_j}, \quad (7)$$

$$j_{pi} = ep\mu_{pij} - e D_{pij} \frac{dp}{dx_j}. \quad (8)$$

В выражениях (7), (8) тензор коэффициентов электропроводности выражен через тензор подвижностей электронов или дырок (μ_{nij} или μ_{pij}).

Для расчета плотности полного тока следует взять сумму электронной и дырочной составляющих и добавить к ней плотность тока смещения, равную производной по времени от вектора электрической индукции $D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j$:

$$j_i = j_{ni} + j_{pi} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j), \quad (9)$$

где $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная, а ε_{ij} – тензор диэлектрических проницаемостей среды.

Заметим, что согласно соотношениям Эйнштейна [4]

$$D_{nij} = \frac{kT}{e} \mu_{nij}, \quad D_{pij} = \frac{kT}{e} \mu_{pij} \quad (10)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура.

2.4. Термоэлектрические явления. При наличии в кристалле и температурных градиентов, и электрических токов возникает ряд термоэлектрических явлений. В этом случае [3] скорость изменения теплового потока

$$\dot{q} = -j_i T \left(\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x_j} \right)_T - j_i T \left(\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} - T \alpha_{ij} \frac{\partial j_i}{\partial x_j}. \quad (11)$$

где α_{ij} – симметричный тензор термоэлектрических коэффициентов.

Первое слагаемое в (11) описывает эффект Пельтье, возникающий при протекании тока в кристалле, свойства которого изменяются с координатой (при постоянной температуре).

Второе слагаемое соответствует эффекту Томсона, где

$$-T \left(\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial T} \right) = \tau_{ij} -$$

тензор коэффициентов Томсона (также симметричный).

Последнее слагаемое в (11) описывает эффект Бриджмена, возможный в анизотропных средах. Здесь

$$-T \alpha_{ij} = b_{ij} -$$

тензор коэффициентов Бриджмена.

Как легко видеть, все кинетические коэффициенты, характеризующие термоэлектрические явления, выражаются через α_{ij} .

2.5. Гальваномагнитные явления. При наличии магнитного поля введенный выше тензор удельных сопротивлений ρ_{ij} становится функцией напряженности магнитного поля \vec{H} . Из принципа Онсагера следует, что $\rho_{ij}(\vec{H}) = \rho_{ji}(-\vec{H})$. Следовательно, в магнитном поле тензор ρ_{ij} становится несимметричным.

Разложим $\rho_{ij}(\vec{H})$ по степеням \vec{H} , ограничившись членами второго порядка по \vec{H} :

$$\rho_{ij}(\vec{H}) = \rho_{ij}^{(0)} + \rho_{ijk} H_k + \rho_{ijkl} H_k H_l. \quad (12)$$

Симметричная часть $\rho_{ij}(\vec{H})$ должна содержать члены четной степени, а антисимметричная часть – нечетной по \vec{H} , т. е.

$$s_{ij}(\vec{H}) = \rho_{ij}^{(0)} + \rho_{ijkl} H_k H_l, \quad (13)$$

$$a_{ij}(\vec{H}) = \rho_{ijk} H_k. \quad (14)$$

Выражение (14) описывает хорошо известный *эффект Холла* – появление электрического сопротивления (а значит и падения напряжения) в проводнике с током, в направлении, перпендикулярном как току, так и магнитному полю. Здесь ρ_{ijk} – антисимметричный аксиальный тензор третьего ранга – *тензор коэффициентов Холла*.

Выражение (12) описывает менее известный *эффект магнитосопротивления* – изменение электрического сопротивления кристалла в магнитном поле, пропорциональное квадрату его напряженности. Соответственно, ρ_{ijkl} – *тензор магнитосопротивления* – симметричный полярный тензор четвертого ранга.

2.6. Термомагнитные явления. Несимметричный в магнитном поле тензор коэффициентов теплопроводности κ_{ij} также может быть разложен по степеням \vec{H} с удержанием членов второго порядка:

$$\kappa_{ij}(\vec{H}) = \kappa_{ij}^{(0)} + \kappa_{ijk} H_k + \kappa_{ijkl} H_k H_l. \quad (15)$$

Второе слагаемое в (15) характеризует *эффект Риги – Ледюка* – появление поперечного температурного градиента в проводнике с тепловым потоком в поперечном магнитном поле. Антисимметричный аксиальный тензор третьего ранга κ_{ijk} называется *тензором коэффициентов Риги – Ледюка*.

Третье слагаемое описывает *эффект магнитотеплопроводности* – появление теплового потока в магнитном поле. Здесь κ_{ijkl} – симметричный полярный *тензор коэффициентов магнитотеплопроводности*.

2.7. Гальванотермомагнитные явления. В отсутствии внешнего электрического поля наличие тепловых потоков и магнитного поля приводит к возникновению электрического поля:

$$E_i(q, \vec{H}) = \left(\alpha_{ij}^{(0)} + \alpha_{ijk} H_k + \alpha_{ijkl} H_k H_l \right) \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (16)$$

Тензор α_{ijk} называется *тензором коэффициентов Нернста*. Эффект Нернста состоит в появлении разности потенциалов в проводнике с тепловым потоком, находящимся в поперечном магнитном поле.

Тензор α_{ijkl} – это *тензор магнитотермоэдс*. Данный эффект характеризует изменение i - компоненты термоэдс, обусловленное j -

компонентой температурного градиента под влиянием k – и l – компонент магнитного поля. Это так называемый *магнитотермоэлектрический эффект*.

2.8. Термомагнитозлектрические явления. В отсутствии заданного градиента температуры наличие электрического тока и магнитного поля вызывает тепловые потоки:

$$q_i(\vec{j}, \vec{H}) = -\left(\beta_{ij}^{(0)} + \beta_{ijk}H_k + \beta_{ijkl}H_kH_l\right)j_j. \quad (17)$$

Тензор β_{ijk} – тензор коэффициентов Эттингсгаузена. Эффект Эттингсгаузена описывает возникновение теплового потока в проводнике с электрическим током, помещенном в поперечное магнитное поле.

Тензор β_{ijkl} – тензор коэффициентов магнитотермомического эффекта. Эффект описывает изменение теплового потока, связанного с электрическим током, в магнитном поле.

3. Матрицы коэффициентов, описывающих явления переноса в двумерных кристаллах

Тензоры κ_{ij} , r_{ij} , σ_{ij} , ρ_{ij} , μ_{ij} , α_{ij} , τ_{ij} , b_{ij} – симметричные полярные тензоры второго ранга. В двумерных кристаллах $i, j = 1, 2$. Следовательно, матрицы соответствующих кинетических коэффициентов насчитывают по четыре коэффициента, из которых, в силу диагональной симметрии, независимых коэффициентов не более трех. Кроме того, учет симметрии самого кристалла по методу Фуми [5] дополнительно уменьшает число независимых коэффициентов. В табл. 1 представлены эти матрицы для шести возможных классов [6] двумерных кристаллов.

Тензоры коэффициентов Холла ρ_{ijk} и коэффициентов Риги – Ледюка κ_{ijk} , связывающие, согласно (14), (15), антисимметричные части полярных тензоров второго ранга и аксиальный вектор H_i , являются антисимметричными аксиальными тензорами третьего ранга.

Для аксиальных тензоров при поворотах координатных осей выполняется следующий закон преобразования:

$$\rho'_{\alpha\beta\gamma} = |\alpha_{ij}| \alpha_{\alpha i} \alpha_{\beta j} \alpha_{\gamma k} \rho_{ijk}, \quad (18)$$

где $|\alpha_{ij}|$ – определитель матрицы направляющих косинусов перехода от старых (кристаллофизических) осей к новым осям. В силу антисимметричности тензоров ρ_{ijk} и κ_{ijk} по первым двум индексам

$$\rho_{ijk} = -\rho_{jik}, \quad \rho_{iik} = 0. \quad (19)$$

Соотношения (18), (19) выполняются и для тензора κ_{ijk} . Применяя их для элементов симметрии всех возможных классов двумерных кристаллов, получаем матрицы коэффициентов Холла и Риги – Ледюка (табл. 2).

Как и следовало ожидать, касательные к плоскости двумерного кристалла магнитные поля не приводят к эффекту Холла и эффекту Риги – Ледюка, так как это потребовало бы появление падения напряжения или температурного градиента вне плоскости кристалла.

Тензоры коэффициентов Нернста α_{ijk} и Эттингсгаузена β_{ijk} , связывающие, согласно (16), (17), полярный вектор (E_i или q_i) с аксиальным вектором (H_k) и полярным вектором ($\partial T/\partial x_j$ или j_j), являются несимметричными (без учета симметрии самого кристалла) аксиальными тензорами третьего ранга. Поэтому соотношение (19) для них, в общем случае не выполняется. Учет симметрии кристалла по методу прямой проверки Фуми приводит к матрицам коэффициентов Нернста и Эттингсгаузена, представленным в табл. 3.

Тензоры магнитосопротивления ρ_{ijkl} , магнитотеплопроводности κ_{ijkl} , магнитотермоэдс α_{ijkl} и магнитоэлектротермического эффекта β_{ijkl} идентичны. Они симметричны по первой и последней парам индексов, что позволяет перейти к их матричной форме записи:

$\rho_{ijkl} = \rho_{jikl} = \rho_{ijlk} = \rho_{\lambda\mu}$ и аналогично для остальных тензоров. Переход от тензорных обозначений к матричным осуществляется по определенным правилам.

Для $i, j = 1, 2$ λ принимает значения $11 \rightarrow 1; 22 \rightarrow 2; 12, 21 \rightarrow 3$.

Для $k, l = 1, 2, 3$ μ принимает значения $11 \rightarrow 1; 22 \rightarrow 2; 33 \rightarrow 3; 23, 32 \rightarrow 4; 13, 31 \rightarrow 5; 12, 21 \rightarrow 6$.

Вид соответствующих матриц представлен в табл. 4.

4. Заключение

Из полученных результатов следует, что все явления переноса, описываемые симметричными полярными тензорами второго ранга (теплопроводность, электропроводность, диффузия, термоэлектрические явления), в двумерных кристаллах характеризуются, в общем случае, тремя независимыми кинетическими коэффициентами (для скаленагональной сингонии). Для двумерных кристаллов ортогональной сингонии независимых кинетических коэффициентов два. Двумерные кристаллы тетрагональной и гексагональной сингоний характеризуются одним независимым кинетическим коэффициентом, т. е. по отношению и указанным явлениям переноса эти кристаллы являются изотропными.

По отношению к явлениям переноса с участием магнитного поля, описываемым тензорами третьего ранга, магнитное поле, ориентированное в

плоскости двумерного кристалла, не вызывает никакого эффекта. Если же магнитное поле ориентировано перпендикулярно кристаллу, то его влияние по-разному сказывается на явлениях, описываемых антисимметричными и несимметричными тензорами третьего ранга. По отношению к эффектам Холла и Риги – Ледюка двумерные кристаллы являются изотропными, так как описываются одним независимым кинетическим коэффициентом. Для описания эффектов Нернста и Эттингсгаузена в общем случае требуется четыре кинетических коэффициента (скаленагональная сингония). Наиболее симметричные классы $4mm$ и $6mm$ по отношению к этим эффектам являются изотропными (описываются одним кинетическим коэффициентом).

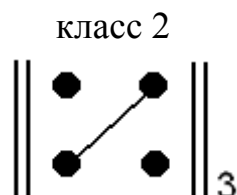
Явления переноса, описываемые тензорами четвертого ранга (эффекты магнитосопротивления, магнитотеплопроводности, магнитотермоэдс и магнитотермоэлектрический эффект), в общем случае, описываются двенадцатью независимыми кинетическими коэффициентами. Минимальное число этих коэффициентов требуется для класса $6mm$ – 4.

Результаты работы могут быть полезны для создания кристаллических наноматериалов с предсказуемыми физическими свойствами.

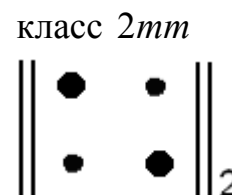
Таблица 1

Матрицы коэффициентов переноса, характеризующих симметричными полярными тензорами второго ранга

Скаленагональная сингония

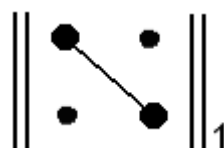


Ортогональная сингония



Тетрагональная и гексагональная сингонии

классы 4, $4mm$, 6, $6mm$



Обозначения:

- – компоненты, равные нулю;
- – компоненты, отличные от нуля;
- – одинаковые компоненты;

Справа указано число независимых коэффициентов.

Таблица 2

Матрицы коэффициентов переноса, характеризуемых антисимметричными аксиальными тензорами третьего ранга (матрицы коэффициентов Холла и Риги-Ледюка)

Все сингонии и классы симметрии



Обозначения (дополнительно к табл. 1):

– компоненты, одинаковые по величине, но противоположные по знаку.

Таблица 3

Матрицы коэффициентов Нернста и Эттингсгаузена

Скаленагональная сингония

класс 2



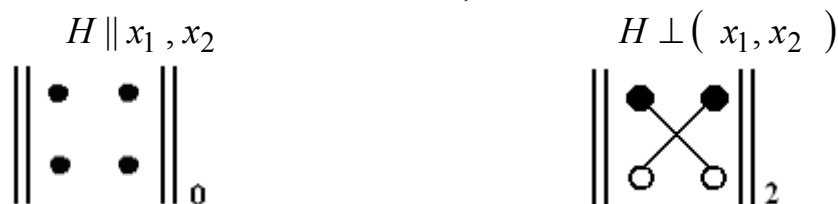
Ортогональная сингония

класс $2mm$

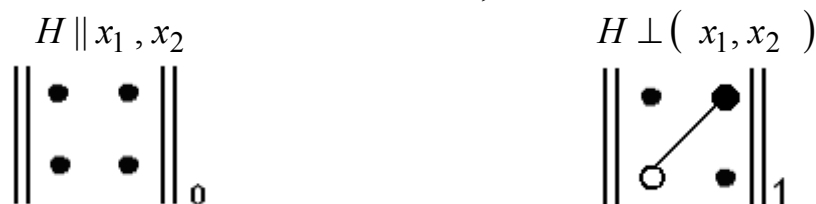


Тетрагональная и гексагональная сингонии

класс 4, 6



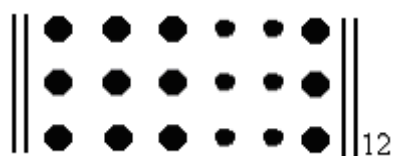
классы $4mm, 6mm$



Матрицы коэффициентов переноса, характеризуемые тензорами четвертого ранга, симметричными по первой и последней паре индексов

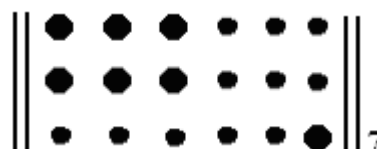
Скаленагональная сингония

класс 2



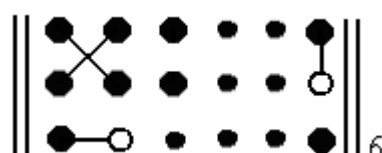
Ортогональная сингония

класс $2mm$

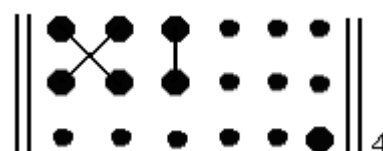


Тетрагональная сингония

класс 4

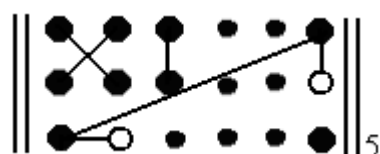


класс $4mm$

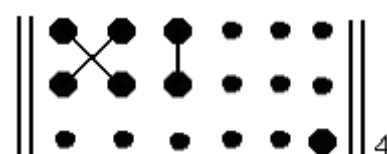


Гексагональная сингония

класс 6



класс $6mm$



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ландау Л. Д. Статистическая физика. 4. 1. Теоретическая физика. Т. 5. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – М.: Наука, 1976. – С. 471.
2. Елецкий А. В. Фуллерены и структуры углерода / А.В. Елецкий, Б.М. Смирнов // УФН. – 1995. – Т. 165. – №9. – С. 977 – 1009.
3. Современная кристаллография. Т. 4. Физические свойства кристаллов / Л.А. Шувалов, А. А. Урусовская, И.С. Желудев и др. – М.: Наука, 1981.
4. Бонч –Бруевич В.Л. Физика полупроводников / В.Л. Бонч –Бруевич, С.Г. Калашников. – М.: Наука, 1977.
5. Най Дж. Физические свойства кристаллов / Дж. Най. – М.: Мир, 1967.
6. Барыкина Е. И., Браже Р. А., Елизарова А. А. Физические свойства инверсных двумерных кристаллов / Е.И. Барыкина, Р.А. Браже., А.А. Елизарова // Электронная техника. – 2007.

N. B. Vasilev (г. София, България)

INSIGNIFICANT VARIABLES OF BOOLEAN FUNCTIONS

This paper examines the insignificant (fictitious) variables of Boolean functions. A more general determination is given for insignificant variables of Boolean functions. Determined is the number of the Boolean functions only with k given fictitious variables. Determined is the number of the functions, which have no fictitious variables.

Let us have $B = \{0,1\}$, $B^n = \underbrace{BxBx\dots xB}_{n\text{-times}}$.

Boolean function is the function with domain B^n and co-domain B - $f: B^n \rightarrow B$.

We will assume that every element from the B^n domain includes n variables, whose values can be either "0" or "1". In other words the function "f" is:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \{0,1\}, i=1, 2, \dots, n$$

The variable $x_i, i=1,2,\dots,n$ is insignificant or fictitious for the function $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, if:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad (1)$$

If one variable is not fictitious, then it is called "significant".

Assertion 1: The number of all functions, for which $x_i, i=1, 2, \dots, n$, is fictitious, is $2^{2^{n-1}}$.

Proof: We divide the domain " B^n " in two sub-domains B^{n0} and B^{n1} , according to the values of x_i : all "0" in B^{n0} and all "1" in B^{n1} . If the function $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ is determined for the n -tuples of one of the sub-domains, for example for B^{n0} , then its complete determination for the n -tuples of B^{n1} is assigned by term (1).

$$|B^{n0}| = |B^{n1}| = 2^{n-1}$$

Consequently, the number of all functions, for which x_i is fictitious, is $2^{2^{n-1}}$.

Let's have $n = 3$. The number of the functions with given fictitious variable must be $2^{2^{3-1}}=16$. Table 1 show all functions with fictitious variable x_1, x_2 и x_3 .

We can see from table 1 that there are functions with more than one fictitious variable. These functions are marked – under their values is shown which one else is fictitious for the function as well. For the functions constant 0 and 1 all variables are fictitious.

We will give one more general definition for insignificant variables of Boolean function.

$x_1x_2x_3$	Functions with fictitious variables x_1 and x_2	Functions with fictitious variables x_1 and x_3	Functions with fictitious variables x_2 and x_3
0 0 0	0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1
0 0 1	0 1 0 1	0 0 1 1	0 0 1 1
0 1 0	0 0 1 1	0 1 0 1	0 0 1 1
0 1 1	0 1 0 1	0 1 0 1	0 0 1 1
1 0 0	0 0 1 1	0 0 1 1	0 1 0 1
1 0 1	0 1 0 1	0 0 1 1	0 1 0 1
1 1 0	0 0 1 1	0 1 0 1	0 1 0 1
1 1 1	0 1 0 1	0 1 0 1	0 1 0 1

Table 2. Functions with fictitious variables $x_1, x_2; x_1, x_3; x_2, x_3$ ($n=3, k=2$)

If $n = 4$ and $k = 2$ then $|B^{40}| = |B^{41}| = |B^{42}| = |B^{43}| = 2^{4-2} = 4$. The number of the functions with two given fictitious variables is $2^{2^{4-2}} = 16$. Table 3a shows all functions of four variables, for which x_1 и x_2 are fictitious.

$$f(0, 0, x_3, x_4) = f(0, 1, x_3, x_4) = f(1, 0, x_3, x_4) = f(1, 1, x_3, x_4)$$

	$x_1x_2x_3x_4$	Functions with fictitious variables x_1, x_2
B^{40}	0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1
	0 0 0 1	0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1
	0 0 1 0	0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1
	0 0 1 1	0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1
B^{41}	0 1 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1
	0 1 0 1	0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1
	0 1 1 0	0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1
	0 1 1 0	0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1
B^{42}	1 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1
	1 0 0 1	0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1
	1 0 1 0	0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1
	1 0 1 1	0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1
B^{43}	1 1 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1
	1 1 0 1	0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1
	1 1 1 0	0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1
	1 1 1 1	0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1

+ + + +

Table 3a. Functions with fictitious variables x_1 and $x_2, n=4$

	$x_1 x_2 x_3 x_4$	Functions with fictitious variables x_1 and x_3
B^{40}	0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1
	0 0 0 1	0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1
B^{41}	0 0 1 0	0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1
	0 0 1 1	0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1
B^{40}	0 1 0 0	0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1
	0 1 0 1	0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1
B^{41}	0 1 1 0	0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1
	0 1 1 0	0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1
B^{42}	1 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1
	1 0 0 1	0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1
B^{43}	1 0 1 0	0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1
	1 0 1 1	0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1
B^{42}	1 1 0 0	0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1
	1 1 0 1	0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1
B^{43}	1 1 1 0	0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1
	1 1 1 1	0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1

+ + + +

Table 3b. Functions with fictitious variables x_1 и x_3 , $n=4$

Table 3b shows all functions of four variables, for which x_1 и x_3 are fictitious.

$$f(0, x_2, 0, x_4) = f(0, x_2, 1, x_4) = f(1, x_2, 0, x_4) = f(1, x_2, 1, x_4)$$

From tables 3a and 3b we can see that functions $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4$ и $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_4$ (marked by the sign "+") enter into the domain of the functions with fictitious variables x_1 и x_2 , as well as into the domain of the functions with fictitious variables x_1 and x_3 , i. e. the two functions have three fictitious variables - x_1, x_2 и x_3 . For the functions constant 0 and 1 all variables are fictitious.

The domain of the functions with k given fictitious variables includes functions with $k+1, k+2, \dots, n$ fictitious variables, which include the " k " variables, $k = 1, 2, \dots, n-1$. In other words each function of the domain of functions with k given fictitious variables participates as well as in the domains of the functions with $k-1, k-2, \dots, 1$; $k = 2, 3, \dots, n$ fictitious variables, which (fictitious variables) are sub-domain of the k given fictitious variables. This is illustrated on fig. 1 for $n=4$.

For example, the domain M_{123} of the functions with fictitious variables x_1, x_2 and x_3 is a sub-domain of the domains M_{12}, M_{13}, M_{23} of the functions with fictitious variables accordingly $x_1, x_2; x_1, x_3; x_2, x_3$, as well as of the domains M_1, M_2, M_3 of the functions with fictitious variables accordingly x_1, x_2 и x_3 .

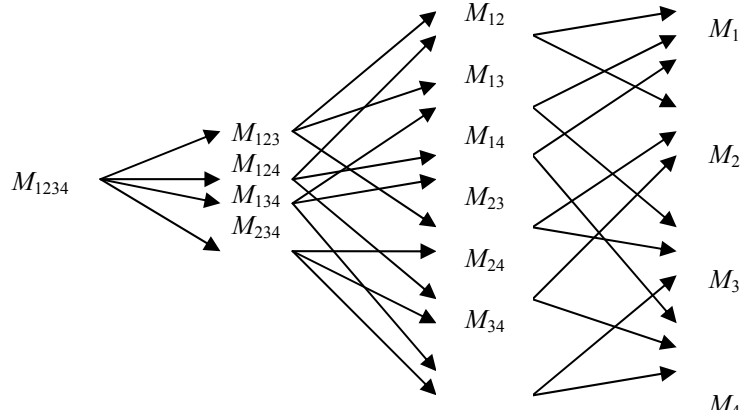


Fig. 1. Including of the domains of the functions with fictitious variables when $n = 4$.

Assertion 3. The number of the functions only with “ k ” given fictitious variables is:

$$F_k^n = 2^{2^{n-k}} - \sum_{i=k+1}^n C_{n-k}^{i-k} F_i^n \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots, n-1; \quad F_n^n = 2^{2^{n-n}} = 2 \quad (3)$$

Proof: For $k = n$, $F_n^n = 2$, i. e. the functions with fictitious variables are 2. These are the constant 0 and 1. The number of the variables is n and there are no functions with more than n fictitious variables.

The number of the functions with k given fictitious variables is $2^{2^{n-k}}$ (Assertion 2). When $n = 0, 1, 2, \dots, n-1$ we have to subtract the functions of the domains with $k+1, k+2, \dots, n$ fictitious variables, for which the given domain of k fictitious variables is sub-domain, i. e. $c_i F_i$, $i = k+1, k+2, \dots, n$. We have to determine the coefficients in front of F_i^n . Their values are the binomial coefficients C_{n-k}^{i-k} , $i = k+1, k+2, \dots, n$, since the k given fictitious variables participate in each sub-domain of the $(n-k)$ variables.

It is not difficult to conclude that for the sum in (3) is fulfilled:

$$\sum_{i=k+1}^n C_{n-k}^{i-k} F_i^n = \sum_{i=1}^{n-k} C_{n-k}^i F_{k+i}^n$$

When $k = 0$, $F_0^n = 2^{2^n} - \sum_{i=1}^n C_n^i F_i^n$.

This is the number of the functions, for which the n variables are significant.

When $n=5$, $F_0^5 = 2^{2^5} - \sum_{i=1}^5 C_5^i F_i^5 = 2^{32} - C_5^1 F_1^5 - C_5^2 F_2^5 - C_5^3 F_3^5 - C_5^4 F_4^5 - C_5^5 F_5^5 =$

=4 294 642 034.

$C_5^5 F_5^5 = 2$; $C_5^4 F_4^5 = 5 \times 2 = 10$; $C_5^3 F_3^5 = 10 \times 10 = 100$; $C_5^2 F_2^5 = 10 \times 218 = 2180$;

$C_5^1 F_1^5 = 5 \times 64594 = 322970$

	X_2								
X_1	218	10	2	10	218	10	218	64594	
	10	2	2	2	10	2	10	218	X_3
	218	10	2	10	218	10	218	64594	
	64594	218	10	218	64594	218	64594	4294642034	
			X_5		X_4		X_5		

Fig.2. Modified map of Karnaugh for $n = 5$.

Fig. 2 shows the modified Karnaugh map for $n=5$. This map shows the number of the functions only with k fictitious variables for all possible combinations from the domain of the variables, $k = 1, 2, 3, 4, 5$. These values are computed by the formula (3). Each cell shows the number of the functions with fictitious variables, which are in straight form in the writing of the conjunction, corresponding to the cell. For example, in cell $x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5$ the value is 218. This is the number of the functions with fictitious variables only x_1 and x_2 . The total number of the functions with fictitious variables x_1 и x_2 is defined by the sum of the values in the cells, covered by the range of the conjunction $x_1 x_2$ (256).

The cell $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$ contains value 2. This is the number of the functions, for which all variables are fictitious – the functions constant 0 and 1.

The cell $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5$ contains the number of the functions, which have no fictitious variables.

The number of all functions with only k fictitious variables is: $C_n^k F_k^n$.

For example, when $n=5$ the number of all functions with only 2 fictitious variables ($k=2$) is 2180.

The general determination of insignificant (fictitious) variables of a Boolean function allows to be given a way of generating all Boolean functions with given k fictitious variables. We will illustrate it with example. Let's have $n = 4$. We want to find all functions with fictitious variables x_3 и x_4 , i. e. $k=2$. The fictitious variables will be absent in the analytical expressing of the functions. The creative function is:

$$f_p(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_1 x_1 x_2 \vee a_2 x_1 \bar{x}_2 \vee a_3 \bar{x}_1 x_2 \vee a_4 \bar{x}_1 \bar{x}_2, a_i \in \{0, 1\}, i=1, 2, 3, 4$$

All possible fours $\langle a_1 a_2 a_3 a_4 \rangle$ are 16. Each of them defines one of the functions with fictitious variables x_3 and x_4 . For example, the four $\langle 1001 \rangle$ creates the function:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$$

This paper examines the insignificant (fictitious) variables of Boolean functions. A more general determination is given for insignificant variables of Boolean functions. Determined is the number of the Boolean functions only with k given fictitious variables. Determined is the number of the functions, which have no fictitious variables. From engineering point of view the existence of fictitious variables is a sign that they should not be implemented. It is shown how to find the functions with k fictitious variables.

REFERENCES

1. Й. Денев, Р. Павлов, Я. Деметрович. Дискретна математика, Наука и изкуство, София, 1984.
2. О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон- Вельский. Дискретная математика для инженера, Энергоатомиздат, Москва, 1988.
3. Кр. Манев. Увод в дискретната математика, ЕТКЛИМН – Красимир Манев”, София, 2003.
4. Й. Денев, С. Щраков. Дискретна математика, ЮЗУ ”Неофит Рилски” – Благоевград, 1995.

И. А. Вельмисов (г. Санкт-Петербург)

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ НАДЕЖНОСТИ СПЕЦИАЛИСТОВ УПРАВЛЕНИЯ ВОЗДУШНЫМ ДВИЖЕНИЕМ

Результаты анализа авиационных происшествий показывают, что большинство из них связаны с человеческим фактором. К данному фактору принято относить причины авиационных происшествий, обусловленные неграмотными, ошибочными или несвоевременными действиями операторов эксплуатирующих авиационную технику, управляющих воздушным движением или обеспечивающих полеты. В интересах обеспечения безопасности полетов важно знать функциональные возможности операторов и своевременно выявлять моменты, когда состояние и возможности не позволят им успешно решать возложенные на них задачи. Рассматривая авиационного специалиста как систему, зависящую от множества параметров, неоднократно предпринимались попытки найти подходящий математический инструмент для прогнозирования критических состояний операторов, приводящих к катастрофическим последствиям. В статье продемонстрирована попытка применения некоторых положений теории катастроф, с помощью которых предлагается осуществлять прогноз надежности функционирования специалистов управления воздушным движением.

Первые сведения о теории катастроф появились в начале 70-х годов. В отличие от классического математического анализа, который позволяет исследовать лишь плавные непрерывные процессы, теория катастроф дает универсальный инструмент для исследования скачкообразных переходов, разрывов и внезапных качественных изменений. Основой теории катастроф является сравнительно молодой раздел математики – теория особенностей гладких отображений.

Фактически теория особенностей – обобщение исследования функции на максимумы и минимумы. Значимость такого исследования обусловлена тем, что минимумы и максимумы представляют собой критические точки функции (экстремальные значения параметров системы), которые во многом определяют ее поведение (состояние) [2]. Безопасность полетов обуславливается многими факторами, однако агрегированного числового показателя, учитывающего большинство таких факторов, пока не определено. Известно, что непосредственное влияние на безопасность полетов оказывает функциональная надежность операторов авиационных систем (летчик – самолет, диспетчер – воздушное судно и т. п.). При этом под функциональной надежностью понимается способность оператора выполнять функциональные обязанности с определенным запасом внимания, позволяющем ему

своевременно выявить нештатную (конфликтную) ситуацию, а также запасом возможностей для парирования развития ситуации в авиационное происшествие. Функциональная надежность, в свою очередь, также зависит от ряда параметров (обученности, опыта, натренированности и т.д.), то есть является функцией многих переменных и представляет собой типичную нелинейную зависимость. В связи с этим была предпринята попытка применить некоторые положения теории катастроф для исследования функциональной надежности специалистов управления воздушным движением.

Одним из положений теории является закон «Достижения – пропорциональны усилиям». Он отражает фундаментальный принцип математического анализа – всякая гладкая функция, не имеющая изломов и «клювиков», при малых приращениях аргумента, приближенно линейна, то есть приращение функции пропорционально изменению аргумента или достигаемый эффект пропорционален затраченным усилиям. Так, зависимость качества управления воздушным движением (техники пилотирования) от количества выполненных задач управления воздушным движением (полетов и т.п.) за относительно малый период времени, можно рассматривать как линейную функцию и считать, что достигаемый эффект пропорционален затраченным усилиям. Однако, это верно лишь при малых приращениях, то есть в окрестностях не критической точки, поэтому при рассмотрении функции, это справедливо для малого промежутка времени. [2]

Если рассматривать функцию не локально, а в целом, то она может быть сильно нелинейной. В качестве количественного показателя функциональной надежности предлагается использовать соотношение численного выражения качества выполняемых функциональных задач (качество управления воздушным движением и т. п.), и затраченных усилий на его достижение, последние можно назвать ценой (Ц). По сути, зависимость этих параметров от времени представляет собой типичные нелинейные функции (рис.1).

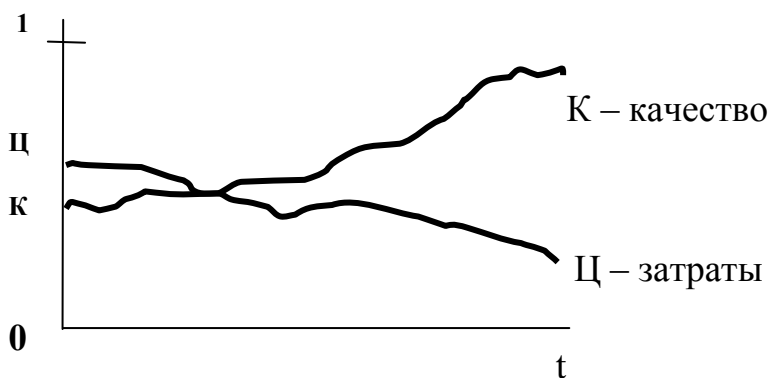


Рис.1 Графики изменения качества и цены

В окрестностях максимума (минимума) график нелинейной функции можно приближенно заменить параболой. Тогда в окрестностях максимума (минимума) приращение функции будет, почти пропорционально квадрату приращения аргумента. В частности небольшое отклонение аргумента от оптимального значения, практически не сказывается на значении функции, или с приближением к оптимальному значению (состоянию), затрачиваемые усилия перестают сказываться на достижениях. [2]. Для диспетчера (летчика, оператора) это состояние характерно, когда у него сформировался стереотип действий в стандартных ситуациях, то есть достигнутое качество выполнения функциональных задач (управления воздушным движением) для него является оптимальным, поэтому, например, повышение интенсивности тренировок как правило, не приводят к существенному росту мастерства.

Уровень профессионального мастерства зависит от интенсивности профессиональной деятельности и натренированности, поэтому соответствующий график может иметь вид невыпуклой кривой (рис.2).

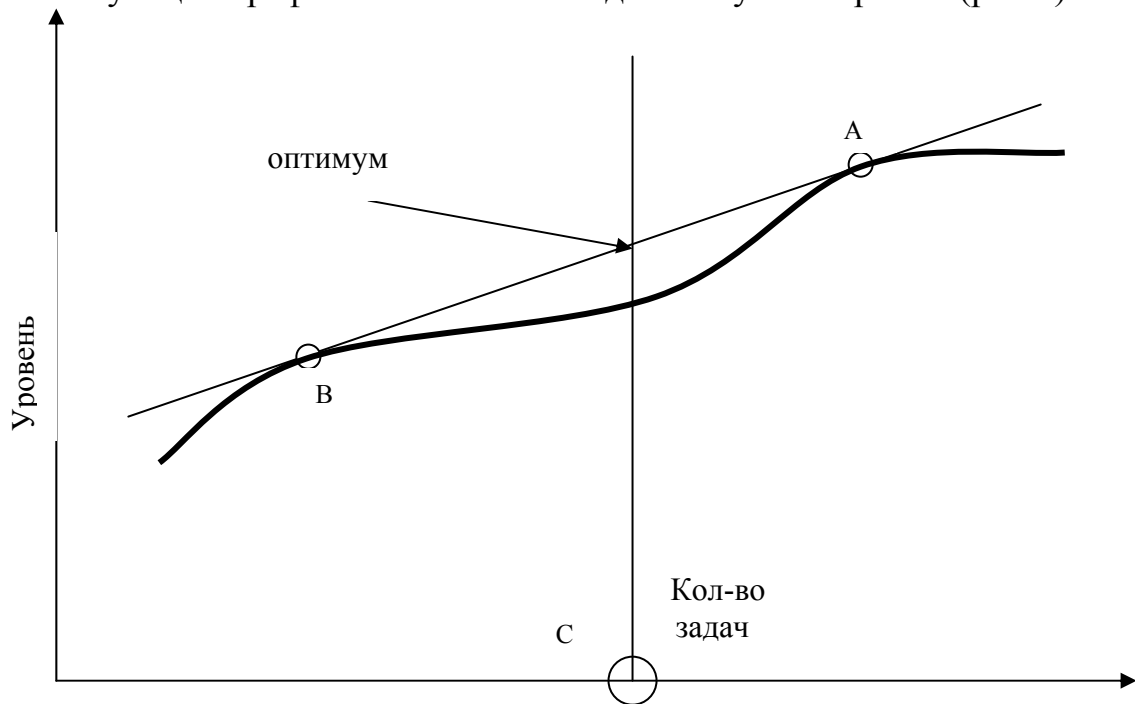


Рис. 2. График зависимости уровня подготовки от интенсивности деятельности и натренированности

Тогда, применяя рассматриваемую теорию, можно предположить, что суммарный прирост профессионального мастерства, при заданной интенсивности практической деятельности и тренировок, за большой период времени, будет максимальным, при, так называемом, пульсирующем режиме. Он представляет собой чередующиеся периоды интенсивной деятельности (тренировок, полетов и т.п.) и слабо интенсивной. Согласно положениям теории, требуется так распределить массы по кривой, изображенной на рисунке 2, чтобы центр тяжести лежал над точкой C и находился как можно

выше. Такое распределение масс сосредоточено в двух точках А и В касания кривой с прямой [2]. Оптимальный режим состоит из двух, а не большего числа режимов, именно потому, что прямая, касается кривой не более чем в двух точках.

Член-корреспондент Академии наук В.И.Арнольд, в статье «Теория катастроф» для пояснения понятия «катастрофа», с точки зрения математики, предлагает читателям представить кубическую зависимость – функцию $y = x^3$ (рис.3).

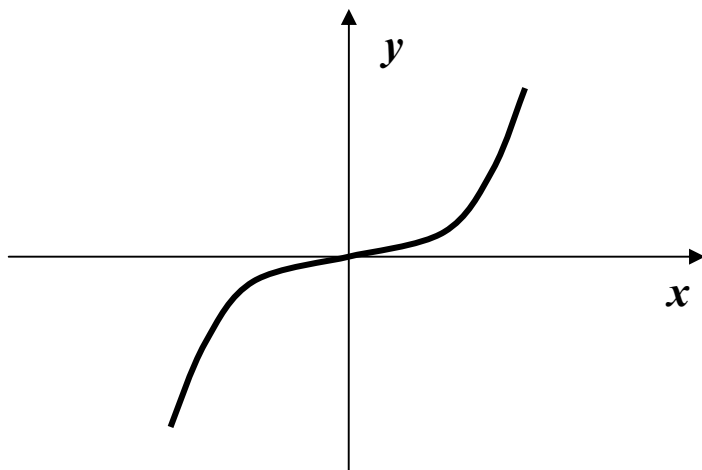


Рис. 3 График кубической зависимости

В нуле она имеет «нетипичную» кубическую зависимость. Но если задана не индивидуальная функция, а целое семейство функций, зависящих от некоторого параметра, то существует такое значение параметра, при котором кубическая особенность будет устойчивой. Универсальный пример такого семейства – множество кубических функций $y = x^3 + px$ переменной x , зависящей к тому же от параметра p . (рис. 4)

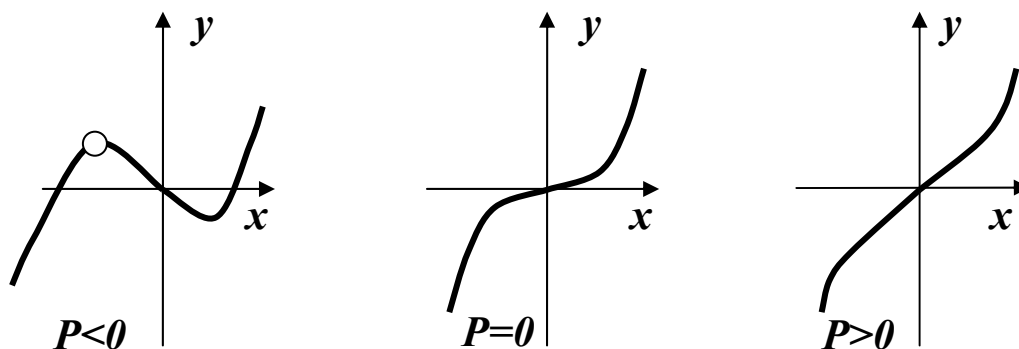


Рис. 4 Графики семейства функций

Пока параметр p отрицателен, функция имеет вблизи нуля локальные максимум и минимум. Когда параметр p стремится к нулю, максимум и минимум сближаются, и при нулевом значении параметра возникает

кубическая особенность. При положительных значениях параметра максимум, и минимум исчезают. Все эти явления универсальны и устойчивы, поэтому, отмечает В.И.Арнольд, они могут иметь широкую область применимости [2]. Отсюда, определяя функциональную надежность через численное выражение качества и затрат (ценны) как функции переменной t (времени), и учитывая их зависимость от дополнительного параметра p – интенсивности деятельности и тренировок оператора, данные функции будут близки к рассматриваемому семейству. Следовательно, если подготовка оператора (диспетчера, летчика) регулируется так, чтобы обеспечить максимизацию функции, то система будет находиться в точке максимума, то есть иметь оптимальную степень надежности, до тех пор, пока с изменением дополнительного параметра этот максимум – локальный оптимум – не исчезнет. В этот момент система будет вынуждена перейти в далекое от исходного состояние (рис.5).

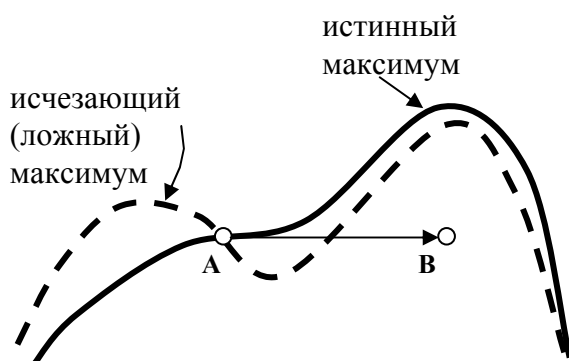


Рис. 5 Переход системы в другое состояние

Такого рода перескоки получили название катастроф, так как они связаны с резким изменением состояния системы и в некоторых случаях могут привести к ее разрушению [2]. С точки зрения подготовки специалистов управления воздушным движением, при стремлении функции к максимуму, ситуацию можно рассматривать как достижение оператором оптимального значения функциональной надежности, и в дальнейшем качественного изменения его деятельности (выработка стереотипа, уверенности на основе устойчивых навыков и т.п.). В противном случае, состояние системы близко к критическому и в дальнейшем может произойти ее разрушение (потеря навыка и допущение грубых ошибок, приводящих к авиационному происшествию).

Функциональная надежность зависит не только от указанных факторов, поэтому за длительные периоды времени она может существенно меняться, то есть если не ограничиваться рассмотрением локального оптимума, то картина может быть такой (рис.6).

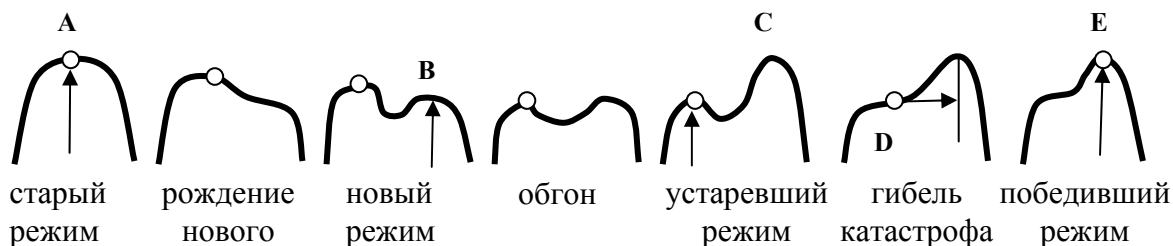


Рис. 6 Сценарий перехода системы

В начале оптимальное значение будет единственным. По мере развития системы (совершенствования профессионального мастерства, наращивание интенсивности деятельности, тренировок) возникает побочный максимум - новый локально-оптимальный режим. Далее побочный максимум обгоняет исходный. Начиная с этого момента новый режим уже выгоднее старого. Но переход на него затруднен необходимостью резкого перескока – катастрофы. Приведенный сценарий является лишь одним из возможных. Все возможные сценарии взаимодействия двух локально-оптимальных режимов описываются универсальным законом

$$y = x^4 + ax^2 + vx$$

с параметрами **a** и **v**.

На рисунке 7 изображен график экстремального значения y как функции от параметров **a** и **v**. Указанный выше сценарий изображен на графике путем I, заканчивающемся катастрофическим скачком (рис.7).

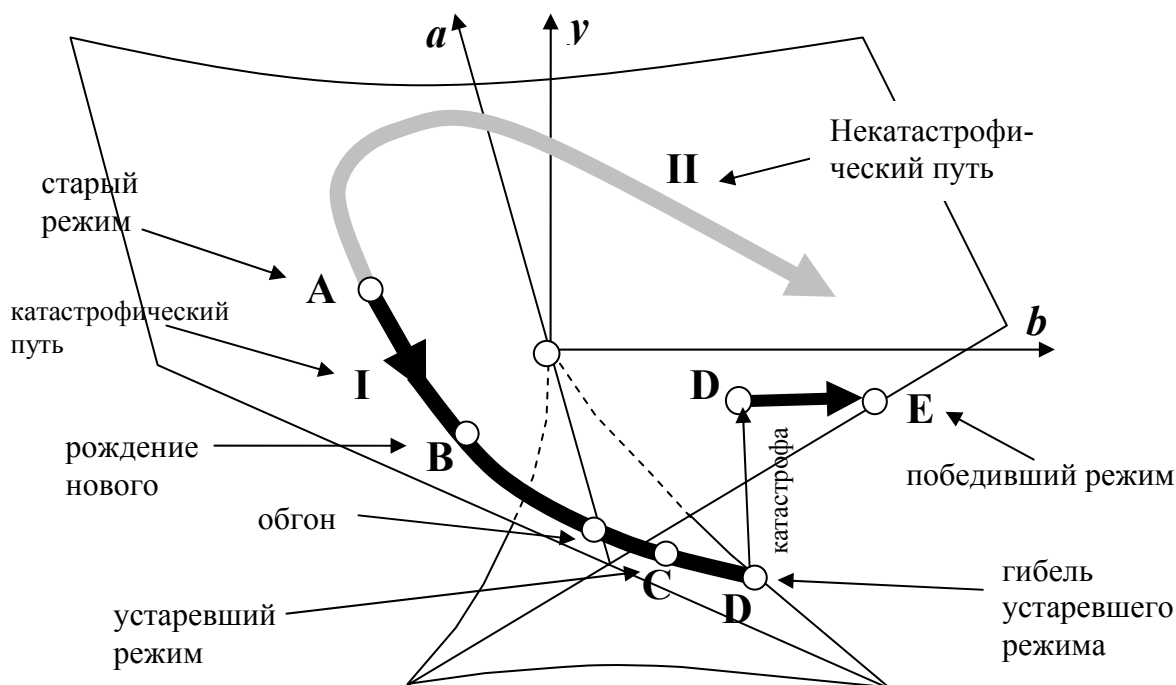


Рис. 7 График экстремального значения y

На этапе такого перескока функциональная надежность трудно прогнозируема, поэтому, переход, даже, на более выгодный режим, желательно осуществить плавно, по крайней мере, в области подготовки авиационных специалистов. Рассматриваемая теория предполагает возможность плавного перехода. К той же конечной цели можно прийти без катастрофы, даже зайдя далеко по катастрофическому пути. Для этого надо вернуться и обойти разделяющую конкурирующие режимы точку с другой стороны (путь I). С методической точки зрения, следует временно упростить подготовку оператора, направив развития ситуации по II пути.

В линейных системах малое изменение параметра в сторону лучшего режима улучшает положение. В отличие от этого, в данном случае после достижения локального оптимума, малые изменения управляющего параметра в сторону лучшего режима не улучшает, а ухудшает положение. В области подготовки специалистов управления воздушным движением данное положение можно интерпретировать так, если функциональная надежность оператора достигла оптимального для него значения, дальнейшее увеличение интенсивности его профессиональной деятельности или тренировок приведет к снижению его функциональной надежности. Можно предположить, что при подготовке операторов это положение выражается в виде различных видов перегрузки или перенатренированности.

С точки зрения методики подготовки специалистов управления воздушным движением (УВД), это значит, что если качество выполняемых задач стремится к минимуму, а затраты (цена) – к максимуму, то функциональная надежность оператора имеет тенденцию к снижению, то есть график надежности стремится к локальному минимуму—«клювику»(рис.8).

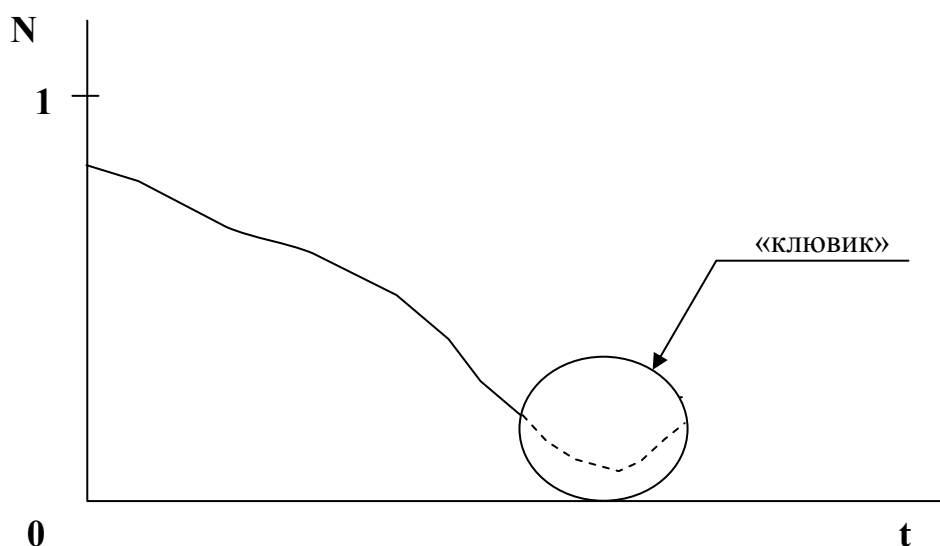


Рис. 8 График изменения функциональной надежности оператора

Выявление подобной ситуации имеет первостепенное значение для обеспечения безопасности полетов. Не допустить скачкообразного перехода

системы (функциональной надежности оператора) в более худшее положение или, даже ее разрушения, а также определить как скоро это может произойти - одна из важнейших задач обеспечение безопасности полетов.

Поскольку численное значение функциональной надежности предлагается определять соотношением качества и затраченных усилий на его достижение, для практического решения поставленной задачи, последние необходимо выразить количественно.

Определяя эти показатели в ходе деятельности оператора, можно построить соответствующие графики (рис.9). Анализ соотношения двух показателей предоставляет возможность сделать вывод о функциональной надежности специалиста опираясь на следующие типовые ситуации.

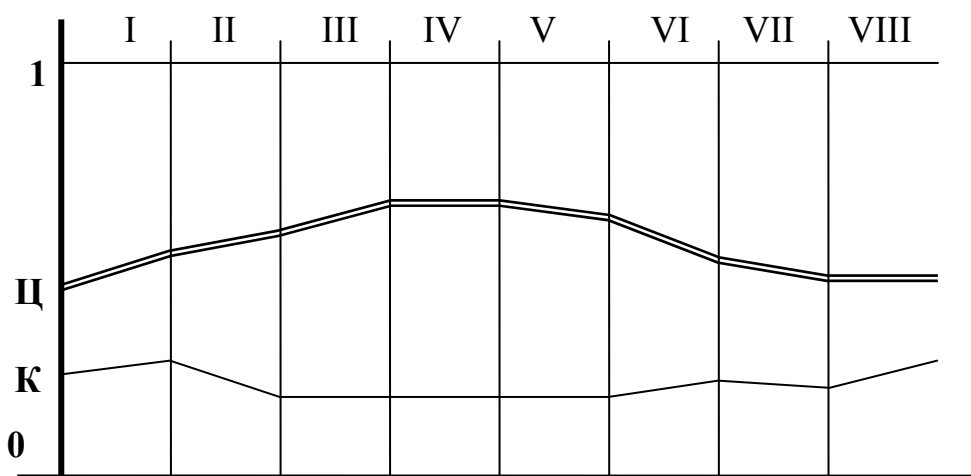


Рис. 9 График соотношения параметров надежности

Ситуация первая – качество возрастает, цена возрастает. Исходя из логической целесообразности, можно предположить, что идет выработка навыков, но стереотип действий еще не сформирован и функциональная надежность оператора не может быть стабильной. Для обеспечения безопасности требуется контроль соответствия поставленных уровню подготовки оператора.

Ситуация вторая – качество возрастает, цена уменьшается. Идет формирование стереотипа деятельности, функциональная надежность повышается. Следует уделить внимание определению оптимальной загрузки оператора. Признаком оптимальной загрузки будет являться стабилизация показателей качества и цены, при неизменной интенсивности деятельности и тренировок. Надежность в данной ситуации достаточная.

Ситуация третья – качество возрастает, цена постоянна. Рост профессионального мастерства за счет совершенствования стереотипа. Функциональная надежность возрастает за счет появления некоторого резерва внимания и возможностей.

Ситуация четвертая – качество и цена стабилизировались. Данная ситуация имеет несколько вариантов:

- качество высокое, цена низкая. Условия функционирования (интенсивность деятельности, тренировок, нагрузка и т. д.) для оператора наиболее благоприятные. Функциональная надежность оптимальная;

- качество низкое, цена высокая. Функциональная надежность минимальная. Необходимо выяснить причины отсутствия роста мастерства, вплоть, до определения профессиональной пригодности специалиста. Указанные варианты определяют диапазон рассматриваемой ситуации, в рамках которого функциональная надежность изменяется от максимальной до минимальной. Для определения промежуточных вариантов требуется более детальный анализ конкретных условий деятельности оператора (авиационного диспетчера, другого специалиста УВД).

Ситуация пятая – качество уменьшается, цена постоянная. Можно предположить, что выбранная методика совершенствования и поддержания достигнутого уровня подготовки не соответствует условиям деятельности и отрицательно влияет на функциональную надежность.

Ситуация шестая – качество уменьшается, цена возрастает. Ситуация требует повышенного внимания. Функциональная надежность снижается. В интересах обеспечения безопасности специалист УВД должен быть отстранен от практического управления, до выяснения причин создавшегося положения и их устранения.

Ситуация седьмая – качество уменьшается, цена - уменьшается. В данном случае вероятней всего, что специалист утратил мотивацию к совершенству профессионального мастерства.

Ситуация восьмая – качество постоянное, цена возрастает. Имеет место утрата навыка. Функциональная надежность будет снижаться, гарантированная безопасность не обеспечивается.

Наиболее опасной является шестая ситуация, поэтому рассмотрим ее детально. В интересах безопасности полетов, желательно знать не только о тенденции к ухудшению, но и вероятные сроки наступления критической ситуации. На основании положения теории, - расстояние от исчезающего локального экстремального значения параметра до движущегося ему навстречу критического значения - порядка квадратного корня из отличия текущего значения параметра от катастрофического [2], можно определить вероятный срок появления этого значения. Предположим, что текущее значение параметра 0.3. а критическое – 0.2, тогда используя график изменения функциональной надежности, определяем это расстояние, выраженное во времени (рис 10).

Данное значение масштабируем по временной шкале графика и определяем конкретное время наступления «катастрофы».

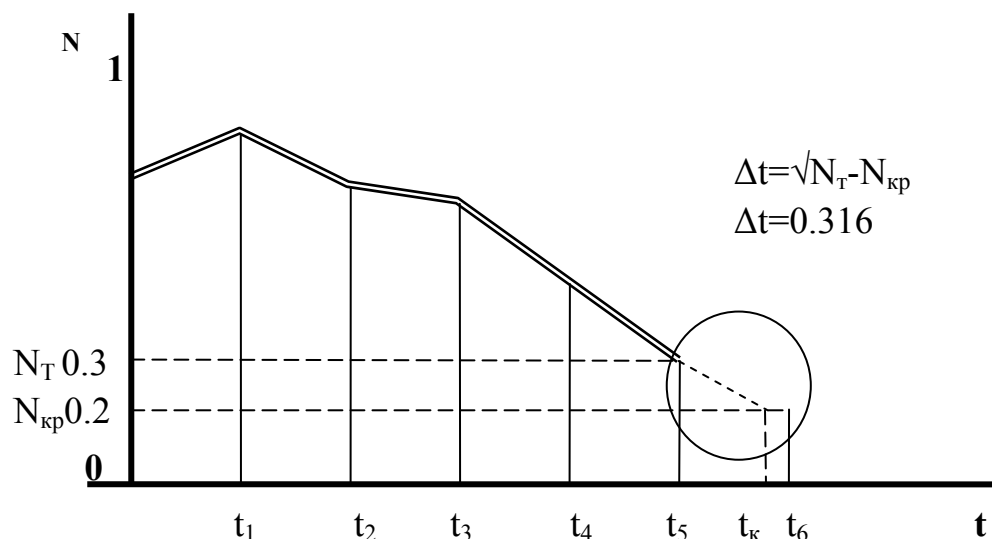


Рис. 10 Графический способ определения вероятного срока катастрофы

Выводы. Предложенный подход реализуем при условии разработки методики получения количественных показателей качества выполненных задач и цены. Основной трудностью, при этом является разработка способов инструментального контроля параметров, необходимых для оценки качества выполненных задач и цены. Подход не претендует на окончательное решение задачи определения конкретного срока «катастрофы». Следует помнить, что знание универсальных законов происхождения катастроф не может, само по себе предохранить от них. Без математических выкладок ясно, что не выполнение требований документов, регламентирующих безопасность полетов, низкий уровень профессионального мастерства специалистов УВД повышают вероятность авиационных происшествий. Там, где в системе управления не функционирует канал обратной связи, где ответственные решения принимаются лицами, не несущими за них ответственность, катастрофические последствия становятся неизбежными. Поэтому предлагаемый подход предназначен для помощи лицу, контролирующему деятельность оператора определить его функциональную надежность и принять обоснованное решение о дальнейшей деятельности. Таким образом, появляется возможность исключения неблагоприятных условий деятельности авиационных специалистов, ошибки которых приводят к серьезным последствиям и снижают уровень безопасности полетов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Арнольд В.И. Теория катастроф. М. : МГУ, 1983г.
2. Арнольд В.И. Теория катастроф. М. : «Наука и жизнь», № 10, 1989г.
3. Гильмор Р. Прикладная теория катастроф. М. : «Мир», 1984г.
4. Постон Т., Стюарт Я. Теория катастроф и ее приложения. М. : «Мир», 1980г.
5. Прокофьев А.И. Надежность и безопасность полетов. М. : «Машиностроение», 1985г.
6. Томсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М. : «Мир», 1985г.

А. И. Голованов, М. К. Сагдатуллин (г. Казань)

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КОНЕЧНЫХ ГИПЕРУПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ МКЭ.

В работе излагаются теоретические основы методики численного исследования конечных деформаций изотропных гиперупругих тел, ориентированной на применение МКЭ. Первый параграф посвящен кинематике конечных деформаций в Лагранжевой системе координат, вводятся тензоры и меры деформации, определяющих скорости, приведены различные тензоры напряжений. Во втором параграфе формулируются физические соотношения гиперупругой изотропной среды, используя уравнения термодинамики. В третьем параграфе приводится разрешающее линеаризованное уравнение в текущей конфигурации, и выводятся соотношения, определяющие скорость изменения тензора напряжения Коши-Эйлера как линейной функции от тензора пространственного градиента скорости.

Введение.

Моделирование напряженно-деформированного состояния сложных технических изделий из упругих материалов, допускающих значительные деформации, возможно лишь с применением современных вычислительных технологий на базе МКЭ. Варианты постановки задачи и возможных алгоритмов решения представлены в работах [1-4]. Они основаны на фундаментальных результатах нелинейной механики упругих сред, изложенных в известных монографиях и учебных пособиях [6,7,9,11,13,14]. Как правило, используется Лагранжевое описание кинематики среды и трехмерная постановка. В качестве Лагранжевых координат в [2-4] используются декартовы координаты материальных точек в исходной конфигурации. В этом случае структурные соотношения имеют простейший вид. Однако при конечно-элементной дискретизации для каждого конечного элемента (КЭ) вводится локальная криволинейная система координат, которая тоже является, по сути, Лагранжевой системой координат, т.к. каждая материальная точка среды однозначно идентифицируется значениями этих локальных координат и номером КЭ. Поэтому представляется целесообразным сформулировать задачу в этих координатах, в общем случае криволинейных и неортогональных.

В настоящей работе дается постановка задачи численного моделирования конечных деформаций гиперупругих сред ориентированная на применение МКЭ и изопараметрической аппроксимации. В частности в первом разделе приводятся основные соотношения кинематики конечных деформаций с

представлением тензоров в различных базисах. Второй раздел посвящен построению определяющих соотношений для гиперупругих изотропных сред с использованием пространственных тензоров. В третьем разделе приводится линеаризованное уравнение на шаге нагружения и строятся выражения для скорости тензора напряжений как линейно зависящие от тензора пространственного градиента скорости.

1. Кинематика конечных деформаций.

Процесс деформирования будем рассматривать в некоторой инерциальной системе отсчета, в которой введем декартовую систему координат с ортами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Пусть в исходной конфигурации радиус-вектор материальной точки имеет вид $\vec{R} = X^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \vec{e}_i$, где ξ^1, ξ^2, ξ^3 – криволинейные Лагранжевы координаты.

Определим:

- базисные векторы $\vec{R}_k = \frac{\partial X^i}{\partial \xi^k} \vec{e}_i = R_k^i \vec{e}_i$;

- сопряженные базисные векторы $\vec{R}^k = \frac{\partial \xi^k}{\partial X^i} \vec{e}_i = \frac{1}{2\sqrt{G}} \epsilon^{kmn} \vec{R}_m \times \vec{R}_n = R^{k,i} \vec{e}_i$,

где ϵ^{kmn} – символы Леви - Чевита, $\sqrt{G} = \vec{R}_1 \cdot [\vec{R}_2 \times \vec{R}_3]$;

- метрический тензор $(G) = G_{ij} (\vec{R}^i \vec{R}^j) = G^{ij} (\vec{R}_i \vec{R}_j) = \sum_{i,j} \tilde{G}_{ij} (\vec{e}_i \vec{e}_j)$,

где

$$G_{ij} = \vec{R}_i \cdot \vec{R}_j = \sum_m \frac{\partial X^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial X^m}{\partial \xi^j} = \sum_m R_i^m R_j^m,$$

$$G^{ij} = \vec{R}^i \cdot \vec{R}^j = \sum_m \frac{\partial \xi^i}{\partial X^m} \frac{\partial \xi^j}{\partial X^m} = \sum_m R^{i,m} R^{j,m},$$

$$\tilde{G}_{ij} = \sum_{m,n} G^{mn} R_m^i R_n^j.$$

По аналогии, в актуальном состоянии введем

- радиус – вектор материальной точки $\vec{r} = x^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \vec{e}_i$,

- базисные векторы $\vec{r}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} \vec{e}_i = r_k^i \vec{e}_i$,

- сопряженные базисные векторы $\vec{r}^k = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \vec{e}_i = \frac{1}{2\sqrt{g}} \epsilon^{kmn} \vec{r}_m \vec{r}_n = r^{k,i} \vec{e}_i$, (1.1)

где $\sqrt{g} = \vec{r}_1 \cdot [\vec{r}_2 \times \vec{r}_3]$.

- метрический тензор $(g) = g_{ij}(\vec{r}^i \vec{r}^j) = g^{ij}(\vec{r}_i \vec{r}_j) = \sum_{i,j} \tilde{g}_{ij}(\vec{e}_i \vec{e}_j)$,

где

$$g_{ij} = \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j = \sum_m \frac{\partial x^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^j} = \sum_m r_i^m r_j^m,$$

$$g^{ij} = \vec{r}^i \cdot \vec{r}^j = \sum_m \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^m} = \sum_m r^{i,m} r^{j,m},$$

$$\tilde{g}_{ij} = \sum_{m,n} g^{mn} r_m^i r_n^j.$$

В дальнейшем нам понадобится вектор скорости \vec{v} , который определим в виде $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = v^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \vec{e}_i$. В задачах статики под вектором скорости будет пониматься приращение радиус-вектора \vec{r} по мере нарастания деформаций, т.е. фактически \vec{v} есть вектор приращений перемещений $\Delta \vec{U}$, где \vec{U} – вектор перемещений

$$\vec{U} = \vec{r} - \vec{R} = U^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \vec{e}_i.$$

Тензор градиент деформаций представим следующим образом

$$(F) = g_{ik}(\vec{r}^k \vec{R}^i) = G^{ik}(\vec{r}_i \vec{R}_k) = \sum_{i,j} \tilde{F}_{ij}(\vec{e}_i \vec{e}_j), \quad (1.2)$$

где $\tilde{F}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = g_{nm} r^{m,i} R^{n,j} = G^{mn} r_m^i R_n^j$.

При описании деформаций будем использовать:

- правый тензор Коши – Грина (мера деформации Коши – Грина)

$$(C) = (F)^T \cdot (g) \cdot (F) = g_{ij}(\vec{R}^i \vec{R}^j) = \sum_{i,j} \tilde{g}_{ij}(\vec{e}_i \vec{e}_j),$$

где $\tilde{g}_{ij} = g_{mn} R^{m,i} R^{n,j}$;

- левый тензор Пиолы (мера деформации Альманси)

$$(B^{-1}) = (F^{-1})^T \cdot (G) \cdot (F^{-1}) = G_{ij}(\vec{r}^i \vec{r}^j) = \sum_{i,j} \tilde{B}_{ij}^*(\vec{e}_i \vec{e}_j), \quad (1.3)$$

где $\tilde{B}_{ij}^* = G_{mn} r^{m,i} r^{n,j}$;

- тензор деформации Коши-Грина

$$(E) = \frac{1}{2}[(C) - (G)] = \frac{1}{2}[g_{ij} - G_{ij}](\vec{R}^i \vec{R}^j) = \sum_{i,j} \tilde{E}_{ij}(\vec{e}_i \vec{e}_j),$$

где $\tilde{E}_{ij} = \frac{1}{2}[g_{mn} - G_{mn}]R^{m,i}R^{n,j}$;

- тензор деформации Альманси

$$(A) = \frac{1}{2}[(g) - (B^{-1})] = \frac{1}{2}[g_{ij} - G_{ij}](\vec{r}^i \vec{r}^j) = \sum_{i,j} \tilde{A}_{ij}(\vec{e}_i \vec{e}_j), \quad (1.4)$$

где $\tilde{A}_{ij} = \frac{1}{2}[g_{mn} - G_{mn}]r^{m,i}r^{n,j}$.

Отметим, что компоненты тензоров деформаций Коши-Грина и Альманси в криволинейных базисах совпадают между собой. Преобразование этих тензоров друг в друга определяется соотношением

$$(E) = (F)^T \cdot (A) \cdot (F). \quad (1.5)$$

Теперь рассмотрим тензоры, используемые для описания течения среды. Базовым здесь является тензор пространственного градиента скорости

$$(h) = (\dot{F}) \cdot (F^{-1}) = (\vec{v}_i \vec{r}^i) = \sum_{i,j} \tilde{h}_{ij}(\vec{e}_i \vec{e}_j), \quad (1.6)$$

где

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial v^j}{\partial \xi^i} \vec{e}_j = v_i^j \vec{e}_j = \sum_m \frac{\partial v^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^j} \vec{r}^j, \quad (1.7)$$

$$\tilde{h}_{ij} = v_m^i r^{m,j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j};$$

-тензор деформации скорости

$$(d) = \frac{1}{2}[(h) + (h)^T] = \sum_{i,j} \tilde{d}_{ij}(\vec{e}_i \vec{e}_j), \quad (1.8)$$

где

$$\tilde{d}_{ij} = \frac{1}{2}[v_m^i r^{m,j} + v_m^j r^{m,i}] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right];$$

-тензор скорости поворота

$$(\omega) = \frac{1}{2}[(h) - (h)^T] = \sum_{i,j} \tilde{\omega}_{ij}(\vec{e}_i \vec{e}_j),$$

где

$$\tilde{\omega}_{ij} = \frac{1}{2}[v_m^i r^{m,j} - v_m^j r^{m,i}] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v^i}{\partial x^j} - \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right].$$

Введем в рассмотрение материальную производную (полную производную по времени) тензора деформации Коши-Грина

$$(\dot{E}) = \frac{1}{2} \dot{g}_{ij}(\vec{R}^i \vec{R}^j) = \sum_{i,j} \dot{E}_{ij}(\vec{e}_i \vec{e}_j), \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned}\dot{g}_{ij} &= \vec{v}_i \cdot \vec{r}_j + \vec{v}_j \cdot \vec{r}_i = \sum_m \left(v_i^m r_j^m + v_j^m r_i^m \right), \\ \dot{\hat{E}}_{ij} &= \dot{g}_{mn} R^{m,i} R^{n,j}.\end{aligned}\quad (1.10)$$

Далее воспользуемся следующими преобразованиями. Из (1.1) следует

$$\vec{e}_j = \frac{\partial x^j}{\partial \xi^k} \vec{r}^k.$$

Из (1.7) следует

$$(d) = \frac{1}{2} \sum_m \left[\frac{\partial v^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^j} + \frac{\partial v^m}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^i} \right] (\vec{r}^i \vec{r}^j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{g}_{ij} (\vec{r}^i \vec{r}^j). \quad (1.11)$$

Таким образом, скорость изменения тензора деформаций Коши – Грина (1.9) и тензора деформаций скорости (1.8) в криволинейных базисах имеют одинаковые значения компонент. Следовательно, справедливо

$$(d) = (F^{-1})^T \cdot (\dot{E}) \cdot (F^{-1}). \quad (1.12)$$

Запишем (1.12) с учетом (1.5)-(1.6) в виде

$$\begin{aligned}(d) &= (F^{-1})^T \cdot \frac{d}{dt} \left[(F)^T \cdot (A) \cdot (F) \right] \cdot (F^{-1}) = \\ &= (\dot{A}) + (h)^T \cdot (A) + (A) \cdot (h) = (A^\wedge).\end{aligned}\quad (1.13)$$

Выражение в правой части называют производной Ли (Lie rate), для которой, с учетом (1.11), справедливо выражение.

$$(A^\wedge) = (d) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{g}_{ij} (\vec{r}^i \vec{r}^j). \quad (1.14)$$

По аналогии с операцией дифференцирования по времени определим вариации основных тензоров.

Итак, справедливо:

- из (1.9) – (1.10) следует

$$(\delta E) = \frac{1}{2} \delta g_{ij} (\vec{R}^i \vec{R}^j) = \sum_{i,j} \delta \tilde{E}_{ij} (\vec{e}_i \vec{e}_j),$$

где

$$\begin{aligned}\delta g_{ij} &= \delta \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j + \delta \vec{r}_j \cdot \vec{r}_i = \sum_m \left(\delta r_i^m \cdot r_j^m + \delta r_j^m \cdot r_i^m \right), \\ \delta \tilde{E}_{ij} &= \delta g_{mn} \cdot R^{m,i} \cdot R^{n,j};\end{aligned}$$

- из (1.12) следует

$$(\delta d) = (F^{-1})^T \cdot (\delta \dot{E}) \cdot (F^{-1}) = \frac{1}{2} \delta g_{ij} (\vec{r}^i \vec{r}^j) = \sum_{i,j} \delta \tilde{d}_{ij} (\vec{e}_i \vec{e}_j),$$

где

$$\delta \tilde{d}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_k (\delta v_m^k r_n^k + \delta v_n^k r_m^k) r^{m,i} r^{n,j};$$

- из (1.11) имеем

$$(\delta h) = \sum_k \delta v_i^k r_j^k (\vec{r}^i \vec{r}^j) = \sum_{i,j} \delta \tilde{h}_{ij} (\vec{e}_i \vec{e}_j),$$

где

$$\delta \tilde{h}_{ij} = \sum_k \delta v_m^k r_n^k r^{m,i} r^{n,j}.$$

2. Физическая модель гиперупругого тела

Для построения определяющих соотношений воспользуемся вторым уравнением термодинамики для изотермического деформирования упругой изотропной среды в виде

$$\rho \dot{\psi} - (\sigma) \cdot (d) = 0. \quad (2.1)$$

Здесь ρ – плотность материала, ψ – функция свободной энергии, (σ) – тензор напряжений Коши, (d) – тензор деформации скорости, который определяется различными формами (1.8), (1.11), (1.12), (1.13), (1.14).

Построим общие структурные соотношения, принимая в качестве базового – тензор деформаций Альманси (1.4). Выбор базового тензора деформаций, предполагает, что функция свободной энергии зависит от компонент этого тензора. Таким образом, будем считать заданной функцию

$$\psi = \psi(A). \quad (2.2)$$

По правилу дифференцирования скалярной функции по тензору [5,11] имеем

$$\dot{\psi} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial A} \right) \cdot (\dot{A}), \quad (2.3)$$

где появляется тензор второго ранга $\left(\frac{\partial \psi}{\partial A} \right)$.

Воспользуемся соотношением (1.13), из которого следует, что

$$\begin{aligned} (\dot{A}) &= (d) - (A) \cdot (h) - (h)^T \cdot (A) = \\ &= [(d) - (A) \cdot (d) - (d) \cdot (A)] - [(A) \cdot (\omega) - (\omega) \cdot (A)]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставим (2.4) в (2.3) и далее в уравнение (2.1) и получим

$$\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial A} \right) \cdot \{ [(d) - (A) \cdot (d) - (d) \cdot (A)] - [(A) \cdot (\omega) - (\omega) \cdot (A)] \} - (\sigma) \cdot (d) = 0 \quad (2.5)$$

Преобразуем это уравнение к форме

$$\left\{ \rho \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial A} \right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial A} \right) \cdot (A) - (A) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial A} \right) \right] - (\sigma) \right\} \cdot (d) -$$

$$-\rho \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial A} \right) \cdot (A) - (A) \left(\frac{\partial \psi}{\partial A} \right) \right\} \cdot (\omega) = 0. \quad (2.6)$$

Так как тензор деформации скорости (d) и тензор скорости вращения (ω) являются совершенно независимыми тензорами, то из (2.6) следуют два уравнения

$$(\sigma) = \rho \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial A} \right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial A} \right) \cdot (A) - (A) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial A} \right) \right], \quad (2.7)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial A} \right) \cdot (A) = (A) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial A} \right). \quad (2.8)$$

Соотношения типа (2.7) называются физическими (определяющими) соотношениями или уравнением состояния и, по сути, определяют тензор напряжения в виде функции от тензора деформации. Уравнение (2.8) является ограничением на выбор функции свободной энергии (2.2).

С учетом (2.8) определяющие соотношения (2.7) можно записать либо в виде

$$(\sigma) = \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial A} \right) \cdot [(g) - 2(A)] = \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial A} \right) \cdot (B^{-1}),$$

либо

$$(\sigma) = \rho [(g) - 2(A)] \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial A} \right) = (B^{-1}) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial A} \right) \rho.$$

Обе формы эквивалентны, вследствие справедливости (2.8).

Для изотропной среды выражение (2.2) упрощается до скалярной функции от главных инвариантов.

$$\psi = \psi(I_{1A}, I_{2A}, I_{3A}).$$

Здесь, и далее, обозначение скаляров упростим, а именно:

$$I_1 = I_{1A}, I_2 = I_{2A}, I_3 = I_{3A}.$$

В результате, после несложных преобразований, получим

$$(\sigma) = [\psi_1 + \psi_2 I_1](g) - \psi_2 (A) + \psi_3 I_3 (A^{-1}), \quad (2.9)$$

где

$$\psi_1 = \rho \frac{\partial \psi}{\partial I_1}, \psi_2 = \rho \frac{\partial \psi}{\partial I_2}, \psi_3 = \rho \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \quad (2.10)$$

Для получения представления тензора напряжений (σ) в виде суммы диад по соответствующему базису, необходимо определить, в каком базисе определен тензор деформаций Альманси (1.4). Наиболее простой вид получаем при использовании базиса \vec{e}_i . В этом случае

$$(\sigma) = \sum_{i,j} \tilde{\sigma}_{ij} (\vec{e}_i \vec{e}_j)$$

и

$$\tilde{\sigma}_{ij} = [\psi_1 + \psi_2 I_1] \delta_{ij} - \psi_2 \tilde{A}_{ij} + \psi_3 I_3 \tilde{A}_{ij}^*,$$

где $|\tilde{A}_{ij}^*|$ образуется как матрица, обратная $|\tilde{A}_{ij}|$.

При использовании базиса текущей конфигурации получаем представление

$$(\sigma) = \sigma_{ij} \left(\overrightarrow{r^i r^j} \right) = \sigma^{ij} \left(\overleftarrow{r_i r_j} \right)$$

и

$$\sigma_{ij} = [\psi_1 + \psi_2 I_1] g_{ij} - \psi_2 A_{ij} + \psi_3 I_3 A_{ij}^*,$$

где $A_{ij} = g_{ij} - G_{ij}$, A_{ij}^* – компоненты обратного тензора в базисе $(\overleftarrow{r_i r_j})$, которые имеют достаточно сложный вид (см. [6, 11]).

В практической реализации, вычисление компонент \tilde{A}_{ij}^* значительно проще, чем A_{ij}^* . Поэтому целесообразно вычислять A_{ij}^* по \tilde{A}_{ij}^* . Для этого из тождества

$$A_{ij}^* \left(\overrightarrow{r^i r^j} \right) = \sum_{i,j} \tilde{A}_{ij}^* \left(\overleftarrow{e_i e_j} \right) = (A^{-1})$$

получим

$$A_{ij}^* = \overrightarrow{r_i} \cdot \sum_{m,n} \tilde{A}_{mn}^* \left(\overleftarrow{e_m e_n} \right) \cdot \overleftarrow{r_j} = \tilde{A}_{mn}^* r_i^m r_j^n.$$

Контравариантные компоненты тензора деформации определяются в виде

$$\sigma^{ij} = \sigma_{mn} g^{mi} g^{nj}.$$

Таким образом, представленные соотношения позволяют вычислять компоненты тензора напряжений в различных базисах при известных исходной и деформированной конфигурациях.

3. Разрешающее уравнение на шаге нагружения.

Примем в качестве базового вариационное уравнение принципа виртуальных скоростей в текущей конфигурации, которое для задач статики можно записать в виде

$$\int_V (\sigma) \cdot (\delta d) dV = \int_V \overrightarrow{f^*} \cdot \delta \overleftarrow{v} dV, \quad (3.1)$$

где $\overrightarrow{f^*}$ – вектор заданных внешних объемных сил, $\overleftarrow{t_n^*}$ – вектор заданных напряжений на части поверхности S^σ , на которой определены силовые граничные условия. Кинематические условия на части поверхности S^U выполняются за счет, специальным образом определенных, аппроксимаций.

Технология вычислений представляет собой метод последовательных нагружений с определением текущей метрики, как основной для вычислений. Итак, процесс деформирования представим как последовательность равновесных состояний V_k , которые реализуются при заданных значениях

внешних сил $\overset{k}{f}^*$, $\overset{k}{t}_n^*$. Определим в качестве основной неизвестной величины вектор скорости $\overset{k}{v}$, который можно трактовать как вектор приращения текущей конфигурации при переходе к состоянию V_{k+1} ,

$$\overset{k}{v} = \Delta^k \overset{k}{U} = \overset{k+1}{r} - \overset{k}{r}, \quad (3.2)$$

где

$$\overset{k}{r} = \overset{k}{x}^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \overset{k}{e}_i.$$

Разрешающее уравнение на текущем шаге строится путём линейризации исходного уравнения (3.1) в предположении, что $\frac{\partial^k v^i}{\partial^k x^j} \approx 1$. Детали построения линейризованного уравнения приведены в [1,4,5]. В результате имеем

$$\begin{aligned} & \int_{V_k} \left\{ \left(\overset{k}{\sigma} \right) \cdot \left(\delta^k d \right) - \frac{1}{2} \left(\overset{k}{\sigma} \right) \cdot \left[\left(\delta^k h \right) \cdot \left(\overset{k}{h} \right) + \left(\overset{k}{h} \right)^T \left(\delta^k h \right)^T \right] + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial^k v^i}{\partial^k x^i} \right] \cdot \left[\left(\overset{k}{\sigma} \right) \cdot \left(\delta^k d \right) - \overset{k}{f} \delta \overset{k}{v} \right] dV_k + \int_{S_k^\sigma} \left\{ \overset{k}{t}_n^* \cdot \left(\overset{k}{h} \right)^T - \left[\frac{\partial^k v^i}{\partial^k x^i} \right] \overset{k}{t}_n^* \right\} \cdot \delta \overset{k}{v} dS_k = \\ & = \int_{V_k} \overset{k}{\dot{f}}^* \cdot \delta \overset{k}{v} dV_k + \int_{S_k^\sigma} \overset{k}{\dot{t}}_n^* \cdot \delta \overset{k}{v} dS_k - \\ & - \left\{ \int_{V_k} \left[\left(\overset{k}{\sigma} \right) \cdot \left(\delta^k d \right) - \overset{k}{f} \delta \overset{k}{v} \right] dV_k - \int_{S_k^\sigma} \overset{k}{t}_n^* \cdot \delta \overset{k}{v} dS \right\}. \end{aligned}$$

Чтобы полностью определить это уравнение, необходимо построить выражение скорости напряжений $\left(\overset{k}{\sigma} \right)$ для известной конфигурации $\overset{k}{r}$ через неизвестный вектор скорости (3.2) в виде линейной функции.

Рассмотрим общий случай изотропного материала с определяющим уравнением (2.9). Индекс « k » для сокращения записи опустим. Справедливо

$$\begin{aligned} \left(\overset{k}{\sigma} \right) = & \left[\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 I_1 + \dot{\psi}_2 \dot{I}_1 \right] (g) + \left[\psi_1 + \psi_2 I_1 \right] (\dot{g}) - \\ & - \dot{\psi}_2 (A) - \psi_2 (\dot{A}) + \dot{\psi}_3 I_3 (A^{-1}) + \psi_3 \dot{I}_3 (A^{-1}) + \psi_3 I_3 (\dot{A}^{-1}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Далее расписываем каждое из слагаемых

$$\begin{aligned}
-\dot{\psi}_i &= \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_i \partial I_1} \left(\frac{\partial I_1}{\partial A} \right) \cdot (\dot{A}) + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_i \partial I_2} \left(\frac{\partial I_2}{\partial A} \right) \cdot (\dot{A}) + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_i \partial I_3} \left(\frac{\partial I_3}{\partial A} \right) \cdot (\dot{A}) = \\
&= \left\{ \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_i \partial I_1} (g) + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_i \partial I_2} [I_1(g) - (A)] + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_i \partial I_3} I_3(A^{-1}) \right\} \cdot (\dot{A}).
\end{aligned}$$

Здесь использовались следующие представления

$$\begin{aligned}
-\dot{I}_1 &= \left(\frac{\partial I_1}{\partial A} \right) \cdot (\dot{A}) = (g) \cdot (\dot{A}), \\
-\dot{I}_3 &= \left(\frac{\partial I_3}{\partial A} \right) \cdot (\dot{A}) = I_3(A^{-1}) \cdot (\dot{A}).
\end{aligned}$$

Если продифференцировать по времени тождество

$$(A) \cdot (A^{-1}) = (g).$$

то получим

$$(\dot{A}^{-1}) = (A^{-1}) \cdot [(\dot{g}) - (\dot{A}) \cdot (A^{-1})].$$

Итак, удалось построить выражения всех слагаемых в соотношении (3.3) через два тензора скоростей (\dot{A}) и (\dot{g}) . Причем все тензоры, которые свертываются с ними, однозначно определяются текущей конфигурацией ${}^{k-r}$, и могут быть вычислены по соответствующим формулам. Теперь необходимо выразить тензоры $(\dot{A}), (\dot{g})$ через пространственный тензор градиента деформаций (1.6) в виде линейной зависимости.

Из (1.13) имеем

$$({}^k \dot{A}) = ({}^k d) - ({}^k h)^T \cdot ({}^k A) + ({}^k A) \cdot ({}^k h). \quad (3.4)$$

Из (1.4) получаем

$$(\dot{g}) = 2(\dot{A}) + (\dot{B}^{-1}). \quad (3.5)$$

Из (1.3) следует

$$(\dot{B}^{-1}) = (\dot{F}^{-1})^T \cdot (G) \cdot (F^{-1}) + (F^{-1})^T \cdot (G) \cdot (\dot{F}^{-1}). \quad (3.6)$$

Дифференцируя по времени тождество

$$(F^{-1}) \cdot (F) = (G),$$

получим

$$(\dot{F}^{-1}) = -(F^{-1}) \cdot (\dot{F}) \cdot (F^{-1}) = -(F^{-1}) \cdot (h)$$

и подставим его в (3.6)

$$(\dot{B}^{-1}) = -(h)^T \cdot (F^{-1})^T \cdot (G) \cdot (F^{-1}) - (F^{-1})^T \cdot (G) \cdot (F^{-1}) \cdot (h) =$$

$$= -(h)^T \cdot (B^{-1}) - (B^{-1}) \cdot (h). \quad (3.7)$$

Собирая вместе представления (3.4), (3.5), и (3.7), получаем выражение

$$\begin{aligned} (\dot{g}) &= 2 \left[(d) - (h)^T \cdot (A) - (A) \cdot (h) \right] - (h)^T \cdot (B^{-1}) - (B^{-1}) \cdot (h) = \\ &= 2(d) - (h)^T \cdot \left[2(A) + (B^{-1}) \right] - \left[2(A) + (B^{-1}) \right] \cdot (h) = 2(d) - (h)^T \cdot (g) - (g) \cdot (h), \end{aligned}$$

т.е. соотношение полностью аналогичное (3.4).

Таким образом, представление для скорости изменения тензора напряжений (3.6) в глобальном базисе, т.е. в виде

$$\left({}^k \dot{\sigma} \right) = \sum_{i,j} {}^k \dot{\sigma}_{ij} (\overline{e_i e_j}),$$

допускает представление

$${}^k \dot{G}_{ij} = {}^k G_{ij}^{mn} {}^k \hat{h}_{mn}.$$

Выражение для ${}^k G_{ij}^{mn}$ легко строится с помощью полученных соотношений и здесь не приводится.

Заключение

Полученные соотношения представляют собой теоретическую основу конечно-элементного алгоритма исследования конечных деформаций нелинейно-упругих тел при силовом их нагружении. Необходимо лишь добавить конкретную физическую модель в виде выражения функционала свободной энергии, справедливого для соответствующего материала. Некоторые рекомендации по их выбору даны в работах [8, 10-14]

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Голованов А. И., Бережной Д. В. Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. – Казань: изд-во «ДАС», 2001. – 301 с.
2. Голованов А. И., Коноплев Ю. Г., Султанов Л. У. Численное исследование больших деформаций гиперупругих материалов. Часть 1. Кинематика и вариационные уравнения. // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия физико-математические науки. 2008, т. 150, кн. 1. – С. 25-37.
3. Голованов А. И., Коноплев Ю. Г., Султанов Л. У. Численное исследование больших деформаций гиперупругих материалов. Часть 2. Физические соотношения. // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия физико-математические науки. – 2008, т. 150, кн. 1. – С. 25-37.
4. Голованов А. И., Коноплев Ю. Г., Султанов Л. У. Численное исследование больших деформаций гиперупругих материалов. Часть 3.

Постановка задачи и алгоритмы решения. // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия физико-математические науки. 2009, т. 151, кн. 1.

5. Голованов А. И., Султанов Л.У. Теоретические основы вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. – Казань, КГУ, 2008. – 165с.

6. Грин А., Адкинс Д. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – М.: Мир, 1965. – 455 с.

7. Елисеев В. В. Механика упругих тел. – С.-Петербург, СПбГТУ, 1999. – 341с.

8. Корнев С. А. Термодинамически согласованные уравнения состояния нелинейной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. – 2003, № 2, С. 71-82.

9. Коробейников С. Н. Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск, СО РАН, 2000. – 262с.

10. Кузнецова В. Г., Роговой А. А. Эффект учета слабой сжимаемости материала в упругих задачах с конечными деформациями // Изв. РАН. МТТ. – 1999, № 4. – С. 64-76.

11. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.

12. Мальков В. М. Нелинейный закон упругости для тензора условных напряжений и градиента деформации // Изв. РАН. МТТ.– 1998, № 1. – С.91-98.

13. Оден Д. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.

14. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.

15. Чернышов А. Д. Простые определяющие уравнения для упругой среды при конечных деформациях // Изв. РАН. МТТ. – 1993, № 1. – С. 75-81.

И. И. Ефремов, Е. П. Лукащик (г. Краснодар)

ОБ ОДНОСТОРОННЕМ РАСПРОСТРАНЕНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН, ВОЗБУЖДАЕМЫХ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНОЙ

Рассмотрена задача определения условий одностороннего распространения поверхностных волн, возбуждаемых пластиной, колеблющейся на свободной поверхности вязкой жидкости. Получено соотношение между амплитудами четных (симметричных) и нечетных (антисимметричных) форм колебаний, обеспечивающее одностороннее распространение волн. В качестве подтверждающего примера рассмотрено сочетание симметричных поперечных и антисимметричных угловых колебаний пластины.

Возможность одностороннего распространения волн, возбуждаемых колеблющимся цилиндром, была показана еще Н.Е.Кочиным [1]. Один пример расчета форм волн около колеблющегося цилиндра был рассмотрен С.И.Филипповым [2]. Однако решение вопроса о количественных соотношениях для амплитуд и фаз различных форм колебаний, обеспечивающих одностороннее распространение волн, не было выполнено.

В данной работе на примере колебаний тонкой пластины изложен подход к определению соотношений амплитуд и фаз четных и нечетных форм колебаний в задачах гидродинамики поверхностных волн.

1. Физические предпосылки одностороннего распространения поверхностных волн

Возможность одностороннего распространения волн при несимметричных относительно середины пластины формах колебаний обусловлена тем, что четным (симметричным) формам колебаний соответствует симметричные волны, а нечетным (асимметричным) формам – антисимметричные относительно середины пластины волны.

Рассмотрим в качестве четной формы колебаний вертикальные колебания с постоянной вдоль пластины амплитудой, а в качестве нечетной – угловые колебания с постоянной амплитудой с центром в середине пластины.

В расчетах амплитуду одной из форм колебаний пластины следует принять за единицу. Поскольку при одинаковых амплитудах колебаний пластины амплитуда волн от вертикальных колебаний заметно больше амплитуды волн от угловых колебаний, то целесообразнее за единицу взять амплитуду угловых колебаний.

Начальную фазу угловых колебаний принимаем равной нулю.

В расчетах будем требовать обращения в нуль амплитуды волн на бесконечности с какой-либо стороны в горизонтальном направлении (сила тяжести направлена вертикально вниз).

При этом строго обеспечивается обращение в нуль амплитуды только на соответствующей бесконечности, в ближнем поле будут малые конечные амплитуды волн с обеих сторон от пластины, однако величины амплитуд будут заметно различны (отличаться на порядок).

2. Математическая постановка задачи

Математическая постановка задачи состоит в поиске решения уравнения Лапласа для комплексной амплитуды потенциала скорости в нижней полуплоскости

$$\Delta\varphi = 0, \quad y < 0;$$

с граничными условиями:

– на пластине

$$\varphi_y = v_y(x), \quad y = 0, \quad |x| \leq a;$$

– два условия на свободной поверхности тяжелой жидкости:
динамическое условие

$$-i\omega\varphi + g\eta = 0, \quad y = 0, \quad |x| > a$$

и кинематическое условие

$$\varphi_y = -i\omega\eta, \quad y = 0, \quad |x| > a; \quad (1)$$

объединяя два последних условия можно получить общее соотношение

$$-\omega^2\varphi + g\varphi_y = 0, \quad y = 0, \quad |x| > a.$$

Здесь a – полудлина пластины, ω – частота колебаний, $v_y(x)$ – вертикальная скорость точек пластины, η – отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня $y = 0$.

Кроме указанных условий должны быть выполнены условия на бесконечности по глубине

$$\varphi(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow -\infty, \quad \forall x.$$

В горизонтальном направлении должны быть выполнены условия излучения, которые в данном случае можно взять в виде

$$\varphi(x, y) \rightarrow C_+(y)e^{i\sigma x}, \quad \sigma > 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\varphi(x, y) \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow -\infty$$

Таким образом, ищется решение с волнами, которые распространяются в направлении положительной полуоси комплексной плоскости $z = x + iy$.

Заметим также, что вблизи острых кромок необходимо требовать ограниченности потенциала скорости или давления.

Стандартными методами, разработанными в [3], [4], можно получить интегральное уравнение [5] относительно $\gamma(x) = -\varphi_x$:

$$\int_{-a}^{+a} \gamma(\xi) k(x - \xi) d\xi = v_y(x), \quad x \in [-a, +a], \quad (2)$$

где

$$k(x) = F^{-1}[K(\alpha)](x),$$

$$K(\alpha) = \frac{v \cdot \text{sign} \alpha}{i(v - |\alpha|)}.$$

Здесь $v = \frac{\omega^2}{g}$ – волновое число поверхностных волн.

Ядро $k(x)$ может быть представлено в явном виде

$$k(x) = v \cdot \text{sign} x \left(e^{iv|x|} - \frac{1}{\pi} f(v|x|) \right). \quad (3)$$

При больших значениях аргумента для $f(z)$ верна оценка [6]

$$f(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

Форма свободной поверхности согласно (1) определяется по формуле

$$\eta(x) = \frac{-1}{i\omega} \varphi_y(x, 0),$$

или

$$\eta(x) = -\frac{1}{i\omega} \int_{-a}^{+a} \gamma(\xi) k(x - \xi) d\xi.$$

При $x \rightarrow -\infty$ в соответствии с оценкой (3)

$$\eta(x) \rightarrow -\frac{e^{-ivx}}{i\omega} \int_{-a}^{+a} \gamma(\xi) e^{iv\xi} d\xi,$$

отсюда следует условие отсутствия волн в левой бесконечности

$$\int_{-a}^{+a} \gamma(\xi) e^{+iv\xi} d\xi = 0. \quad (4)$$

Кроме приведенных условий потребуем выполнения условия ограниченности давления на кромках пластины.

Вертикальную скорость точек пластины выберем в виде суммы скоростей от вертикальных и угловых колебаний:

$$v_y(x) = i\omega h + i\beta\omega x.$$

Амплитуду угловых колебаний β примем за единицу

Таким образом, система соотношений, описывающих распространение волн лишь в правую бесконечность, имеет вид:

$$\begin{cases} +a \\ \int \gamma(\xi)k(x-\xi)d\xi - i\omega h = -i\omega x, |x| \leq a, \\ -a \\ +a \\ \int \gamma(\xi)e^{+iv\xi}d\xi = 0, \\ -a \\ +a \\ \int \gamma(\xi)d\xi = 0 \\ -a \end{cases}$$

На рис.1 показана зависимость от приведенной частоты амплитуды вертикальных колебаний, гасящих слева от пластины волны от вращательных колебаний пластины единичной амплитуды.

Распространение волн будем оценивать по $|\eta(x)|$. В частности, при $x \rightarrow +\infty$ верно следующее соотношение

$$\frac{|\eta(+\infty)|}{a} = \left| \int_{-1}^1 \gamma(\xi)e^{-iv\xi}d\xi \right|.$$

График зависимости $\frac{|\eta(+\infty)|}{ag}$ от приведенной частоты $\bar{v} = \frac{\omega^2 a}{g}$

представлен на рис.2.

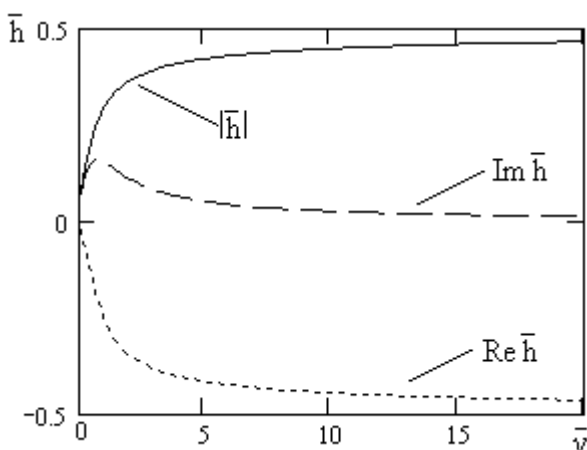


Рис.1. Зависимость амплитуды вертикальных колебаний от приведенной частоты $\left(\bar{h} = \frac{h}{a\beta}\right)$.

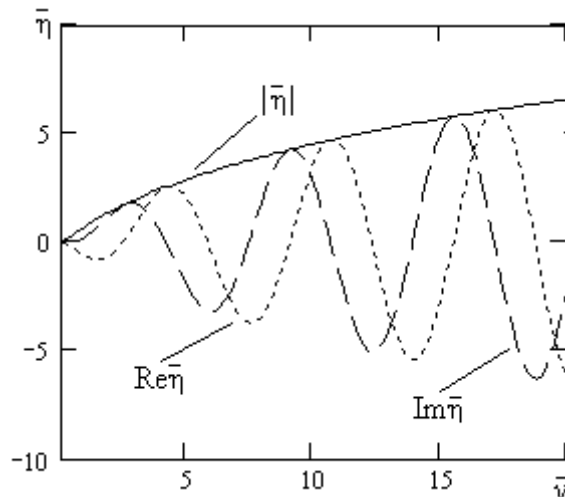


Рис.2. Зависимость амплитуды поверхностных волн при $x \rightarrow +\infty$ от приведенной частоты $\left(\bar{\eta} = \frac{\eta(+\infty)}{a \cdot \beta}\right)$.

На рис.3 и рис.4 представлены графики амплитуд суммарных поверхностных волн в точках на различном расстоянии от профиля в противоположных направлениях.

Амплитуда волн при $x = -2a$ составляет около 3 % от амплитуды волн при $x = 2a$, а при $x = -10a$ – менее 0,1% от амплитуды волны при $x = 10a$.

Заметим также, что амплитуды поверхностных волн, распространяющихся в положительном направлении, практически не зависят от расстояния до правой кромки пластины.

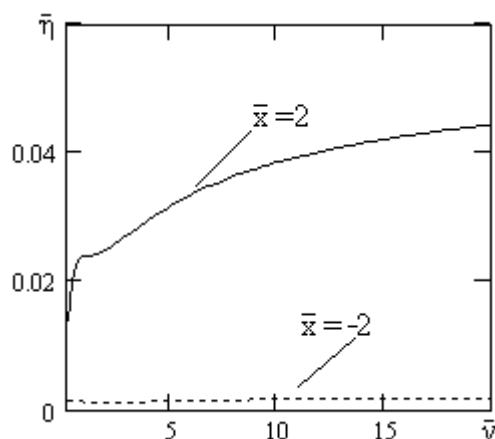


Рис.3. Амплитуды поверхностных волн на одинаковом расстоянии от профиля в противоположных направлениях. ($\bar{x} = x/a$).

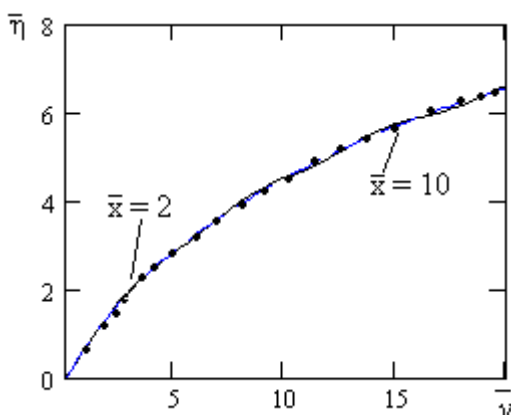


Рис.4. Амплитуды поверхностных волн на различных расстояниях от профиля в положительном направлении

Соотношение (4) можно представить в виде

$$\int_{-a}^{+a} (h\gamma_h(\xi) + \beta\gamma_\beta(\xi))e^{i\nu\xi}d\xi = 0, \quad (5)$$

где h и β – амплитуды вертикальных и вращательных колебаний пластины соответственно; γ_h, γ_β – решения уравнения (2) с правыми частями $-i\omega h$ или $-i\beta\omega x$.

Из (5) следует, что

$$h = -\beta \frac{\int_{-a}^{+a} \gamma_{\beta}(\xi) e^{i\nu\xi} d\xi}{\int_{-a}^{+a} \gamma_h(\xi) e^{i\nu\xi} d\xi} = \beta W(\beta),$$

где $W(\beta)$ – комплексная передаточная функция от β к h .

Очевидно, что $W(h)$ – передаточная функция от h к β будет обратной к $W(\beta)$ комплексной величиной.

3. Заключение

Таким образом, в данной статье установлено соотношение между амплитудами вертикальных и угловых (вращательных) колебаний, обеспечивающее одностороннее распространение волн.

Рассмотренная методика может быть использована также для учета конечности глубины и сжимаемости жидкости.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кочин Н. Е. Плоские задачи об установившихся колебаниях тел под свободной поверхностью тяжелой несжимаемой жидкости // Собр. соч. – М.-Л. : Изд-во АН СССР, 1949, Т.2. – С. 244-276.

2. Филиппов С.И. Гидродинамика крылового профиля вблизи границ раздела. – Казань : Изд-во КМО, 2004. – 199с.

3. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. – М. : Наука, 1979. – 320с.

4. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. – М. : Наука, 1989. – 345с.

5. Ефремов И.И., Лукашик Е.П. Численные решения задачи о колебаниях пластины на свободной поверхности весомой жидкости // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2008, № 5. – С. 33-36.

6. Справочник по специальным функциям. Под редакцией М.Абрамовитца и И.Стигана. – М. : Наука, 1970. – 830с.

В. М. Журавлев, В. А. Шляпин (г. Ульяновск)

МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ ОДНОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ И ПРИНЦИП ВТОРИЧНОГО МАКСИМУМА ЭНТРОПИИ

В работе рассматривается подход к описанию усредненной динамики конечномерных нелинейных систем на основе вариационного принципа максимальной энтропии. Вариационный принцип формулируется с помощью метода сопряженных функций. Само описание динамики нелинейных систем в среднем строится на основе общего подхода известного как теория напряжений Рейнольдса, который широко применяется в теории турбулентности. В работе подробно исследуется задача о динамике точки в потенциальном поле сил общего вида. Выводятся уравнения, замыкающие описание динамики системы в среднем. Показано, что эти уравнения допускают закон сохранения удельной энтропии. Показано, что такая теория оказывается гамильтоновской по отношению не полной энергии, а к полной удельной энтропии.

Введение

Известным и часто используемым подходом к решению задачи о сложной динамике жидкости при больших числах Рейнольдса - турбулентности, является подход развитый первоначально в работах Осборна Рейнольдса см. [1,2,3,4] и носящий его имя. Метод Рейнольдса связан с представлением о турбулентном течении, как о случайном процессе. Введение случайных процессов в теорию означает, что мы отказываемся описывать процесс детально и предполагаем получить замкнутое описание динамики в среднем, т.е. только для средних параметров и моментов случайных величин. Поэтому в методе Рейнольдса исходная задача сводится к исследованию моментов распределений соответствующих случайных параметров среды компонент скорости, давления, плотности и т. д. Такой же подход применяется и для описания конечномерных динамических систем и, в частности, к задачам статистического описания сложной динамики механических систем.

Хотя методы описания систем на основе усреднения по ансамблю их состояний вблизи некоторых их «средних» состояний хорошо изучены и имеют широкий круг применения, однако основной трудностью описания систем по методу Рейнольдса является отсутствие универсальных рецептов замыкания системы уравнений для цепочки моментов случайных полей в системах. Эту проблему, возникающую в нелинейных системах, обычно называют проблемой замыкания моментов. Для решения проблемы замыкания цепочки уравнений Рейнольдса предлагался целый ряд идей и методов см.

например, [1,2,3,4] и библиографию там, однако общепринятого решения этой проблемы до сих пор не найдено.

Одним из общих подходов к выводу уравнений для усредненных параметров нелинейных систем с хаосом является метод максимальной энтропии ММЭ, заимствованный из концепций термодинамики и статистической физики [4]. Этот подход представляется наиболее точным и корректным, поскольку указывает естественный путь к отысканию состояний, вблизи которых в основном и происходит эволюция систем, что является основным признаком их наблюдаемости в экспериментах. Максимум энтропии обеспечивает условие того, что система находится вблизи такого своего макросостояния, которое реализуется на микроуровне максимальным числом способов. Поэтому она должна проводить основное время своего существования на множестве этих микросостояний наблюдаемость. Однако общая формулировка такого подхода в ранее существовавших подходах [4], не была конкретизирована точной и универсальной формулировкой представления вариационного принципа максимума энтропии для исследуемых динамических систем. Такой подход был предложен в [6]. Основная идея его состоит в явном вычислении энтропии нелинейной гидродинамической системы в предположении ее локального равновесия и в последующем отыскании максимума этой найденной энтропии по усредненным параметрам системы. Такой подход можно назвать принципом вторичного максимума энтропии. Возможность повторно вычислять максимум энтропии системы связана с тем, что в случае достижения локального равновесия в системе каждая точка среды приходит к равновесию, вообще говоря, отличающемуся от равновесия соседних точек. В силу непрерывности среды параметры равновесия меняются непрерывно, что и отражается в изменчивости средних полей и моментов флуктуаций. Такое состояние можно назвать слабо неравновесной. Глобальное распределение усредненных полей и моментов при этом и будет определять величину энтропии различных типов локального равновесия. Естественно, что среди таких глобальных распределений должны существовать такие, которые обеспечивают максимум энтропии системы в целом среди всех возможных состояний с локальным равновесием. Основой предлагаемого подхода как раз и является метод отыскания таких состояний со вторичным максимумом энтропии.

Такой подход хорошо себя зарекомендовал в задачах теории передачи информации по линиям связи [7], а так же в задачах обработки данных, в частности в теории спектрального оценивания временных рядов [8,9,10]. Основой применения ММЭ в этих областях как раз и является возможность вычислять максимум энтропии системы по усредненной информации о ее состоянии.

В настоящей работе подход, предложенный в [6], излагается в применении к конечномерным динамическим системам, на которых можно проследить все основные свойства предлагаемого варианта метода максимальной энтропии. В начале мы формулируем принцип максимума энтропии в приложении к простому одномерному осциллятору с квадратичной нелинейностью и проводим явные вычисления уравнений и следствий из них для усредненных параметров динамики таких систем. Затем мы предлагаемый подход переносим на произвольные одномерные системы и в заключении выписываем все основные соотношения, относящиеся к многочастичным системам.

Метод Рейнольдса для одномерной квазиконсервативной системы

Под одномерной квазиконсервативной системой мы будем понимать систему, которая описывается уравнением Ньютона следующего вида:

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} + \varepsilon. \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon(t)$ – произвольный случайный процесс, имеющий в каждый момент времени нулевое математическое ожидание: $\langle \varepsilon(t) \rangle = 0$. Функция $x(t)$ является случайной процесс и может быть представлена в следующем виде:

$$x(t) = X(t) + x'(t),$$

где $x'(t)$ – флуктуационная часть, а $X(t)$ – средняя координата, которую следует понимать в качестве среднего по ансамблю всех возможных состояний системы:

$$X(t) = \langle x(t) \rangle, \quad \langle x'(t) \rangle = 0.$$

После усреднения в предположении гаусовости локального распределения приходим к следующему уравнению Рейнольдса:

$$\ddot{X} = -\langle \frac{\partial U(x)}{\partial x} \rangle = -\frac{\partial U(X)}{\partial X} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k)!} \frac{\partial^{k+1} U(X)}{\partial X^{k+1}} \langle x'^k \rangle = -\frac{\partial W(X, M)}{\partial X}, \quad (2)$$

где

$$W(X, M) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k)!} \frac{\partial^k U(X)}{\partial X^k} \mu_k$$

– средняя потенциальная энергия системы, а $M = \{\mu_1, \mu_2, \dots\}$, $\mu_k = \langle x'^k \rangle$ – вектор моментов. Уравнения этого типа (2) в теории турбулентности называются уравнениями Рейнольдса, а величины типа $\langle x'^2 \rangle$ – напряжениями Рейнольдса.

Уравнение (2) получено следующим образом. Разложим потенциал $U(x)$ в точке $x = X$ в ряд Тейлора $x' = x - X$:

$$U(x) = U(X) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)!} \frac{\partial^n U(X)}{\partial X^n} x'^n.$$

Соответственно, имеем:

$$f(x) = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} = -\frac{\partial U(X)}{\partial X} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)!} \frac{\partial^{n+1} U(X)}{\partial X^{n+1}} x'^n.$$

Производя осреднение по ансамблю, получаем:

$$\langle f(x) \rangle = -\langle \frac{\partial U(x)}{\partial x} \rangle = -\frac{\partial U(X)}{\partial X} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n+1} U(X)}{\partial X^{n+1}} \langle x'^n \rangle.$$

Отсюда следует уравнение (2).

Вычисление усредненной силы в случае нормального локально-равновесного распределения

В предположении нормальности распределения случайной величины x' усредненное уравнение (2) следующий вид:

$$\ddot{X} = -\frac{\partial U(X)}{\partial X} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \frac{\partial^{2k+1} U(X)}{\partial X^{2k+1}} \left[(-1)^k \sqrt{\alpha} \frac{\partial^k}{\partial \alpha^k} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right]_{\alpha=(2E)^{-1}}. \quad (3)$$

При этом:

$$\langle x'^k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2\sigma^2} z^k dz.$$

В случае $k = 2m - 1$ интегралы справа равны нулю, поэтому их следует вычислять только при $k = 2m$. Обозначая $\alpha = 1/2\sigma^2$, последнее соотношение при четных $k = 2m$ имеет вид:

$$\langle x'^{2m} \rangle = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{\partial}{\partial \alpha^m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha z^2} dz = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{\partial}{\partial \alpha^m} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = (-1)^m \sqrt{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha^m} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Введем для сокращения записи следующие обозначения

$$F(X, D) = -\langle \frac{\partial U(x)}{\partial x} \rangle = -\frac{\partial W(X, D)}{\partial X},$$

где

$$W(X, D) = U(X) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} U(X)}{\partial X^{2k}} \left[(-1)^k \sqrt{\alpha} \frac{\partial^k}{\partial \alpha^k} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right]_{\alpha=(2D)^{-1}}.$$

Заметим, что согласно (2), функцию $F(X, D)$ можно представить в следующем виде

$$F(X, D) = -\frac{\partial U(X)}{\partial X} + \Phi(X, D),$$

где

$$\Phi(X, D) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} U(X)}{\partial X^{2k}} \left[\sqrt{\alpha} \frac{\partial^k}{\partial \alpha} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right]_{\alpha=(2D)^{-1}},$$

причем $\Phi(X, 0) = 0$.

Метод максимальной энтропии с высшими моментами

Рассмотрим задачу о распределении вероятностей $\rho_{\xi}(x)$ одномерной случайной величины ξ , которое соответствует заданному набору первых центральных моментов этой случайной величины и имеет среди всех таких распределений максимальную энтропию. В одномерном случае эта задача может быть сформулирована в форме вариационной задачи для функционала энтропии

$$H = - \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\xi}(x) \ln \rho_{\xi}(x) dx \quad (4)$$

при заданных условиях:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \rho_{\xi}(x) dx, \quad k = 0, \dots, 2M, \quad \mu_0 = 1, \quad \mu_1 = 1, \quad (5)$$

где M – положительное целое число. Условие при $k=0$ соответствует условию нормировки распределения $\rho_{\xi}(x)$, при $k=1$ – нулевому математическому ожиданию, что достигается простым смещением значений случайной величины. В соответствие с методом множителей Лагранжа решение этой задачи сводится к отысканию безусловного максимума функционала:

$$\tilde{H} = - \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\xi}(x) \ln \rho_{\xi}(x) dx + \sum_{k=0}^{2M} \lambda_k \left(\mu_k - \int_{-\infty}^{\infty} x^k \rho_{\xi}(x) dx \right),$$

где λ_k – множители Лагранжа. Решением этой задачи, как хорошо известно, является распределение следующего вида:

$$\rho_{\xi}(x) = \exp \left\{ - \sum_{k=0}^{2M} \lambda_k x^k \right\},$$

причем множители Лагранжа λ_k должны вычисляться из условий (5). Отсюда видно, что четность числа моментов в условия задачи обеспечивает ее корректность в том смысле, что только при четном числе заданных моментов интегралы в условии задачи сходятся.

Введем следующее обозначение:

$$Z_{2M}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2M}) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{2M} \lambda_k x^k \right\} dx. \quad (6)$$

Как следует из этих соотношений функции $Z_{2M}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2M})$ – представляют собой строго фиксированные функции, которые могут быть представлены своими рядами Тейлора. В этих обозначениях решение задачи можно записать в следующем виде:

$$\rho_{\xi}(x) = \frac{1}{Z} \exp\left\{-\sum_{k=1}^{2M} \lambda_k x^k\right\}.$$

Тогда без труда находим:

$$\mu_k = \frac{1}{Z} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \exp\left\{-\sum_{k=1}^{2M} \lambda_k x^k\right\} dx = -\frac{\partial \ln Z(\lambda_1, \dots, \lambda_{2M})}{\partial \lambda_k}, \quad k = 1, \dots, 2M. \quad (7)$$

Вычислим величину максимальной энтропии, соответствующую полученному решению. Имеем:

$$H_{max} = \ln Z + \frac{1}{Z} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{2M} \lambda_k x^k \exp\left\{-\sum_{k=1}^{2M} \lambda_k x^k\right\} dx = \ln Z + \sum_{k=1}^{2M} \lambda_k \mu_k = \ln Z - \sum_{k=1}^{2M} \lambda_k \frac{\partial \ln Z}{\partial \lambda_k} \quad (8)$$

Принцип вторичного максимума энтропии

При анализе уравнений Рейнольдса (2) возникает проблема замыкания моментов. Проблема состоит в том, что для замыкания описания динамики в среднем необходимо указать дополнительное уравнение для $\langle x'^2 \rangle$ и последующие моменты случайной величины x' . Получить это уравнение непосредственно из исходного, например, умножая его на $x(t)$ и далее производя усреднение по ансамблю, не возможно. Для построения этого дополнительного уравнения необходимо ввести некоторый универсальный принцип. В качестве такого универсального принципа можно воспользоваться принципом максимальной энтропии [4,7,6].

Этот принцип основан на свойстве энтропии достигать максимального значения для тех макросостояний, которые реализуются максимальным числом микросостояний. Максимальное число микросостояний гарантирует то, что наблюдатель чаще будет видеть систему именно на этом множестве с максимальным числом микросостояний или с максимальной энтропией. Таким образом, этот принцип выделяет среди всех возможных макросостояний системы те, которые наиболее часто наблюдаются в системе.

Обозначим через ρ_x – плотность вероятности того, что случайная функция $x'(t)$ достигает в каждый момент времени t в интервале $[t_1, t_2]$ определенного значения. Пространство всех возможных функций бесконечно мерно, поэтому условно обозначим меру объема на этом пространстве через D_x . Энтропия Шеннона этого распределения в этом случае может быть представлена в виде континуального интеграла:

$$H = -\int \rho_x \ln \rho_x D_x.$$

Условие нормировки плотности ρ_x будет иметь вид другого континуального интеграла:

$$\int \rho_x D_x = 1. \quad (9)$$

Среди всех распределений ρ_x с точки зрения принципа максимума энтропии интерес представляют только распределения, для которых величина энтропии H максимальна. С точки же зрения рассматриваемой системы к этому еще следует добавить соотношение (2), которое содержит информацию о системе. В результате для решения задачи о максимуме энтропии необходимо решить вариационную задачу на условный экстремум функционала H с дополнительными условиями (9) и (2).

Если уравнение содержит только дисперсию случайной величины x' , то с точки зрения решения задачи об условном максимуме H соотношение (2) представляет собой условие фиксирующее эту дисперсию. В этом случае в соответствии с общей теорией [7] решением этой задачи для ρ_x в независимости от того, что стоит в левой части (2) будет нормальное гауссово распределение вероятностей. При этом соответствующее максимальное значение энтропии H можно представить в виде:

$$H_{max} = \frac{1}{2} \int \ln \langle x'^2 \rangle dt + H_0, \quad (10)$$

где H_0 – некоторая несущественная постоянная. При этом должно выполняться уравнение (2), в которое входит $\langle x'^2 \rangle$. Рассмотренный принцип энтропии описывает достижение системой некоторого состояния, которое можно назвать локальным равновесием. При каждом t в состоянии локального равновесия флуктуации $x'(t)$ независимы от флуктуаций в любой другой момент времени. Средние же значения и дисперсии будут функциями t .

В случае, если кроме дисперсии правая часть (2) содержит моменты высшего порядка, то в качестве дополнительных условий для вариационного функционала энтропии следует использовать кроме (2) и соотношения, фиксирующие высшие моменты: $\mu_k = \mu^0(t)$, где $\mu^0(t)$ – некоторые заданные функции времени. В этом случае решение задачи о максимуме энтропии будет сводиться к распределению независимых в различные моменты времени случайных величин $x'(t)$, функция распределения которых будет иметь вид найденный в разделе 2. В этом случае в соответствии с (8) максимальное значение энтропии примет следующий вид:

$$H = \int_{t_1}^{t_2} \left(\ln Z - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \frac{\partial \ln Z}{\partial \lambda_k} \right) dt, \quad (11)$$

где λ_k и μ_k являются функциями времени и выполнено условие (7):

$$\mu_k = -\frac{\partial \ln Z(\lambda_1, \dots, \lambda_{2M})}{\partial \lambda_k}, \quad k = 1, \dots, \quad (12)$$

Полученные таким образом решения могут быть еще улучшены с точки зрения принципа максимума энтропии. Действительно, Выражения (10) и (11) представляют собой функционалы по отношению к функции $\langle x'^2 \rangle$ и моментам μ_k соответственно, которые связаны со средней функцией $X(t)$ уравнением (2). При этом одна из функций $X(t)$, $\langle x'^2 \rangle$, $\mu_k, k = 3, \dots, 2m$ оказывается неопределенной. Поэтому можно указать такие дополнительные соотношения, связывающие $X(t)$, $\langle x'^2 \rangle$, и $\mu_k, k = 3, \dots, 2m$, которое будет доставлять максимум энтропии функционалу (10) при дополнительном условии (2). Соответствующее распределение ρ_x , параметрами которого являются функции $X(t)$, $\langle x'^2 \rangle$, $\mu_k, k = 3, \dots, 2m$, будет реализовываться максимальным числом способов и, как следствие, будет максимально наблюдаемым. Этот принцип максимизации функционала энтропии, полученного в результате отыскания максимума исходного функционала энтропии, будем называть принципом вторичного максимума энтропии.

Общий случай одномерной консервативной системы. Нормальное локальное равновесие.

Рассмотрим в общем виде применение вторичного принципа максимума энтропии сначала с учетом гипотезы нормальности локального-равновесного распределения к одномерной консервативной системе общего вида.

Функционал полной энтропии в этом случае будет иметь следующий вид:

$$H = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \ln D dt + \int_{t_1}^{t_2} Y(t)(\ddot{X} - F(X, D)) dt. \quad (13)$$

Варьируя этот функционал по X, Y, D приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= F(X, D) = -W_X(X, D), \\ \ddot{Y} &= YF_X(X, D) = -YW_{XX}(X, D), \\ 2DYF_D(X, D) &= 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь и далее

$$F_X = \frac{\partial F}{\partial X}, F_D = \frac{\partial F}{\partial D}, F_{XD} = \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial D}, \dots$$

Эта система имеет закон сохранения. Умножая первое уравнение на \dot{Y} , второе – на \dot{X} и складывая результаты, находим:

$$\frac{d}{dt}(\dot{X}\dot{Y}) = \dot{Y}F(X, D) + \dot{X}YF_X(X, D). \quad (15)$$

Левую часть этого уравнения, учитывая третье уравнение (14), можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{Y}F(X, D) + \dot{X}YF_X(X, D) &= \frac{d}{dt}(YF(X, D)) - \dot{D}YF_D(X, D) = \\ &= \frac{d}{dt}(YF(X, D)) - \dot{D}\frac{1}{2D} = \frac{d}{dt}\left(YF(X, D) - \frac{1}{2}\ln D\right)\end{aligned}$$

Подставляя это соотношение в (15), находим, что в данной системе выполняется следующий закон сохранения:

$$\dot{X}\dot{Y} - YF(X, D) + \frac{1}{2}\ln D = H = \text{const}. \quad (16)$$

Этот закон сохранения можно назвать законом сохранения полной удельной энтропии H .

Общий случай одномерной консервативной системы. Негауссово локальное равновесие.

В случае не гауссовости локального распределения метод максимальной энтропии реализуется на основе соотношения (11).

В этом случае полный функционал энтропии можно записать следующим образом:

$$\tilde{H} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\ln Z + \sum_{k=1}^{2M} \lambda_k \frac{\partial \ln Z}{\partial \lambda_k} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} Y(t)(\ddot{X} - F(X, M)) dt.$$

Варируя по X и Y , приходим к уравнениям:

$$\ddot{X} = F(X, M), \quad \dot{Y} = YF_X(X, M). \quad (17)$$

Процедуру вычисления условий максимума энтропии по моментам μ_k можно заменить на вычисление условий максимума по параметрам λ_k с учетом условий (12). В результате получаем следующее уравнение:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\lambda_k - \frac{\partial F(X, M)}{\partial \mu_k} Y \right) \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \lambda_k \partial \lambda_j} = 0, \quad j = 2, \dots \quad (18)$$

Предполагая, что матрица L :

$$L_{kj} = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \lambda_k \partial \lambda_j},$$

не вырождена, находим, что система уравнений для параметров локального распределения имеет следующий вид:

$$\lambda_k = \frac{\partial F(X, M)}{\partial \mu_k} Y = -Y \frac{1}{(k+1)!} \frac{\partial^{k+1} U(X)}{\partial X^{k+1}}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (19)$$

Как и в случае нормального распределения система допускает закон сохранения. Именно, умножая первое уравнение (17) на \dot{Y} , второе – на \dot{X} и результаты складывая, находим:

$$\frac{d}{dt} [\dot{X}\dot{Y} - YF(X, M)] + Y \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial F(X, M)}{\partial \mu_k} \dot{\mu}_k = \frac{d}{dt} [\dot{X}\dot{Y} - YF(X, M)] + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \dot{\mu}_k = 0.$$

Далее имеем:

$$\frac{d}{dt} \left[\ln Z + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mu_k \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\partial \ln Z}{\partial \lambda_k} \dot{\lambda}_k + \dot{\mu}_k \lambda_k + \mu_k \dot{\lambda}_k \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{\mu}_k \lambda_k.$$

Отсюда:

$$\frac{d}{dt} \left[\dot{X}\dot{Y} - YF(X, M) + \ln Z + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mu_k \right] = 0$$

и окончательно находим закон сохранения в следующем виде:

$$\dot{X}\dot{Y} - YF(X, M) + \ln Z + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mu_k = H = const. \quad (20)$$

Подставляя (19) в выражение для плотности локального распределения, находим:

$$\rho_x = \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[\ln Z - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x'^k \right] dt \right\} = \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} [\ln Z - YU_X(X + x')] dt \right\}.$$

Скобки Гамильтона для системы усредненных уравнений

Закон сохранения полной удельной энтропии (16) является прямым аналогом закона сохранения полной энергии для консервативных систем. Аналогичность его закону сохранения энергии состоит в возможности построить на его основе аналог гамильтоновского формализма для усредненной системы уравнений. Во первых, обратим внимание на то, что исходный функционал энтропии (13) можно представить в следующем виде:

$$H = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

где функция L , играющая роль функции Лагранжа, с точностью до полной производной по времени имеет следующий вид:

$$L = \frac{1}{2} \ln D - \dot{X}\dot{Y} + YF(X, D).$$

При этом роль обобщенных координат системы играют X, Y . Функция D играет роль не динамического параметра. Соответственно, обобщенными импульсами системы будут

$$p_X = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = \dot{Y}, \quad p_Y = \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} = \dot{X}.$$

Сравнивая (16) с последним соотношением видим, что между ними имеется следующая связь:

$$H = \ln D - L.$$

Введем скобки Пуассона по следующему правилу:

$$\{Q(X, Y, D), R(X, Y, D)\} = \frac{\partial Q}{\partial X} \frac{\partial R}{\partial P_X} - \frac{\partial R}{\partial X} \frac{\partial Q}{\partial P_X} + \frac{\partial Q}{\partial Y} \frac{\partial R}{\partial P_Y} - \frac{\partial R}{\partial Y} \frac{\partial Q}{\partial P_Y}.$$

В этом случае усредненные уравнения движения можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \{H, X\}, \quad \dot{Y} = \{H, Y\}, \\ \dot{P}_X &= \{H, P_X\}, \quad \dot{P}_Y = \{H, P_Y\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнение же для D остается тем же:

$$\frac{\partial L}{\partial D} = 0.$$

Его можно рассматривать в качестве связи для гамильтоновской системы (21).

Таким образом, исходная одномерная гамильтоновская система (1) после усреднения в рассматриваемом подходе переходит в другую двумерную гамильтоновскую систему со связью. Эта новая система описывает движение не одной частицы, а динамику области, в которой частица оказывается с некоторой вероятностью. При этом X – это положение центра этой области, D – это характерный пространственный размер области, а Y – «внутренний» параметр системы, описывающий внутреннее взаимодействие в области. Физический смысл этого поля можно несколько прояснить, если сделать следующее преобразование:

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta).$$

В этом случае функция Лагранжа примет следующий вид:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\eta}^2 - \dot{\xi}^2) + \frac{1}{2} \ln D - \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta - \xi)F((\xi + \eta)/\sqrt{2}, D). \quad (22)$$

Система с такой функцией Лагранжа представляет собой систему из двух взаимодействующих частиц, одна из которых имеет отрицательную массу или, в более общем контексте, отрицательную кинетическую энергию. В современной теоретической физике в связи с задачами космологии рассматривают поля с отрицательной кинетической энергией. Эти поля часто называются фантомными. Поэтому и здесь удобно их называть фантомной частицей. Таким образом, полученную систему уравнений можно трактовать как динамику «протяженного» объекта, с внутренней структурой, динамика которой описывается внутренней фантомной частицей с отрицательной массой.

Стационарные точки в общем случае

В заключении рассмотрим описание стационарных точек рассматриваемой одномерной системы и их устойчивость. Стационарные

точки данной системы удовлетворяют следующей системе алгебраических уравнений:

$$F(X_0, M_0) = 0, \quad Y_0 F_X(X, M) \Big|_{X=X_0, M=M_0} = 0, \\ \lambda_k^{[0]} = -Y_0 \frac{1}{(k+1)!} \frac{\partial^{k+1} U(X)}{\partial X^{k+1}} \Big|_{X=X_0}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (23)$$

Первое и второе условия означают, что стационарные точки системы таковы, что в них усредненная сила в системе равна нулю и при этом достигает локального экстремума по средней координате X .

Рассмотрим теперь решение задачи об устойчивости стационарных точек в общем виде. Для этого решение системы (14) представим в виде:

$$X = X_0 + \xi, \quad Y = Y_0 + \eta, \quad \mu_k = \mu_k^{(0)} + \zeta_k, \quad \lambda_k = \lambda_k^{(0)} + \psi_k, \quad k = 2, 3, \dots,$$

где величины $\xi, \eta, \zeta_k, \psi_k, k = 2, 3, \dots$ считаются величинами первого порядка малости. Подставляя эти соотношения в уравнения (14) и отбрасывая все величины второго и большего порядка малости, приходим к следующей системе линейных уравнений:

$$\ddot{\xi} = F_X^0 \xi + \sum_{j=2}^{\infty} F_j^0 \zeta_j, \\ \ddot{\eta} = F_X^0 \eta + F_{XX}^0 \xi + \sum_{j=2}^{\infty} F_{Xj}^0 \zeta_j, \\ \psi_k = -\eta \frac{1}{Y_0} \lambda_k^{(0)} - (k+2) \lambda_{k+1}^{(0)} \xi, \\ \zeta_k = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \lambda_k \partial \lambda_j} \Big|_{\lambda_k = \lambda_k^{(0)}} \psi_j, \quad k = 2, 3, \dots \quad (24)$$

Здесь верхний индекс 0 у производных функции F означает, что производные берутся в стационарных точках. Кроме этого,

$$F_{Xk}^0 = \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial \mu_k} \Big|_{X=X_0} = -\frac{1}{(k+1)!} \frac{\partial^{k+2} U(X)}{\partial X^{k+2}} \Big|_{X=X_0} = \frac{(k+2)}{Y_0} \lambda_{k+1}^{(0)}, \\ F_k^0 = \frac{\partial F}{\partial \mu_k} \Big|_{X=X_0} = -\frac{1}{(k+1)!} \frac{\partial^{k+1} U(X)}{\partial X^{k+1}} \Big|_{X=X_0} = \frac{1}{Y_0} \lambda_k^{(0)}.$$

Исключая из системы (24) ζ_k, ψ_k , приходим к следующей системе двух уравнений для ξ и η :

$$\ddot{\xi} = U_{11} \xi + U_{12} \eta, \quad \ddot{\eta} = U_{21} \xi + U_{22} \eta, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned}
 U_{11} &= F_X^0 - \frac{1}{Y_0} \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \lambda_k \partial \lambda_j} \Big|_{\lambda_k = \lambda_k^{(0)}} (k+2) \lambda_{k+1}^{(0)} \lambda_j^{(0)}, \\
 U_{12} &= -\frac{1}{Y_0} \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \lambda_k \partial \lambda_j} \Big|_{\lambda_k = \lambda_k^{(0)}} \lambda_k^{(0)} \lambda_j^{(0)}, \\
 U_{21} &= F_{XX}^0 - \frac{1}{Y_0} \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \lambda_k \partial \lambda_j} \Big|_{\lambda_k = \lambda_k^{(0)}} (j+2)(k+2) \lambda_{k+1}^{(0)} \lambda_{j+1}^{(0)}, \\
 U_{22} &= F_X^0 - \frac{1}{Y_0} \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \lambda_k \partial \lambda_j} \Big|_{\lambda_k = \lambda_k^{(0)}} (j+2) \lambda_k^{(0)} \lambda_{j+1}^{(0)}.
 \end{aligned}$$

Искать решение этой системы уравнений будем в следующем виде:

$$\xi = A e^{\omega t}, \quad \eta = B e^{\omega t}, \quad \zeta_k = C_k e^{\omega t}, \quad \psi_k = D_k e^{\omega t},$$

где A, B, C_k, D_k – постоянные амплитуды. Характеристическое уравнение системы имеет следующий общий вид:

$$\omega^4 - (U_{11} + U_{22})\omega^2 + U_{11}U_{22} - U_{21}U_{12} = 0. \quad (26)$$

Решения этого биквадратного уравнения имеют вид:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left(U_{11} + U_{22} \pm \sqrt{(U_{11} - U_{22})^2 + 4U_{21}U_{12}} \right)$$

Знак правой части определяет устойчивость стационарных соотношений.

Термодинамика системы

Рассмотрим теперь свойства усредненной системы с точки зрения обычных энергетических характеристик. Нашей целью будет представление энергетических свойств усредненной системы в форме аналогичной классической термодинамики. Для этого умножим первое уравнение для усредненного движения на \dot{X} . В результате это уравнение приобретет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{X}^2 + W(X, M) \right) = \sum_{j=2}^{\infty} \dot{\mu}_j \frac{\partial W}{\partial \mu_j}. \quad (27)$$

Это соотношение естественным образом может быть интерпретировано как выражение для приращения работы термодинамической системы. Именно, полагая, что работа системы равна $A = \dot{X}^2/2 + W(X, M)$, из (27) находим

$$dA = \sum_{j=2}^{\infty} d\mu_j \frac{\partial W}{\partial \mu_j}. \quad (28)$$

С точки зрения классической термодинамики в этом случае величины μ_k следует интерпретировать как внутренние параметры системы, а величины

$$F_k = -\frac{\partial W}{\partial \mu_k} = -\frac{1}{(k+1)!} \frac{\partial U(X)}{\partial X^{k+1}} = \frac{1}{Y} \lambda_k, \quad k = 2, 3, \dots$$

как обобщенные силы. С этой же точки зрения соотношения (7) и (19) представляют собой в совокупности уравнения состояния системы.

Следующим шагом в построении аналога термодинамики является получение выражения для полной энергии системы, которое будет являться аналогом первого начала термодинамики. Для получения такого соотношения умножим исходное уравнение (1) на x и усредним полученное соотношение по ансамблю. В результате получим следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (\dot{X}^2 + \langle v'^2 \rangle) + W(X, M) \right] = \langle \varepsilon v' \rangle, \quad (29)$$

где $v' = \dot{x}'$ – скорость флуктуаций. Функция $\langle \varepsilon v' \rangle$ представляет собой функцию ковариаций внешнего случайного воздействия на систему и скорости флуктуаций. Эту функцию формально можно представить следующим образом:

$$\langle \varepsilon v' \rangle = \sqrt{\langle v'^2 \rangle \langle \varepsilon^2 \rangle} R_{v\varepsilon},$$

где $R_{v\varepsilon}$ – коэффициент корреляции между v' и ε , характеризующий меру линейной взаимосвязи этих случайных величин. Соотношение (29) действительно имеет форму первого начала термодинамики, поскольку величину $U = \langle v'^2 \rangle / 2$ можно интерпретировать как внутреннюю энергию системы. В этом случае (29) принимает следующий вид:

$$dE + dA = \langle \varepsilon v' \rangle dt = \sqrt{\langle v'^2 \rangle \langle \varepsilon^2 \rangle} R_{v\varepsilon} dt. \quad (30)$$

Величину справа при этом следует рассматривать как приращение количества "тепла", поступающего в систему извне за счет взаимодействия с окружением. Другими словами, мы можем формально записать:

$$\delta Q = dE + dA = TdS = \langle \varepsilon v' \rangle dt = \sqrt{\langle v'^2 \rangle \langle \varepsilon^2 \rangle} R_{v\varepsilon} dt, \quad (31)$$

где T – абсолютная температура системы, а S – термодинамическая энтропия системы, а δQ приращение «тепла» в системе. Учитывая (28) соотношение (31) можно представить в следующем виде:

$$dE + \sum_{j=2}^{\infty} d\mu_j \frac{\partial W}{\partial \mu_j} = TdS. \quad (32)$$

Заметим, что при всей схожести этого соотношения с первым началом термодинамики между ними имеются существенные различия. Во-первых, приращения функций в этом соотношении связаны с их изменениями во времени, причем изменчивость во времени не является квазистатической, а порождается самой динамикой системы. В то же время в случае классической

термодинамики первое начало термодинамики относится к квазистатическим процессам, т. е. связано с бесконечно медленным изменением внешних параметров системы. В данном подходе такой вариант может быть реализован в том случае, если система находится в стационарной точке. При этом (29) – (32) теряют свой первоначальный смысл. И в этом случае первый закон следует выводить иначе.

Во-вторых, правая часть (31) представляет собой коэффициент ковариации v' и ε' , который зависит от параметров системы μ_k и $\langle v'^2 \rangle$ неизвестным образом. Поэтому для вывода стандартных для классической термодинамики соотношений связывающих производные от внутренней энергии с производными обобщенных сил не возможны в данном подходе на прямую.

В-третьих, как уже отмечалось, возникают сложности с точным определением абсолютной температуры.

Все эти три замечания говорят о том, что данный подход требует определенной модификации с точки зрения приведения его к более точной аналогии с классической термодинамикой. Такая модификация возможна, если кроме усредненного уравнения (2), в качестве дополнительных условий добавлять уравнение (29) и уравнение для вириала сил:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[X^2/2 + \langle x'^2 \rangle / 2 \right] + X \frac{\partial U(X)}{\partial X} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \frac{\partial^{k+1} U(X)}{\partial X^{k+1}} \langle x'^{k+1} \rangle = \langle \varepsilon x' \rangle .$$

При этом локально равновесное распределение будет зависеть не только от x' , но и от \dot{x}' и ε . Это означает, что усредненная система будет подстраиваться не только под флуктуации x' , но под \dot{x}' и ε . Однако рассмотрение такого обобщения теории выходит за рамки данной статьи.

Заключение

Рассмотренный подход к описанию одномерной квазиконсервативной системы в среднем на основе метода Рейнольдса, как показано, дает вполне адекватное описание динамики системы. В результате процедуры осреднения и применения вариационного принципа максимума полной энтропии, или вторичного максимума энтропии системы, описание системы приводится к гамильтоновской системе с удвоенной размерностью и дополнительными голономными связями, зависящими от моментов локально-равновесного распределения. В такой системе выполняется закон сохранения полной удельной энтропии. Важным является то, что при таком описании новая гамильтоновская система может рассматриваться как система из двух взаимодействующих частиц, одна из которых обладает отрицательной массой, которая описывает внутреннюю динамику системы. Это позволяет провести некоторую аналогию с фантомными полями в космологических теориях. Эта аналогия может оказаться важной для создания новой интерпретации «темной

материи» и «темной энергии» на основе усредненных уравнений движения систем частиц. В данной работе за ограниченностью объема статьи вопрос о переносе рассмотренного подхода на случай многих частиц не рассматривался. Однако можно с уверенностью сказать, что при достаточно общих свойствах консервативных систем многих частиц данный подход переносится и на этот случай. Кроме этого, для дальнейшего имеет важное значение и исследование «термодинамических» свойств усредненной системы, возникающей в данном подходе. Внешне предложенный подход идентичен термодинамике, но имеет ряд внутренних отличий. Поэтому такую термодинамику следовало бы назвать как-то иначе, например, рейнольдсовской термодинамикой. Как было показано, рассмотрение этого вопроса в обобщенной форме имеет важное значение для построения новой интерпретации классической термодинамики.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект 08-01-97013-р_поволжье_а.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. А. С. Монин, А.М. Яглом. Статистическая гидромеханика. Ч.1. М.: Наука, 1967, 639 С; Ч.2 1969, 720 С.
2. У. Фриш. Турбулентность. Наследие Колмогорова. М.: Фазис, 1998, 343 с.
3. П. Г. Фрик. Турбулентность: Модели и подходы. Ч.1 Пермь, 1998, 107 С.; Ч.2 Пермь, 1999, 138 С.
4. Ю.Л.Климонтович. Введение в физику открытых систем. М.: ``Янус-К'', 2002, 284 С.
5. В.Н. Николаевский. Пространственное осреднение и теория турбулентности. В сб. Вихри и волны. Серия Новое в зарубежной науке N 33. Механика. Под ред. В.Н. Николаевского. М.: Мир, 266 1984
6. Журавлев В.М. Принцип максимума энтропии и турбулентные течения несжимаемой жидкости. Материалы международной междисциплинарной научной конференции Третьи Курдюмовские чтения: ``Синергетика в естественных науках'', Тверь, 19-22 апреля 2007 г., с. 60
7. Р. Л. Стратанович. Теория информации. М.: Со. радио 1975, 424 с.
8. Б. Р. Фриден. Оценки, энтропия, правдоподобие. ТИИЭР, 73, N 12, 78 1985
9. Burg J.P. In proc/ 37-th Meet. Society of Exploration Geophysicists. Oklahoma city, Oct. 31, 1967
10. Дворянинов Г.С., Журавлев В.М., Прусов А.В. Метод максимальной энтропии в многомерном спектральном анализе. Преп. МГИ АН УССР, 1986. Ч. 1,2.

*В. М. Журавлев, А. В. Журавлев, Д. А. Корнилов, А. В. Никитин,
В. В. Самойлов* (г. Ульяновск)

МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ ПОДСТАНОВОК КОУЛА-ХОПФА В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

В работе представлены результаты применения метода построения интегрируемых нелинейных уравнений и их решений с помощью обобщенных подстановок Коула-Хопфа к дискретным и полу дискретным системам, ранее развитого в теории непрерывных распределенных систем. В работе рассмотрены общий метод вывода интегрируемых уравнений дискретных систем для различных типов дискретных производных. Приведены примеры интегрируемых уравнений и их решений. Рассмотрен вопрос о применении данного метода к теории оценивания параметров эмпирических нелинейных моделей.

1. Введение

В работах [1,2,3] был предложен метод конструирования нелинейных эволюционных уравнений в частных производных, которые линеаризуются с помощью обобщенной подстановки Коула-Хопфа-Урюкова. Метод основывался на результате работы [4]. Идея метода состоит в использовании факта замыкания совокупности линейных дифференциальных соотношений относительно некоторого набора смешанных производных функции, удовлетворяющей уравнению теплопроводности и уравнению переноса изолиний этой функции [2,3,4]. Этот метод гораздо проще по способу построения точных решений и их анализу, чем методы, основанные на обратной задаче рассеяния и сопоставим с ним по количеству интегрируемых уравнений.

Дальнейший анализ полученных в [2,3] соотношений позволяет говорить о существовании возможности переноса результатов этой работы на более широкий класс уравнений, в частности на дискретные системы, динамика которых подчиняется уравнениям в сеточных производных различного типа. Последнее и является одной из целей настоящей работы. Сеточные уравнения важны с точки зрения приложений для анализа дискретных нелинейных систем. Дискретные и полу дискретные с непрерывным временем системы являются моделями многих реальных систем, например, кристаллических решеток, дискретных цепочек элементов радио-электронных цепей, а так же численных моделей. Еще одним из важных областей применения таких моделей являются цифровые методы обработки экспериментальных данных, в частности, задачи статистического прогноза состояния нелинейных систем по эмпирическим данным. Задачи такого рода встречаются в различных

природных системах таких, как атмосфера Земли и Солнца, океан, космическая среда, и т. д. До сих пор большинство систем обработки данных с целью выявления различного рода закономерностей в исследуемых процессах и построения прогностических схем основывалось на линейных способах описания процессов. Использование предлагаемого подхода на базе систем, интегрируемых с помощью подстановок типа Коула-Хопфа-Урюкова позволяет построить явно нелинейные системы прогноза процессов. Задача такого рода и решается в данной работе с помощью двух подходов, основанных на двух способах формулировки дифференцирования на сетке.

2. Система приведенных базовых соотношений для непрерывной среды

Для того, что бы понять дальнейшие построения, укажем основные элементы теории подстановок Коула-Хопфа-Урюкова в непрерывном случае. Основой теории являются два дифференциальных уравнения

$$T_t + V(x,t)T_x = 0, \quad T_t = a(x,t)T_{xx} - W(x,t)T_x, \quad (1)$$

связывающих три функции $T(x,t)$, $V(x,t)$ и $U(x,t) = (V(x,t) - W(x,t))/a(x,t)$. Простым последовательным дифференцированием этих двух уравнений получаем пять дополнительных дифференциальных соотношения на высшие производные функции $T(x,t)$:

$$\begin{aligned} T_{tt} - aT_{xxt} + W_t T_x + WT_{xt} &= 0, & T_{tt} + V_t T_x + VT_{tx} &= 0, \\ T_{xt} - aT_{xxx} + W_x T_x + WT_{xx} &= 0, & T_{xt} + V_x T_x + VT_{xx} &= 0, \\ T_{txx} + V_{xx} T_x + 2V_x T_{xx} + VT_{xxx} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Эти и аналогичные им соотношения, полученные прямым дифференцированием, в дальнейшем будем называть базовыми. Из этой системы следует другая система соотношений:

$$\begin{aligned} T_t &= -VT_x, \quad T_{xx} = -UT_x, \quad T_{xt} = -QT_x, \quad T_{tt} = -RT_x, \\ T_{xxx} &= -(U_x - U^2)T_t, \\ T_{xxt} &= -[U_t + U^2V - V_x U]T_x = -[V_{xx} + U^2V - 2V_x U - VU_x]T_x, \end{aligned} \quad (3)$$

которую будем называть приведенной базовой системой соотношений. Здесь $Q(x,t) = V_x - UV$, $R(x,t) = V_t - VV_x + V^2U$. Условием совместности (2) и (3) как системы алгебраических уравнений относительно производных функции T является одно нелинейное уравнение, связывающее V и U :

$$U_t = Q_x. \quad (4)$$

Поскольку совместность базовых и приведенных соотношений обеспечивается только одним условием на две независимых функции V и U , это позволяет дополнять систему (3) произвольным дополнительным, в частности, интегрируемым уравнением для T , которое будет эквивалентно, как это было показано в [2], некоторому дополнительному нелинейному уравнению для V и U .

Из анализа самого способа вывода приведенных базовых соотношений (3), следует, что его можно обобщить без изменения общего типа этих соотношений, на любой тип производных дифференцирований, для которых выполняются два основных правила.

Первое свойство состоит в перестановочности производных по разным координатным направлениям, что в случае стандартного определения производной на вещественном пространстве R^n выполняется для всех непрерывных функций нескольких переменных. В принципе можно рассматривать и не коммутирующие дифференцирования, однако в этом случае дополнительный анализ возникающих связей на предмет их замкнутости.

Второе свойство – это правило Лейбница дифференцирования произведения функций, которое существенным образом использовалось при выводе соотношений (2). Это свойство может в точности не совпадать со стандартным правилом Лейбница, соответствующим обыкновенным и частным непрерывным производным, которое в этом случае имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} UV = U_x V + UV_x.$$

Основным требованием к правилу, заменяющему правило Лейбница, является то, что бы новая производная была определена так, что бы правило дифференцирования произведения двух функций было локальным и содержало производные от отдельных функций произведения порядка не выше первого. Условие локальности означает, что производные от отдельных функций произведения были определены в той же точке, что и исходная производная, применяемая к произведению. Если порядок окажется выше первого или нарушится условие локальности, то система дифференциальных соотношений, вытекающая из (1) может оказаться не замкнутой.

Эти два условия выполняются для следующих двух типов сеточных производных. Первый – это определение производной как сдвига по узлам сетки в соответствующем направлении. Такой тип производных или дифференцирования будем в дальнейшем называть сдвиговой производной или просто сдвигом. Вторым подходящим под сформулированные два условия типом сеточной производной является частная левая или правая разностная производная. Рассмотрим каждый из этих типов сеточных производных по отдельности.

3. Различные типы дифференцирования на сетке

3.1 Сдвиговая производная

Рассмотрим функции $T_{i,j}$, заданные на прямоугольной сетке с узлами, нумеруемыми индексами i, j , расположенными на одинаковых расстояниях h_x

и h_t в двумерном вещественном евклидовом пространстве. Первый индекс будет относиться к пространственной координате x , а второй – ко времени t .

Определение 1. Назовем сдвиговой производной функции $T_{i,j}$ по координате x функцию $D_x T_{i,j}$, определенную соотношением:

$$D_x T_{i,j} = T_{i+1,j}. \quad (5)$$

Аналогично сдвиговой производной функции $T_{i,j}$ по времени назовем функцию $D_t T_{i,j}$, определенную соотношением

$$D_t T_{i,j} = T_{i,j+1}. \quad (6)$$

Как не трудно проверить прямыми вычислениями определенные таким образом производные перестановочны, а правило Лейбница заменяется в следующем:

$$D_x(U_{i,j}V_{i,j}) = U_{i+1,j}V_{i+1,j} = D_x U_{i,j} D_x V_{i,j}. \quad (7)$$

Следовательно, выполнено второе необходимое условие для замыкания системы дифференциальных соотношений.

3.2 Разностные или h -производные

В качестве второго типа дифференцирований рассмотрим для определенности левые разностные производные. Правые рассматриваются аналогично.

Левые разностные производные по координатам x и t определяются соотношениями:

$$\hat{D}_x T_{i,j} = \frac{1}{h_x} (T_{i+1,j} - T_{i,j}), \quad \hat{D}_t T_{i,j} = \frac{1}{h_t} (T_{i,j+1} - T_{i,j}). \quad (8)$$

Здесь h_x и h_t – шаги сетки в каждом из направлений. Для дальнейших построений необходимы следующие легко проверяемые свойства разностных левых производных. Во-первых, это свойство перестановочности:

$$\hat{D}_t \hat{D}_x T_{i,j} = \hat{D}_x \hat{D}_t T_{i,j},$$

которое проверяется прямым использованием определения левых производных (8). Во-вторых, это свойство Лейбница дифференцирования произведения функций:

$$\begin{aligned} \hat{D}_x (U_{i,j} V_{i,j}) &= \frac{1}{h_x} (U_{i+1,j} V_{i+1,j} - U_{i,j} V_{i,j}) = \\ &= \frac{1}{h_x} ([U_{i+1,j} - U_{i,j}] V_{i+1,j} + U_{i,j} [V_{i+1,j} - V_{i,j}]) = \\ &= \frac{1}{h_x} ([U_{i+1,j} - U_{i,j}] V_{i,j} + U_{i,j} [V_{i+1,j} - V_{i,j}] + [U_{i+1,j} - U_{i,j}] [V_{i+1,j} - V_{i,j}]) = \\ &= V_{i,j} \hat{D}_x U_{i,j} + U_{i,j} \hat{D}_x V_{i,j} + h_x (\hat{D}_x V_{i,j}) (\hat{D}_x U_{i,j}). \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично для производной по t :

$$\begin{aligned}\hat{D}_t(U_{i,j}V_{i,j}) &= \frac{1}{h_x}(U_{i,j+1}V_{i,j+1} - U_{i,j}V_{i,j}) = \\ &= V_{i,j}\hat{D}_tU_{i,j} + U_{i,j}\hat{D}_tV_{i,j} + h_t(\hat{D}_tV_{i,j})(\hat{D}_tU_{i,j}).\end{aligned}\quad (10)$$

Как видно для левых правых производных второе свойство для модифицированного правила Лейбница выполнено. Однако второе из указанных выше условий нарушается в случае центральной разностной производной, для которой необходимо теорию строить отдельно.

Используя эти соотношения можно получить базовые соотношения, аналогичные базовым соотношениям для непрерывных производных с отличиями порождаемыми отличиями в соотношениях (12) и (13) по отношению к правилу Лейбница для непрерывных производных.

3.3 Q-производные

Определение Q -аналогов разностных производных дается с помощью следующих определений:

$$\begin{aligned}\hat{D}_x^+T(x,t) &= \frac{T(qx,t) - T(x,t)}{(q-1)x}, \quad \hat{D}_x^-T(x,t) = \frac{T(x,t) - T(x/q,t)}{(1-1/q)x}, \\ \hat{D}_t^+T(x,t) &= \frac{T(x,rt) - T(x,t)}{(r-1)t}, \quad \hat{D}_t^-T(x,t) = \frac{T(x,t) - T(x,t/r)}{(1-1/r)t}.\end{aligned}\quad (11)$$

Здесь q и r – некоторые вещественные числа отличные от нуля. Шаги сетки, которые в данном случае описываются знаменателями $h = (q-1)x$, $\tau = (r-1)t$ в правой части соотношений (11) в каждом из направлений становятся переменными величинами. Это позволяет выполнять вычисления на неравномерных сетках. Не трудно видеть, что при $q \rightarrow 1$, $r \rightarrow 1$ шаги сетки стремятся к нулю, сводя производные (11) к стандартным непрерывным производным.

Свойства этих производных так же соответствуют двум сформулированным выше требованиям. Свойство перестановочности напрямую следует из определения (11):

$$\hat{D}_t^+\hat{D}_x^+T(x,t) = \hat{D}_x^+\hat{D}_t^+T(x,t).$$

Свойство Лейбница дифференцирования произведения функций для этих производных имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\hat{D}_x^+(u(x,t)v(x,t)) &= \frac{1}{(q-1)x}(u(qx,t)v(qx,t) - u(x,t)v(x,t)) = \\ &= \frac{1}{(q-1)x}([(q-1)x\hat{D}_x^+u(x,t) + u(x,t)][(q-1)x\hat{D}_x^+v(x,t) + v(x,t)] - u(x,t)v(x,t)) = \\ &= v(x,t)\hat{D}_x^+u(x,t) + u(x,t)\hat{D}_x^+v(x,t) + (q-1)x(\hat{D}_x^+u(x,t))(\hat{D}_x^+v(x,t)).\end{aligned}\quad (12)$$

Аналогично для производной по t :

$$\begin{aligned}\hat{D}_t^+(u(x,t)v(x,t)) &= \frac{1}{(r-1)t}(u(x,rt)v(x,rt) - u(x,t)v(x,t)) = \\ &= v(x,t)\hat{D}_t^+u(x,t) + u(x,t)\hat{D}_t^+v(x,t) + (r-1)t(\hat{D}_t^+u(x,t))(\hat{D}_t^+v(x,t)).\end{aligned}\quad (13)$$

Как видно, для правых левых q -производных второе свойство для модифицированного правила Лейбница выполнено. Однако второе из указанных выше условий нарушается в случае центральной разностной h -производной и симметричной q -производной

$$\hat{D}_x T(x,t) = \frac{T(qx,t) - T(x/q,t)}{(q - 1/q)x},$$

для которых необходимо теорию строить отдельно.

Заметим, что имеется возможность соединить свойства h - и q -производных и получить обобщенный их вариант, в котором неравномерность сетки может задаваться произвольным функциональным способом. В качестве такого обобщения можно рассмотреть производные следующего вида:

$$\hat{D}_x^+ T(x,t) = \frac{T(f_1(x),t) - T(x,t)}{f_1(x) - x}, \quad \hat{D}_t^+ T(x,t) = \frac{T(x,f_2(t)) - T(x,t)}{f_2(t) - t}. \quad (14)$$

Как и h и q производные, производные определенные таким способом сводятся к непрерывным производным при стремлении знаменателей $h^{(x)} = f_1(x) - x$, $h^{(t)} = f_2(t) - t$ к нулю. Способ такого перехода к такому пределу может задаваться параметрами функций $f_1(x)$, $f_2(t)$.

Обобщая (12) и (13), получим:

$$\begin{aligned}\hat{D}_x^+(u(x,t)v(x,t)) &= \frac{1}{f_1(x) - x}(u(f_1(x),t)v(f_1(x),t) - u(x,t)v(x,t)) = \\ &= \frac{(f_1(x) - x)\hat{D}_x^+u(x,t) + u(x,t)}{f_1(x) - x}[(f_1(x) - x)\hat{D}_x^+v(x,t) + v(x,t)] - u(x,t)v(x,t) =\end{aligned}\quad (15)$$

$$\begin{aligned}&= v(x,t)\hat{D}_x^+u(x,t) + u(x,t)\hat{D}_x^+v(x,t) + (f_1(x) - x)(\hat{D}_x^+u(x,t))(\hat{D}_x^+v(x,t)), \\ \hat{D}_t^+(u(x,t)v(x,t)) &= \frac{(u(x,f_2(t))v(u(x,f_2(t))) - u(x,t)v(x,t))}{f_2(t) - t} = \\ &= v(x,t)\hat{D}_t^+u(x,t) + u(x,t)\hat{D}_t^+v(x,t) + (f_2(t) - t)(\hat{D}_t^+u(x,t))(\hat{D}_t^+v(x,t)).\end{aligned}\quad (16)$$

Таким образом и для этого обобщенного случая выполнены требования 1 и 2.

4. Структурное уравнение дискретного процесса с дифференцированием типа сдвигов

Теперь для решения поставленной задачи о формулировке способа построения интегрируемых уравнений в частных сеточных производных, аналогичного предложенному в [2], требуется записать дискретные аналоги двух уравнений в частных производных (1).

Рассмотрим физические поля, задаваемые с помощью матриц $T_{i,j}$ на двумерной дискретной сетке, узлы которой нумеруются двумя целочисленными индексами $i, j = -\infty, \infty$. Условно будем первый индекс i рассматривать как пространственный, а второй – как индекс отчетов по времени. Сопоставим матричному полю $T_{i,j}$ два уравнения следующего вида:

$$T_{i,j+1} - aT_{i+2,j} - W_{i,j}T_{i+1,j} = 0, \quad (17)$$

$$T_{i,j+1} + V_{i,j}T_{i+1,j} = 0. \quad (18)$$

Эти уравнения не накладывают ни каких ограничений на матрицы $T_{i,j}$ поскольку их можно рассматривать как определяющие соотношения для дискретных функций $V_{i,j}$ и $W_{i,j}$ на той же дискретной сетке, что и функция $T_{i,j}$. Покажем, что независимо от вида функции $T_{i,j}$ между матричными дискретными функциями на решетке имеется нелинейная универсальная связь. Для этого рассмотрим совместно с (17) и (18) совокупность соотношений, которые получаются из них сдвигами на решетке. Именно, дополним (17) – (18) соотношениями следующего вида:

$$\begin{aligned} T_{i+1,j+1} - aT_{i+3,j} - W_{i+1,j}T_{i+2,j} &= 0, \\ T_{i,j+2} - aT_{i+2,j+1} - W_{i,j+1}T_{i+1,j+1} &= 0, \\ T_{i+1,j+1} + V_{i+1,j}T_{i+2,j} = 0, \quad T_{i+2,j+1} + V_{i+2,j}T_{i+3,j} &= 0, \\ T_{i,j+2} + V_{i,j+1}T_{i+1,j+1} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

В совокупности (17), (18) и (19) образуют замкнутую линейную однородную алгебраическую систему уравнений на совокупность значений функции $T_{i,j}$ в определенном наборе узлов решетки, которые указаны на рис. 1. Следовательно, для совместности эта система уравнений должна иметь определитель, равный нулю, а все значения $T_{i,j}$ на указанном шаблоне сетки должны выражаться через значение в одном из узлов шаблона. Последовательно выражая все значения $T_{i,j}$ в узлах шаблона, получаем аналог приведенной системы базовых соотношений (3):

$$\begin{aligned}
T_{i,j+1} &= -V_{i,j}T_{i+1,j}, & T_{i+2,j} &= -U_{i,j}T_{i+1,j}, \\
T_{i+1,j+1} &= V_{i+1,j}U_{i,j}T_{i+1,j}, & T_{i,j+2} &= -V_{i,j+1}V_{i+1,j}U_{i,j}T_{i+1,j}, \\
T_{i+3,j} &= U_{i+1,j}U_{i,j}T_{i+1,j}, & T_{i+2,j+1} &= -U_{i,j+1}V_{i+1,j}U_{i,j}T_{i+1,j}, \\
T_{i+2,j+1} &= -V_{i+2,j}U_{i+1,j}U_{i,j}T_{i+1,j}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Из последних двух соотношений вытекает следующая связь между матричными функциями $V_{i,j}$ и $U_{i,j} = a^{-1}(V_{i,j} + W_{i,j})$:

$$U_{i,j+1}V_{i+1,j}U_{i,j} = V_{i+2,j}U_{i+1,j}U_{i,j}. \tag{21}$$

Если матрица $U_{i,j}$ невырождена, то последнее соотношение можно записать в следующем виде:

$$U_{i,j+1}V_{i+1,j} = V_{i+2,j}U_{i+1,j}. \tag{22}$$

Это и есть структурное уравнение, связывающее две матричных функции на сетке, которые были введены выше с помощью уравнений (17) – (18).

Утверждение 1. Для любой матричной функции $T_{i,j}$, матричные функции $U_{i,j}$ и $V_{i,j}$, связанные с $T_{i,j}$ соотношениями (17) – (18) удовлетворяют структурному уравнению (21) или (22).

5. Подход, основанный на h-производных

Рассмотренный выше способ имеет недостаток, состоящий в некоторой сложности интерпретации сдвиговых дискретных моделей с точки зрения их сопоставления непрерывным физическим моделям процессов. Последнее является важным элементом понимания, динамики процессов, которое основывается в настоящее время на общих физических законах, выраженных в форме дифференциальных уравнений в частных производных. Для облегчения такой интерпретации полезно дискретную модель представить в форме дискретных производных, которые в предельном переходе превращаются в непрерывные частные производные. Полезно использовать стандартное определение левой или правой разностной производной. В этом варианте сеточных производных уравнения (1) имеют следующие разностные аналоги:

$$\hat{D}_t T_{ij} + V_{ij} \hat{D}_x T_{ij}, \hat{D}_t T_{ij} - K \hat{D}_x^2 T_{ij} - W_{ij} \hat{D}_x T_{ij} = 0. \tag{23}$$

В силу универсальности записи левой разностной производной по отношению к узлу сетки нижние индексы, как раз указывающие узел, мы будем опускать. Вместо этого, в качестве нижних индексов будем указывать тип производной, например:

$$T_x \equiv \hat{D}_x T \equiv \hat{D}_x T_{ij}, \quad T_t \equiv \hat{D}_t T \equiv \hat{D}_t T_{ij}, \quad T_{xt} \equiv \hat{D}_x \hat{D}_t T \equiv \hat{D}_x \hat{D}_t T_{ij}, \dots$$

Переход к разностной схеме можно будет осуществить непосредственно после всех вычислений в сокращенной форме.

6. Базовые соотношения для h-уравнений

Следуя процедуре, описанной в [2], необходимо выписать систему производных от уравнений (23), получаемую прямым их дифференцированием, в данном случае взятием разностных производных. Полная совокупность уравнений в данном случае будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
 T_t + VT_x &= 0, & T_t - aT_{xx} - WT_x &= 0, \\
 T_{xt} + V_x T_x + VT_{xx} + h_x V_x T_{xx} &= 0, \\
 T_{tt} + V_t T_x + VT_{tx} + h_t V_t T_{tx} &= 0, \\
 T_{xxt} + V_{xx} T_x + 2V_x T_{xx} + VT_{xxx} + 2h_x [V_{xx} T_{xx} + V_x T_{xxx}] + h_x^2 V_{xx} T_{xxx} &= 0, \\
 T_{xt} - aT_{xxx} - W_x T_x - WT_{xx} - h_x W_x T_{xx} &= 0, \\
 T_{tt} - aT_{xxt} - W_t T_x - WT_{tx} - h_t W_t T_{tx} &= 0.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Эта система из семи уравнений относительно семи разностных производных $T_t, T_x, T_{tt}, T_{tx}, T_{xx}, T_{txx}, T_{xxx}$ является однородной и, следовательно, для ее разрешимости необходимо равенство нулю ее детерминанта. Последнее условие представляет собой уравнение, связывающее сеточные функции V и W . Последовательным исключением производных из системы уравнений (24) приходим к следующей системе соотношений, связывающих все производные с одной выбранной производной, например, T_x :

$$\begin{aligned}
 T_t &= -VT_x, & T_{xx} &= -UT_x, & T_{xt} &= -PT_x, \\
 T_{tt} &= -[V_t - (V + h_t V_t)Q]T_x, & T_{xxx} &= [-U_x + U^2 + h_x U_x U]T_x, \\
 T_{xxt} &= [(-V_{xx} + 2V_x U + VU_x VU^2) - \\
 & - h_x (VU_x U - 2V_{xx} U - 2V_x U_x + 2V_x U^2) - \\
 & - h_x^2 (2V_x U_x U - V_{xx} U_x + V_{xx} U^2) - h_x^3 V_{xx} U_x U]T_x = \\
 & = [-U_t + (U + h_t U_t)P]T_x.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь

$$U = a^{-1}(V + W), \quad P = V_x - (V + h_x V_x)U = Q - h_x V_x U, \quad Q = V_x - VU.$$

Из последних двух равенств (25) вытекает уравнение, связывающее сеточные функции U и V :

$$\begin{aligned}
 -U_t + (U + h_t U_t)P &= -V_{xx} + 2V_x U + VU_x + VU^2 - \\
 - h_x (VU_x U - 2V_{xx} U - 2V_x U_x + 2V_x U^2) - \\
 - h_x^2 (2V_x U_x U - V_{xx} U_x + V_{xx} U^2) - h_x^3 V_{xx} U_x U.
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
U_t + [Q, U] - Q_x &= h_t U_t Q - h_x h_t U_t V_x U + \\
&+ h_x (UV_x U + VU_x U - 2V_{xx} U - 2V_x U_x + 2V_x U^2) + \\
&+ h_x^2 (2V_x U_x U - V_{xx} U_x + V_{xx} U^2) + h_x^3 V_{xx} U_x U.
\end{aligned} \tag{26}$$

Это уравнение, как не трудно видеть, в пределе $h_t \rightarrow 0$ и $h_x \rightarrow 0$ переходит в уравнение в непрерывных частных производных следующего вида:

$$U_t + [U, Q] - Q_x = 0. \tag{27}$$

Это уравнение является обобщением на матричный случай уравнения (4), полученного в [2].

Кроме полностью непрерывного предела из полученных соотношений можно получить полунепрерывный предел при $h_t \rightarrow 0$. В этом случае вместо уравнения (27) получим уравнение следующего вида:

$$\begin{aligned}
U_t + [Q, U] - Q_x &= \\
&+ h_x (UV_x U + VU_x U - 2V_{xx} U - 2V_x U_x + 2V_x U^2) + \\
&+ h_x^2 (2V_x U_x U - V_{xx} U_x + V_{xx} U^2) + h_x^3 V_{xx} U_x U.
\end{aligned} \tag{28}$$

Заметим, что в скалярном случае уравнение (28) можно представить в следующем виде:

$$(1 - h_{(t)} P) U_t = (1 - h_{(x)} U) P_x, \tag{29}$$

где

$$P = V_x - (V + h^{(x)} V_x) U = (1 - h^{(x)} U) V_x - UV.$$

7. Базовые соотношения для q-уравнений

Система базовых уравнений для скалярных не матричных функций для производных (14):

$$\begin{aligned}
T_t + VT_x &= 0, & T_t - aT_{xx} - WT_x &= 0, \\
T_{xt} + V_x T_x + VT_{xx} + h^{(x)} V_x T_{xx} &= 0, \\
T_{xt} - aT_{xxx} - W_x T_x - WT_{xx} - h^{(x)} W_x T_{xx} &= 0, \\
T_{tt} + V_t T_x + VT_{xt} + h^{(t)} V_t T_{xt} &= 0, \\
T_{tt} - aT_{xxt} - W_t T_x - WT_{xt} - h^{(t)} W_t T_{xt} &= 0, \\
T_{xxt} + V_{xx} T_x + (2 + h^{(x)}) V_x T_{xx} + VT_{xxx} + (2 + h^{(x)}) h^{(x)} [V_{xx} T_{xx} + V_x T_{xxx}] + \\
+ (1 + h^{(x)}) (h^{(x)})^2 V_{xx} T_{xxx} &= 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Как и в предыдущих случаях, система (30) из семи уравнений относительно семи производных $T_t, T_x, T_{tt}, T_{xt}, T_{xx}, T_{xxt}, T_{xxx}$ является однородной и, следовательно, для ее разрешимости необходимо равенство нулю ее детерминанта. Последнее условие представляет собой уравнение,

связывающее сеточные функции V и W , и может быть получено последовательным выражением всех производных из (30) через одну выбранную производную, например, T_x :

$$\begin{aligned} T_t &= -VT_x, & T_{xx} &= -UT_x, & T_{xt} &= -PT_x, \\ T_{xxx} &= [(U + h^{(x)}U_x)U - U_x]T_x, & T_{tt} &= [(V + h^{(t)}V_t)P - V_t]T_x, \\ T_{xxt} &= [(U + h^{(t)}U_t)P - U_t]T_x = [-V_{xx} + (2 + h_x^{(x)})(V_x + h^{(x)}V_{xx})U - \\ &- (V + (2 + h_x^{(x)})h^{(x)}V_x + (1 + h_x^{(x)})(h^{(x)})^2V_{xx})(U + h^{(x)}U_x)U - U_x]T_x. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь, как и выше введены следующие обозначения:

$$U = a^{-1}(V + W), \quad P = V_x - (V + h^{(x)}V_x)U = (1 - h^{(x)}U)V_x - UV.$$

Из последних двух равенств системы (31) вытекает уравнение, связывающее сеточные функции U и V :

$$\begin{aligned} (U + h^{(t)}U_t)P - U_t &= -V_{xx} + (2 + h_x^{(x)})(V_x + h^{(x)}V_{xx})U - \\ &- (V + (2 + h_x^{(x)})h^{(x)}V_x + (1 + h_x^{(x)})(h^{(x)})^2V_{xx})(U + h^{(x)}U_x)U - U_x \end{aligned}$$

или

$$(1 - h^{(t)}P)U_t = (1 - h^{(x)}U)P_x. \quad (32)$$

7. Расширенная совокупность приведенных базовых соотношений для сдвиговой производных

Ясно, что базовые соотношения (3) можно продолжить по индукции до любого наперед заданного узла. Общий вид приведенных базовых соотношений можно представить следующим образом:

$$T_{i+k,j+n} = A_{k,n}(i,j)T_{i+1,j}, \quad (33)$$

где A_{nk} определяются функциями $V_{i,j}$ и $U_{i,j}$. В частности

$$\begin{aligned} A_{1,0}(i,j) &= I, & A_{1,1} &= V_{i+1,j}U_{i,j}, \\ A_{0,1}(i,j) &= -V_{i,j}, & A_{2,0}(i,j) &= -U_{i,j}, \end{aligned} \quad (34)$$

В общем случае имеем следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} T_{[i+k+1,j+n]} &= A_{k,n}(i,j)T_{i+2,j} = A_{k,n}(i,j)U_{i,j}T_{i+1,j} = A_{k+1,n}(i,j)T_{i+1,j}, \\ T_{[i+k,j+1+n]} &= A_{k,n}(i,j)T_{i+1,j+1} = A_{k,n}(i,j)V_{i+1,j}U_{i,j}T_{i+1,j} = A_{k,n+1}(i,j)T_{i+1,j}, \\ n, k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отсюда находим рекуррентные соотношения для коэффициентов в решениях для высших производных:

$$\begin{aligned} A_{k+1,n}(i,j) &= A_{k,n}(i,j)U_{i,j}, & A_{k,n+1}(i,j) &= A_{k,n}(i,j)V_{i+1,j}U_{i,j}, \\ n, k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (35)$$

с начальными условиями (34). Вычисляя рекуррентно матрицы $A_{k+1,n}(i,j)$, отталкиваясь от значения $U_{i,j}$ и $V_{i,j}$ в некотором начальном узле (i,j) , затем

можно вычислить $T_{i+k,j+n}$, в любом узле, зная значение $T_{i+1,j}$.

Предположим, что поле $T_{i,j}$ подчиняется линейному авторегрессионному уравнению:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^L B_{k,n} T_{i+k,j+n} = E_{i,j}, \quad (36)$$

где $E_{i,j}$ – некоторое заданное поле. В этом случае без труда получаем следующее соотношение на матрицы $\hat{A}_{k,n}$:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^L B_{k,n} A_{k,n}(i, j) = E_{i,j} T_{i+1,j}^{-1} = L_{i,j}. \quad (37)$$

Аналогичные соотношения могут быть получены и для всех определенных выше типов производных. В результате общий метод построения интегрируемых нелинейных сеточных уравнений оказывается универсальным для всех этих типов сеточных производных.

8. Пример явного вычисления вида уравнения для нелинейного процесса

Прежде, чем рассматривать сам алгоритм идентификации процесса, необходимо выяснить как выглядят в явном виде нелинейные условия, вытекающие из соотношения (37). Для этого выпишем явно соответствующие условия для первых нескольких порядков модели авторегрессии (36). Например, для $L = 1$ и $K = 2$ имеем:

$$B_{1,0} A_{1,0}(i, j) + B_{2,0} A_{2,0}(i, j) + B_{1,1} A_{1,1}(i, j) + B_{2,1} A_{2,1}(i, j) = L_{i,j}$$

или

$$B_{1,0} I_{i,j} - B_{2,0} U_{i,j} + B_{1,1} V_{i+1,j} U_{i,j} - B_{2,1} V_{i+1,j} U_{i,j} U_{i,j} = L_{i,j}.$$

Отсюда получаем следующую связь

$$-B_{2,0} + B_{1,1} V_{i+1,j} - B_{2,1} V_{i+1,j} U_{i,j} = (L_{i,j} - B_{1,0} I_{i,j}) U_{i,j}^{-1}$$

или окончательно

$$B_{1,1} V_{i+1,j} - B_{2,1} V_{i+1,j} U_{i,j} = \left[(L_{i,j} - B_{1,0} I_{i,j}) U_{i,j}^{-1} + B_{2,0} \right]$$

Здесь мы использовали только систему соотношений для сдвиговых производных. Совершенно аналогично выкладки такого рода можно провести и для системы соотношений с разностными производными.

9. Задача об идентификации нелинейных моделей

Полученные соотношения теперь позволяют по аналогии с непрерывным случаем строить нелинейные интегрируемые сеточные уравнения, которые могут служить моделями различных систем, например, решеточных систем, возникающих в теории кристаллических решеток. Однако существует еще одно важное применение данного метода, состоящего в возможности на его

основе строить методы идентификации нелинейных моделей процессов, основываясь на реальных экспериментальных данных. Поскольку интерес представляют именно процессы в нелинейных системах, то в качестве наблюдаемых в эксперименте с точки зрения рассматриваемого метода должны выступать сеточные функции U или V . Однако прямое оценивание параметров нелинейных уравнений является некорректно поставленной задачей. Поэтому можно воспользоваться подходом, основанным на связи сеточных функций U или V с функцией T .

Основная идея предлагаемого метода состоит в том, что исходная информация о наблюдаемых нелинейных процессах U или V может быть трансформирована с помощью приведенных базовых соотношений в информацию о функции T_{ij} . Можно предположить, что дополнительное уравнение для T_{ij} , замыкающее систему базовых соотношений должно быть линейным, что укладывается в общую схему рассматриваемого метода. Процедуры оценивания параметров линейных уравнений являются корректными и в настоящее время хорошо разработаны. Одним из таких подходов являются методы оценивания параметров авторегрессионных моделей. В свою очередь многомерные авторегрессионные модели представляют собой общий вид линейного сеточного уравнения с постоянными коэффициентами и, следовательно, могут использоваться в качестве общего класса моделей, в котором и отыскивается наилучшая модель для T_{ij} . После того, как наилучшая модель для T_{ij} найдена, то с помощью базовых соотношения для U или V можно найти эквивалентную для этих полей нелинейную модель.

10. Построение поля T_{ij} и оценивание параметров модели авторегрессии

Пусть набор экспериментальных данных состоит из измеренных значений функции V_{ij} в узлах сетки в диапазоне номеров $i = 0, \dots, N; j = 0, \dots, M$. Рассмотрим уравнение для функций T_{ij} при заданной функции V_{ij} в следующем виде:

$$T_{i,j+1} = -V_{i,j}T_{i+1,j}. \quad (38)$$

Это соотношение позволяет рассчитывать $T_{i,j+1}$ при заданных $T_{i+1,j}$, т. е. для всех моментов времени индекс j по предыдущим. Однако для того, что процесс вычислений мог быть запущен, необходимо знать значения для $T_{i,0}$ в начальный момент времени. Эти значения могут задаваться произвольно и каждый набор значений $T_{i,0}$ будет приводить к новым решениям для $T_{i,j}$ в остальных узлах. По индексу i пространственный индекс значения $T_{i,0}$ должны быть заданы на интервале $[0, N]$. После того как процесс

рекуррентных вычислений по формуле (38) запущен на каждом шаге по индексу j максимальное значение индекса i , для которого возможно вычислить T_{ij} будет на единицу меньше, чем на предыдущем шаге $j-1$. Действительно, из (38) следует, что на шаге $j=1$ максимальное значение индекса i , при котором рассчитывается T_{ij} будет равно $N-1$:

$$T_{N-1,1} = -V_{N-1,1}T_{N,0}.$$

На шаге $j=2$:

$$T_{N-2,2} = -V_{N-2,2}T_{N-1,1}.$$

Следовательно, область индексов D_N , для которых можно рассчитать значения $T_{i,j}$, лежит ниже значений индексов прямой $j=N-i$ см. рис. 2. В силу этого оценивание $T_{i,j}$ можно проводить на этой области значений индексов.

После того, как поле $T_{i,j}$ найдено в области D_N , следующим шагом является оценивание параметров модели авторегрессии для $T_{i,j}$ (36). Обычно параметры авторегрессии B оцениваются в предположении, что $E_{i,j}$ в (36) белый шум. В этом случае наилучшей оценкой B может служить оценка по методу наименьших квадратов. Согласно этому подходу наилучшей оценкой является так, которая доставляет минимум следующей суммы

$$\sigma^2(B) = \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^{N-j} \left| \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^L B_{k,n} T_{i+k,j+n} \right|^2. \quad (39)$$

Дифференцируя это соотношение по компонентам B , получаем линейную систему уравнений относительно B . Однако существуют и более эффективные методы вычисления, минимизирующие (39). К таким методам относится, например, метод Левинсона [6]. В данной работе мы не будем обсуждать саму процедуру вычислений B . Здесь важен сам факт возможности эффективного вычисления коэффициентов авторегрессии по значениям $T_{i,j}$.

После того, как коэффициенты авторегрессии вычислены, с помощью расширенной системы приведенных базовых соотношений можно получить эквивалентную для уравнения авторегрессии нелинейную модель (37) для поля V_{ij} или U_{ij} . После этого, используя известные значения этих сеточных функций, на основе уравнения (37) можно осуществлять нелинейный прогноз их изменения в область индексов i, j , в которой первоначально V_{ij} и U_{ij} неизвестны.

Отметим, что хотя во всех построениях формально мы ссылались на совокупность соотношений отвечающих только сеточным производным типа сдвига, тем не менее все выкладки могут быть применены и к системе соотношений, относящимся к разностным производным.

11. Заключение

Основным результатом данной работы явилось теоретическое описание формального алгоритма идентификации нелинейных моделей на основе экспериментальных данных с помощью сеточного аналога общего подхода метода линеаризации нелинейных уравнений с помощью подстановок Коула-Хопфа-Урюкова. Было показано, что с помощью разработанных методов, и используя известные методы оценивания параметров двумерной авторегрессии, можно строить прогностические нелинейные модели процессов. Реальные свойства таких моделей должны быть еще проверены на практических примерах. Однако можно утверждать, что для определенного класса процессов такие модели могут оказаться очень полезными.

В качестве дополнения к уже проделанным выкладкам можно утверждать, что класс используемых моделей для оценивания коэффициентов авторегрессии может быть расширен. Например, более общим классом моделей для идентификации свойств T_{ij} можно рассматривать модели с переменными заданными коэффициентами. Однако в этом случае для построения корректной системы оценивания необходимо заранее указывать функциональный класс коэффициентов, что необходимо делать в каждом конкретном случае отдельно на основе дополнительной информации. Это требует индивидуального подхода к разработке таких моделей.

Следует так же отметить еще одно важное направление развития данного подхода, связанное с развитием нелинейного спектрального анализа. Поскольку модели авторегрессии существенным образом связаны с методами линейного спектрального оценивания [5,6], то можно разработанный подход для вычисления специально определенных спектральных свойств процессов, строящихся с помощью сеточных подстановок Коула-Хопфа-Урюкова.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект 08-01-97013-р_поволжье_а.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Журавлев В.М., Никитин А.В. Материалы международной междисциплинарной научной конференции Третьи Курдюмовские чтения: ``Синергетика в естественных науках''. Тверь. 19-22 апреля 2007. С. 60-61
2. Журавлев В.М., Никитин А.В. Нелинейный мир, 2007. Т. 5. N 9. С. 603-611
3. Журавлев В.М., Зиновьев Д.А. Письма в ЖЭТФ, **81**, N 3, 2008
4. Б.А. Урюков. Теплофизика и аэромеханика. 1999. Т. 6. N 3. С. 421-424
5. Дж. Бендат, А. Пирсол. Применения корреляционного и спектрального анализа. - М.: Мир, 1983.
6. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. - М.: Мир, 1990.

ОЦЕНИВАНИЕ ПОГРЕШНОСТИ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ СПЕКТРОВ

1. Введение

При оценивании спектральной плотности временных рядов с помощью метода максимальной энтропии используются алгоритмы построения оценок параметров авторегрессионных моделей АР-моделей. Процедура вычисления коэффициентов авторегрессии сводится обычно к различным вариантам обращения теплоцевой матрицы или использованию прямых методов типа алгоритма Левинсона [1,2]. При использовании таких алгоритмов возникает необходимость построения оценки погрешности для спектральной плотности оцененной с помощью АР-модели. Поскольку в явном виде в монографиях эти соотношения не приведены, то возникает необходимость вывода такой формулы. Это пробел воспроизводится в настоящей работе.

2. Метод наименьших квадратов для линейной модели общего вида

Для начала приведем основные формулы для линейной регрессионной модели общего вида в нужной нам общей форме. Пусть имеется модель исследуемого процесса общего вида

$$y(t) = \sum_{s=1}^M A_s f_s(t) + \delta(t), \quad (1)$$

где A_s – параметры модели, а $f_s(t)$ – строго заданные функции времени, $\delta(t)$ – случайные отклонения процесса $y(t)$ от модели. Предположим, что необходимо отыскать модель вида (1), которая наилучшим образом в каком либо смысле описывала бы набор измеренных значений процесса $y(t)$ в определенные моменты времени $t_i, i = 1, \dots, N$. Измеренные значения процесса обозначим через y_i , а через δ_i обозначим значения отклонений $\delta(t_i)$ в моменты времени t_i . При этом предполагается, что отклонения δ_i являются независимыми случайными величинами с нулевым средним и одинаковыми дисперсиями. Это означает, что выполняются следующие условия:

$$\langle \delta_i \rangle = 0; \quad \langle \delta_i \delta_j \rangle = 0, \quad i \neq j; \quad \langle \delta_i^2 \rangle = \sigma^2. \quad (2)$$

Здесь скобки $\langle \rangle$ означают статистическое осреднение математическое ожидание соответствующих величин.

Общий принцип наименьших квадратов состоит в том, что в качестве наилучшей модели выбирается модель вида (1), параметры которой $A_s^{(0)}$ удовлетворяют условию, что функция этих параметров

$$\sigma^2(A_1, \dots, A_M) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left[y_i - \sum_{s=1}^M A_s f_s(t_i) \right]^2 = \sigma^2$$

достигает минимума при $A_s = A_s^{(0)}$. Эта задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений следующего общего вида:

$$\frac{\partial \sigma^2(A_1, \dots, A_M)}{\partial A_s} = 0, \quad A_s = 0, \dots, M. \quad (3)$$

Вычисляя производные находим:

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial A_k} = -2 \sum_{i=1}^N (y_i - \sum_{s=1}^M A_s f_s(t_i)) f_k(t_i) = 0, \quad k = 1, \dots, M.$$

Эта система уравнений может быть записана в следующей форме

$$\sum_{j=1}^M [\sum_{i=1}^N f_k(t_i) f_j(t_i)] A_j = \sum_{i=1}^N f_k(t_i) y_i, \quad k = 1, \dots, M,$$

или в матричной форме

$$QA = F, \quad (4)$$

где $A = (A_1, A_2, \dots, A_M)$, матрица Q и вектор F имеют следующие элементы:

$$Q_{kj} = \sum_{i=1}^N f_k(t_i) f_j(t_i), \quad F_k = \sum_{i=1}^N y_i f_k(t_i).$$

Решение уравнения (4) можно записать так:

$$A = Q^{-1}F.$$

В покомпонентной записи это соотношение выглядит так:

$$A_j = \sum_{k=1}^M R_{jk} \left(\sum_{i=1}^N y_i f_k(i) \right), \quad j = 1, \dots, M, \quad (5)$$

где R_{ik} – матричные элементы матрицы $R = Q^{-1}$ обратной к матрице Q .

Вычислим погрешность оценки параметров регрессии в общем виде, следуя общей идеологии метода наименьших квадратов см. например, [3]. Для этого введем следующие обозначения и определения. Обозначим через $A_k^{(0)}$ истинные коэффициенты регрессии в предположении, что рассматриваемая модель в действительности имеет место. Коэффициенты A_k , полученные в результате вычислений и удовлетворяющие соотношениям (5), будем называть оценками истинных коэффициентов регрессии. Подставим выражения для y_i из модели (1) в предположении, что в ней стоят истинные коэффициенты регрессии $A_k^{(0)}$ в (5). В результате получим:

$$A_j = \sum_{k=1}^M R_{jk} \left(\sum_{i=1}^N \left(\sum_{s=1}^M A_s^{(0)} f_s(t_i) + \delta_i \right) f_k(t_i) \right), \quad j = 1, \dots, M,$$

Преобразуя это соотношение находим:

$$A_j = \sum_{k=1}^M \sum_{s=1}^M R_{jk} Q_{ks} A_s^{(0)} + \sum_{i=1}^N \delta_i \sum_{k=1}^M R_{jk} f_k(t_i), \quad j = 1, \dots, M,$$

В силу того, что матрицы R и Q обратные друг другу, т. е.

$$\sum_{k=1}^M \sum_{s=1}^M R_{jk} Q_{ks} = \delta_{js},$$

где $\delta_{kk} = 1, k = 1, \dots, M$ и $\delta_{ks} = 0, k \neq s$, окончательно находим:

$$A_j = A_j^{(0)} + \sum_{i=1}^N \delta_i \sum_{k=1}^M R_{jk} f_k(t_i), \quad j = 1, \dots, M. \quad (6)$$

Кроме этого, пользуясь условиями (2), находим:

$$\langle A_j \rangle = A_j^{(0)}.$$

Последнее условие означает, что оценка A_j является **не смещенной**. Далее имеем

$$\sigma_{A_j}^2 = \langle (A_j - A_j^{(0)})^2 \rangle = \sigma^2 R_{jj}. \quad (7)$$

Эти уравнения можно использовать для вычислений в общем случае, однако более полезно рассмотреть конкретные типы моделей, которые встречаются в данном практикуме.

3. Оценивание погрешности параметров модели авторегрессии

Рассмотрим теперь одномерную АР-модель:

$$x_n - \sum_{k=1}^L A_k x_{n-k} = \varepsilon_n, \quad n = 0, \dots, N. \quad (8)$$

Сопоставляя эту модель с (1), находим:

$$f_k(x_n) = x_{n-k}. \quad (9)$$

Следовательно, без труда находим элементы матрицы Q :

$$Q_{kj} = \sum_{n=\max k,j}^N x_{n-k} x_{n-j}, \quad k, j = 1, \dots, L$$

Это симметричная хорошо определенная матрица, поэтому ее обращение не представляет трудностей. В результате, следуя формуле (7), находим:

$$\sigma_j^2 = \sigma_0^2 R_{jj}, \quad (10)$$

где σ_j^2 – дисперсия флуктуаций в оценке параметра A_j , а σ_0^2 – дисперсия остаточного шума авторегрессии, а R_{jj} – как и раньше, диагональные элементы матрицы $R = Q^{-1}$.

4. Оценивание погрешности спектральной плотности

Как хорошо известно [1,2], АР-модель имеет спектральную плотность следующего вида:

$$S(f) = \frac{\sigma_0^2}{|A(f)|^2}, \quad (11)$$

где

$$A(f) = 1 - \sum_{k=1}^L A_k e^{2i\pi f k},$$

а $f \in [-1/2, +1/2]$ – нормированная частота. Как следует из (11), оценка спектральной плотности $S(f)$, является функцией от оценок коэффициентов авторегрессии A_k . Для вычисления оценок погрешностей косвенных измерений обычно прибегают к известным формулам, приведенным, например, в [4].

Предположим, что измеряемый параметр p , является некоторой функцией от измеряемых непосредственно в эксперименте величин X_i , $i = 1, \dots, L$, т. е.

$$p = P(X_1, X_2, \dots, X_L).$$

Предположим далее, что измеряемые непосредственно в эксперименте величины X_i характеризуются оценками средних значений \bar{X}_i и суммарной статистической и приборной погрешностями равной σ_i , соответственно, т.е. σ_i^2 есть дисперсия разброса, порождаемого не контролируруемыми внешними причинами и погрешностью шкалы приборов. Тогда в качестве оценки параметра p выбирается значение

$$\bar{p} = P(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_L),$$

и в случае независимости случайных отклонений отдельных величин X_i абсолютная погрешность измерения параметра p определяется следующей формулой:

$$\sigma_p = \sqrt{\left| \frac{\partial P}{\partial X_1} \right|^2 \cdot \sigma_1^2 + \left| \frac{\partial P}{\partial X_2} \right|^2 \cdot \sigma_2^2 + \dots + \left| \frac{\partial P}{\partial X_L} \right|^2 \cdot \sigma_L^2} \Bigg|_{X_1=\bar{X}_1, X_2=\bar{X}_2, \dots, X_L=\bar{X}_L}. \quad (12)$$

Используя эти общие соотношения, находим:

$$\sigma_S^2 = \sum_{j=1}^L \left| \frac{\partial S}{\partial A_j} \right|^2 \sigma_j^2 = \sum_{j=1}^L \left| \frac{\partial S}{\partial A_j} \right|^2 \sigma_0^2 R_{jj}. \quad (13)$$

Для получения окончательной оценки находим:

$$\frac{\partial S}{\partial A_j} = -\frac{\sigma_0^2}{|A(f)|^4} [A^*(f)e^{i2\pi f j} + A(f)e^{-i2\pi f j}]$$

Отсюда из (13) окончательно находим:

$$\sigma_S^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} S^4(f) [(A^*)^2(f)R(f) + (A(f))^2 R^*(f) + 2 |A(f)|^2 R_0] \quad (14)$$

где

$$R(f) = \sum_{j=1}^L R_{jj} e^{i4\pi f j}, \quad R_0 = \sum_{j=1}^L R_{jj}.$$

Формула (14) и является искомой формулой погрешности оценки спектральной плотности АР-модели на частоте f .

Обычно графики спектральной плотности изображают в логарифмическом масштабе. Для изображения доверительных границ на таком графике необходимо привести два дополнительных графика:

$$\ln S^\pm(f) = \ln S(f) + \ln(1 \pm G(f)),$$

где

$$G(f) = \sigma_0 \frac{\sqrt{(A^*)^2(f)R(f) + (A(f))^2 R^*(f) + 2 |A(f)|^2 R_0}}{|A(f)|^2}.$$

Эти формулы следуют из определения доверительного интервала:

$$S^\pm(f) = S(f) \pm \sigma_S = S(f) \left(1 \pm \frac{1}{\sigma_0} S(f) \sqrt{[(A^*)^2(f)R(f) + (A(f))^2 R^*(f) + 2 |A(f)|^2 R_0]} \right)$$

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект 08-01-97013-р_поволжье_а.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М. : Мир, 1990.
2. Дж. Бендат, А. Пирсол. Применения корреляционного и спектрального анализа. – М. : Мир, 1983.
3. Захаров, Севастьянов. Введение в теорию вероятности и математическую статистику. – М. : Высша школа, 1987.
4. Е. С. Вентцель. Теория вероятности. – М. : Наука, 1964. – 576 с.
5. Дворянинов Г. С., Журавлев В. М., Прусов А. В. Метод максимальной энтропии в многомерном спектральном анализе. – Часть 1,2, Препринт МГИ АН УССР. – 1987.
6. Дворянинов Г. С., Журавлев В. М., Прусов А. В. Метод максимальной энтропии в многомерном спектральном анализе временных рядов, Морской гидрофизический журнал. – 1987. – №3. – С.41-48.
7. Дворянинов Г. С., Журавлев В. М., Лемешко Е. М., Прусов А. В. Методы максимальной энтропии и комплексных нормальных мод для многомерного и пространственно-временного спектрального анализа. Моделир. гидрофиз. процессов и полей в замкнутых водоемах и морях. Под ред. Саркисяна А.С. – Изд. Наука. – 1987. – С. 213-228.

О. В. Иванисова (г. Краснодар)

КАВИТАЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ

Методом дискретных особенностей (вихрей и источников-стоков) получена система уравнений для определения перепада давления, а так же средней линии и толщины каверны в режиме суперкавитации, когда каверна покрывает всю верхнюю границу профиля и замыкается позади профиля по потоку. Выполнены численные расчёты для некоторых значений числа Фруда в зависимости от длины каверны.

Увеличение скоростей движения судов на подводных крыльях приводит к появлению, вследствие падения давления, парогазовых полостей, называемых кавернами. В многочисленных работах по влиянию границ потока, обзор которых содержится, например, в [1, 2, 3], свободная поверхность жидкости заменяется свободной границей невесомой жидкости, «твёрдой крышкой» или учитывается влияние весомости, но сама граница считается расположенной достаточно далеко. В [4] была получена система интегральных уравнений для учёта влияния свободной поверхности весоной жидкости. Однако числовые расчёты для конкретных примеров не были проведены.

В данной работе рассматривается задача о стационарном кавитационном обтекании потоком весоной жидкости постоянной скорости v_∞ тонкого профиля, расположенного на глубине h под свободной поверхностью.

Течение описывается потенциалом скорости $\varphi(x, y)$, который удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \quad (1)$$

на полуплоскости $y < h$ кроме точек проекции профиля и каверны на ось Ox : $S = \{y = 0, x \in [0, 1]\}$ и $G = \{y = 0, x \in [0, l], l > 1\}$.

На свободной поверхности весоной жидкости: $y = \eta(x) + h$ должны выполняться два условия:

- 1) кинематическое: $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_\infty \frac{d\eta}{dx}$;
- 2) динамическое: $p = p_\infty$ или $g\eta + v_\infty \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$.

Исключая неизвестное возмущение свободной поверхности $\eta(x)$, получим условие на свободной поверхности весоной жидкости:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad y = h, \quad (2)$$

где $\nu = \frac{g}{v_\infty^2}$ – параметр весомости.

На границе каверны $y = F_\pm(x)$ как свободной границы с постоянным давлением $p = p_k$ должны быть выполнены следующие два условия:

$$\left. \frac{\partial \varphi_\pm}{\partial y} \right|_{y=\pm 0} = v_\infty \frac{dF_\pm}{dx}, \quad x \in [0, l], \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_\pm}{\partial x} \right|_{y=\pm 0} = v_\infty \left(\frac{\sigma}{2} - \nu F_\pm \right), \quad x \in [0, l], \quad (4)$$

где $\sigma = 2 \frac{p_\infty - p_k}{\rho v_\infty^2}$ – число кавитации.

На бесконечности впереди от профиля возмущения скорости должны исчезать

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| \rightarrow 0, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \quad (5)$$

на бесконечности позади профиля возмущения скорости должны быть ограничены.

Профиль находится в бесконечно глубокой жидкости и, следовательно, условия (5) должны быть выполнены и при $y \rightarrow -\infty$.

Будем считать, что $F_-(x) = f_0(x)$ при $x \in [0, 1]$, где $f_0(x)$ заданная форма профиля.

Обозначим безразмерный перепад давления вдоль проекции профиля через $\gamma(x)$:

$$\gamma(x) = \frac{p_- - p_+}{\rho v_\infty^2}.$$

Тогда вместо условия (4) можно записать следующее условие:

$$\frac{1}{2v_\infty} \left(\frac{\partial \varphi_+}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_-}{\partial x} \right) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2} - \frac{\gamma}{2} - \nu F_{cp}, & x \in [0, 1], \\ \frac{\sigma}{2} - \nu F_{cp}, & x \in [1, l], \end{cases}$$

где $F_{cp} = \frac{1}{2}(F_+ + F_-)$ и определяется из соотношения

$$\frac{1}{2v_\infty} \left(\frac{\partial \varphi_+}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_-}{\partial y} \right) = \frac{dF_{cp}}{dx}, \quad x \in [0, l].$$

Из постановки задачи видно, что вдоль отрезка оси Ox $[0, 1]$ имеет место разрыв касательных скоростей, а вдоль всего отрезка $[0, l]$ разрывна составляющая возмущённых скоростей. В соответствии с разрывами производных потенциалов возмущённых скоростей потенциал $\varphi(x, y)$ представим в виде суммы потенциала вихревого слоя, распределённого вдоль отрезка оси Ox , равного длине хорды профиля и потенциала простого слоя, распределённого вдоль отрезка оси Ox длиной l , соответствующего длине каверны, включая каверну над профилем, измеренной в долях хорды:

$$\varphi = A\tilde{\gamma} + Bq,$$

где оператор $A\tilde{\gamma}$ – потенциал вихревого, а Bq – потенциал простого слоя. Интенсивность простого слоя

$$q = \frac{1}{\nu_\infty} \left(\frac{\partial \varphi_+}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_-}{\partial y} \right), \quad x \in [0, l]$$

и пропорциональна производной от функции распределения толщины $\delta(x)$ каверны. Вихревая интенсивность

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{\nu_\infty} \left(\frac{\partial \varphi_+}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_-}{\partial x} \right) = \begin{cases} \gamma(x) - \nu\delta(x), & x \in [0, 1], \\ -\nu\delta(x), & x \in (1, l]. \end{cases}$$

Операторы $A\tilde{\gamma}$ и Bq обладают свойствами:

$$A_{x\pm}\tilde{\gamma} = \pm \frac{\tilde{\gamma}}{2} + \overline{A_x}\tilde{\gamma}, \quad A_{y+\tilde{\gamma}} = A_{y-\tilde{\gamma}} = \overline{A_y}\tilde{\gamma},$$

$$B_{y\pm}q = \pm \frac{q}{2} + \overline{B_y}q, \quad B_{x+}q = B_{x-}q = \overline{B_x}q,$$

где черточки над операторами означают результат формальной подстановки $y = 0$, а индексами $+$ и $-$ обозначены предельные значения при $y \rightarrow \pm 0$.

Тогда можно записать систему интегральных уравнений в операторной форме:

$$\begin{cases} \overline{A_y}\tilde{\gamma} - \frac{1}{2}q + \overline{B_y}q = \nu_\infty \frac{df_0}{dx}, & x \in [0, 1], \\ \overline{A_y}\tilde{\gamma} + \overline{B_y}q = \nu_\infty \frac{dF_{cp}}{dx}, & x \in [0, l], \\ \nu_\infty \frac{\gamma}{2} + \overline{A_x}\tilde{\gamma} + \overline{B_x}q = \nu_\infty \left(\frac{\sigma}{2} - \nu F_{cp} \right), & x \in [0, l], \end{cases}$$

где $\overline{A_y}\tilde{\gamma} = A_y\tilde{\gamma}|_{y=0}$.

Используя преобразование Фурье

$$F[\varphi_{\pm}](\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\pm}(x, y) e^{i\alpha x} dx,$$

а также теорию вычетов, получим интегральные уравнения для определения безразмерного перепада давления $\gamma(x)$, производной от толщины каверны $\delta'(x) = q(x)$ и средней линии каверны $F_{cp}(x)$ в следующем виде:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^1 \gamma(s) \left(\frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{x-s} + \frac{x-s}{(x-s)^2 + 4h^2} \right) + k_1(x-s) \right) ds - \frac{\nu}{2\pi} \int_0^l q(s) \ln|x-s| ds - \\ & - \frac{\nu}{4\pi} \int_0^l q(s) \ln[(x-s)^2 + 4h^2] ds - \nu \int_0^l q(s) k_2(x-s) ds + \frac{q(x)}{2} - \\ & - \int_0^l q(s) \left(\frac{h}{\pi} \frac{1}{(x-s)^2 + 4h^2} + k_3(x-s) \right) ds = -\frac{df_0}{dx}, \quad x \in [0, 1], \\ & \int_0^1 \gamma(s) \left(\frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{x-s} + \frac{x-s}{(x-s)^2 + 4h^2} \right) + k_1(x-s) \right) ds - \frac{\nu}{2\pi} \int_0^l q(s) \ln|x-s| ds - \\ & - \frac{\nu}{4\pi} \int_0^l q(s) \ln[(x-s)^2 + 4h^2] ds - \nu \int_0^l q(s) k_2(x-s) ds - \\ & - \int_0^l q(s) \left(\frac{h}{\pi} \frac{1}{(x-s)^2 + 4h^2} + k_3(x-s) \right) ds = -\frac{dF_{cp}}{dx}, \quad x \in [0, l], \\ & \frac{\gamma(x)}{2} - \int_0^l q(s) \left(\frac{h}{\pi} \frac{1}{(x-s)^2 + 4h^2} + k_3(x-s) \right) ds + \frac{\nu}{2\pi} \int_0^l q(s) \operatorname{arctg} \left(\frac{x-s}{2h} \right) ds + \\ & + \nu \int_0^l q(s) k_4(x-s) ds + \int_0^l q(s) \left(\frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{x-s} - \frac{x-s}{(x-s)^2 + 4h^2} \right) - k_1(x-s) \right) ds = \quad (6) \\ & = \frac{\sigma}{2} - \nu F_{cp}(x), \quad x \in [0, l], \\ & \int_0^l q(s) ds = 0, \end{aligned} \right.$$

$$k_1(x) = \begin{cases} \frac{\nu}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\beta x}}{\beta^2 + \nu^2} (\nu \cos 2\beta h + \beta \sin 2\beta h) d\beta & \text{при } x < 0, \\ -\frac{\nu}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x}}{\beta^2 + \nu^2} (\nu \cos 2\beta h + \beta \sin 2\beta h) d\beta + 2\nu e^{-2\nu h} \cos \nu x & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

$$k_2(x) = \begin{cases} \frac{v}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\beta x}}{(\beta^2 + v^2)\beta} (v \cos 2\beta h + \beta \sin 2\beta h) d\beta & \text{при } x < 0, \\ \frac{v}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x}}{(\beta^2 + v^2)\beta} (v \cos 2\beta h + \beta \sin 2\beta h) d\beta + 2e^{-2vh} \sin vx & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

$$k_3(x) = \begin{cases} \frac{v}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\beta x}}{\beta^2 + v^2} (\beta \cos 2\beta h - v \sin 2\beta h) d\beta & \text{при } x < 0, \\ \frac{v}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x}}{\beta^2 + v^2} (\beta \cos 2\beta h - v \sin 2\beta h) d\beta - 2ve^{-2vh} \sin vx & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

$$k_4(x) = \begin{cases} \frac{v}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\beta x}}{(\beta^2 + v^2)\beta} (\beta \cos 2\beta h - v \sin 2\beta h) d\beta & \text{при } x < 0, \\ -\frac{v}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x}}{(\beta^2 + v^2)\beta} (\beta \cos 2\beta h - v \sin 2\beta h) d\beta + 2e^{-2vh} \cos vx & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Последнее соотношение в системе (6) служит условием замыкания и означает замкнутость системы профиль-каверна.

После решения системы интегральных уравнений коэффициенты подъёмной силы и момента относительно передней кромки определяются по формулам:

$$c_y = 2 \int_0^1 \gamma(s) ds, \quad c_m = 2 \int_0^1 s \gamma(s) ds.$$

Система (6) служит основой для решения как прямой задачи теории кавитационного обтекания при заданной форме профиля, так и обратной задачи определения формы профиля по заданному распределению давления.

Следует отметить, что в окрестности передней кромки интенсивности вихрей и источников-стоков имеют один и тот же порядок особенности $\gamma(x) \sim q(x) \sim x^{-1/4}$ при $x \rightarrow 0$, а в окрестности хвостовой части каверны особенность есть только у интенсивности источников-стоков $q(x) \sim (l-x)^{-1/2}$ при $x \rightarrow l$ [4]. Для того, чтобы сравнить порядки особенности интенсивностей достаточно в системе (6) сделать замену переменных $z = \sqrt{x}$, $\tau = \sqrt{s}$.

Для численного решения системы (6) применим метод дискретных особенностей [4]. Пусть N – число вихрей и источников, моделирующих возмущения, вносимые в потоке профилем и каверной над профилем, а M – число источников-стоков, заменяющих каверну за профилем. Тогда система алгебраических уравнений аппроксимирующая систему интегральных уравнений (6) имеет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \gamma_j \tau_{1j} \left\{ \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{z_{1i}^2 - \tau_{1j}^2} + \frac{z_{1i}^2 - \tau_{1j}^2}{(z_{1i}^2 - \tau_{1j}^2)^2 + 4h^2} \right) + 2k_1(z_{1i}^2 - \tau_{1j}^2) \right\} - \\
& - \frac{2\nu}{N} \sum_{j=1}^N q_j \tau_{1j} k_2 (z_{1i}^2 - \tau_{1j}^2) - \frac{2\nu}{M} (\sqrt{l} - 1) \sum_{j=1}^M q_{j+N} \tau_{4j} k_2 (z_{1i}^2 - \tau_{4j}^2) - \\
& - \frac{\nu}{\pi N} \sum_{j=1}^N q_j \tau_{1j} \ln |z_{1i}^2 - \tau_{1j}^2| - \frac{\nu}{2\pi N} \sum_{j=1}^N q_j \tau_{1j} \ln \left[(z_{1i}^2 - \tau_{1j}^2)^2 + 4h^2 \right] - \\
& - \frac{\nu}{\pi} \frac{\sqrt{l} - 1}{M} \sum_{j=1}^M q_{j+N} \tau_{4j} \ln |z_{1i}^2 - \tau_{4j}^2| - \frac{\nu}{2\pi} \frac{\sqrt{l} - 1}{M} \sum_{j=1}^M q_{j+N} \tau_{4j} \ln \left[(z_{1i}^2 - \tau_{4j}^2)^2 + 4h^2 \right] + \\
& + \frac{q_i}{2} - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N q_j \tau_{1j} \left\{ \frac{h}{\pi} \frac{1}{(z_{1i}^2 - \tau_{1j}^2)^2 + 4h^2} + k_3 (z_{1i}^2 - \tau_{1j}^2) \right\} - \\
& - 2 \frac{\sqrt{l} - 1}{M} \sum_{j=1}^M q_{j+N} \tau_{4j} \left\{ \frac{h}{\pi} \frac{1}{(z_{1i}^2 - \tau_{4j}^2)^2 + 4h^2} + k_3 (z_{1i}^2 - \tau_{4j}^2) \right\} = -\frac{df_{0i}}{dx}, \quad i = \overline{1, N}, \\
& \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \gamma_j \tau_{1j} \left\{ \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{z_{4i}^2 - \tau_{1j}^2} + \frac{z_{4i}^2 - \tau_{1j}^2}{(z_{4i}^2 - \tau_{1j}^2)^2 + 4h^2} \right) + 2k_1(z_{4i}^2 - \tau_{1j}^2) \right\} - \\
& - \frac{2\nu}{N} \sum_{j=1}^N q_j \tau_{1j} k_2 (z_{4i}^2 - \tau_{1j}^2) - \frac{2\nu}{M} (\sqrt{l} - 1) \sum_{j=1}^M q_{j+N} \tau_{4j} k_2 (z_{4i}^2 - \tau_{4j}^2) - \\
& - \frac{\nu}{\pi N} \sum_{j=1}^N q_j \tau_{1j} \ln |z_{4i}^2 - \tau_{1j}^2| - \frac{\nu}{2\pi N} \sum_{j=1}^N q_j \tau_{1j} \ln \left[(z_{4i}^2 - \tau_{1j}^2)^2 + 4h^2 \right] - \\
& - \frac{\nu}{\pi} \frac{\sqrt{l} - 1}{M} \sum_{j=1}^M q_{j+N} \tau_{4j} \ln |z_{4i}^2 - \tau_{4j}^2| - \frac{\nu}{2\pi} \frac{\sqrt{l} - 1}{M} \sum_{j=1}^M q_{j+N} \tau_{4j} \ln \left[(z_{4i}^2 - \tau_{4j}^2)^2 + 4h^2 \right] - \\
& - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N q_j \tau_{1j} \left\{ \frac{h}{\pi} \frac{1}{(z_{4i}^2 - \tau_{1j}^2)^2 + 4h^2} + k_3 (z_{4i}^2 - \tau_{1j}^2) \right\} - 2 \frac{\sqrt{l} - 1}{M} \times \\
& \times \sum_{j=1}^M q_{j+N} \tau_{4j} \left\{ \frac{h}{\pi} \frac{1}{(z_{4i}^2 - \tau_{4j}^2)^2 + 4h^2} + k_3 (z_{4i}^2 - \tau_{4j}^2) \right\} + \frac{dF_{cpi}}{dx} = 0, \quad i = \overline{1, M},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\gamma_i}{2} - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \gamma_j \tau_{2j} \left\{ \frac{h}{\pi} \frac{1}{(z_{2i}^2 - \tau_{2j}^2)^2 + 4h^2} + k_3(z_{2i}^2 - \tau_{2j}^2) \right\} + \\
& + \frac{\nu}{\pi N} \sum_{j=1}^N q_j \tau_{2j} \operatorname{arctg} \left(\frac{z_{2i}^2 - \tau_{2j}^2}{2h} \right) + \frac{\nu}{\pi} \frac{\sqrt{l}-1}{M} \sum_{j=1}^M q_{j+N} \tau_{3j} \operatorname{arctg} \left(\frac{z_{2i}^2 - \tau_{3j}^2}{2h} \right) + \\
& + \nu \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N q_j \tau_{2j} k_4(z_{2i}^2 - \tau_{2j}^2) + 2\nu \frac{\sqrt{l}-1}{M} \sum_{j=1}^M q_{j+N} \tau_{3j} k_4(z_{2i}^2 - \tau_{3j}^2) + \\
& + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N q_j \tau_{2j} \left\{ \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{z_{2i}^2 - \tau_{2j}^2} - \frac{z_{2i}^2 - \tau_{2j}^2}{(z_{2i}^2 - \tau_{2j}^2)^2 + 4h^2} \right) - 2k_1(z_{2i}^2 - \tau_{2j}^2) \right\} + \\
& + \frac{\sqrt{l}-1}{M} \sum_{j=1}^M q_{j+N} \tau_{3j} \left\{ \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{z_{2i}^2 - \tau_{3j}^2} - \frac{z_{2i}^2 - \tau_{3j}^2}{(z_{2i}^2 - \tau_{3j}^2)^2 + 4h^2} \right) - 2k_1(z_{2i}^2 - \tau_{3j}^2) \right\} + \\
& + \frac{\nu}{N} \sum_{j=1}^i q_j \tau_{2j} - \frac{\sigma}{2} = -\nu f_{0i}, \quad i = \overline{1, N}, \\
& - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \gamma_j \tau_{2j} \left\{ \frac{h}{\pi} \frac{1}{(z_{3i}^2 - \tau_{2j}^2)^2 + 4h^2} + k_3(z_{3i}^2 - \tau_{2j}^2) \right\} + \\
& + \frac{\nu}{\pi N} \sum_{j=1}^N q_j \tau_{2j} \operatorname{arctg} \left(\frac{z_{3i}^2 - \tau_{2j}^2}{2h} \right) + \frac{\nu}{\pi} \frac{\sqrt{l}-1}{M} \sum_{j=1}^M q_{j+N} \tau_{3j} \operatorname{arctg} \left(\frac{z_{3i}^2 - \tau_{3j}^2}{2h} \right) + \\
& + \nu \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N q_j \tau_{2j} k_4(z_{3i}^2 - \tau_{2j}^2) + 2\nu \frac{\sqrt{l}-1}{M} \sum_{j=1}^M q_{j+N} \tau_{3j} k_4(z_{3i}^2 - \tau_{3j}^2) + \\
& + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N q_j \tau_{2j} \left\{ \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{z_{3i}^2 - \tau_{2j}^2} - \frac{z_{3i}^2 - \tau_{2j}^2}{(z_{3i}^2 - \tau_{2j}^2)^2 + 4h^2} \right) - 2k_1(z_{3i}^2 - \tau_{2j}^2) \right\} + \\
& + \frac{\sqrt{l}-1}{M} \sum_{j=1}^M q_{j+N} \tau_{3j} \left\{ \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{z_{3i}^2 - \tau_{3j}^2} - \frac{z_{3i}^2 - \tau_{3j}^2}{(z_{3i}^2 - \tau_{3j}^2)^2 + 4h^2} \right) - 2k_1(z_{3i}^2 - \tau_{3j}^2) \right\} - \\
& - \frac{\sigma}{2} + \frac{\nu}{N} \sum_{j=1}^N q_j \tau_{2j} + 2\nu \frac{\sqrt{l}-1}{M} \sum_{j=1}^i \frac{dF_{cpj}}{dx} \tau_{3j} = -\nu f_0(1), \quad i = \overline{1, M},
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N q_j \tau_{2j} + \frac{\sqrt{l}-1}{M} \sum_{j=1}^M q_{j+N} \tau_{3j} = 0,$$

где $z_{1i} = \left(i - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{N}$, $\tau_{1j} = \left(j - \frac{3}{4}\right) \frac{1}{N}$,

$$z_{2i} = \left(i - \frac{3}{4}\right) \frac{1}{N}, \tau_{2j} = \left(j - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{N}, i, j = \overline{1, N};$$

$$z_{3i} = 1 + \left(i - \frac{3}{4}\right) \frac{\sqrt{l}-1}{M}, \tau_{3j} = 1 + \left(j - \frac{1}{4}\right) \frac{\sqrt{l}-1}{M},$$

$$z_{4i} = 1 + \left(i - \frac{1}{4}\right) \frac{\sqrt{l}-1}{M}, \tau_{4j} = 1 + \left(j - \frac{3}{4}\right) \frac{\sqrt{l}-1}{M}, i, j = \overline{1, M}.$$

Суммарные гидродинамические характеристики и форма каверны находятся по формулам:

$$c_y = \frac{4}{N} \sum_{j=1}^N \gamma_j \tau_{1j}, c_m = \frac{4}{N} \sum_{j=1}^N \gamma_j \tau_{1j}^3,$$

$$\delta_i = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^i q_j \tau_{2j}, i = \overline{1, N},$$

$$\delta_{i+N} = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N q_j \tau_{2j} + 2 \frac{\sqrt{l}-1}{M} \sum_{j=1}^i q_{j+N} \tau_{3j}, i = \overline{1, M}.$$

Результаты расчётов формы каверны при $f_0(x) = -x$ для $l = 4$, $N = M = 40$ приведены на рис.1, 2. Из рис. 1 видно, что каверна имеет волнообразную верхнюю границу, но этот эффект пропадает с увеличением глубины h погружения профиля и с уменьшением числа $\nu = 1/Fr^2$.

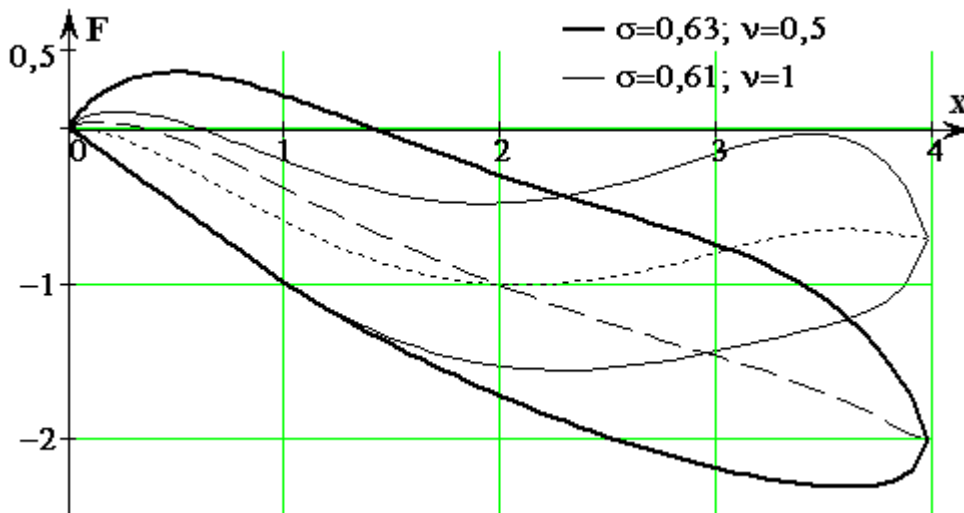


Рис.1 Форма каверны при $h = 0,1$

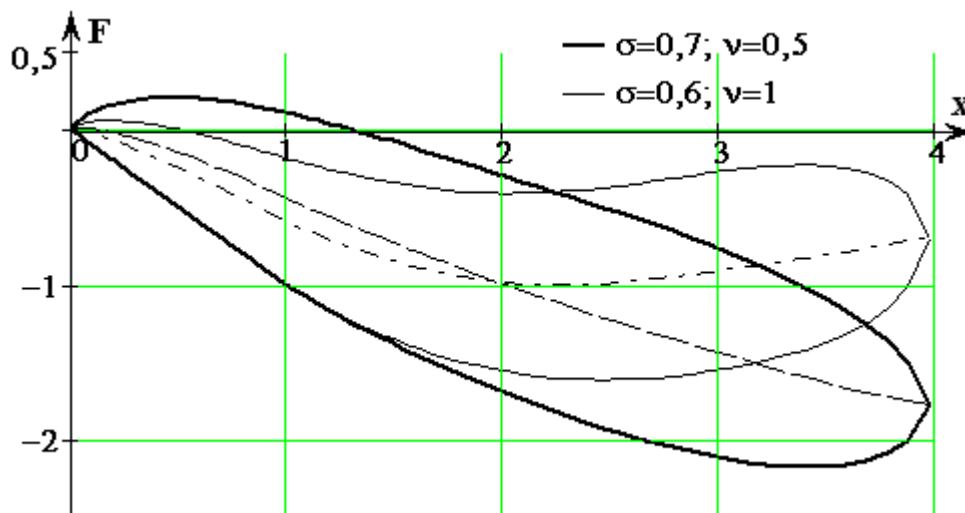


Рис.2 Форма каверны при $h = 0,25$

Автор благодарит профессора И.И. Ефремова за постановку задачи и обсуждение результатов работы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами. – Киев : Наукова думка, 1969. – 208 с.
2. Иванов А. Н. Гидродинамика развитых кавитационных течений. – Л. : Судостроение, 1980. – 238 с.
3. Буйвол В. Н. Тонкие каверны в течениях с возмущениями. – Киев : Наукова думка, 1980. – 296 с.
4. Ефремов И. И. Линеаризованная теория кавитационного обтекания. Киев : Наукова думка, 1974. – 156 с.

Э. Г. Иванов (г. Чебоксары)

РЕШЕНИЕ ТРЕТЬЕЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КЛИНА С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Расширение представлений об упругом поведении материалов в настоящее время в значительной степени базируется на универсальных методах расчета, основу создания и разработку которых составляют новые математические теории.

Целью данной статьи является нахождение единственного решения третьей основной задачи теории упругости в виде степенных рядов по r , исследование сходимости этих рядов, решение конкретных примеров.

Задача теории упругости для клина рассматривалась многими авторами, например [1] стр. 125, [2] стр. 152, [3] стр. 312, [4] стр. 517.

В [2], [4] задачи для клина решаются для случая, когда заданные функции являются полиномами по r .

В [1] эти задачи решаются с помощью преобразования Меллина, применение которого предполагает сходимость некоторых несобственных интегралов от заданных и искомых функций.

Постановка задачи

Рассматривается упругое равновесие бесконечного клина, ограниченного лучами $\Theta = 0$ и $\Theta = \alpha$ ($0 \leq r < \infty$), для случая плоского напряженного состояния. На границе клина $\Theta = 0$ заданы напряжения σ_{Θ} и $\tau_{r, \Theta}$, а на $\Theta = \alpha$ заданы перемещения. Вершина клина закреплена.

Задача состоит в нахождении напряжений $\sigma_r(r, \Theta)$, $\sigma_{\Theta}(r, \Theta)$, $\tau_{r, \Theta}(r, \Theta)$ и перемещений $u(r, \Theta)$, $v(r, \Theta)$.

Краевые задачи теории упругости для клиновидной области естественно решать в полярных координатах (r, Θ) . Дифференциальные уравнения равновесия плоской теории упругости в смещениях (уравнения Ляме) запишутся в виде ([3], стр. 312):

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\left(\frac{\partial}{\partial r} u(r, \Theta) \right) + \frac{\frac{\partial}{\partial \Theta} v(r, \Theta)}{r} + \frac{u(r, \Theta)}{r} \right) \right) - \mu \left(\frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\left(\frac{\partial}{\partial r} v(r, \Theta) \right) - \frac{\frac{\partial}{\partial \Theta} u(r, \Theta)}{r} + \frac{v(r, \Theta)}{r} \right) \right) = 0, \\
 & \frac{(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial \Theta} v(r, \Theta)}{r} + \frac{u(r, \Theta)}{r} \right) \right)}{r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\left(\frac{\partial}{\partial r} v(r, \Theta) \right) - \frac{\frac{\partial}{\partial \Theta} u(r, \Theta)}{r} + \frac{v(r, \Theta)}{r} \right) \right) = 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\lambda = \frac{E\nu}{1-\nu^2}$, λ – модуль сдвига, E – модуль упругости при растяжении, ν – коэффициент Пуассона.

Предположим, что приложенные к клину внешние усилия и смещения заданы в виде степенных рядов с бесконечными радиусами сходимости

$$\begin{aligned}\sigma_{\Theta}(r, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{0,n} r^n, \\ \tau_{r, \Theta}(r, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} g_{0,n} r^n, \\ u(r, \alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{1,n} r^n, \\ v(r, \alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} g_{1,n} r^n.\end{aligned}\tag{2}$$

Решение поставленной задачи также будем искать в виде степенных рядов

$$\begin{aligned}u(r, \Theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\Theta) r^n, \\ v(r, \Theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\Theta) r^n, \\ \sigma_r(r, \Theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\Theta) r^n, \\ \sigma_{\Theta}(r, \Theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n(\Theta) r^n, \\ \tau_{r, \Theta}(r, \Theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\Theta) r^n.\end{aligned}\tag{3}$$

где $A_n(\Theta), B_n(\Theta), C_n(\Theta), D_n(\Theta), F_n(\Theta)$ – неизвестные функции. Будем считать, что ряды (3) сходятся равномерно относительно Θ и имеют бесконечный радиус сходимости.

Построение структуры смещений

Продифференцировав смещения (3), подставив их в уравнения (1), и приравняв к нулю коэффициенты при одинаковых степенях r , получим систему, состоящую из следующих уравнений, при $n \neq 0$

$$\begin{aligned}(-\nu + 1) \left(\frac{d^2}{d\Theta^2} A_n(\Theta) \right) + (2n^2 - 2) A_n(\Theta) + (n\nu - 3 + \nu + n) \left(\frac{d}{d\Theta} B_n(\Theta) \right) &= 0, \\ (-\nu + n\nu + 3 + n) \left(\frac{d}{d\Theta} A_n(\Theta) \right) + (-\nu n^2 + \nu - 1 + n^2) B_n(\Theta) + 2 \left(\frac{d^2}{d\Theta^2} B_n(\Theta) \right) &= 0.\end{aligned}$$

Решение этой системы имеет вид

$$A_n(\Theta) = -a_n \cos(\Theta n + \Theta) + \sin(\Theta n + \Theta) b_n - v_n \cos(\Theta n - \Theta) c_n + v_n \sin(\Theta n - \Theta) d_n ,$$

$$B_n(\Theta) = a_n \sin(\Theta n + \Theta) + b_n \cos(\Theta n + \Theta) + c_n \sin(\Theta n - \Theta) + d_n \cos(\Theta n - \Theta) ,$$

где $v_n = \frac{v n + n - 3 + v}{n + v n - v + 3}$.

При $n = 0$ система состоит из следующих уравнений

$$(-v + 1) \left(\frac{d^2}{d\Theta^2} A_0(\Theta) \right) - 2 A_0(\Theta) + (v - 3) \left(\frac{d}{d\Theta} B_0(\Theta) \right) = 0 ,$$

$$(-v + 3) \left(\frac{d}{d\Theta} A_0(\Theta) \right) + (v - 1) B_0(\Theta) + 2 \left(\frac{d^2}{d\Theta^2} B_0(\Theta) \right) = 0 .$$

Решение этой системы имеет вид

$$A_0(\Theta) = -a_0 \cos(\Theta) + \sin(\Theta) b_0 + (-\cos(\Theta) \Theta + v_0 \sin(\Theta)) c_0 + (\sin(\Theta) \Theta + v_0 \cos(\Theta)) d_0 ,$$

$$B_0(\Theta) = a_0 \sin(\Theta) + b_0 \cos(\Theta) + c_0 \sin(\Theta) \Theta + d_0 \cos(\Theta) \Theta ,$$

где $v_0 = \frac{v + 1}{v - 3}$.

Используя найденные функции, получим следующую структуру смещений

$$u(r, \Theta) = -a_0 \cos(\Theta) + \sin(\Theta) b_0 + (-\cos(\Theta) \Theta + v_0 \sin(\Theta)) c_0 + (\sin(\Theta) \Theta + v_0 \cos(\Theta)) d_0 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n \cos(\Theta n + \Theta) + \sin(\Theta n + \Theta) b_n - v_n \cos(\Theta n - \Theta) c_n + v_n \sin(\Theta n - \Theta) d_n) r^n ,$$

$$v(r, \Theta) = a_0 \sin(\Theta) + b_0 \cos(\Theta) + c_0 \sin(\Theta) \Theta + d_0 \cos(\Theta) \Theta +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin(\Theta n + \Theta) + b_n \cos(\Theta n + \Theta) + c_n \sin(\Theta n - \Theta) + d_n \cos(\Theta n - \Theta)) r^n ,$$
(4)

где

$$v_0 = \frac{v + 1}{v - 3} , v_n = \frac{v n + n - 3 + v}{n + v n - v + 3} .$$
(5)

Построение структуры напряжений

Связь напряжений с компонентами смещений в полярной системе координат имеет следующий вид ([5], стр.76):

$$\sigma_r(r, \Theta) = (\lambda + 2 \mu) \left(\frac{\partial}{\partial r} u(r, \Theta) \right) + \lambda \left(\frac{u(r, \Theta)}{r} + \frac{\frac{\partial}{\partial \Theta} v(r, \Theta)}{r} \right) ,$$

$$\sigma_{\Theta}(r, \Theta) = \lambda \left(\frac{\partial}{\partial r} u(r, \Theta) \right) + (\lambda + 2 \mu) \left(\frac{u(r, \Theta)}{r} + \frac{\frac{\partial}{\partial \Theta} v(r, \Theta)}{r} \right) ,$$

$$\tau_{r, \Theta}(r, \Theta) = \left(\frac{\partial}{\partial \Theta} u(r, \Theta) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial r} v(r, \Theta) \right) - \frac{v(r, \Theta)}{r} \mu .$$

Используя (4), структуры напряжений примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Theta}(r, \Theta) &= \frac{(\lambda + 2 \mu) (v_0 + 1) (c_0 \sin(\Theta) + d_0 \cos(\Theta))}{r} + \\ &\quad + 2 \mu a_1 \cos(2 \Theta) - 2 \mu \sin(2 \Theta) b_1 + v_{1,1} c_1 + \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (2 \mu a_n \cos(\Theta (n + 1)) n - 2 \mu \sin(\Theta (n + 1)) b_n n + v_{1,n} \cos(\Theta (n - 1)) c_n \\ &\quad - v_{1,n} \sin(\Theta (n - 1)) d_n) r^{(n-1)} \\ \sigma_r(r, \Theta) &= \frac{\lambda (v_0 + 1) (c_0 \sin(\Theta) + d_0 \cos(\Theta))}{r} - \\ &\quad - 2 \mu a_1 \cos(2 \Theta) + 2 \mu \sin(2 \Theta) b_1 - v_{2,1} c_1 + \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (-2 \mu a_n \cos(\Theta (n + 1)) n + 2 \mu \sin(\Theta (n + 1)) b_n n - v_{2,n} \cos(\Theta (n - 1)) c_n \\ &\quad + v_{2,n} \sin(\Theta (n - 1)) d_n) r^{(n-1)} \\ \tau_{r, \Theta}(r, \Theta) &= \frac{\mu (-1 + v_0) (c_0 \cos(\Theta) - d_0 \sin(\Theta))}{r} + \\ &\quad + 2 \mu \sin(2 \Theta) a_1 + 2 \mu \cos(2 \Theta) b_1 + v_{3,1} d_1 + \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (2 \mu \sin(\Theta (n + 1)) n a_n + 2 \mu \cos(\Theta (n + 1)) n b_n + v_{3,n} \sin(\Theta (n - 1)) c_n \\ &\quad + v_{3,n} \cos(\Theta (n - 1)) d_n) r^{(n-1)} \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$v_{1,n} = \frac{E n (n + 1)}{n + v n - v + 3}, \quad v_{2,n} = \frac{E n (n - 3)}{n + v n - v + 3}, \quad v_{3,n} = \frac{(n - 1) n E}{n + v n - v + 3}. \quad (7)$$

Так как решение ищем в виде степенных рядов, то должны одновременно выполняться следующие два условия

$$\begin{aligned} c_0 \cos(\Theta) - d_0 \sin(\Theta) &= 0, \\ c_0 \cos(\Theta) + d_0 \sin(\Theta) &= 0. \end{aligned}$$

Эти условия выполняются, если $c_0 = 0, d_0 = 0$.

Учтем, что в вершине клина смещения отсутствуют, $u(0, \Theta) = 0, v(0, \Theta) = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} -a_0 \cos(\Theta) + \sin(\Theta) b_0 &= 0, \\ a_0 \sin(\Theta) + b_0 \cos(\Theta) &= 0. \end{aligned}$$

отсюда $a_0 = 0, b_0 = 0$. Тогда в краевых условиях (2) $f_{1,0} = 0, g_{1,0} = 0$.

И структура будет следующей

$$u(r, \Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n \cos(\Theta n + \Theta) + \sin(\Theta n + \Theta) b_n - v_n \cos(\Theta n - \Theta) c_n + v_n \sin(\Theta n - \Theta) d_n) r^n,$$

$$v(r, \Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin(\Theta n + \Theta) + b_n \cos(\Theta n + \Theta) + c_n \sin(\Theta n - \Theta) + d_n \cos(\Theta n - \Theta)) r^n,$$

$$\sigma_{\Theta}(r, \Theta) = 2 \mu a_1 \cos(2 \Theta) - 2 \mu \sin(2 \Theta) b_1 + v_{1,1} c_1 +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (2 \mu a_n \cos(\Theta (n+1)) n - 2 \mu \sin(\Theta (n+1)) b_n n + v_{1,n} \cos(\Theta (n-1)) c_n - v_{1,n} \sin(\Theta (n-1)) d_n) r^{(n-1)}$$

$$\sigma_r(r, \Theta) = -2 \mu a_1 \cos(2 \Theta) + 2 \mu \sin(2 \Theta) b_1 - v_{2,1} c_1 + \quad (8)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-2 \mu a_n \cos(\Theta (n+1)) n + 2 \mu \sin(\Theta (n+1)) b_n n - v_{2,n} \cos(\Theta (n-1)) c_n + v_{2,n} \sin(\Theta (n-1)) d_n) r^{(n-1)}$$

$$\tau_{r, \Theta}(r, \Theta) = 2 \mu \sin(2 \Theta) a_1 + 2 \mu \cos(2 \Theta) b_1 + v_{3,1} d_1 +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (2 \mu \sin(\Theta (n+1)) n a_n + 2 \mu \cos(\Theta (n+1)) n b_n + v_{3,n} \sin(\Theta (n-1)) c_n + v_{3,n} \cos(\Theta (n-1)) d_n) r^{(n-1)}$$

Нахождение неизвестных коэффициентов

Для нахождения коэффициентов a_n, b_n, c_n, d_n используем граничные условия (2) и получаем систему из четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными.

Для определения коэффициентов a_n, b_n, c_n, d_n , уравнения следующие:

$$2 \mu n a_n + v_{1,n} c_n = f_{0, n-1},$$

$$2 \mu n b_n + v_{3,n} d_n = g_{0, n-1},$$

$$-\cos(\alpha n + \alpha) a_n + \sin(\alpha n + \alpha) b_n - v_n \cos(\alpha n - \alpha) c_n + v_n \sin(\alpha n - \alpha) d_n = f_{1, n}, \quad (9)$$

$$\sin(\alpha n + \alpha) a_n + \cos(\alpha n + \alpha) b_n + \sin(\alpha n - \alpha) c_n + \cos(\alpha n - \alpha) d_n = g_{1, n}.$$

Определитель этой системы имеет вид

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} 2 \mu n & 0 & v_{1,n} & 0 \\ 0 & 2 \mu n & 0 & v_{3,n} \\ -\cos(\alpha n + \alpha) & \sin(\alpha n + \alpha) & -v_n \cos(\alpha n - \alpha) & v_n \sin(\alpha n - \alpha) \\ \sin(\alpha n + \alpha) & \cos(\alpha n + \alpha) & \sin(\alpha n - \alpha) & \cos(\alpha n - \alpha) \end{bmatrix}.$$

С учетом (5) и (7)

$$\Delta_n = \frac{4 E^2 n^2 (-n^2 (1 + v)^2 \sin(\alpha)^2 - (3 + 2 v - v^2) \sin(\alpha n)^2 + 4)}{(1 + v)^2 (n + v n - v + 3)^2}.$$

Покажем, что при любом натуральном n существует конечное число значений $\alpha_i \in [0; 2\pi]$, при которых $\Delta_n = 0$. Эти значения α_i назовем парадоксами.

Определитель равен нулю, если

$$n^2 (1 + v)^2 \sin(\alpha)^2 + (3 + 2 v - v^2) \sin(\alpha n)^2 - 4 = 0.$$

Или

$$\sin(\alpha)^2 = \frac{4 - (3 + 2 v - v^2) \sin(\alpha n)^2}{n^2 (1 + v)^2} \quad (10)$$

При $n = 1$, уравнение (10) примет вид $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{(1+v)}$, уравнение имеет 4 корня $\alpha_i \in [0; 2\pi]$.

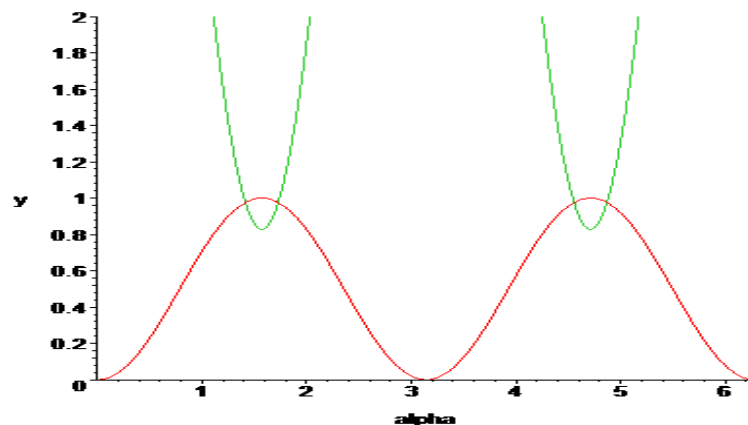
При остальных натуральных n , правая часть (10) оценивается так

$$0 < \frac{4 - (3 + 2v - v^2) \sin^2(n\alpha)}{n^2(1+v)^2} < 1, \quad ((3 + 2v - v^2) \in (3; 3.75]),$$

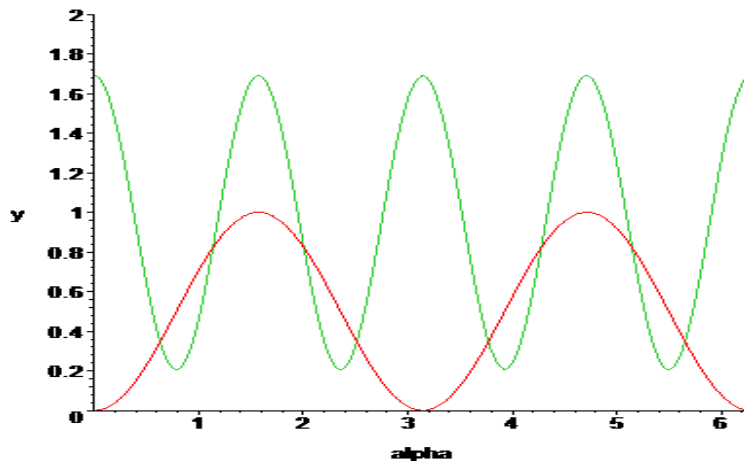
Значит уравнение (10) имеет решение.

Чтобы более четко увидеть нули определителя, построим некоторые графики, для определенности возьмем $v = 0.3$.

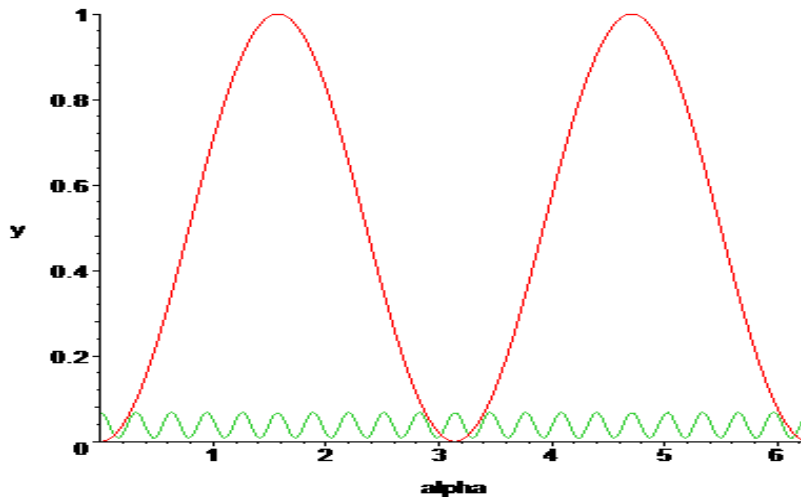
$$1) \quad n = 1, \quad y_1 = \sin(\alpha)^2, \quad y_2 = 6.76 - 5.9319 \sin(\alpha)^2,$$



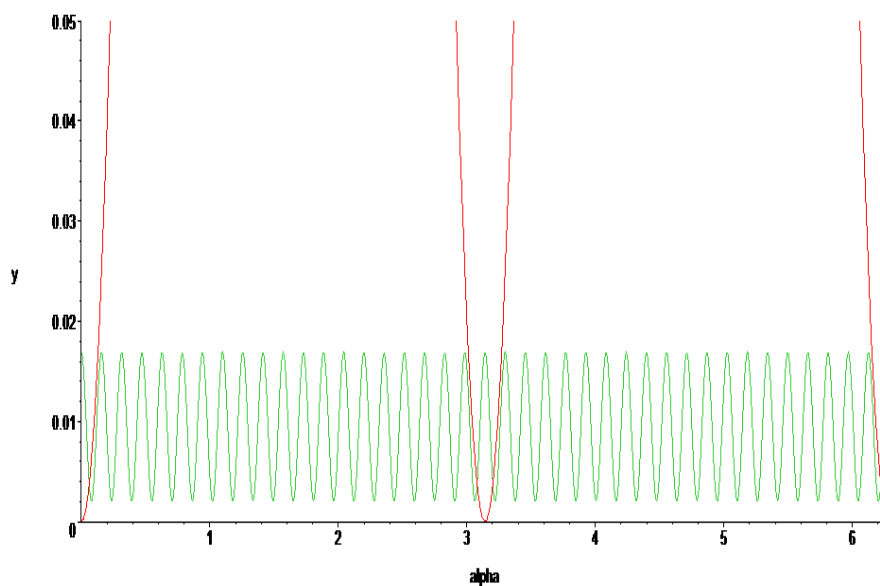
2) $n = 2$, $y_1 = \sin(\alpha)^2$, $y_2 = 1.6900000000 - 1.482975000 \sin(2 \alpha)^2$,



3) $n = 10$, $y_1 = \sin(\alpha)^2$, $y_2 = 0.06760000000 - 0.05931900000 \sin(10 \alpha)^2$,



4) $n = 20$, $y_1 = \sin(\alpha)^2$, $y_2 = 0.01690000000 - 0.01482975000 \sin(20 \alpha)^2$,



Коэффициенты a_n, b_n, c_n, d_n можно найти по формулам Крамера

$$a_n = \frac{\Delta_a}{\Delta_n}, b_n = \frac{\Delta_b}{\Delta_n}, c_n = \frac{\Delta_c}{\Delta_n}, d_n = \frac{\Delta_d}{\Delta_n}, \quad (11)$$

где $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c, \Delta_d$ – определители, полученные из Δ_n путем замены соответствующего столбца, столбцом свободных членов.

Используя структуру коэффициентов (11), получим, что, например,

$$a_n = \beta_n f_{0, n-1} + \chi_n g_{0, n-1} + \delta_n f_{1, n} + \gamma_n g_{1, 0},$$

где $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченные последовательности.

Коэффициенты b_n, c_n, d_n запишутся аналогично.

Принимая во внимание, что заданные функции (2) записаны в виде степенных рядов с бесконечными радиусами сходимости, получим, что ряды (8) имеют бесконечный радиус сходимости и сходятся равномерно относительно θ .

Теорема.

При α не совпадающими с α_i (парадоксами) задача (1) с граничным условием (2) имеет единственное решение, которое записывается формулами (8), где коэффициенты a_n, b_n, c_n, d_n находятся из (9), по формуле (11). Ряды имеют бесконечный радиус сходимости и сходятся равномерно относительно $0 \leq \theta \leq \alpha$.

Примеры

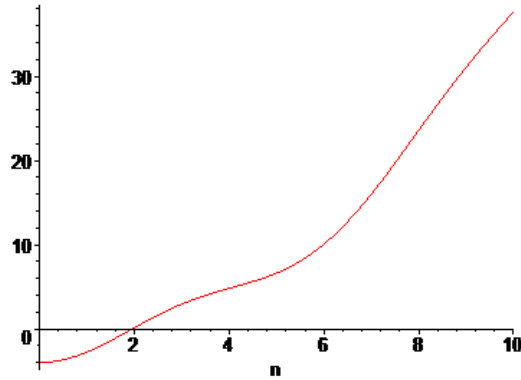
При решении конкретных задач следует, прежде всего, убедиться, что заданный угол α не является парадоксом. Для этого надо численным методом (например, методом Ньютона) решить уравнение (10) относительно n . Корни этого уравнения будут приближенными (и скорее всего не целыми). Надо взять ближайшие к корням натуральные числа и подставить их в (10). Если при этом равенство (10) не выполнено, то решение можно найти по выше указанным формулам.

1. Рассмотрим случай $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Требуется выяснить, существуют ли такие натуральные числа n , при которых определитель равен нулю. Для определенности возьмем $\nu = 0.25$.

Для решения воспользуемся уравнением (9), которое при $\alpha = \frac{\pi}{6}$ примет вид

$$0.3906250000 n^2 + 3.4375 \sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)^2 - 4 = 0.$$

График левой части уравнения следующий



Решив уравнение численным методом Ньютона, получим что $n \approx 1,95498$. Считая, что решение получено с некоторой погрешностью, подставим $n=2$ и получим $0.140625000 \neq 0$. Значит, не существуют такие натуральные числа n , при которых определитель равен нулю.

2. Рассматривается упругое равновесие бесконечного медного клина с $\nu = 0.25, E = 1000000$ ([8], стр.94), ограниченного лучами $\Theta = 0$ и $\Theta = \alpha$ ($0 \leq r < \infty$), для случая плоского напряженного состояния, при $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Краевые условия следующие

$$\sigma_{\Theta}\left(r, \frac{\pi}{6}\right) = r, \quad \tau_{r, \Theta}\left(r, \frac{\pi}{6}\right) = 0, \quad u\left(r, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\sqrt{3}r^2}{72E}, \quad v\left(r, \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

Вершина клина закреплена.

Решение:

Из примера 1, следует, что при данном угле все определители отличны от нуля. Решив систему (9) при $n = 2$, получим

$$a_2 = -\frac{35}{24E}, \quad b_2 = 0, \quad c_2 = \frac{35}{12E}, \quad d_2 = 0.$$

Тогда решение получится следующим

$$\begin{aligned} \sigma_{\Theta}(r, \Theta) &= \left(-\frac{7}{3} \cos(3\Theta) + \frac{10}{3} \cos(\Theta)\right)r, & \sigma_r(r, \Theta) &= \left(\frac{7}{3} \cos(3\Theta) + \frac{10}{9} \cos(\Theta)\right)r, \\ \tau_{r, \Theta}(r, \Theta) &= \left(-\frac{7}{3} \sin(3\Theta) + \frac{10}{9} \sin(\Theta)\right)r, & u(r, \Theta) &= \left(\frac{35 \cos(3\Theta)}{24E} + \frac{5 \cos(\Theta)}{36E}\right)r^2, \\ v(r, \Theta) &= \left(-\frac{35 \sin(3\Theta)}{24E} + \frac{35 \sin(\Theta)}{12E}\right)r^2. \end{aligned}$$

3. Рассматривается упругое равновесие бесконечного медного клина с $\nu = 0.25, E = 1000000$, ограниченного лучами $\Theta = 0$ и $\Theta = \alpha$ ($0 \leq r < \infty$), для случая плоского напряженного состояния, при $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Краевые условия следующие

$$\sigma_{\Theta}\left(r, \frac{2\pi}{3}\right) = 2r^4 - r^9,$$

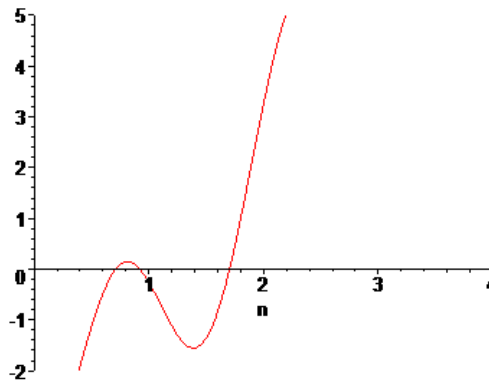
$$\begin{aligned}\tau_{r, \Theta}\left(r, \frac{2 \pi}{3}\right) &= 5 r^4 - 2 r^9, \\ u\left(r, \frac{2 \pi}{3}\right) &= \frac{(148 E - 185 - 36 \sqrt{3}) \sqrt{3} r^5}{216 E} + \frac{(2128 E + 298 + 39 \sqrt{3}) \sqrt{3} r^{10}}{1320 E}, \\ v\left(r, \frac{2 \pi}{3}\right) &= r^5 - 2 r^{10}.\end{aligned}$$

Вершина клина закреплена.

Решение:

Построим график правой части уравнения (9), который имеет вид

$$1.171875000 n^2 + 3.4375 \sin\left(\frac{2 \pi n}{3}\right)^2 - 4$$



Убеждаемся, что $n=1$ и $n=2$ не являются корнями уравнения (10). Отсюда, следует, что при данном угле определитель системы (9) отличен от нуля для любых натуральных чисел n . Решив систему (9) при $n=5$ и $n=10$ получим

$$\begin{aligned}a_5 &= -\frac{-18 - 25 \sqrt{3} + 20 \sqrt{3} E}{36 E}, \quad b_5 = \frac{5}{4 E}, \quad c_5 = \frac{\sqrt{3} (4 E - 5)}{6 E}, \quad d_5 = 0, \\ a_{10} &= \frac{\sqrt{3} (1 + 16 E)}{12 E}, \quad b_{10} = -\frac{1}{4 E}, \quad c_{10} = -\frac{61 (32 \sqrt{3} E + 2 \sqrt{3} + 3)}{1320 E}, \quad d_{10} = 0.\end{aligned}$$

Тогда решение получится следующим

$$\begin{aligned}\sigma_{\Theta}(r, \Theta) &= -\frac{1}{9} (45 \sin(6 \Theta) + (-20 \sqrt{3} E + 25 \sqrt{3}) \cos(4 \Theta) + (-18 - 25 \sqrt{3} + 20 \sqrt{3} E) \cos(6 \Theta)) r^4 \\ &\quad + \frac{1}{3} (6 \sin(11 \Theta) + (-32 \sqrt{3} E - 2 \sqrt{3} - 3) \cos(9 \Theta) + (2 \sqrt{3} + 32 \sqrt{3} E) \cos(11 \Theta)) r^9 \\ \sigma_r(r, \Theta) &= \frac{1}{27} (135 \sin(6 \Theta) + (-20 \sqrt{3} E + 25 \sqrt{3}) \cos(4 \Theta) + (-54 - 75 \sqrt{3} + 60 \sqrt{3} E) \cos(6 \Theta)) r^4 \\ &\quad - \frac{1}{33} (66 \sin(11 \Theta) + (-224 \sqrt{3} E - 14 \sqrt{3} - 21) \cos(9 \Theta) + (22 \sqrt{3} + 352 \sqrt{3} E) \cos(11 \Theta)) r^9 \\ \tau_{r, \Theta}(r, \Theta) &= -\frac{1}{27} ((-40 \sqrt{3} E + 50 \sqrt{3}) \sin(4 \Theta) + (-54 - 75 \sqrt{3} + 60 \sqrt{3} E) \sin(6 \Theta) - 135 \cos(6 \Theta)) r^4 \\ &\quad + \frac{1}{33} ((-288 \sqrt{3} E - 18 \sqrt{3} - 27) \sin(9 \Theta) + (22 \sqrt{3} + 352 \sqrt{3} E) \sin(11 \Theta) - 66 \cos(11 \Theta)) r^9\end{aligned}$$

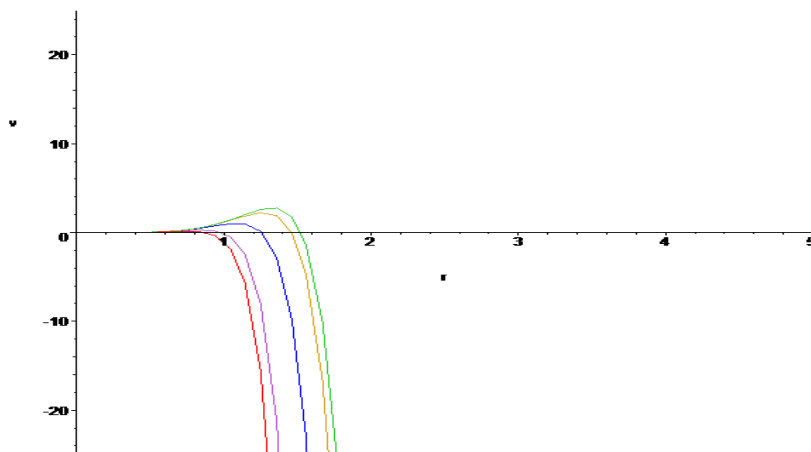
$$u(r, \Theta) = \frac{1}{108} \frac{(135 \sin(6 \Theta) + (-28 \sqrt{3} E + 35 \sqrt{3}) \cos(4 \Theta) + (-54 - 75 \sqrt{3} + 60 \sqrt{3} E) \cos(6 \Theta)) r^5}{E}$$

$$- \frac{1}{1320} \frac{(330 \sin(11 \Theta) + (-1248 \sqrt{3} E - 78 \sqrt{3} - 117) \cos(9 \Theta) + (110 \sqrt{3} + 1760 \sqrt{3} E) \cos(11 \Theta)) r^{10}}{E}$$

$$v(r, \Theta) = -\frac{1}{36} \frac{((-24 \sqrt{3} E + 30 \sqrt{3}) \sin(4 \Theta) + (-18 - 25 \sqrt{3} + 20 \sqrt{3} E) \sin(6 \Theta) - 45 \cos(6 \Theta)) r^5}{E}$$

$$+ \frac{1}{1320} \frac{((-1952 \sqrt{3} E - 122 \sqrt{3} - 183) \sin(9 \Theta) + (110 \sqrt{3} + 1760 \sqrt{3} E) \sin(11 \Theta) - 330 \cos(11 \Theta)) r^{10}}{E}$$

Покажем, например, приближения графика смещения $v(r, \theta)$, при $\theta \rightarrow \frac{2\pi}{3}$ к граничной функции $v\left(r, \frac{2\pi}{3}\right) = r^5 - 2r^{10}$



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л. : Наука, 1968. – 402 с.
2. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М. : Наука, 1975. – 576 с.
3. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. – М. : Наука, 1981. – 688 с.
4. Папкович П. Ф. Теория упругости. – Киев : Оборонгиз, 1939. – 641 с.
5. Снеддон И. Н., Бери Д. С. Классическая теория упругости. – Москва, 1961. – 220 с.
6. Новацкий В. Теория упругости. – М. : Мир 1975. – 872 с.
7. Ляв А. Математическая теория упругости. – М. : НКТП СССР, 1935. – 675 с.
8. Безухов Н. И. Сборник задач по теории упругости и пластичности. – М. : 1957. – 287 с.

Л. И. Каранджулов (г. София, Болгария)

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИМПУЛЬСНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

Построено асимптотическое разложение нелинейных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в условно устойчивых критических случаях. Последовательно определены все члены асимптотического разложения с помощью псевдообратных матриц и ортопроекторов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейную систему

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= f(t, x, \varepsilon), t \in [a, b], t \neq \tau_i, i = \overline{1, p}, \\ a &\equiv \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_p < \tau_{p+1} \equiv b, \end{aligned} \quad (1)$$

с краевым условием

$$lx(\cdot) = v. \quad (2)$$

и с обобщенными импульсными (внутренними) условиями в фиксированные моменты времени

$$N_i x(\tau_i + 0) + M_i x(\tau_i - 0) = h_i, i = \overline{1, p}. \quad (3)$$

Коэффициенты задачи (1) – (3) удовлетворяют условиям:

(У1) n -мерная вектор-функция $f(t, x, \varepsilon)$ принадлежит классу кусочно-непрерывных функций с точками разрыва первого рода в $\tau_i, i = \overline{1, p}$ и имеет непрерывные частные производные по всем аргументам до $(n + 2)$ -го порядка в области

$$\Omega_1 \equiv \{(t, x, \varepsilon) | t \in [a, b], \{\tau_1, \dots, \tau_p\}, \|x\| \leq \rho_1, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}.$$

(У2) $l - m$ -мерный, линейный, ограниченный, векторный функционал, $l = \text{col}(l_1, \dots, l_m)$, $l \in (x : C[a, b], \{\tau_1, \dots, \tau_p\} \rightarrow R^n, R^m)$; $v \in R^m$ – известный постоянный вектор; $M_i, N_i, i = \overline{1, p}$, – постоянные $(k_i \times n)$ -матрицы, а h_i – k_i -мерный постоянный вектор.

(У3) Вырожденная система ($\varepsilon = 0$)

$$f(t, x, 0) = 0 \quad (4)$$

имеет решение вида

$$x_0(t) = \varphi(t, \alpha_0(t)), t \in [\tau_0, \tau_1], t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], i = \overline{2, p}, \quad (5)$$

где $\alpha_0(t)$ – произвольная вектор-функция.

(У4) Вектор-функция $\varphi(t, \alpha_0(t))$ – кусочно непрерывна с точками разрыва первого рода $\tau_i, i = \overline{1, p}$ и имеет непрерывные частные производные по всем аргументам до $(n+2)$ -го порядка включительно в области $\Omega_2 \equiv \{(t, \alpha_0(t)) | t \in [a, b], \{\tau_1, \dots, \tau_p\}, \|\alpha_0(t)\| \leq \rho_2\}$.

(У5) $(n \times n)$ -матрица $f'_x(t, x_0(t), 0)$ при $t \in [a, b], \{\tau_1, \dots, \tau_p\}$ имеет собственные значения $\lambda_j(t, \alpha_0(t)), j = \overline{1, n}$, удовлетворяющие в $(t, \alpha_0(t)) \in \Omega_2$ условиям:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_j(t, \alpha_0(t)) < 0, & \quad j = \overline{1, k}, (k < n), \\ \lambda_j(t, \alpha_0(t)) \equiv 0, & \quad j = \overline{k+1, k+r}, \\ \operatorname{Re} \lambda_j(t, \alpha_0(t)) > 0, & \quad j = \overline{k+r+1, n}, q = n - k - r. \end{aligned}$$

Число линейно независимых собственных векторов, соответствующих $\lambda_j(t, \alpha_0(t)) \equiv 0$, равно k .

Условия (У3) и (У5) показывают, что рассматриваются дифференциальные уравнения условно устойчивого типа в критическом случае [2].

Построим асимптотическое разложение решения $x(t, \varepsilon)$ задачи (1) – (3) так, чтобы при $\varepsilon \rightarrow 0$ оно стремилось к одному из решений (5) вырожденной системы (4) при $t \in [a, b], \{\tau_1, \dots, \tau_p\}$. Рассматриваются случаи, когда $m \neq n$, т.е. рассматриваются нетеровы импульсные краевые задачи.

Начальные и краевые задачи для сингулярно возмущенных систем вида

$$\dot{x} = f(t, x, y), \varepsilon \dot{y} = g(t, x, y), \quad (6)$$

устойчивого и условно устойчивого типа в критическом случае при $m = n$ рассмотрены в [2]. Система (6) с импульсными условиями

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = S_i x \quad (7)$$

исследована в [7]. Рассмотрена и импульсная система (1), (7) в критическом случае. В [7] существенную роль играет построенная в [14] фундаментальная матрица импульсной системы $\dot{x} = A(t)x, t \neq \tau_i, \Delta x|_{t=\tau_i} = S_i x, i = \overline{1, p}$, если $\det(S_i + E) \neq 0$. С помощью этой матрицы строятся в [7] решения системы (6), (7) и (1), (7).

В настоящей работе рассматриваются обобщенные краевые и импульсные условия. Тогда решение на каждом промежутке зависит от произвольного вектора. Фундаментальная матрица из [14] и [7] неприменима.

Начальные и краевые задачи для регулярных систем дифференциальных уравнений с импульсными условиями вида (3) рассматривали много авторов. Достаточно подробную библиографию по этому вопросу можно посмотреть, например, в [15].

Начальные и краевые задачи в устойчивом и условно устойчивом случае при $m \neq n$, для нелинейных и линейных сингулярно возмущенных систем с импульсным воздействием, рассмотрены в [3], [4], [6], [11].

Начальная работа, связана с краевыми линейными сингулярно возмущенными задачами с импульсами вида (3), это работа [10].

В настоящей работе применяется метод пограничных функций [2], [7], псевдообратных матриц и проекторов [12], [13], [8].

2. Вспомогательные результаты. В дальнейшем нам нужно найти экспоненциально малые решения нелинейных систем вида

$$\frac{dx}{d\tau} = f(c, \phi(c, \alpha_0(c)) + x(\tau), 0), \quad c \in [a, b]. \quad (8)$$

Лемма 1. В достаточно малой окрестности точки $x=0$ существуют k -мерное $\tilde{S}^+(\alpha_0)$ и q -мерное $\tilde{S}^-(\alpha_0)$ многообразия системы (8). Если начальное значение $x(c) \in \tilde{S}^+(\alpha_0)$, то существуют такие постоянные $\gamma > 0$ и $\sigma > 0$, что при $\tau \geq 0$ решение $x(\tau)$ удовлетворяет неравенству $\|x(\tau)\| \leq \gamma \exp(-\sigma\tau)$, $\tau \geq 0$. Если начальное значение $x(c) \in \tilde{S}^-(\alpha_0)$, то существуют такие постоянные $\bar{\gamma} > 0$ и $\bar{\sigma} > 0$, что при $\tau \leq 0$ решение удовлетворяет неравенству $\|x(\tau)\| \leq \bar{\gamma} \exp(\bar{\sigma}\tau)$, $\tau \leq 0$.

Лемма доказывается аналогично подобным утверждениям из [2] и [5] с некоторыми изменениями, порожденными условием (У5). Из леммы 1 следует $\lim_{\tau \rightarrow \infty} x(\tau) = 0$, $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} x(\tau) = 0$. Геометрически \tilde{S}^+ и \tilde{S}^- представляют гиперповерхности, проходящие через начало координат.

Пусть выполнено условие

(У6) В области $\Omega_3 \equiv \{(x, \alpha_0(t)) \mid \|x\| \leq \rho_1, \|\alpha_0(t)\| \leq \rho_2\}$ для каждого $\alpha_0(t) \in \Omega_2$ многообразия $\tilde{S}^+(\alpha_0)$ и $\tilde{S}^-(\alpha_0)$ системы (8) представимы в виде

$$\tilde{S}^+(\alpha_0): \bar{x} = P(x_1, \alpha_0), \quad \tilde{S}^-(\alpha_0): \bar{x} = \bar{P}(x_3, \alpha_0),$$

где P и \bar{P} – достаточно гладкие функции в Ω_3 , x_1, x_2, x_3 – k -, r -, и q - мерные блоки вектора $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, а $\bar{x} = (x_2, x_3)^T$, $\bar{\bar{x}} = (x_1, x_2)^T$.

Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{d\tau} = f'_x(c, \phi(c, \alpha_0(c)) + x(\tau), 0) y + Y(\tau). \quad (9)$$

Через $\bar{S}(\tau)$ и $\bar{\bar{S}}(\tau)$ обозначим матрицы

$$\bar{S}(\tau) = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ H_1(\tau) & E_{r+q} \end{pmatrix}, \quad \bar{\bar{S}}(\tau) = \begin{pmatrix} E_{k+r} & \bar{H}_1(\tau) \\ 0 & E_q \end{pmatrix},$$

где $H_1(\tau) = P'_{x_1}(x_1(\tau))$, $\bar{H}_1(\tau) = \bar{P}'_{x_3}(x_3(\tau))$, P и \bar{P} – многообразия из условия (У6), а E_k , E_{r+q} , E_{k+r} и E_q – соответственно k -, $r+q$ -, $k+r$ - и q -единичные матрицы. Пусть

$$\tilde{A}(\tau) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{11} + \tilde{f}_{12}H_1(\tau) & \tilde{f}_{12} \\ 0 & \tilde{f}_{22} - H_1(\tau)\tilde{f}_{12} \end{pmatrix}, \quad \hat{A}(\tau) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{11} - \bar{H}_1(\tau)\tilde{f}_{21} & 0 \\ \tilde{f}_{21} & \tilde{f}_{22} + \tilde{f}_{21}\bar{H}_1(\tau) \end{pmatrix},$$

где \tilde{f}_{ij} , $i, j = 1, 2$, – блоки матрицы

$$f'_x(c, \phi(c, \alpha_0(c)) + x(\tau), 0) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{11} & \tilde{f}_{12} \\ \tilde{f}_{21} & \tilde{f}_{22} \end{pmatrix}.$$

Через $X_1(\tau)$ и $\bar{X}_1(\tau)$ обозначим нормальные фундаментальные матрицы однородных систем $\frac{dx}{d\tau} = \tilde{A}(\tau)x$, $\frac{dx}{dv} = \hat{A}(\tau)x$ соответственно.

Пусть $Y(\tau) = (Y_1(\tau), Y_2(\tau), Y_3(\tau))^T$, где $Y_1(\tau)$, $Y_2(\tau)$, $Y_3(\tau)$ – k -, r -, q -мерные вектор-функции.

Введем обозначения:

$$\tilde{Y}(\tau) = (Y_1(\tau), \bar{Y}(\tau) - H_1(\tau)Y_1(\tau))^T, \quad \hat{Y}(\tau) = (\bar{Y}(\tau) - \bar{H}_1(\tau)Y_3(\tau), Y_3(\tau))^T,$$

где $\bar{Y}(\tau) = (Y_2(\tau), Y_3(\tau))^T$, $\bar{Y}(\tau) = (Y_1(\tau), Y_2(\tau))^T$, $X_n(\tau) = \bar{S}(\tau)X_{1k}(\tau)$, $\bar{X}_q(\tau) = \bar{S}(\tau)\bar{X}_{1q}(\tau)$, $X_n(\tau) = \bar{S}(\tau)X_{1k}(\tau)$, $\bar{X}_q(\tau) = \bar{S}(\tau)\bar{X}_{1q}(\tau)$, $K(\tau, s) = \bar{S}(\tau)K_1(\tau, s)$, $\bar{K}(\tau, s) = \bar{S}(\tau)K_1(\tau, s)$, $X_{1k}(\tau)$ – $(n \times k)$ -матрица, столбцами которой являются k первых столбцов матрицы $X_1(\tau)$, а $\bar{X}_{1q}(\tau)$ – $(n \times q)$ -матрица, столбцами которой являются q последних столбцов матрицы $\bar{X}_1(\tau)$,

$$K_1(\tau, s) = \begin{cases} X_1(\tau)PX_1^{-1}(s), & 0 \leq s \leq \tau < +\infty, \\ -X_1(\tau)(I - P)X_1^{-1}(s), & 0 \leq \tau \leq s < +\infty, \end{cases}$$

$$\bar{K}_1(\tau, s) = \begin{cases} -\bar{X}_1(\tau)\bar{P}\bar{X}_1^{-1}(s), & -\infty < \tau \leq s \leq 0, \\ \bar{X}_1(\tau)(I - \bar{P})\bar{X}_1^{-1}(s), & -\infty < s \leq \tau \leq 0, \end{cases}$$

P – спектральный проектор матрицы $\tilde{A}(\tau)$ на левую полуплоскость, а \bar{P} – спектральный проектор матрицы $\hat{A}(\tau)$ на правую полуплоскость.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. [11] Пусть выполнены условия (У5), (У6) Если $\lim_{\tau \rightarrow \infty} x(\tau) = 0$ и $\|Y(\tau)\| \leq c^* \exp(-\alpha^* \tau)$, $c^* > 0, \alpha^* > 0, \tau \geq 0$, то система (9) имеет экспоненциально убывающее решение вида

$$y(\tau) = X_k(\tau)y_1(0) + \int_0^{\infty} K(\tau, s)\tilde{Y}(s)ds, \quad \tau \geq 0.$$

Если $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} x(\tau) = 0$ и $\|Y(\tau)\| \leq \bar{c}^* \exp(\bar{\alpha}^* \tau)$, $\bar{c}^* > 0$, $\bar{\alpha}^* > 0$, $\tau \leq 0$, то система (9) имеет экспоненциально убывающее решение вида

$$y(\tau) = \bar{X}_q(\tau)y_3(0) + \int_{-\infty}^0 \bar{K}(\tau, s)\hat{Y}(s)ds, \quad \tau \leq 0.$$

3. Формальное асимптотическое разложение. Формальное асимптотическое разложение решения задачи (1) – (3) строится в виде

$$x(t, \varepsilon) \equiv x^i(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^i(t) + \Pi_k^i(v_i) + Q_k^i(\mu_i)) \varepsilon^k, \quad (10)$$

$$v_i = \frac{t - \tau_{i-1}}{\varepsilon}, \quad \mu_i = \frac{t - \tau_i}{\varepsilon},$$

где $t \in [\tau_0, \tau_1]$ при $i=1$ и $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i]$ при $i=2, p+1$. Вектор-функции $x_k^i(t)$ – элементы регулярного ряда, а $\Pi_k^i(v_i)$ и $Q_k^i(\mu_i)$ – элементы сингулярного ряда. Через $\Pi_k^i(v_i)$ обозначены пограничные функции в правой окрестности точки $t = \tau_i, i = \overline{0, p}$, а через $Q_k^i(\mu_i)$ – пограничные функции в левой окрестности точки $t = \tau_i, i = \overline{1, p+1}$. Пограничные функции будут построены так, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ на сегменте $[\tau_{i-1}, \tau_i], i = \overline{1, p+1}$ и $\forall k$ при $\gamma_i > 0, \alpha_i > 0, \delta_i > 0, \beta_i > 0$ выполняются неравенства

$$\|\Pi_k^i(v_i)\| \leq \gamma_i \exp(-\alpha_i v_i), \quad v_i \geq 0, \quad \|Q_k^i(\mu_i)\| \leq \delta_i \exp(\beta_i \mu_i), \quad \mu_i \leq 0. \quad (11)$$

Формально подставляя ряд (10) в систему (1), представляя $f(t, x, \varepsilon)$ в виде [2]

$$f(t, x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{f}_k^i(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k^i f(v_i) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k^i f(\mu_i)$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , причем отдельно зависящие от t , от v_i и μ_i , для определения коэффициентов $x_k^i(t)$ получаем системы

$$f(t, x_0^i(t), 0) = 0,$$

$$f'_x(t, x_0^i(t), 0)x_k^i(t) = \frac{dx_{k-1}^i(t)}{dt} - g_k^i(t, x_0^i(t), \dots, x_{k-1}^i(t)), \quad (12)$$

$$i = \overline{1, p+1}, k = 1, 2, 3, \dots$$

Для элементов $\Pi_k^i(v_i)$ первого сингулярного ряда получаем дифференциальные системы

$$\frac{d\Pi_0^i}{dv_i} = f\left(\tau_{i-1}, x_0^i(\tau_{i-1}) + \Pi_0^i(v_i), 0\right),$$

$$\frac{d\Pi_k^i(v_i)}{dv_i} = f'_x\left(\tau_{i-1}, x_0^i(\tau_{i-1}) + \Pi_0^i(v_i), 0\right)\Pi_k^i(v_i) + \quad (13)$$

$$+ G_k^i\left(v_i, \Pi_0^i(v_i), \dots, \Pi_{k-1}^i(v_i)\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

а для пограничных функций $Q_k^i(\mu_i)$ второго сингулярного ряда –

$$\frac{dQ_0^i(\mu_i)}{d\mu_i} = f\left(\tau_i, x_0^i(\tau_i) + Q_0^i(\mu_i), 0\right),$$

$$\frac{dQ_k^i(\mu_i)}{d\mu_i} = f'_x\left(\tau_i, x_0^i(\tau_i) + Q_0^i(\mu_i), 0\right)Q_k^i(\mu_i) + \quad (14)$$

$$+ F_k^i\left(\mu_i, Q_0^i(\mu_i), \dots, Q_{k-1}^i(\mu_i)\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots.$$

3.1. Объединение краевых и импульсных условий. Обобщенный характер импульсных и краевых условий показывает необходимость модификации условий задачи, которая состоится в объединении краевых и импульсных условий, как это сделано в [10] или [9].

Лемма 3.[10] Аддитивный функционал l запишем в виде $l = \sum_{i=1}^{p+1} l_i$, $l_i \in \left(C[\tau_{i-1}, \tau_i] \rightarrow R^n, R^m\right)$. Тогда условия (2) и (3) примут вид

$$\sum_{i=1}^{p+1} \bar{l}_i(x^i) = \bar{h}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{l}_1(x^1) &= \left(l_1 E, \theta_1, \dots, \theta_p\right)^T x^1(\cdot, \varepsilon) + \left(\theta_0, M_1, \theta_2, \dots, \theta_p\right)^T x^1(\tau_1, \varepsilon), \\ \bar{l}_i(x^i) &= \left(l_i E, \theta_1, \dots, \theta_p\right)^T x^i(\cdot, \varepsilon) + \left(\theta_0, \dots, \theta_{i-1}, M_i, \theta_{i+1}, \dots, \theta_p\right)^T x^i(\tau_i, \varepsilon) + \quad (16) \\ &+ \left(\theta_0, \dots, \theta_{i-2}, N_{i-1}, \theta_i, \dots, \theta_p\right)^T x^i(\tau_{i-1}, \varepsilon), \quad i = \overline{2, p-1}, \end{aligned}$$

$\bar{l}_{p+1}(x^{p+1}) = \left(l_{p+1} E, \theta_1, \dots, \theta_p\right)^T x^{p+1}(\cdot, \varepsilon) + \left(\theta_0, \dots, \theta_{p-1}, N_p\right)^T x^{p+1}(\tau_p, \varepsilon)$, $\theta_0 - (m \times n)$ – матрица с нулевыми элементами, $\theta_i, i = \overline{1, p}$, $-(k_i \times n)$ – матрицы с нулевыми элементами и $\bar{h} = (v, h_1, \dots, h_p)^T$.

Отметим, что \bar{l}_i – это линейные функционалы вида

$$\bar{l}_i \in \left(x^i : C[\tau_{i-1}, \tau_i] \rightarrow R^n, R^{m_i}\right), \quad m_i = m + k_1 + \dots + k_p.$$

Подставляя (10) в (15) и имея в виду (16), получаем

$$\sum_{i=1}^{p+1} \bar{l}_i \left[\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(x_k^i(\cdot) + \Pi_k^i \left(\frac{(\cdot) - \tau_{i-1}}{\varepsilon} \right) + Q_k^i \left(\frac{(\cdot) - \tau_i}{\varepsilon} \right) \right) \right] = \bar{h}.$$

После приравнивания при одинаковых степенях ε получаем

$$\sum_{i=1}^{p+1} \bar{l}_i \left[x_k^i(\cdot) + \Pi_k^i \left(\frac{(\cdot) - \tau_{i-1}}{\varepsilon} \right) + Q_k^i \left(\frac{(\cdot) - \tau_i}{\varepsilon} \right) \right] = \begin{cases} h, & i = 0, \\ 0, & i = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (17)$$

3.2. Определение $x_0^i(t)$, $\Pi_0^i(v_i)$, $Q_0^i(\mu_i)$.

Пусть $A(t, \alpha_0(t))$ – $(n \times n)$ –матрица, и $\text{rang } A(t, \alpha_0(t)) = n - r$ для каждого $(t, \alpha_0(t)) \in \Omega_2$. Рассмотрим ортопроекторы

$$P_A(t, \alpha_0(t)) : R^n \rightarrow \ker A(t, \alpha_0(t)), P_{A^*}(t, \alpha_0(t)) : R^n \rightarrow \ker A^*(t, \alpha_0(t)),$$

где через $(*)$ обозначена операция транспонирования. Тогда $(n \times n)$ –матрица $P_A(t, \alpha_0(t))$ имеет ранг $n - (n - r) = r$. Следовательно, матрица $P_A(t, \alpha_0(t))$ имеет r линейно независимых столбцов. Ранг $(n \times n)$ –матрицы $P_{A^*}(t, \alpha_0(t))$ тоже равен $n - (n - r) = r$, и тогда она имеет r линейно независимых строк. Через $P_A^r(t, \alpha_0(t))$ и $P_{A^*}^r(t, \alpha_0(t))$ обозначим соответственно $(n \times r)$ – и $(r \times n)$ – матрицы, составленные соответственно из произвольных r линейно независимых столбцов матрицы P_A и r линейно независимых строк матрицы P_{A^*} .

Для $(r \times r)$ – мерной вектор-функции $\varphi(t, \alpha(t)) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t, \alpha_1, \dots, \alpha_r) \\ \dots \\ \varphi_n(t, \alpha_1, \dots, \alpha_r) \end{pmatrix}$ рассмотрим

$(n \times r)$ – матрицы $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{D(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}$. Введем $(r \times r)$ –матрицы B_i и r – мерные векторы E_0^i

$$B_i(t, \alpha_0^i(t)) = P_{A_i^*}^r(t, \alpha_0^i(t)) \frac{\partial}{\partial \alpha_0^i} \phi_0^i(t, \alpha_0^i(t)), \quad (18)$$

$$E_0^i(t, \alpha_0^i(t)) = -P_{A_i^*}^r(t, \alpha_0^i(t)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi_0^i(t, \alpha_0^i(t)) - g_1^i(t, \alpha_0^i(t)) \right), i = \overline{1, p+1}.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (V1) – (V6). Тогда элементы $x_0^i(t)$ регулярного ряда имеют вид

$$x_0^i(t) = \phi_0^i(t, \alpha_0^i(t)), \quad t \in [\tau_0, \tau_1], t \in (\tau_{i-1}, \tau_i], i = \overline{2, p}, \quad (19)$$

где r – мерные вектор-функции $\alpha_0^i(t)$ определяются из краевых задач

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_0^i(t)}{dt} &= B_i^{-1}(t, \alpha_0^i(t)) E_0^i(t, \alpha_0^i(t)), t \in [\tau_{i-1}, \tau_i] \\ \alpha_0^i(\tau_{i-1}) &= \eta_0^i, \quad \alpha_0^i(\tau_i) = \zeta_0^i, \eta_0^i, \zeta_0^i \in R^r. \end{aligned} \quad (20)$$

Пограничные функции $\Pi_0^i(v_i)$ и $Q_0(\mu_i)$ определяются из дифференциальных систем (13) и (14) при $k=0$ соответственно с начальными условиями $\Pi_{01}(0) = c_0^i, c_0^i \in R^k$ и $Q_{03}^i(0) = d_0^i, d_0^i \in R^q$. Пограничные функции экспоненциально ограничены. При этом постоянные векторы $\eta_0^i, \zeta_0^i, c_0^i, d_0^i$ удовлетворяют нелинейной системе

$$L\left(\eta_0^i, \zeta_0^i, c_0^i, d_0^i, P\left(c_0^i, \eta_0^i\right), \bar{P}\left(d_0^i, \zeta_0^i\right)\right) = \bar{h}. \quad (21)$$

Доказательство. Для определения $x_0(t)$ из (12) получаем систему (4), которая в силу условия (У3) имеет решение (5) $x_0(t) = \varphi(t, \alpha_0(t))$. Его можно записать в виде (19), где $\alpha_0^i(t)$ – пока произвольная r -мерная вектор-функция. Для определения $\alpha_0^i(t)$ рассмотрим систему (12) при $k=1$

$$A_i(t, \alpha_0^i(t))x_1^i(t) = \frac{dx_0^i(t)}{dt} - g_1^i(t, x_0^i(t)), \quad i = \overline{1, p+1}, \quad (22)$$

где $A_i(t, \alpha_0^i(t)) = f'_x(t, \phi_0^i(t, \alpha_0^i(t)), 0)$. Из условия разрешимости

$$P_{A_i^*}^r(t, \alpha_0^i(t)) \left(\frac{dx_0^i(t)}{dt} - g_1^i(t, x_0^i(t)) \right) = 0$$

системы (22) и равенства (19) для определения $\alpha_0^i(t)$ получаем дифференциальную систему

$$B_i(t, \alpha_0^i(t)) \frac{d\alpha_0^i(t)}{dt} = E_0^i(t, \alpha_0^i(t)), \quad i = \overline{1, p+1}, \quad (23)$$

где B_i и E_0^i – обозначения из (18). В силу условия (У5) выполнено

$$\text{rank } B_i(t, \alpha_0^i(t)) = r \quad \forall (t, \alpha_0^i(t)) \in \Omega_2.$$

и система (23) принимает вид из (20).

Элементы матрицы $P_{A_i^*}^r, \frac{\partial \phi_0^i}{\partial \alpha_0^i}$ и вектор-функции $g_1^i, \frac{\partial \phi_0^i}{\partial t}$ являются

непрерывными функциями для каждого $t \in [a, b], t \neq \tau_i$, потому что они представляют композицию из непрерывных функции. Следовательно, правые части системы (20) – непрерывные функции для каждого $(t, \alpha_0^i(t)) \in \Omega_2$. С помощью теоремы о среднем и теоремы Вейерштрасса можно показать, что правые стороны системы (20) – Липшицовы.

Пусть системы (20) с условиями $\alpha_0^i(\tau_{i-1}) = \eta_0^i \in R^r, \alpha_0^i(\tau_i) = \zeta_0^i \in R^r$ имеют единственные решения, для которых $\|\alpha_0^i(t)\| \leq c_2, t \in [\tau_0, \tau_1]$ при $i=1$ и $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i]$ при $i = \overline{2, p+1}$. Обозначим эти решения через $\alpha_0^i = \alpha_0^i(t, \eta_0^i, \zeta_0^i)$.

Для полного определения главного члена $x_0(t)$ регулярного ряда необходимо найти постоянные вектора $\eta_0^i, \zeta_0^i \in R^r$.

Пограничные функции $\Pi_0^i(\nu_i)$ удовлетворяют первой системе из (13)

$$\frac{d\Pi_0^i(\tau)}{d\nu_i} = f\left(\tau_{i-1}, x_0^i(\tau_{i-1}) + \Pi_0^i(\nu_i), 0\right),$$

которая, согласно лемме 1, имеет экспоненциально убывающие решения при $\nu_i \rightarrow +\infty$, если начальные условия

$$\Pi_0^i(0) = \left(\Pi_{01}^i(0), \Pi_{02}^i(0), \Pi_{03}^i(0)\right)^T,$$

принадлежат устойчивому многообразию $\tilde{S}^+(\alpha_0)$

$$\bar{\Pi}_0^i(0) = P\left(\Pi_{01}^i(0), \alpha_0(\tau_{i-1})\right), \quad (24)$$

последней системы, где $\bar{\Pi}_0^i(0) = \left(\Pi_{02}^i(0), \Pi_{03}^i(0)\right)^T$, $\Pi_{01}^i(0)$ – k -мерные, $\Pi_{02}^i(0)$ – r -мерные и $\Pi_{03}^i(0)$ – q -мерные векторы, $k + r + q = n$.

Полагая $\Pi_{01}^i(0) = c_0^i \in R^k$, $i = \overline{1, p+1}$, для окончательного определения $\Pi_0^i(\nu_i)$, $\nu_i \in [0, \frac{\tau_i - \tau}{i-1} \varepsilon]$, $i = \overline{1, p+1}$ достаточно нахождения постоянных r -мерных векторов c_0^i . Можно считать, что $\Pi_0^i = \Pi_0^i(\nu_i, c_0^i, P(c_0^i, \eta_0^i))$.

Аналогично, пограничные функции $Q_0^i(\mu_i)$ удовлетворяют дифференциальным системам

$$\frac{dQ_0^i(\mu_i)}{d\mu_i} = f\left(\tau_i, x_0^i(\tau_i) + Q_0^i(\mu_i), 0\right),$$

которые согласно лемме 1 имеют экспоненциально убывающие решения при $\mu_i \rightarrow -\infty$, если начальные векторы $Q_0^i(0) = \left(Q_{01}^i(0), Q_{02}^i(0), Q_{03}^i(0)\right)^T$ удовлетворяют равенствам

$$\bar{Q}_0^i(0) = \bar{P}\left(Q_{03}^i(0), \alpha_0^i(\tau_i)\right), \quad \bar{Q}_0^i(0) = \left(Q_{01}^i(0), Q_{02}^i(0)\right)^T, \quad (25)$$

где $Q_{0j}^i(0)$, $j = 1, 2, 3$ – соответственно k -мерные, r -мерные, q -мерные векторы.

Полагая $Q_{03}^i(0) = d_0^i \in R^q$, $i = \overline{1, p+1}$, можно считать, что $Q_0^i = Q_0^i(\mu_i, d_0^i, \bar{P}(d_0^i, \zeta_0^i))$.

Определение $\eta_0^i, \zeta_0^i, c_0^i, d_0^i$, $i = \overline{1, p+1}$ осуществляется после подстановки $x_0^i(t)$ из (19) и (24), (25) в краевые условия (17) при $k=0$. Таким образом, получаем уравнение

$$\sum_{i=1}^{p+1} \bar{l}_i \left[\phi_0^i(\cdot, \eta_0^i, \zeta_0^i) + P_{i0}^i \left(\frac{(\cdot) - \tau_{i-1}}{\varepsilon}, c_0^i, P(c_0^i, \eta_0^i) \right) + Q_0^i \left(\frac{(\cdot) - \tau_i}{\varepsilon}, d_0^i, \bar{P}(d_0^i, \zeta_0^i) \right) \right] = \bar{h},$$

т.е. получаем (21). Теорема доказана.

3.3. Определение $x_1^i(t)$, $\Pi_1^i(\nu_i)$ и $Q_1^i(\mu_i)$. Через (12) при $k=1$ получаем систему (22), из которой определяем $x_1^i(t)$. Отметим, что функция $\alpha_0^i(t)$ – уже известная вектор-функция.

Система (22) имеет решение

$$x_1^i(t) = P_{A_i}^r(t)\alpha_1^i(t) + \underbrace{A_i^+(t)\left(\frac{dx_0^i(t)}{dt} - g_1(t, x_0^i(t))\right)}_{\bar{x}_1(t)} \quad (26)$$

тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$P_{A_i}^r(t)\left(\frac{dx_0^i(t)}{dt} - g_1^i(t, x_0^i(t))\right) = 0.$$

Функции $\alpha_0^i(t)$ были определены таким образом, чтобы это равенство выполнялось.

В (26) через $A_i^+(t)$ обозначили единственную псевдообратную по Муру-Пенроузу матрицу к $(n \times n)$ – матрице $A_i(t) = A_i(t, \alpha_0^i(t)) = f'_x(t, x_0^i(t), 0)$ [13],[12].

Неизвестные r -мерные вектор-функции $\alpha_1^i(t)$ определяются из условия разрешимости системы (12) при $k=2$ относительно $x_2(t)$

$$A_i(t)x_2^i(t) = \frac{dx_1^i(t)}{dt} - g_2^i(t, x_0^i(t), x_1^i(t)), \quad i = \overline{1, p+1}, \quad (27)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} D_i(t) &= P_{A_i}^r(t)P_{A_i}^r(t) - (r \times r) - \text{матрицы,} \\ E_1^i(t) &= P_{A_i}^r(t)g_2(t, x_0^i(t), x_1^i(t)) - P_{A_i}^r(t)\frac{d}{dt}\left(P_{A_i}^r(t)\alpha_1^i(t) - \right. \\ &\left. - P_{A_i}^r(t)\frac{d}{dt}A_i^+(t)\left(\frac{dx_0}{dt} - g_1^i(t, x_0^i(t))\right)\right) - r - \text{мерные вектор функции.} \end{aligned} \quad (28)$$

Лемма4. Вектор-функции $\alpha_1^i(t), t \in [a, b], t \neq \tau_i, i = \overline{1, p+1}$ удовлетворяют дифференциальной системе

$$\frac{d\alpha_1^i(t)}{dt} = D_i^{-1}(t)E_1^i(t, \alpha_1^i(t)). \quad (29)$$

Доказательство. В условие разрешимости системы (27)

$$P_{A_i}^r(t)\left(\frac{dx_1^i(t)}{dt} - g_2^i(t, x_0^i(t), x_1^i(t))\right) = 0$$

подставляем $x_1^i(t)$ из (26). Поскольку нелинейные функции g_2^i зависят от $x_1^i(t)$, в них участвуют и $\alpha_1^i(t)$. Из последнего равенства и обозначения (28) получаем нелинейную систему относительно $\alpha_1^i(t)$

$$D_i(t) \frac{d\alpha_1^i(t)}{dt} = E_1^i(t, \alpha_1^i(t))$$

Покажем, что $\text{rank}D_i(t) = r$. Известно, что существуют неособые матрицы, которые переводят матрицы $A_i(t)$ в диагональный вид. Предположим, что $A_i(t) = \text{diag}(\overline{A}_i(t), \Theta_i, \overline{\overline{A}}_i(t))$, где $\overline{A}_i(t)$ – $(k \times k)$ -матрицы, собственные числа которых имеют отрицательные вещественные части, $\overline{\overline{A}}_i(t)$ – $(q \times q)$ -матрицы, собственные числа которых имеют положительные вещественных части, и Θ_i – $(r \times r)$ -матрицы с нулевыми элементами. Тогда псевдообратная матрица $A_i^+(t)$ имеет вид $A_i^+(t) = \text{diag}(\overline{A}_i^{-1}(t), \Theta_i, \overline{\overline{A}}_i^{-1}(t))$.

Ортопроекторы [12] $P_{A_i}(t)$ и $P_{A_i^*}(t)$ для каждого $t \in [a, b], t \neq \tau_i, i = \overline{1, p+1}$ имеют вид $P_{A_i}(t) = E_n - A_i^+(t)A_i(t)$, и $P_{A_i^*}(t) = E_n - A_i(t)A_i^+(t)$. Получаем соответственно $(n \times r)$ -, $(r \times n)$ -матрицы $P_{A_i}^r(t) = (\Theta_{kr}, E_r, \Theta_{qr})^T$, $P_{A_i^*}^r(t) = (\Theta_{rk}, E_r, \Theta_{qr})$, где $\Theta_{kr}, \Theta_{qr}, \Theta_{rk}$ – $(k \times r)$ -, $(q \times r)$ – $(r \times k)$ -матрицы с нулевыми элементами, E_n, E_r – единичные матрицы.

Следовательно, $D_i(t) = P_{A_i^*}^r(t)P_{A_i}^r(t) = E_n$, т.е. $\text{rank}D_i(t) = r$. Дифференциальная система для функции $\alpha_1^i(t)$ принимает вид (29). Таким образом, лемма доказана.

Пограничные функции $\Pi_1^i(\vartheta_i)$ и $Q_1^i(\mu_i)$ удовлетворяют дифференциальным системам

$$\frac{d\Pi_1^i(\nu_i)}{d\nu_i} = f'_x(\tau_{i-1}, x_0^i(\tau_{i-1}) + \Pi_0^i(\nu_i), 0)\Pi_1^i(\nu_i) + G_1^i(\nu_i, \Pi_0^i(\nu_i)). \quad (30)$$

$$\frac{dQ_1^i(\mu_i)}{d\mu_i} = f'_x(\tau_i, x_0^i(\tau_i) + Q_0^i(\mu_i), 0)Q_1^i(\mu_i) + F_1^i(\mu_i, Q_0^i(\mu_i)), \quad (31)$$

которые получаются из (12) и (13) при $k=1$. Для $G_1^i(\nu_i, \Pi_0^i(\nu_i))$ и $F_1^i(\mu_i, Q_0^i(\mu_i))$ справедливы оценки [2]

$$\|G_1^i(\nu_i, \Pi_0^i(\nu_i))\| \leq c^* \exp(-\alpha^* \tau), c^* > 0, \alpha^* > 0, \nu_i \geq 0,$$

$$\|F_1^i(\mu_i, Q_0^i(\mu_i))\| \leq c_1^* \exp(-\alpha_1^* \tau), c_1^* > 0, \alpha_1^* > 0, \nu_i \leq 0.$$

Согласно лемме 2 и теореме 1 системы (30), (31) имеют соответственно экспоненциально убывающие решения вида

$$\begin{aligned} \Pi_1^i(\nu_i) &= X_k^i(\nu_i)c_1^i + \int_0^\infty K^i(\nu_i, s)\overline{G}_1^i(s)ds, \nu_i \geq 0, c_1^i \in R^k, \\ Q_1^i(\mu_i) &= \overline{X}_q^i(\mu_i)d_1^i + \int_{-\infty}^0 \overline{K}^i(\mu_i, s)\overline{F}_1^i(s)ds, \mu_i \leq 0, d_1^i \in R^q, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{G}_1^i(s) &= \left(G_{11}^i(s), \bar{G}_1^i(\tau) - H_1^i(s)G_{11}^i(s) \right)^T, \\ G_1^i(s) &= \left(G_{11}^i(s), G_{12}^i(s), G_{13}^i(s) \right)^T, \bar{\bar{G}}_1^i(s) = \left(G_{12}^i(s), G_{13}^i(s) \right)^T, \\ \bar{F}_1^i(s) &= \left(\bar{\bar{F}}_1^i(s) - \bar{H}_1^i(s)F_{13}^i(s), F_{13}^i(s) \right)^T, \\ F_1^i(s) &= \left(F_{11}^i(s), F_{12}^i(s), F_{13}^i(s) \right)^T, \bar{\bar{F}}_1^i(s) = \left(F_{11}^i(s), F_{12}^i(s) \right)^T,\end{aligned}$$

а $X_k^i(\nu_i)$, $\bar{X}_q^i(\mu_i)$ –соответственно $(n \times k)$ –, $(n \times r)$ – матрицы, которые получаются из фундаментальной матрицы системы $\frac{dx}{d\tau} = A_i(\tau)$ с помощью замены переменных. Подставляя (26), (32) в (17) при $k = 1$, получаем

$$\sum_{i=1}^{p+1} \bar{l}_i \left(x_1^i(\cdot) + \Pi_1^i \left(\frac{(\cdot) - \tau_{i-1}}{\varepsilon} \right) + Q_1^i \left(\frac{(\cdot) - \tau_i}{\varepsilon} \right) \right) = 0. \quad (33)$$

Вводим обозначения

$$\begin{aligned}D_1^i(\varepsilon) &= \bar{l}_i X_k^i \left(\frac{(\cdot) - \tau_{i-1}}{\varepsilon} \right) - (m_1 \times k) - \text{матрицы, } m_1 = m + k_1 + \dots + k_p, \\ D_2^i(\varepsilon) &= \bar{l}_i \bar{X}_q^i \left(\frac{(\cdot) - \tau_i}{\varepsilon} \right) - (m_1 \times q) - \text{матрицы,} \\ h_1(\varepsilon) &= - \sum_{i=1}^{p+1} \bar{l}_i \left[A_i^+(\cdot) \left(\frac{dx_0^i(\cdot)}{dt} - g_1^i(\cdot, x_0^i(\cdot)) \right) + \int_0^\infty K^i \left(\frac{(\cdot) - \tau_{i-1}}{\varepsilon}, s \right) \bar{G}_1^i(s) ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^0 \bar{K}^i \left(\frac{(\cdot) - \tau_i}{\varepsilon}, s \right) \bar{F}_1^i(s) ds \right] - m_1 - \text{вектор,} \quad \tilde{l}_i \alpha_i^i(\cdot) = \bar{l}_i P_{A_i}^r(\cdot) \alpha_1^i(\cdot).\end{aligned}$$

Тогда равенство (33) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{p+1} \left[\bar{l}_i P_{A_i}^r(\cdot) \alpha_1^i(\cdot) + D_1^i(\varepsilon) c_1^i + D_2^i(\varepsilon) d_1^i \right] = h_1(\varepsilon).$$

С учетом равенства

$$\sum_{i=1}^{p+1} \bar{l}_i P_{A_i}^r(\cdot) \alpha_1^i(\cdot) = \bar{E} \tilde{l} \alpha(\cdot); \quad \sum_{i=1}^{p+1} D_1^i(\varepsilon) c_1^i = D_1(\varepsilon) c_1; \quad \sum_{i=1}^{p+1} D_2^i(\varepsilon) d_1^i = D_2(\varepsilon) d_1,$$

где $\bar{E} = (E_{m_1} \dots E_{m_1}) - (m_1 \times (p+1)m_1)$ – матрица, E_{m_1} – единичная матрица,

$$\tilde{l} \alpha(\cdot) = (\tilde{l}_1 \alpha_1^1(\cdot), \dots, \tilde{l}_{p+1} \alpha_1^{p+1}(\cdot))^T;$$

$$D_1(\varepsilon) = (D_1^1(\varepsilon) \dots D_1^{p+1}(\varepsilon)) - (m_1 \times (p+1)k) - \text{матрица,}$$

$$c_1 = (c_1^1, \dots, c_1^{p+1})^T - (p+1)k - \text{вектор;}$$

$$D_2(\varepsilon) = (D_2^1(\varepsilon) \dots D_2^{p+1}(\varepsilon)) - (m_1 \times (p+1)q) - \text{матрица,}$$

$$d_1 = (d_1^1, \dots, d_1^{p+1})^T - (p+1)q - \text{вектор, получаем систему}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{E} & D_1(\varepsilon) & D_2(\varepsilon) \\ \tilde{l}\alpha(\cdot) \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = h_1(\varepsilon). \quad (34)$$

Мы рассматриваем краевую задачу и, естественно предположить, что матрицы $D_1(\varepsilon)$, $D_2(\varepsilon)$ и вектор $h_1(\varepsilon)$ имеют структуру

$$D_1(\varepsilon) = D_{10} + O(\varepsilon^{q_1} \exp(-\gamma_1 / \varepsilon)), \quad D_2(\varepsilon) = D_{20} + O(\varepsilon^{q_2} \exp(-\gamma_2 / \varepsilon)),$$

$$h_1(\varepsilon) = h_{10} + O(\varepsilon^{q_3} \exp(-\frac{\gamma_3}{\varepsilon})), \quad q_i > 0, \gamma_i > 0, i = 1, 2, 3,$$

где D_{10} , D_{20} – постоянные матрицы, размерности которых совпадают с размерностями матриц $D_1(\varepsilon)$, $D_2(\varepsilon)$, а h_{10} – m_1 -мерный постоянный вектор. Кроме того, $O(\varepsilon^{q_i} \exp(-\frac{\gamma_i}{\varepsilon}))$ здесь и в дальнейшем – матрицы соответствующих размерностей, компоненты которых бесконечно малые по отношению к произвольной степени ε .

Так как элементы $O(\varepsilon^{q_i} \exp(-\frac{\gamma_i}{\varepsilon}))$ сколь угодно малы при $\varepsilon \rightarrow 0$, для $D_1(\varepsilon)$, $D_2(\varepsilon)$ получаем

$$\|D_1(\varepsilon)\| = O(1) + O\left(\varepsilon^q \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)\right), \quad \|D_2(\varepsilon)\| = O(1) + O\left(\varepsilon^q \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)\right).$$

Последние равенства при $\varepsilon \rightarrow 0$ принимают вид $\|D_1(\varepsilon)\| = O(1)$, $\|D_2(\varepsilon)\| = O(1)$. Аналогично $\|h_1(\varepsilon)\| = O(1)$. Поэтому для упрощения выкладок можно опустить экспоненциально малые элементы в $D_1(\varepsilon)$, $D_2(\varepsilon)$, $h_1(\varepsilon)$. Тогда система (34) примет вид

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{E} & D_{10} & D_{20} \\ \tilde{l}\alpha(\cdot) \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}}_Q = h_{10}. \quad (35)$$

Разности решений систем (35) и (34) являются экспоненциально малыми элементами вида $O(\varepsilon^q \exp(-\frac{\gamma}{\varepsilon}))$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение системы (35) – это решение системы (34).

Очевидно, $\text{rank}(\bar{E} \ D_{10} \ D_{20}) = \text{rank} Q = m_1$. Тогда система (35) имеет однопараметрическое решение

$$\begin{pmatrix} \tilde{l}\alpha(\cdot) \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = P_Q^\eta \xi + Q^+ h_{10}, \quad \xi \in R^\eta, \quad \eta = (p+1)(m_1 + k + q) - m_1, \quad (36)$$

где $P_Q^\eta - ((p+1)(m_1+k+q) \times \eta)$ -матрица, составленная из η произвольных линейно независимых столбцов матрицы P_Q , $P_Q : R^{(p+1)(m_1+k+q)} \rightarrow \ker Q$; Q^+ – единственная псевдообратная матрица матрицы Q . В этом случае $P_{Q^*} = 0$, и условие разрешимости $P_{Q^*} h_{10} = 0$ системы (35) всегда выполнено.

Из равенства (36) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{l}\alpha(\cdot) &= [P_Q^\eta]^{(p+1)m_1} \xi_1 + [Q^+ h_{10}]^{(p+1)m_1}, & c_1 &= [P_Q^\eta]^{(p+1)k} \xi_1 + [Q^+ h_{10}]^{(p+1)k}, \\ d_1 &= [P_Q^\eta]^{(p+1)q} \xi_1 + [Q^+ h_{10}]^{(p+1)q}, \end{aligned}$$

где индексы $(p+1)m_1, (p+1)k, (p+1)q$ показывают, что из матрицы P_Q^η и вектора $Q^+ h_{10}$ взяты первые $(p+1)m_1$, вторые $(p+1)k$, последние $(p+1)q$ строки. С учетом вид $\tilde{l}\alpha(\cdot), c_1, d_1$ и последних равенств получаем

$$\begin{aligned} \tilde{l}\alpha(\cdot) &= [P_Q^\eta]_{m_i}^{(p+1)m_1} \xi_1 + [Q^+ h_{10}]_{m_i}^{(p+1)m_1}, & c_1 &= [P_Q^\eta]_{k_i}^{(p+1)k} \xi_1 + [Q^+ h_{10}]_{k_i}^{(p+1)k}, \\ d_1 &= [P_Q^\eta]_{q_i}^{(p+1)q} \xi_1 + [Q^+ h_{10}]_{q_i}^{(p+1)q}, \end{aligned} \quad (37)$$

где: m_1 – первые m_1 строк матрицы $[P_Q^\eta]^{(p+1)m_1}$ и первые m_1 строк вектора $[Q^+ h_{10}]^{(p+1)m_1}$; k_1, q_1 – первые строки соответственно матриц $[P_Q^\eta]^{(p+1)k}, [P_Q^\eta]^{(p+1)q}$ и векторов $[Q^+ h_{10}]^{(p+1)k}, [Q^+ h_{10}]^{(p+1)q}$; m_{12}, k_2, q_2 – вторые m_1 строк, и т.д.

Подставляя (37) в (32), для $\Pi_1^i(v_i)$ и $Q_1^i(\mu_i)$ получаем

$$\begin{aligned} \Pi_1^i(v_i) &= \tilde{X}_k^i(v_i) \xi_1 + \bar{\Pi}_1^i(v_i), \\ Q_1^i(\mu_i) &= \tilde{X}_q^i(\mu_i) \xi_1 + \bar{Q}_1^i(\mu_i), \quad i = \overline{1, p+1}, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{X}_k^i(v_i) &= X_k^i(v_i) [P_Q^\eta]_{k_i}^{(p+1)k}, & \tilde{X}_q^i(\mu_i) &= \bar{X}_q^i(\mu_i) [P_Q^\eta]_{q_i}^{(p+1)q} \\ \bar{\Pi}_1^i(v_i) &= X_k^i(v_i) [Q^+ h_{10}]_{k_i}^{(p+1)m_1} + \int_0^\infty K^i(v_i, s) \bar{G}_1^i(s) ds \\ \bar{Q}_1^i(\mu_i) &= \bar{X}_q^i(\mu_i) [Q^+ h_{10}]_{q_i}^{(p+1)m_1} + \int_{-\infty}^0 \bar{K}^i(\mu_i, s) \bar{F}_1^i(s) ds. \end{aligned} \quad (39)$$

Учитывая (29) и первое равенство из (37), для $\alpha_1^i(t)$ получаем нелинейную краевую задачу

$$\frac{d\alpha_1^i(t)}{dt} = \bar{E}_1^i(t, \alpha_1^i(t)), \quad \tilde{l}_i \alpha_1^i(\cdot) = h_1^i(\xi_1), \quad (40)$$

где $t \in [\tau_0, \tau_1]$ при $i = 1$ и $(\tau_{i-1}, \tau_i]$ при $i = \overline{2, p+1}$,

$$\bar{E}_1^i(t, \alpha_1^i(t)) = D_i^{-1}(t) E_1^i(t, \alpha_1^i(t)), \quad h_1^i(\xi_1) = B_1^i \xi_1 + b_1^i,$$

$$B_1^i = [P_Q^\eta]_{m_i}^{(p+1)m_i}, \quad b_1^i = [Q^+ h_{10}]_{m_i}^{(p+1)m_i}, \quad \tilde{l}_i \alpha_i^i(\cdot) = \bar{l}_i P_{A_i}^r(\cdot) \alpha_1^i(\cdot).$$

Прежде, чем решить систему (40), покажем, как находится ξ_1 . Для этого введем обозначения:

$$\Phi_{2i}(t, \xi_1) - (r \times r) - \text{фундаментальная матрица системы } \frac{dx}{dt} = H_2^i(t, \xi_1)x,$$

$$x \in R^r, \quad H_2^i(t, \xi_1) - (r \times r) - \text{ матрица при } t \in [\tau_0, \tau_1] \text{ и } t \in (\tau_{i-1}, \tau_i];$$

$$P_{2i}(\xi_1) = \bar{l}_i P_{A_i}^r(\cdot) \Phi_{2i}(\cdot, \xi_1) \Phi_{2i}(\tau_{i-1}, \xi_1) - (m_1 \times r) - \text{ матрицы};$$

$$\eta_2 = (\eta_2^1, \dots, \eta_2^{p+1})^T - (p+1)r - \text{ мерный вектор}; \quad c_2 = (c_2^1, \dots, c_2^{p+1})^T - (p+1)k - \text{ мерный вектор};$$

$$d_2 = (d_2^1, \dots, d_2^{p+1})^T - (p+1)q - \text{ мерный вектор};$$

$$P_2(\xi_1) = (P_{21}(\xi_1) \cdots P_{2,p+1}(\xi_1)) - (m_1 \times (p+1)r) - \text{ матрица};$$

$$\bar{h}_2(\varepsilon, \xi_1) = \bar{h}_{20}(\xi_1) + O(\varepsilon^{q_3} \exp(-\frac{\gamma_3}{\varepsilon}));$$

$$R_2(\xi_1) = (P_2(\xi_1) \quad D_{10}(\xi_1) \quad D_{20}(\xi_1)) - (m_1 \times (p+1)n) - \text{ матрица}.$$

Лемма 5. *Постоянный вектор $\xi_1 \in R^n$, $\eta = (p+1)(m_1 + k + q) - m_1$ удовлетворяет нелинейному уравнению $P_{R_{20}^*}(\xi_1) \bar{h}_{20}(\xi_1) = 0$, где $P_{R_{20}^*}$ - ортопроектор $P_{R_{20}^*} : R^{m_1} \rightarrow \ker(R_{20}^*(\xi_1))$, $R^* = R^T$.*

Доказательство. Система для определения $x_2^i(t)$ - это (27)

$$A_i(t)x_2^i(t) = \frac{dx_1^i(t)}{dt} - g_2^i(t, x_0^i(t), x_1^i(t)), \quad i = \overline{1, p+1},$$

которая имеет решение

$$x_2^i(t) = P_{A_i}^r(t) \alpha_2^i(t) + \bar{x}_2^i(t, \xi_1), \quad (41)$$

где $\bar{x}_2^i(t, \xi_1) = A_i^*(t) \left(\frac{dx_1^i}{dt} - g_2^i(t, \xi_1) \right)$. Согласно лемме 2 решения системы (13) и (14) при $k=2$ экспоненциально убывающие и имеют вид

$$\Pi_2^i(v_i) = X_k^i(v_i) c_2^i + \int_0^\infty K^i(v_i, s) \bar{G}_2^i(s) ds, \quad v_i \geq 0, \quad c_2^i \in R^k, \quad (42)$$

$$Q_2^i(\mu_i) = \bar{X}_q^i(\mu_i) d_2^i + \int_{-\infty}^0 \bar{K}^i(\mu_i, s) \bar{F}_2^i(s) ds, \quad \mu_i \leq 0, \quad d_2^i \in R^q,$$

где \bar{G}_2^i и \bar{F}_2^i получаются аналогично, также как и \bar{G}_1^i и \bar{F}_1^i из леммы 5.

Подставляя (41) и (42) в краевые условия (17) при $k=2$

$$\sum_{i=1}^{p+1} \bar{l}_i \left(x_2^i(\cdot) + \Pi_2^i \left(\frac{(\cdot) - \tau_{i-1}}{\varepsilon} \right) + Q_2^i \left(\frac{(\cdot) - \tau_i}{\varepsilon} \right) \right) = 0,$$

и после преобразований получаем

$$\sum_{i=1}^{p+1} \left[\bar{l}_i P_{A_i}^r(\cdot) \alpha_2^i(\cdot) + D_1^i(\varepsilon) c_2^i + D_2^i(\varepsilon) d_2^i \right] = h_2(\varepsilon, \xi_1), \quad (43)$$

где

$$h_2(\varepsilon, \xi_1) = -\sum_{i=1}^{p+1} \bar{l}_i \left[A_i^+(\cdot) \left(\frac{dx_1^i(\cdot)}{dt} - g_2^i(\cdot, \xi_1(\cdot)) \right) + \int_0^\infty K^i \left(\frac{\cdot - \tau_{i-1}}{\varepsilon}, s \right) \bar{G}_2^i(s) ds + \int_{-\infty}^0 \bar{K}^i \left(\frac{\cdot - \tau_i}{\varepsilon}, s \right) \bar{F}_2^i(s) ds \right].$$

Функции α_2^i из (41) находим из условий разрешимости

$$P_{A_i^*}^r(t) \left(\frac{dx_2^i(t)}{dt} - g_3^i(t, x_0^i(t), x_1^i(t), x_2^i(t)) \right) = 0 \quad (44)$$

системы

$$A_i(t)x_3^i(t) = \left(\frac{dx_2^i(t)}{dt} - g_3^i(t, x_0^i(t), x_1^i(t), x_2^i(t)) \right),$$

которая получается из (12) при $k = 3$. При этом

$$g_3^i(t, x_0^i(t), x_1^i(t), x_2^i(t)) = C_3^i(t, x_0^i(t), x_1^i(t))x_2^i(t) + \bar{g}_3^i(t, x_0^i(t), x_1^i(t)) = C_3^i(t, \xi_1)x_2^i(t) + \bar{g}_3^i(t, \xi_1),$$

где $C_3^i - (n \times n)$ – матрицы, которые состоят из вторых частных производных вектор-функции $f(t, x, \varepsilon)$.

Подставляя $x_2^i(t)$ из (41) в (44) и имея в виду, что $x_1^i(t)$ зависят от ξ_1 , находим

$$\frac{d\alpha_2^i(t)}{dt} = H_2^i(t, \xi_1)\alpha_2^i(t) + \bar{E}_2^i(t, \xi_1), i = \overline{1, p+1}, \quad (45)$$

где

$$H_2^i(t, \xi_1) = D_i^{-1}(t)P_{A_i^*}^r(t) \left[C_3^i(t, \xi_1)P_{A_i^*}^r(t) - \frac{dP_{A_i^*}^r(t)}{dt} \right],$$

$$\bar{E}_2^i(t, \xi_1) = D_i^{-1}(t)P_{A_i^*}^r(t) \left[C_3^i(t, \xi_1)\bar{x}_2^i(t, \xi_1) - \frac{d\bar{x}_2^i(t, \xi_1)}{dt} - \bar{g}_3^i(t, \xi_1) \right].$$

С учетом введенных обозначений, для решения системы (45) получаем

$$\alpha_2^i(t, \xi_1) = \Phi_{2i}(t, \xi_1)\Phi_{2i}^{-1}(\tau_{i-1}, \xi_1)\eta_2^i + \int_{\tau_{i-1}}^t \Phi_{2i}(t, \xi_1)\Phi_{2i}^{-1}(s, \xi_1)\bar{E}_2^i(s, \xi_1)ds, \quad \eta_2^i \in R^r. \quad (46)$$

Подставляя (46) в (43), с учетом введенных обозначений, для определения η_2, c_2, d_2 получаем

$$(P_2(\xi_1) \quad D_1(\varepsilon, \xi_1) \quad D_2(\varepsilon, \xi_1)) \begin{pmatrix} \eta_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \bar{h}_2(\varepsilon).$$

Учитывая равенства

$$D_1(\varepsilon, \xi_1) = D_{10}(\xi_1) + O(\varepsilon^{q_1} \exp(-\frac{\gamma_1}{\varepsilon})), \quad D_2(\varepsilon, \xi_1) = D_{20}(\xi_1) + O(\varepsilon^{q_2} \exp(-\frac{\gamma_2}{\varepsilon})),$$

$$\bar{h}_2(\varepsilon, \xi_1) = \bar{h}_{20}(\xi_1) + O(\varepsilon^{q_3} \exp(-\frac{\gamma_3}{\varepsilon}))$$

и обозначение $R_{20}(\xi_1) = (P_2(\xi_1) \ D_{10}(\xi_1) \ D_{20}(\xi_1))$, для ξ_1 получаем

$$R_{20}(\xi_1) \begin{pmatrix} \eta_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \bar{h}_{20}(\xi_1). \quad (47)$$

Условие разрешимости системы (47) имеет вид

$$P_{R_{20}^*}(\xi_1) \bar{h}_{20}(\xi_1) = 0. \quad (48)$$

Таким образом, лемма доказана.

Введем обозначения: $\bar{Q}_i = \tilde{l}_i E - (m_1 \times r)$ – матрицы, для которых выполнено условие $\text{rank} \bar{Q}_i = n_i \leq \min(m_1, r)$; $\bar{Q}_i^+ - (r \times m_1)$ – псевдообратные матрицы к матрицам \bar{Q}_i ; $P_{\bar{Q}_i}^{e_i} - (r \times e_i)$ – матрицы, составленные соответственно из $e_i = r - n_i$ линейно независимых столбцов $(r \times r)$ ортопроекторов $P_{\bar{Q}_i} : R^r \rightarrow \ker(\bar{Q}_i)$; $P_{\bar{Q}_i}^{w_i} - (w_i \times m_1)$ – матрицы, составленные соответственно из $w_i = m_1 - n_i$ линейно независимых строк $(m_1 \times m_1)$ ортопроекторов $P_{\bar{Q}_i}^* : R^{m_1} \rightarrow \ker(\bar{Q}_i^*)$; $\alpha_{10}^i(t, c_{n_i}) = P_{\bar{Q}_i}^{n_i} c_{n_i}, c_{n_i} \in R^{n_i}$ – решение порождающей системы $\frac{d\alpha_1^i}{dt} = 0, \tilde{l}_1 \alpha_1^i(\cdot) = 0$ краевой задачи (40);

$$A_1^i(t, c_{n_i}) = \frac{\partial \bar{E}_1^i(t, \alpha_1^i)}{\partial \alpha_1^i} \Big|_{\alpha_1^i = \alpha_{10}^i(t, c_{n_i})}; \quad g(t, \tau) = \begin{cases} 1, & \tau_{i-1} \leq \tau \leq t \leq \tau_i, \\ 0, & \tau_{i-1} \leq t \leq \tau \leq \tau_i; \end{cases}$$

$$B_{0i} = P_{\bar{Q}_i}^{e_i} \left(\tilde{l}_i E - \tilde{l}_i \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} g(\cdot, \tau) A_1^i(\tau) d\tau \right) P_{\bar{Q}_i}^{w_i} - (w_i \times e_i) - \text{матрицы};$$

$$P_{B_{0i}} : R^{e_i} \rightarrow \ker(B_{0i}), \quad P_{B_{0i}^*} : R^{w_i} \rightarrow \ker(B_{0i}^*), \quad i = \overline{1, p+1}.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (У1)-(У6), условия теоремы 1, $P_{B_{0i}} = 0, P_{B_{0i}^*} P_{\bar{Q}_i}^{e_i} = 0$ и $\text{rank} R_{20}(\xi_1) = s_1 \leq \min(m_1, (p+1)n)$ при всех $\xi_1 \in R^n$. Тогда коэффициенты ряда (10) $x_1^i(t), \Pi_1^i(v_i), Q_1^i(\mu_i), i = \overline{1, p+1}$, имеют вид (26), (32), где функции $\alpha_1^i(t)$ удовлетворяют нелинейной краевой задач (40), а вектор $\xi_1 \in R^n$ – уравнению вида (48). Пограничные функции экспоненциально убывают.

Доказательство. Вышеуказанное показывает, что действительно $x_1^i(t)$ имеют вид из (26), а пограничные функции $\Pi_1^i(\nu_i), Q_1^i(\mu_i)$ – вида (32). Покажем, что краевая задача (40) имеет решение.

Согласно теореме 2 из [1], применимой для импульсных систем, для любого корня $c_{n_i} = c_{n_i}^* \in R^{n_i}$ уравнения

$$P_{Q_i}^{e_i} \left(h_1^i(\xi_1) - \tilde{l}_i \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} g(\cdot, \tau) \bar{E}_1^i(\alpha_{10}^i(c_{n_i}, \tau) d\tau \right) = 0$$

при $P_{B_{0i}} = 0, P_{B_{0i}}^* P_{Q_i}^{e_i} = 0$, существует единственное решение $\alpha_1^i(t) = \alpha_1^i(c_{n_i}, t)$ краевой задачи (40) в окрестности порождающего решения $\alpha_{10}^i = P_{Q_i}^{n_i} c_{n_i}$.

Пусть $\text{rank} R_{20}(\xi_1) = s_1 \leq \min(m_1, (p+1)n)$ при всех $\xi_1 \in R^n$, где $R_{20}(\xi_1)$ – матрица из (47). Так как ξ_1 удовлетворяет условию разрешимости (48) системы (47), то решение (47) имеет вид

$$(\eta_2, c_2, d_2)^T = P_R^\beta(\xi_1) \xi_2 + R^+(\xi_1) \bar{h}_{20}(\xi_1), \xi_2 \in R^\beta, \beta = m_1 - n_1.$$

Ясно, что ξ_2 определяется на следующем этапе при $k=3$. Вектор ξ_1 , удовлетворяющий (48), подставляем в (34). Тогда определяются $\tilde{l}\alpha_1(\cdot), c_1, d_1$, а следовательно и $\alpha_1^i(t)$. Таким образом, вполне определены $x_1^i(t), \Pi_1^i(\nu_i), Q_1^i(\mu_i), i = \overline{1, p+1}$. Из леммы 5 следует, что пограничные функции экспоненциально убывают.

Теорема доказана.

3.4. Определение $x_k^i(t), \Pi_k^i(\nu_i)$ и $Q_k^i(\mu_i)$.

В этом пункте применим индуктивный подход для определения x_k^i, Π_k^i и Q_k^i . Предположим, что все коэффициенты разложения (10) до $k-2$ -ого порядка вполне определены. Для $(k-1)$ -го порядка остался неопределен вектор ξ_{k-1} . Имея в виду обозначения из пункта 3.3, все обозначения в дальнейшем в принципе ясные.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (У1)- (У6), условия теоремы 1, теоремы 2 и $\text{rank} R_{k0}(\xi_{k-1}) = s_k \leq \min(m_1, (p+1)n)$ при всех $\xi_{k-1} \in R^n$. Тогда коэффициенты ряда (10) $x_k^i(t), \Pi_k^i(\nu_i), Q_k^i(\mu_i), i = \overline{1, p+1}$, имеют вид

$$\begin{aligned} x_k^i(t) &= \Phi_{ki}^r(t, \tau_{i-1}) \left[P_{R_{k0}} \right]_{m_i}^{(p+1)m_1} \xi_k + \tilde{x}_k^i(t), \\ \Pi_k^i(\nu_i) &= X_k^i(\nu_i) \left[P_{R_{k0}} \right]_{ki}^{(p+1)k} \xi_k + \tilde{\Pi}_k^i(\nu_i), \\ Q_k^i(\mu_i) &= \bar{X}_k^i(\mu_i) \left[P_{R_{k0}} \right]_{qi}^{(p+1)q} \xi_k + \tilde{Q}_k^i(\mu_i), \end{aligned} \quad (49)$$

где вектор $\xi_k \in R^n$ удовлетворяет уравнению вида

$$P_{R_{k+1,0}}(\xi_k) \bar{h}_{k+1,0}(\xi_k) = 0$$

и

$$\tilde{x}_k^i(t) = \Phi_{ki}^r(t, \tau_{i-1}) \left[R_{k0}^+ \bar{h}_{k0} \right]_{m_i}^{(p+1)m_1} + \bar{x}_k^i(t),$$

$$\tilde{\Pi}_k^i(v_i) = X_k^i(v_i) \left[R_{k0} \bar{h}_{k0} \right]_{ki}^{(p+1)m_1} + \int_0^\infty K^i(v_i, s) \bar{G}_k^i(s) ds,$$

$$\tilde{Q}_k^i(\mu_i) = \bar{X}_q^i(\mu_i) \left[R_{k0} \bar{h}_{k0} \right]_{qi}^{(p+1)m_1} + \int_{-\infty}^0 \bar{K}^i(\mu_i, s) \bar{F}_k^i(s) ds.$$

Пограничные функции удовлетворяют неравенству (11).

Доказательство. Решение системы (12) при $k \geq 2$ имеет вид

$$x_k^i(t) = P_{A_i}^r(t) \alpha_k^i(t) + \bar{x}_k^i(t), \quad (50)$$

где $\bar{x}_k^i(t) = A_i^+(t) \left(\frac{dx_{k-1}^i(t)}{dt} - g_k^i(t, x_0^i, \dots, x_{k-1}^i(t)) \right)$. Вектор-функции $\alpha_k^i(t)$ определяются из условия разрешимости

$$P_{A_i^*}^r(t) \left(\frac{dx_k^i(t)}{dt} - g_{k+1}^i(t, x_0^i, \dots, x_k^i(t)) \right) = 0$$

системы (12) при $(k+1)$. Подставляя (50) в это условие и имея в виду, что

$$g_{k+1}^i(t, x_0^i, \dots, x_k^i(t)) = g_{k+1}^i(t, x_0^i, \dots, x_{k-1}^i(t), P_{A_i}^r(t) \alpha_k^i(t) + \bar{x}_k^i(t)) = C_k^i(t, \xi_{k-1}) \alpha_k^i(t) + \bar{g}_{k+1}^i(t, \xi_{k-1})$$

для определения $\alpha_k^i(t)$ получаем линейные системы

$$\frac{d\alpha_k^i(t)}{dt} = H_k^i(t, \xi_{k-1}) \alpha_k^i(t) + E_k^i(t, \xi_{k-1}), \quad i = \overline{1, p+1}, k = 2, 3, \dots \quad (51)$$

где

$$H_k^i(t, \xi_{k-1}) = D_i^{-1}(t) P_{A_i^*}^r(t) \left[C_k^i(t, \xi_{k-1}) - \frac{dP_{A_i}^r(t)}{dt} \right],$$

$$E_k^i(t, \xi_{k-1}) = D_i^{-1}(t) P_{A_i^*}^r(t) \left[\bar{g}_k^i(t, \xi_{k-1}) - \frac{d\bar{x}_k^i(t)}{dt} \right].$$

Решение (51) имеет вид

$$\alpha_k^i(t, \xi_{k-1}) = \Phi_{ki}(t, \xi_{k-1}) \Phi_{ki}^{-1}(\tau_{i-1}, \xi_{k-1}) \eta_k^i + \int_{\tau_{i-1}}^t \Phi_{ki}(t, \xi_{k-1}) \Phi_{ki}^{-1}(s, \xi_{k-1}) \bar{E}_k^i(s, \xi_{k-1}) ds, \quad \eta_k^i \in R^r. \quad (52)$$

Подставляем (52) в (50), получаем

$$x_k^i(t) = \Phi_{ki}^r(t, \xi_{k-1}, \tau_{i-1}) \eta_k^i + \bar{x}_k^i(t, \xi_{k-1}), \quad (53)$$

где

$$\Phi_{ki}^r(t, \xi_{k-1}, \tau_{i-1}) \eta_k^i = P_{A_i}^r(t) \Phi_{ki}(t, \xi_{k-1}) \Phi_{ki}^{-1}(\tau_{i-1}, \xi_{k-1}),$$

$$\bar{x}_k^i(t, \xi_{k-1}) = P_{A_i}^r(t) \int_{\tau_{i-1}}^t \Phi_{ki}(t, \xi_{k-1}) \Phi_{ki}^{-1}(s, \xi_{k-1}) \bar{E}_k^i(s, \xi_{k-1}) ds + \bar{x}_k^i(t).$$

Для $\Pi_k^i(\nu_i)$ и $Q_k^i(\mu_i)$ соответственно получаем

$$\begin{aligned} \Pi_k^i(\nu_i) &= X_k^i(\nu_i) c_k^i + \int_0^\infty K^i(\nu_i, s) \bar{G}_k^i(s) ds, \nu_i \geq 0, c_k^i \in R^k, \\ Q_k^i(\mu_i) &= \bar{X}_q^i(\mu_i) d_k^i + \int_{-\infty}^0 \bar{K}^i(\mu_i, s) \bar{F}_k^i(s) ds, \mu_i \leq 0, d_k^i \in R^q, \end{aligned} \quad (54)$$

Подставляем (53) и (54) в краевые условия (17) и при помощи описанных выше подходов получаем аналогичную (47) систему

$$R_{k0}(\xi_{k-1}) \begin{pmatrix} \eta_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix} = \bar{h}_{k0}(\xi_{k-1}), \quad (55)$$

где $\eta_k = (\eta_k^1, \dots, \eta_k^{p+1})^T - (p+1)r$ – мерный вектор,
 $c_k = (c_k^1, \dots, c_k^{p+1})^T - (p+1)k$ – мерный вектор,
 $d_k = (d_k^1, \dots, d_k^{p+1})^T - (p+1)q$ – мерный вектор.

Поскольку $\text{rank} R_{k0}(\xi_{k-1}) = s_k \leq \min(m_1, (p+1)n)$, система (55) имеет решение

$$\begin{pmatrix} \eta_k \\ c_k \\ d_k \end{pmatrix} = P_{R_{k0}}^\eta \xi_k + R_{k0}^+ \bar{h}_{k0}, \xi_k \in R^n, \eta = (p+1)(m_1 + k + q) - m_1 \quad (56)$$

тогда и только тогда, когда выполнено

$$P_{R_{k0}^*}(\xi_{k-1}) \bar{h}_{k0}(\xi_{k-1}) = 0. \quad (57)$$

Из (57) находим ξ_{k-1} , а для $x_k^i(t)$, $\Pi_k^i(\nu_i)$, $Q_k^i(\mu_i)$, $i = \overline{1, p+1}$, получаем (49), где вектор ξ_k определяется на следующем этапе из равенства вида (57). Очевидно, пограничные функции удовлетворяют неравенству (11), т.е. они экспоненциально убывают.

Теорема доказана.

Замечание. Доказательство, что для формального ряда (10) выполнена оценка

$$\|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)\| \leq K \varepsilon^{n+1}, K > 0,$$

где $X_n(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n [x_k^i(t) + \Pi_k^i(\nu_i) + Q_k^i(\mu_i)] \varepsilon_i$ представляет самостоятельный интерес.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бойчук А. А. Нелинейные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Укр.мат.журн. - 1998.- , № 2.- С. 162 - 171
2. Василева А.Б., Бутузов Б.Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях/ М: Московского университета, 1978. -106 с.
3. Каранджулов Л.И., Стоянова Я.П. Обобщенная задача Коши для сингулярно возмущенных импульсных систем в критическом случае / Дифференц. Уравнения, 2004 , № 3. - 310 - 323.
4. Каранджулов Л.И., Стоянова Я.П. Обобщена задача на Коши для сингулярно возмущенных импульсных систем в критическом случае / Сибирский математический журнал, 2006, Том. 47, 2 , с. 329 - 351.
5. Коддингтон Э., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М.: ИЛ, 1958 .- 474 с.
6. Самойленко А.М., Бойчук А.А., Каранджулов Л.И. Линейные нетеровы краевые задачи с сингулярным возмущением / Дифференц. Уравнения, 2001, № 9, С. 1186-1193.
7. Bainov D.D., Covachev V. Impulsive Differential Equations with Small Parameter, Singapore: WorldSci. Publi., 1994,269 p.
8. Boichuk A.A., Samojlenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems, Utrecht-Boston: VSP, 2004, 317 p.
9. Karandjulov L.I. Multipoint boundary-value problems with impulse effects / Ukr. Math. J., 1995, № 6,- P. 770 - 774.
10. Karandjulov L.I. Singularly perturbed linear boundary-value problems for ordinary differential equations with impulse effects/ Nonlinear boundary-value problems, Donetsk: Inst. Appli. Math. and Mech. NAN Ukraine.-1997.- .- P. 104 - 112.
11. Karandjulov L.I., Stoyanova Ia.P. Boundary value problems for nonlinear singularly perturbed systems in critical case of conditional stability / Bull. of the Greek Math. Soc.-2003, P. 91 - 116.
12. Generalize inverse and applications/Edited by M.Z. Nashed.- New York; San Francisco; London: Acad. Press, 1967.- 1054 p.
13. Penrose R. A generalize inverse for matrices / Proc. Cambridge Phil. Soc, 1955, P. 406 -413.
14. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations // Wored Scientific seris Nonlinear sciencee E, seriest.- Singapore; New Jerseu; London; Hong Kong: Word Sci., 1994.- Vol. 14.- 462 p. (Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.- Киев: Выща школа, 1987.- 287 с.)
15. Schwabik S. Differential equations with interface conditions/ Casop. pest. mat.- 1980, P. 391 - 408.

В. Р. Крашенинников (г. Ульяновск)

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПОДВОДНОГО БУКСИРОВОЧНОГО КАБЕЛЯ

Для выполнения специальных работ в морских акваториях часто используются подводные аппараты, связанные с кораблём буксировочным кабелем (кабель-кабелем). При управлении этим комплексом возникает задача определения текущей формы кабеля и его натяжений. В данной работе предложено численное решение этой задачи с малыми вычислительными затратами.

Введение

Для выполнения океанологических исследований и различных подводных работ в настоящее время применяются телеуправляемые подводные аппараты, входящие в состав систем «носитель-кабель-подводный аппарат». Кабель, соединяющий носитель (это обычно надводный корабль (НК)) с подводным аппаратом (ПА) служит для передачи информации, электропитания ПА и препятствует его потере. Система управления должна обеспечивать движение ПА по требуемой траектории так, чтобы кабель не попадал под винты НК и не обрывался из-за чрезмерных натяжений. При этом НК может стоять на месте или двигаться своим курсом. Следует также учитывать морские течения и другие сопутствующие факторы. Отсюда возникает задача нахождения текущей формы кабеля и его распределённых натяжений. На управление могут налагаться различные требования, например, ограниченное натяжение кабеля и/или его длина, ограниченные силы движителей ПА, обеспечение минимального натяжения кабеля у ПА и т.д. Для выполнения этих требований может понадобиться просчёт различных вариантов управления на некоторый промежуток времени вперёд, поэтому алгоритм должен быть достаточно экономным в вычислительном плане.

Для исследования движения кабеля применяются его различные модели в виде нерастяжимой или растяжимой гибкой или упругой нити. Получающиеся уравнения в частных производных решаются аналитически только в простых частных случаях, поэтому прибегают к численным решениям, заменяя гладкую нить на систему твёрдых или растяжимых стержней, соединённых шарнирами (иногда с пружинами для учёта упругости) [1-3]. Получающиеся разностные уравнения решаются довольно сложно. В данной работе на основе дискретизации модели растяжимой гибкой нити получена простая процедура вычисления динамики движения кабеля при различных видах граничных условий у НК и ПА.

Уравнения движения нерастяжимой гибкой нити

Рассмотрим сначала представление кабеля гибкой нерастяжимой нитью [2]. Нить имеет длину S , её начало прикреплено к подводной штанге НК, а конец – к ПА. Пусть $P(t,s)$ – точка нити, находящаяся на расстоянии s от её начала в момент времени t . Тогда форма и положение нити в момент t определяется вектором

$$\bar{r}(t,s) = \overline{OP} = (x(t,s), y(t,s), z(t,s)),$$

где $OXYZ$ – земная неподвижная система координат (рис. 1).

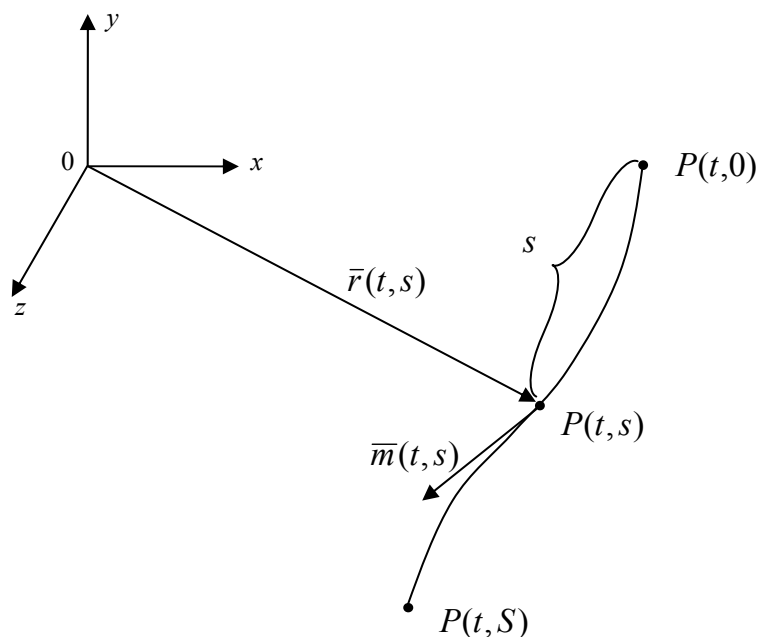


Рис. 1. Нить в неподвижной системе координат.

Вектор $\bar{r}(t,0)$ определяется движением корабля, а $\bar{r}(t,S)$ – движением ПА. Будем предполагать, что эти два вектора, т. е. граничные условия

$$\begin{aligned} \bar{r}(t,0) &= \bar{r}_0(t) = (x_0(t), y_0(t), z_0(t)), \\ \bar{r}(t,S) &= \bar{r}_S(t) = (x_S(t), y_S(t), z_S(t)) \end{aligned} \quad (1)$$

заданы. Отметим, что граничные условия могут быть и другими, например, может быть задана сила, действующая на конец кабеля у ПА. В начале кабеля у НК может быть лебёдка, которая поддерживает постоянное натяжение кабеля, т. е. может быть ещё одно граничное условие

$$T(t,0) = T_0, \quad (2)$$

где $T(t,s)$ – натяжение кабеля в точке s в момент времени t , но тогда длина кабеля будет изменяться по мере выбора или стравливания кабеля. Выражение «в точке s » точнее означает «в точке кабеля на расстоянии s от его начала».

Для определённости должны быть заданы также и начальные условия, т. е. положение кабеля в начальный момент $t = 0$:

$$\bar{r}(0,s) = (x(0,s), y(0,s), z(0,s)) \quad (3)$$

и скорости движения всех его точек:

$$\bar{V}(0,s) = \frac{\partial \bar{r}(0,s)}{\partial t} = \left(\frac{\partial x(0,s)}{\partial t}, \frac{\partial y(0,s)}{\partial t}, \frac{\partial z(0,s)}{\partial t} \right) = (V_x(0,s), V_y(0,s), V_z(0,s)), \quad (4)$$

где

$$\bar{V}(t,s) = \frac{\partial \bar{r}(t,s)}{\partial t} - \quad (5)$$

вектор скорости точки кабеля s в момент t .

Необходимо также задание скорости течения воды

$$\bar{W}(t,s) = (W_x(t,s), W_y(t,s), W_z(t,s))$$

в точках s нахождения кабеля в моменты t . Обычно предполагается, что эта скорость в каждый момент постоянна во всех точках кабеля, т. е. $\bar{W}(t,s) = \bar{W}(t)$. Движение воды относительно кабеля, его плавучесть, передвижение начала с заданным натяжением, движение конца кабеля и натяжение кабеля во всех его точках вызывают распределённые силы на элементы кабеля, которые, в свою очередь, придают этим элементам ускорения. В результате кабель совершает сложное движение, которое описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных [2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_x = a_1 V_{\Gamma m} \frac{\partial V_x}{\partial s} + a_2 (T - MV_{\Gamma m}^2) \frac{\partial m_x}{\partial s} + a_3 \frac{\partial T}{\partial s} m_x - a_2 (k_\Phi + k_T) V_{\Gamma x} - \\ \quad - a_4 (k_\Phi + k_T) V_{\Gamma m} m_x + a_3 k_\Phi V_{\Gamma m} m_x + a_4 \omega m_y m_x, \\ U_y = a_1 V_{\Gamma m} \frac{\partial V_y}{\partial s} + a_2 (T - MV_{\Gamma m}^2) \frac{\partial m_y}{\partial s} + a_3 \frac{\partial T}{\partial s} m_y - a_2 (k_\Phi + k_T) V_{\Gamma y} - \\ \quad - a_4 (k_\Phi + k_T) V_{\Gamma m} m_y + a_3 k_\Phi V_{\Gamma m} m_y + a_4 \omega m_y m_y + a_2 \omega, \\ U_z = a_1 V_{\Gamma m} \frac{\partial V_z}{\partial s} + a_2 (T - MV_{\Gamma m}^2) \frac{\partial m_z}{\partial s} + a_3 \frac{\partial T}{\partial s} m_z - a_2 (k_\Phi + k_T) V_{\Gamma z} - \\ \quad - a_4 (k_\Phi + k_T) V_{\Gamma m} m_z + a_3 k_\Phi V_{\Gamma m} m_z + a_4 \omega m_y m_z. \end{array} \right. \quad (6)$$

В этих уравнениях

$$\bar{U} = \bar{U}(t,s) = \frac{\partial^2 \bar{r}(t,s)}{\partial t^2} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = (U_x, U_y, U_z) - \quad (7)$$

вектор ускорения кабеля в точке s в момент t .

$$\bar{m} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} = \left(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s} \right) = (m_x, m_y, m_z) -$$

орт касательной к нити в точке s в момент t (рис. 1), его модуль равен единице:

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1. \quad (8)$$

Вектор плавучести

$$\bar{\omega}(s) = \omega(s) \bar{e}_y = \omega \bar{e}_y$$

направлен вдоль вертикальной оси OY ;

Вектор скорости точек нити относительно воды равен разности вектора скорости нити \bar{V} и вектора течения:

$$\bar{V}_\Gamma = \bar{V}_\Gamma(t, s) = \bar{V}(t, s) - \bar{W}(t, s) = (V_x - W_x, V_y - W_y, V_z - W_z).$$

Он раскладывается на касательную $\bar{V}_{\Gamma m}$ и нормальную $\bar{V}_{\Gamma n}$ составляющие:

$$\bar{V}_\Gamma = \bar{V}_{\Gamma m} + \bar{V}_{\Gamma n},$$

где

$$\bar{V}_{\Gamma m} = \frac{\bar{V}_\Gamma \cdot \bar{m}}{|\bar{m}|} \bar{m} = (\bar{V}_\Gamma \cdot \bar{m}) \bar{m} = V_{\Gamma m} \bar{m},$$

$$V_{\Gamma m} = \bar{V}_\Gamma \cdot \bar{m} = V_{\Gamma x} m_x + V_{\Gamma y} m_y + V_{\Gamma z} m_z -$$

скалярное произведение \bar{V}_Γ и \bar{m} ;

$$\bar{V}_{\Gamma n} = \bar{V}_\Gamma - \bar{V}_{\Gamma m}.$$

Величины k_Φ и k_T определяют силу сопротивления кабеля текущей воде в поперечном и продольном направлениях:

$$k_\Phi = k_d (1 - \mu) |\bar{V}_{\Gamma n}|, \quad k_T = k_d \mu |\bar{V}_\Gamma|, \quad (9)$$

$$k_d = 0.5 \rho D c_n, \quad (10)$$

где ρ – плотность воды, D – диаметр кабеля, μ – коэффициент нормального гидродинамического сопротивления. Величина

$$M = 0.25 \rho \pi D^2 \quad (11)$$

есть присоединённые массы воды на единицу длины кабеля. Коэффициенты a_i определяются выражениями

$$a_1 = \frac{2M}{m(s) + M}, \quad a_2 = \frac{1}{m(s) + M}, \quad a_3 = \frac{1}{m(s)}, \quad a_4 = \frac{M}{m(s)(m(s) + M)}, \quad (12)$$

где $m(s)$ – удельная плотность нити в точке s , рассчитанная на единицу длины.

По условиям нашей задачи плавучесть кабеля нулевая, т. е.

$$\omega = \omega(s) = 0, \quad (13)$$

для этого его плотность должна совпадать с плотностью воды. Поэтому

$$m(s) = M \quad (14)$$

и коэффициенты (12) принимают вид

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2M}, \quad a_3 = \frac{1}{M}, \quad a_4 = \frac{1}{2M}. \quad (15)$$

С учётом (13) – (15) уравнения (6) принимают вид

$$\begin{cases} U_x = V_{\Gamma m} \frac{\partial V_x}{\partial s} + a_2 \left[(T - MV_{\Gamma m}^2) \frac{\partial m_x}{\partial s} + 2 \frac{\partial T}{\partial s} m_x - a_{\Phi\Gamma} V_{\Gamma x} + b_{\Phi\Gamma} V_{\Gamma m} m_x \right], \\ U_y = V_{\Gamma m} \frac{\partial V_y}{\partial s} + a_2 \left[(T - MV_{\Gamma m}^2) \frac{\partial m_y}{\partial s} + 2 \frac{\partial T}{\partial s} m_y - a_{\Phi\Gamma} V_{\Gamma y} + b_{\Phi\Gamma} V_{\Gamma m} m_y \right], \\ U_z = V_{\Gamma m} \frac{\partial V_z}{\partial s} + a_2 \left[(T - MV_{\Gamma m}^2) \frac{\partial m_z}{\partial s} + 2 \frac{\partial T}{\partial s} m_z - a_{\Phi\Gamma} V_{\Gamma z} + b_{\Phi\Gamma} V_{\Gamma m} m_z \right], \end{cases} \quad (16)$$

где

$$a_2 = \frac{1}{2M}, \quad a_{\Phi\Gamma} = k_{\Phi} + k_{\Gamma}, \quad b_{\Phi\Gamma} = k_{\Phi} - k_{\Gamma}. \quad (17)$$

Уравнения (16) нужно решать с начальными и граничными условиями (1) – (4), уравнениями связи

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = \frac{\partial V_x}{\partial s}, \quad \frac{\partial m_y}{\partial t} = \frac{\partial V_y}{\partial s}, \quad \frac{\partial m_z}{\partial t} = \frac{\partial V_z}{\partial s}$$

и ограничениями (7).

Задача эта аналитически решается только в немногих частных случаях. Поэтому прибегают к численным методам решения. Схемы решения получаются довольно сложными с возможными вырождениями. Основное затруднение вызывает вхождение в уравнения (16) натяжения T и его производной $\partial T/\partial s$, а также ограничение нерастяжимости нити (8). Более простые численные решения можно получить для упругой нити.

Уравнения движения растяжимой нити

Физически натяжение нити происходит вместе с её растяжением. По закону Гука для относительно малых растяжений сила натяжения определяется выражением

$$T = f \left(\frac{\Delta l}{\Delta s} - 1 \right), \quad (18)$$

где Δs – длина элемента нити в свободном состоянии; Δl – его длина в натянутом состоянии; f – коэффициент упругости.

Пусть теперь s – расстояние от начала нити до ее точки в свободном состоянии. Тогда в напряжённом состоянии расстояние l от начала нити до точки, соответствующей значению параметра (естественной координате точки нити), может отличаться от s (рис. 2).

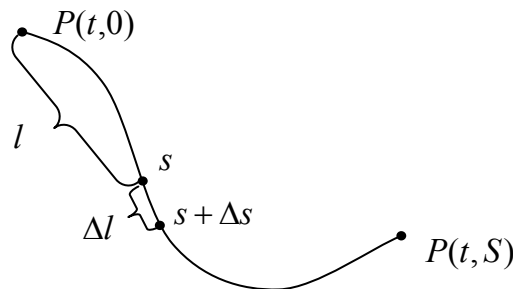


Рис. 2. Упругая нить.

Это расстояние выражается интегралом

$$l = \int_0^s dl = \int_0^s \sqrt{x_s'^2 + y_s'^2 + z_s'^2} ds, \quad (19)$$

а элемент длины –

$$dl = \sqrt{x_s'^2 + y_s'^2 + z_s'^2} ds. \quad (20)$$

При этом

$$\Delta l \approx \sqrt{x_s'^2 + y_s'^2 + z_s'^2} \Delta s. \quad (21)$$

Условие нерастяжимости (8), естественно, не выполняется, т. е., вообще говоря,

$$|\bar{r}'_s| = |\bar{m}| = x_s'^2 + y_s'^2 + z_s'^2 \neq 1.$$

В уравнениях движения нити (16) и входящих в него параметрах следует заменить частные производные $\frac{\partial}{\partial s}$ по s на производные $\frac{\partial}{\partial l}$ по l , т. е. по новой «естественной» координате l . С учётом (20) получаем

$$\frac{\partial A}{\partial l} = \frac{\partial A}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial l} = \frac{\partial A}{\partial s} \frac{\partial l}{\partial s} = \frac{\partial A}{\partial s} \sqrt{x_s'^2 + y_s'^2 + z_s'^2}.$$

Итак,

$$\frac{\partial A}{\partial l} = \frac{\partial A}{\partial s} \frac{1}{|\bar{m}|} = \frac{\partial A}{\partial s} \frac{1}{\sqrt{x_s'^2 + y_s'^2 + z_s'^2}},$$

т. е. можно оставить всюду старые производные по s , поделив их на модуль вектора $\bar{m} = (x'_s, y'_s, z'_s)$, который в нашем случае уже не обязательно единичный.

Из (18) – (21) получаем выражение для натяжения

$$T = f\left(\frac{dl}{ds} - 1\right) = f(|\bar{m}| - 1) = f(\sqrt{x_s'^2 + y_s'^2 + z_s'^2} - 1) \quad (22)$$

и его производных по s и по l :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial s} &= f \frac{\partial}{\partial s} (|\bar{m}| - 1) = f \frac{\partial}{\partial s} (\sqrt{\bar{m} \cdot \bar{m}} - 1) = f \frac{2\bar{m} \frac{\partial \bar{m}}{\partial s}}{2\sqrt{\bar{m} \cdot \bar{m}}}, \\ \frac{\partial T}{\partial s} &= f \frac{\bar{m} \cdot \frac{\partial \bar{m}}{\partial s}}{|\bar{m}|}, \quad \frac{\partial T}{\partial l} = \frac{\bar{m} \cdot \frac{\partial \bar{m}}{\partial s}}{|\bar{m}|^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставляя (22) и (23) в исправленные уравнения (16), получим уравнения, не содержащие в явном виде натяжение T и его производную.

Нужно внести также поправки в параметры M , k_Φ и k_T . Из (9-12) следует, что параметр M пропорционален площади поперечного сечения нити. Естественно предположить, что при растяжении нити её объём

сохраняется, поэтому площадь поперечного сечения элемента нити обратно пропорциональна его длине:

$$M = \frac{M_0}{|\bar{m}|}, \quad (24)$$

где M_0 – значение параметра M при нулевом натяжении, определяемое из (11). Коэффициенты $a_{\text{фТ}}$ и $b_{\text{фТ}}$ пропорциональны диаметру нити (см. (9), (10), (17)), поэтому новые значения получаются из старых делением на $\sqrt{|\bar{m}|}$:

$$a_{\text{фТ}} = \frac{a_{\text{фТ0}}}{\sqrt{|\bar{m}|}}, \quad b_{\text{фТ}} = \frac{b_{\text{фТ0}}}{\sqrt{|\bar{m}|}}. \quad (25)$$

Естественно считать, что кабель очень прочный, т. е. коэффициент упругости f очень большой. Следовательно, $|\bar{m}| \approx 1$ и относительная разница между $|\bar{m}|$ и $\sqrt{|\bar{m}|}$ мала. Поэтому допустимо в знаменателях в (25) заменить корень $\sqrt{|\bar{m}|}$ на подкоренное выражение $|\bar{m}|$. Тогда этот поправочный параметр после подстановки (22) – (25) в (16) сократится всюду, кроме

$$\frac{\partial V_x}{\partial l} = \frac{\partial V_x}{\partial s} / |\bar{m}|, \quad \frac{\partial V_y}{\partial l} = \frac{\partial V_y}{\partial s} / |\bar{m}|, \quad \frac{\partial V_z}{\partial l} = \frac{\partial V_z}{\partial s} / |\bar{m}|.$$

Но, опять-таки, при большом коэффициенте упругости допустимо пренебречь этой поправкой. Тем более, что упругость нити нам потребовалась только для того, чтобы исключить из уравнений движения явное вхождение T и $\frac{\partial T}{\partial s}$. При увеличении f нить становится практически нерастяжимой, а её натяжение при этом не меняется в силу (18). Поэтому можно было сразу пренебречь отличием $|\bar{m}|$ от единицы всюду, кроме выражений (22) и (23) для натяжения T и его производной.

Таким образом, получаем систему уравнений движения (очень) упругой нити в том же виде, что и в уравнения (16), в которых T и $\frac{\partial T}{\partial s}$ заданы выражениями (22) и (23).

Преимущества этой системы уравнений перед уравнениями нерастяжимой нити в том, что она позволяет найти текущие ускорения элементов нити непосредственно из её состояния (положения и скорости элементов), минуя вычисление натяжений, которые естественным образом заложены во взаимном расположении элементов нити.

Численное решение уравнений движения нити

Для численного решения уравнений движения возьмём на нити N точек P_1, P_2, \dots, P_N с равномерным шагом $\Delta S = S/(N-1)$ по параметру s . При этом

интервалы по длине l могут быть неравномерными (рис. 3). На каждом участке P_i, P_{i+1} линия заменяется прямолинейным растяжимым отрезком (стержнем). Стержни соединены между собой шарнирами без пружин и трения.

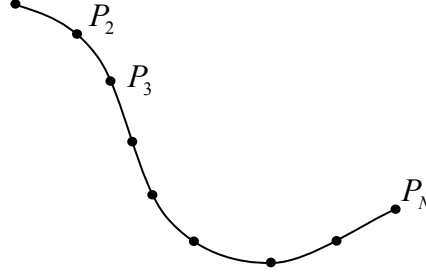


Рис. 3. Приближение нити дискретным набором точек.

Производные, входящие в уравнения движения заменим конечными разностями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial l} &= \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{|P_{k-1}P_{k+1}|}, & \frac{\partial y_k}{\partial l} &= \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{|P_{k-1}P_{k+1}|}, & \frac{\partial z_k}{\partial l} &= \frac{z_{k+1} - z_{k-1}}{|P_{k-1}P_{k+1}|}, \\ \frac{\partial m_{x_k}}{\partial s} &= \frac{\partial^2 x_k}{\partial s^2} = \frac{x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}}{\Delta s^2}, & \frac{\partial m_{y_k}}{\partial s} &= \frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{\Delta s^2}, & \frac{\partial m_{z_k}}{\partial s} &= \frac{z_{k-1} - 2z_k + z_{k+1}}{\Delta s^2}, \\ \frac{\partial V_{x_k}}{\partial s} &= \frac{V_{x_k} - V_{x_{k-1}}}{\Delta s}, & \frac{\partial V_{y_k}}{\partial s} &= \frac{V_{y_k} - V_{y_{k-1}}}{\Delta s}, & \frac{\partial V_{z_k}}{\partial s} &= \frac{V_{z_k} - V_{z_{k-1}}}{\Delta s}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (16), получим разностное приближение системы дифференциальных уравнений движения.

Для начального момента $t = 0$ все необходимые величины находятся из граничных начальных условий (1) – (4). Это даёт возможность вычислить по (16) ускорения во всех внутренних точках линии $P_2 - P_{N-1}$.

Пусть для момента времени t найдены координаты всех внутренних точек линии и их скорости, тогда из уравнений (16) с учётом (22) и (23) будут найдены ускорения всех этих точек. Тогда для следующего момента $t + \Delta t$ получаем:

$$\begin{cases} x_k(t + \Delta t) = x_k(t) + V_{x_k}(t)\Delta t + U_{x_k}(t)\frac{\Delta t^2}{2}, \\ y_k(t + \Delta t) = y_k(t) + V_{y_k}(t)\Delta t + U_{y_k}(t)\frac{\Delta t^2}{2}, \\ z_k(t + \Delta t) = z_k(t) + V_{z_k}(t)\Delta t + U_{z_k}(t)\frac{\Delta t^2}{2}, \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} V_{x_k}(t + \Delta t) = V_{x_k}(t) + U_{x_k}(t)\Delta t, \\ V_{y_k}(t + \Delta t) = V_{y_k}(t) + U_{y_k}(t)\Delta t, \\ V_{z_k}(t + \Delta t) = V_{z_k}(t) + U_{z_k}(t)\Delta t. \end{cases}$$

Отметим, что по условиям задачи задано постоянное натяжение кабеля T_0 в его начале. Это приводит к тому, что кабель выбирается или стравливается лебёдкой. При этом его длина изменяется, что необходимо учесть при решении уравнений движения. Сделаем это следующим образом.

В очередной момент времени $t + \Delta t$ точка P_2 перемещается в новое положение, определяемое уравнениями (26) при $k = 2$. Это приводит к тому, что расстояние между точками P_1 и P_2 изменяется на

$$\Delta l = |P_1 P_2|_{t+\Delta t} - |P_1 P_2|_t$$

На эту же величину Δl изменяется и длина кабеля:

$$L_{t+\Delta t} = L_t + \Delta l.$$

В пересчёте на параметр s приращение Δl составляет

$$\delta s = \frac{|P_1 P_2|_{t+\Delta t} \cdot f}{T_0 + f} - \Delta s_t.$$

Таким образом, новая (по параметру s) длина линии есть

$$S_{t+\Delta t} = S_t + \delta s = S_t + \frac{|P_1 P_2|_{t+\Delta t} \cdot f}{T_0 + f} - \Delta s_t.$$

Новым значением дискрета по s будет

$$\Delta s_{t+\Delta t} = \frac{S_{t+\Delta t}}{N-1}.$$

Натяжение T_0 должно быть достаточно большим, иначе кабель будет постоянно вытягиваться из лебёдки. Определение подходящего значения T_0 является задачей системы управления. В качестве упрощённого варианта было применено ограничение длины кабеля. А именно, стравливание кабеля прекращалось, если его длина достигала полуторного расстояния от НК до ПА. В этом случае, естественно, не выдерживалось заданное натяжение у НК.

Как уже отмечалось, преимуществом предлагаемой схемы является простота вычисления натяжений по (22), которые являются автоматическим следствием растяжения стержней в результате смещений концов стержней. Кроме того, отпадает необходимость выполнения условия нерастяжимости стержней. В известных схемах это условие выполняют, поворачивая их один за другим вокруг конца предыдущего стержня, но тогда возникает проблема положения конца последнего стержня, который должен быть у ПА.

Недостатком предложенной схемы является возможное возникновение самопроизвольных колебаний кабеля при излишне большом дискрете по времени Δt . Происходит это из-за того, что при расчёте очередного положения точек кабеля они оказываются смещёнными на большие расстояния, отчего резко возрастают натяжения, что приводит к большим скоростям и перемещениям точек кабеля. У реального кабеля, естественно, таких явлений быть не должно. Поэтому вводится регулировка величины Δt :

если на очередном шаге длина какого-либо звена кабеля изменилась значительно (например, более чем на одну тысячную длины на предыдущем шаге), то Δt для этого шага уменьшается в два раза до тех пор, пока изменение длины не окажется в указанных пределах. На следующем шаге значение Δt начинается с обычного принятого значения (применялось $\Delta t = 0.01$ сек). В результате самовозбуждений движения кабеля не возникает в достаточно широком для практического использования диапазоне скоростей НК и ПА относительно воды и при различных краевых и начальных условиях. В связи с разной величиной Δt вводится счётчик времени, в соответствии с которым выдаются получаемые данные о форме кабеля и его натяжении.

Просчитанные тестовые примеры установившихся режимов движения показывают, что предложенное численное решение поставленной задачи достаточно точно соответствует её аналитическому решению.

Заключение

Предложенная модель буксировочного кабеля и метод численного решения уравнений движения могут быть использованы в системах управления комплексами «носитель-кабель-подводный аппарат». При этом процедура определения формы кабеля и его натяжений не требует больших вычислительных затрат.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Егоров В. И. Подводные буксируемые системы.– Л.: Судостроение, 1981.– 304с.
2. Лукомский Ю. А., Чугунов В. С. Системы управления морскими подвижными объектами. – Л.: Судостроение, 1988. – 272 с.
3. Поддубный В. И., Шамарин Ю. Е., Черненко Д. А., Астахов Л. С. Динамика подводных буксируемых систем.– СПб.: Судостроение, 1995. – 200с.

К. С. Листрова, В. К. Манжосов (г. Ульяновск)

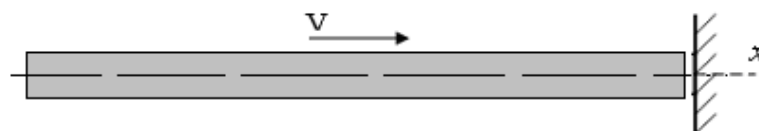
ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОДОЛЬНОГО УДАРА СТЕРЖНЯ О ЖЕСТКУЮ ПРЕГРАДУ

Разработана элементная модель продольного удара стержня о жесткую преграду, построены решения уравнений движения. Представленные решения преобразованы к универсальному виду, когда в структуре этих выражений используются безразмерные параметры перемещений, скоростей и времени.

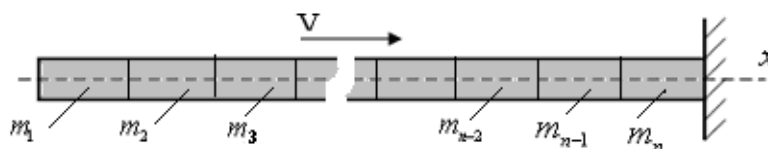
Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК №П1122.

При продольном ударе со скоростью v стержня массой m_c о жесткую преграду (рис. 1, а) стержень может быть представлен n -м количеством конечных элементов с массой $m_1, m_2, \dots, m_{n-2}, m_{n-1}, m_n$ (рис. 1, б). Причем

$$m_c = m_1 + m_2 + \dots + m_{n-2} + m_{n-1} + m_n.$$



а) схема продольного удара стержня о жесткую преграду



б) модель стержня с использованием конечных элементов

Рис. 1

При построении динамической модели конечного элемента в виде некоторой эквивалентной дискретной механической системы из сосредоточенных масс и упругих элементов встаёт вопрос о размещении массы конечного элемента и определении жесткости упругих элементов, моделирующих упругие свойства конечного элемента.

Выделим j -й конечный элемент, имеющий массу m_j (рис. 2, а).

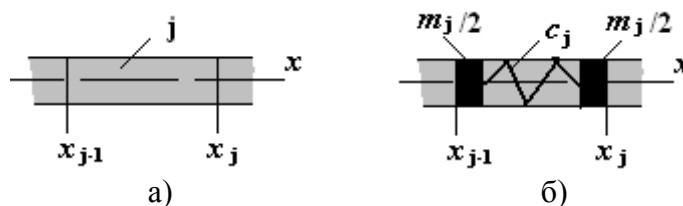


Рис. 2.

Масса конечного элемента при плотности материала конечного элемента ρ_j равна $m_j = \rho_j A_j l_j$, где A_j – площадь поперечного сечения j -го конечного элемента стержня, l_j – длина j -го конечного элемента массой m_j ($l_j = x_j - x_{j-1}$).

Масса конечного элемента может быть размещена по узлам конечного элемента (в начальном x_{j-1} и конечном x_j сечениях элемента, рис. 2, б).

Продольная жесткость конечного элемента моделируется упругим элементом жесткостью c_j , причем

$$c_j = \frac{E_j A_j}{l_j}, \quad (1)$$

где A_j – площадь поперечного сечения j -го конечного элемента стержня, E_j – модуль упругости первого рода материала j -го конечного элемента стержня, l_j – длина j -го конечного элемента массой m_j ($l_j = x_j - x_{j-1}$).

Масса m_j конечного элемента (рис. 3, а) может быть сосредоточена в его центре масс (рис. 3, б).

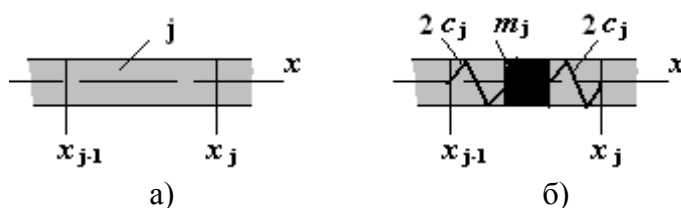


Рис. 3.

Продольная жесткость конечного элемента моделируется упругими элементами жесткостью $2c_j$, причем

$$2c_j = \frac{E_j A_j}{l_j/2}, \quad c_j = \frac{E_j A_j}{l_j}.$$

Масса m_j конечного элемента (рис. 4, а) может быть сосредоточена в начальном сечении конечного элемента (рис. 4, б).

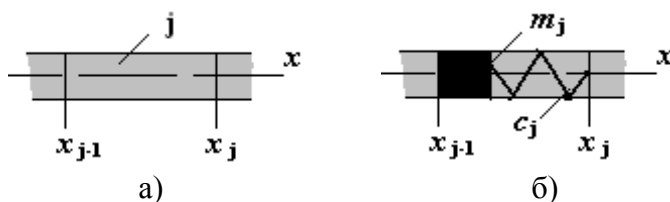


Рис. 4.

Продольная жесткость конечного элемента моделируется упругим элементом жесткостью c_j , определяемой по формуле (1).

В зависимости от выбора схемы размещения массы конечного элемента возникает та или иная модель стержня как совокупности сосредоточенных масс и упругих элементов, моделирующих податливость конечных элементов.

В случае, если масса конечного элемента размещается по узлам конечного элемента (т. е. в начальном x_{j-1} и конечном x_j сечениях элемента, рис. 2, б), то расчетная модель стержня, представляющая последовательно сопряженные конечные элементы (рис. 5, а), примет вид, изображенный на рис. 5, б).

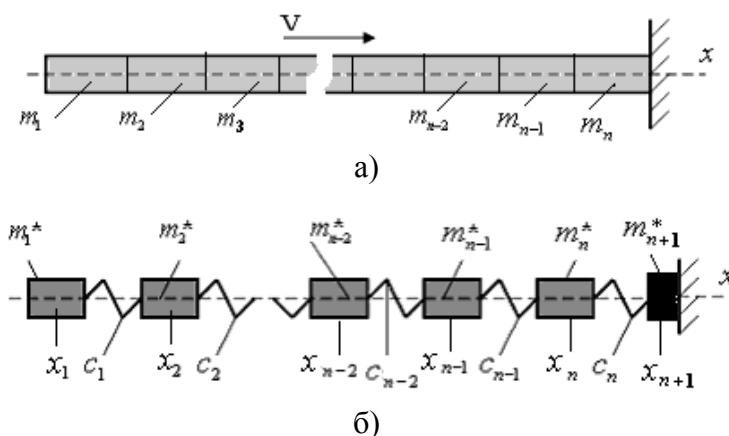


Рис. 5.

Расчетную модель стержня можно представить совокупностью приведенных масс $m_1^*, m_2^*, \dots, m_{n-2}^*, m_{n-1}^*, m_n^*, m_{n+1}^*$, сосредоточенных в сечениях $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}$ (рис. 5, б) и упругих элементов $c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, c_{n-1}, c_n$. Причем $m_1^* = m_1/2$, $m_2^* = m_1/2 + m_2/2$, $m_3^* = m_2/2 + m_3/2, \dots, m_n^* = m_{n-1}/2 + m_n/2$, $m_{n+1}^* = m_n/2$;

$$c_j = \frac{E_j A_j}{l_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, n. \quad (2)$$

Процесс удара связан с анализом движения каждой массы и сил, возникающих при этом движении. Движение произвольной j -й массы описывается дифференциальным уравнением вида

$$m_j^* \ddot{u}_j = c_{j-1}(u_{j-1} - u_j) - c_j(u_j - u_{j+1}), \quad j = 1, 2, \dots, n-1, n, n+1, \quad (3)$$

где u_j – перемещение j -й приведенной массы m_j^* относительно фиксированной координаты x_{j-1} , определяющей положение $(j-1)$ -го узла j -го конечного элемента в состоянии статического равновесия; \ddot{u}_j – ускорение j -й массы.

Движение всей совокупности масс стержня при представлении его по схеме рис. 5, б при ударе о жесткую преграду описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}
m_1^* \ddot{u}_1 &= c_0(u_0 - u_1) - c_1(u_1 - u_2), \\
m_2^* \ddot{u}_2 &= c_1(u_1 - u_2) - c_2(u_2 - u_3), \\
&\dots\dots\dots, \\
m_{n-1}^* \ddot{u}_{n-1} &= c_{n-2}(u_{n-2} - u_{n-1}) - c_{n-1}(u_{n-1} - u_n), \\
m_n^* \ddot{u}_n &= c_{n-1}(u_{n-1} - u_n) - c_n(u_n - u_{n+1}), \\
m_{n+1}^* \ddot{u}_{n+1} &= c_n(u_n - u_{n+1}),
\end{aligned} \tag{4}$$

с соответствующими начальными условиями, определяющими начальные перемещения $u_{j,0}$ и скорости масс $\dot{u}_{j,0}$ в момент времени $t = 0$:

$$u_j = u_{j,0}, \quad \dot{u}_j = \dot{u}_{j,0}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, n, n+1. \tag{5}$$

Граничные условия описывают отсутствие внешних сил на левом торце стержня, т. е.

$$c_0 = 0, \quad c_0(u_0 - u_1) = 0, \tag{6}$$

а также особенность взаимодействия приведенной массы m_{n+1}^* с жесткой преградой (наличие неудерживающей связи):

$$u_{n+1} = 0, \quad \dot{u}_{n+1} = 0, \quad \ddot{u}_{n+1} = 0, \text{ если } c_n(u_n - u_{n+1}) > 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{7}$$

где T – продолжительность удара.

Система дифференциальных уравнений может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_1 &= -\frac{2n^2 a}{l \cdot T_0} (u_1 - u_2), \\
\ddot{u}_2 &= \frac{2n^2 a \cdot \tilde{A}_1}{l \cdot T_0 (\tilde{A}_1 + 1)} (u_1 - u_2) - \frac{2n^2 a}{l \cdot T_0 (\tilde{A}_1 + 1)} (u_2 - u_3), \quad \tilde{A}_1 = \frac{A_1}{A_2} \\
&\dots\dots\dots, \\
\ddot{u}_{n-1} &= \frac{2n^2 a \cdot \tilde{A}_{n-2}}{l \cdot T_0 (\tilde{A}_{n-2} + 1)} (u_{n-2} - u_{n-1}) - \frac{2n^2 a}{l \cdot T_0 (\tilde{A}_{n-2} + 1)} (u_{n-1} - u_n), \quad \tilde{A}_{n-2} = \frac{A_{n-2}}{A_{n-1}} \\
\ddot{u}_n &= \frac{2n^2 a \cdot \tilde{A}_{n-1}}{l \cdot T_0 (\tilde{A}_{n-1} + 1)} (u_{n-1} - u_n) - \frac{2n^2 a}{l \cdot T_0 (\tilde{A}_{n-1} + 1)} u_n, \quad \tilde{A}_{n-1} = \frac{A_{n-1}}{A_n},
\end{aligned} \tag{8}$$

где n – число конечных элементов, a – скорость звука в материале стержня, l – длина стержня, $T_0 = l/a$.

Начальные условия $u_j = u_{j,0}, \quad \dot{u}_j = \dot{u}_{j,0}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, n$.

Выделим дифференциальное уравнение движения j -й массы:

$$\ddot{u}_j = \frac{2n^2 a \cdot \tilde{A}_{j-1}}{l \cdot T_0 (\tilde{A}_{j-1} + 1)} (u_{j-1} - u_j) - \frac{2n^2 a}{l \cdot T_0 (\tilde{A}_{j-1} + 1)} (u_j - u_{j+1}), \quad \tilde{A}_{j-1} = \frac{A_{j-1}}{A_j}. \tag{9}$$

Интегрируя, получим

$$\dot{u}_j - \dot{u}_{j,0} = \int_{t_0}^t \left[\frac{2n^2 a \cdot \tilde{A}_{j-1}}{l \cdot T_0(\tilde{A}_{j-1} + 1)} (u_{j-1} - u_j) - \frac{2n^2 a}{l \cdot T_0(\tilde{A}_{j-1} + 1)} (u_j - u_{j+1}) \right] dt, \quad (10)$$

$$u_j - u_{j,0} = \int_{t_0}^t \dot{u}_j dt, \quad (11)$$

где \dot{u}_j – текущее значение скорости j -й массы, $\dot{u}_{j,0}$ – значение скорости j -й массы в начальный момент времени t_0 , u_j – перемещение j -й массы, $u_{j,0}$ – перемещение j -й массы в начальный момент времени t_0 .

Процедура численного решения может быть основана на методе последовательных приближений. Первые приближения представим как

$$(u_j)_1 = u_{j,0} + \int_{t_0}^t (\dot{u}_j)_0 dt, \quad (12)$$

$$(\dot{u}_j)_1 = \dot{u}_{j,0} + \int_{t_0}^t \left[\frac{2n^2 a \cdot \tilde{A}_{j-1}}{l \cdot T_0(\tilde{A}_{j-1} + 1)} ((u_{j-1})_1 - (u_j)_1) - \frac{2n^2 a}{l \cdot T_0(\tilde{A}_{j-1} + 1)} ((u_j)_1 - (u_{j+1})_1) \right] dt.$$

Дальнейшие приближения строятся по формуле

$$(u_j)_i = u_{j,0} + \int_{t_0}^t (\dot{u}_j)_{i-1} dt, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

$$(\dot{u}_j)_i = \dot{u}_{j,0} + \int_{t_0}^t \left[\frac{2n^2 a \cdot \tilde{A}_{j-1}}{l \cdot T_0(\tilde{A}_{j-1} + 1)} ((u_{j-1})_i - (u_j)_i) - \frac{2n^2 a}{l \cdot T_0(\tilde{A}_{j-1} + 1)} ((u_j)_i - (u_{j+1})_i) \right] dt,$$

где i – число приближений.

Число приближений ограничиваем некоторым числом s , когда последующие приближения отличаются от предыдущих на малые величины $\Delta \tilde{u}_j$ и $\Delta \ddot{u}_j$.

В пределах малого интервала времени $\Delta t = t - t_0$, допуская, что

$$(\dot{u}_j)_i = const, \quad (u_{j-1})_i = const, \quad (u_j)_i = const, \quad (u_{j+1})_i = const,$$

от интегральных выражений можем перейти к алгебраическим:

$$(u_j)_i = u_{j,0} + (\dot{u}_j)_{i-1} \cdot \Delta t, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

$$(\dot{u}_j)_i = \dot{u}_{j,0} + \left[\frac{2n^2 a \cdot \tilde{A}_{j-1}}{l \cdot T_0(\tilde{A}_{j-1} + 1)} ((u_{j-1})_i - (u_j)_i) - \frac{2n^2 a}{l \cdot T_0(\tilde{A}_{j-1} + 1)} ((u_j)_i - (u_{j+1})_i) \right] \Delta t.$$

Представленные алгебраические равенства преобразуем к универсальному виду, когда в структуре этих выражений используются обобщенные безразмерные параметры скоростей и перемещений. Представим первое равенство в виде

$$\frac{(u_j)_i}{l} = \frac{u_{j,0}}{l} + \frac{(\dot{u}_j)_{i-1}}{l} \cdot \Delta t \cdot \frac{v_0}{v_0}, \quad (\tilde{u}_j)_i = \tilde{u}_{j,0} + (\tilde{\dot{u}}_j)_{i-1} \cdot \frac{v_0 \cdot \Delta t}{l}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

где $(\tilde{u}_j)_i = \frac{(u_j)_i}{l}$, $\tilde{u}_{j,0} = \frac{u_{j,0}}{l}$, $(\tilde{\dot{u}}_j)_{i-1} = \frac{(\dot{u}_j)_{i-1}}{v_0}$, v_0 – предупредительная скорость стержня.

Учитывая, что $l = a \cdot T_0$, получим выражение для расчета перемещения j -й массы в i -м приближении в безразмерных параметрах:

$$(\tilde{u}_j)_i = \tilde{u}_{j,0} + (\tilde{\dot{u}}_j)_{i-1} \cdot \frac{v_0 \cdot \Delta t}{a \cdot T_0} = \tilde{u}_{j,0} + (\tilde{\dot{u}}_j)_{i-1} \cdot \Delta \tilde{t} \cdot \frac{v_0}{a}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

где $\Delta \tilde{t} = \frac{\Delta t}{T_0}$.

Аналогично приведем к безразмерному виду выражение для расчета скорости j -й массы в i -м приближении:

$$\frac{(\dot{u}_j)_i}{v_0} = \frac{\dot{u}_{j,0}}{v_0} + \frac{a}{v_0} \left[\frac{2n^2 \cdot \tilde{A}_{j-1}}{(\tilde{A}_{j-1} + 1)} ((\tilde{u}_{j-1})_i - (\tilde{u}_j)_i) - \frac{2n^2}{(\tilde{A}_{j-1} + 1)} ((\tilde{u}_j)_i - (\tilde{u}_{j+1})_i) \right] \cdot \frac{\Delta t}{T_0},$$

$$(\tilde{\dot{u}}_j)_i = \tilde{\dot{u}}_{j,0} + \frac{a}{v_0} \left[\frac{2n^2 \cdot \tilde{A}_{j-1}}{(\tilde{A}_{j-1} + 1)} ((\tilde{\dot{u}}_{j-1})_i - (\tilde{\dot{u}}_j)_i) - \frac{2n^2}{(\tilde{A}_{j-1} + 1)} ((\tilde{\dot{u}}_j)_i - (\tilde{\dot{u}}_{j+1})_i) \right] \cdot \Delta \tilde{t},$$

где $(\tilde{\dot{u}}_j)_i = \frac{(\dot{u}_j)_i}{v_0}$, $\tilde{\dot{u}}_{j,0} = \frac{\dot{u}_{j,0}}{v_0}$.

В случае, если масса конечного элемента сосредоточена в его центре масс (рис. 3, б), то расчетная модель стержня, представляющая последовательно сопряженные конечные элементы (рис. 6, а), примет вид, изображенный на рис. 6, б.

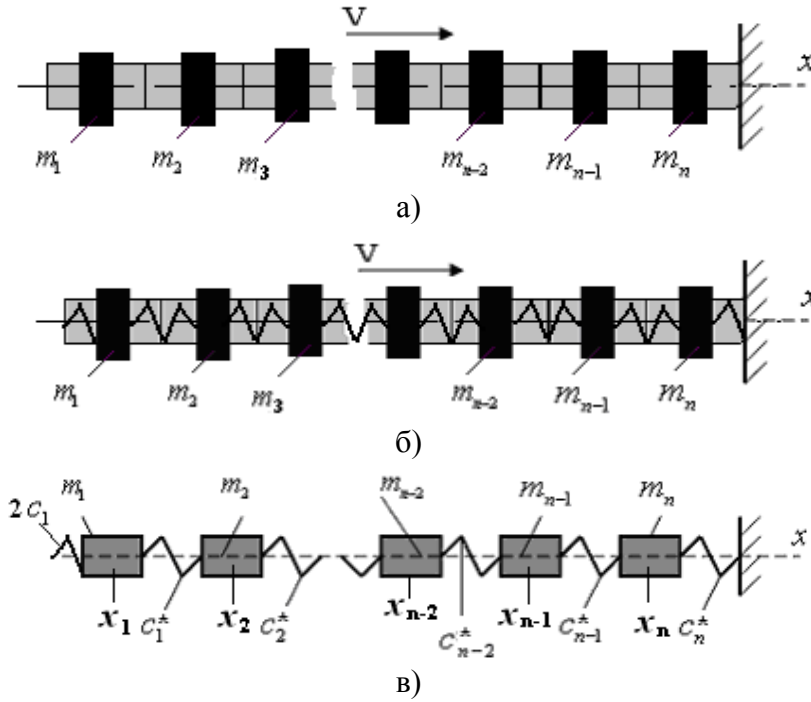


Рис. 6.

В конечном итоге расчетную модель стержня можно представить совокупностью сосредоточенных масс $m_1, m_1, \dots, m_{n-2}, m_{n-1}, m_n$ (рис. 6, в) и упругих элементов. Причем

$$m_1 = \frac{l}{n} \rho \cdot A_1, \quad m_2 = \frac{l}{n} \rho \cdot A_2, \dots, \quad m_j = \frac{l}{n} \rho \cdot A_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

$$c_j = \frac{E_j A_j}{l_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, n,$$

$$\frac{1}{c_1^*} = \frac{1}{2c_1} + \frac{1}{2c_2}, \quad c_1^* = 2 \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2} = 2 \frac{\frac{EA_1}{l/n} \cdot \frac{EA_2}{l/n}}{\frac{EA_1}{l/n} + \frac{EA_2}{l/n}} = 2 \frac{EA_1}{l/n} \cdot \frac{1}{(\tilde{A}_1 + 1)}, \quad \tilde{A}_1 = \frac{A_1}{A_2},$$

$$\frac{1}{c_2^*} = \frac{1}{2c_2} + \frac{1}{2c_3}, \quad c_2^* = 2 \frac{c_2 \cdot c_3}{c_2 + c_3}, \quad c_2^* = 2 \frac{\frac{EA_2}{l/n} \cdot \frac{EA_3}{l/n}}{\frac{EA_2}{l/n} + \frac{EA_3}{l/n}} = 2 \frac{EA_2}{l/n} \cdot \frac{1}{(\tilde{A}_2 + 1)}, \quad \tilde{A}_2 = \frac{A_2}{A_3},$$

$$\dots, \quad (14)$$

$$\frac{1}{c_{n-1}^*} = \frac{1}{2c_{n-1}} + \frac{1}{2c_n}, \quad c_{n-1}^* = 2 \frac{c_{n-1} \cdot c_n}{c_{n-1} + c_n} = 2 \frac{\frac{EA_{n-1}}{l/n} \cdot \frac{EA_n}{l/n}}{\frac{EA_{n-1}}{l/n} + \frac{EA_n}{l/n}} = 2 \frac{EA_{n-1}}{l/n} \cdot \frac{1}{(\tilde{A}_{n-1} + 1)}, \quad \tilde{A}_{n-1} = \frac{A_{n-1}}{A_n},$$

$$c_n^* = 2c_n = 2 \frac{EA_n}{l/n}.$$

Используя вышеизложенное, система дифференциальных уравнений (4) может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 &= -\frac{c_1^*}{m_1}(u_1 - u_2), \\ \ddot{u}_2 &= \frac{c_1^*}{m_2}(u_1 - u_2) - \frac{c_2^*}{m_2}(u_2 - u_3), \\ &\dots\dots\dots, \\ \ddot{u}_{n-1} &= \frac{c_{n-2}^*}{m_{n-1}}(u_{n-2} - u_{n-1}) - \frac{c_{n-1}^*}{m_{n-1}}(u_{n-1} - u_n), \\ \ddot{u}_n &= \frac{c_{n-1}^*}{m_n}(u_{n-1} - u_n) - \frac{c_n^*}{m_n}u_n, \end{aligned}$$

начальные условия $u_j = u_{j,0}$, $\dot{u}_j = \dot{u}_{j,0}$, $j = 1, 2, \dots, n-1, n$.

В дифференциальных уравнениях движения отношение приведенной жесткости упругого элемента $c_j^* = 2 \frac{c_j \cdot c_{j+1}}{c_j + c_{j+1}}$ к соответствующей массе m_j можно представить следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \frac{c_1^*}{m_1} &= \frac{2 \frac{EA_1}{l/n} \cdot \frac{1}{(\tilde{A}_1 + 1)}}{\rho A_1 l/n} = \frac{2n^2 E}{l^2 \rho} \cdot \frac{1}{(\tilde{A}_1 + 1)}, & \tilde{A}_1 &= \frac{A_1}{A_2}, \\ \frac{c_1^*}{m_2} &= \frac{2 \frac{EA_1}{l/n} \cdot \frac{1}{(\tilde{A}_1 + 1)}}{\rho A_2 l/n} = \frac{2n^2 E}{l^2 \rho} \cdot \frac{\tilde{A}_1}{(\tilde{A}_1 + 1)}, & \tilde{A}_1 &= \frac{A_1}{A_2}, \\ \frac{c_2^*}{m_2} &= \frac{2 \frac{EA_2}{l/n} \cdot \frac{1}{(\tilde{A}_2 + 1)}}{\rho A_2 l/n} = \frac{2n^2 E}{l^2 \rho} \cdot \frac{1}{(\tilde{A}_2 + 1)}, & \tilde{A}_2 &= \frac{A_2}{A_3}, \\ &\dots\dots\dots, & & \\ \frac{c_j^*}{m_j} &= \frac{2 \frac{EA_j}{l/n} \cdot \frac{1}{(\tilde{A}_j + 1)}}{\rho A_j l/n} = \frac{2n^2 E}{l^2 \rho} \cdot \frac{1}{(\tilde{A}_j + 1)}, & \tilde{A}_j &= \frac{A_j}{A_{j+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \\ \frac{c_j^*}{m_{j+1}} &= \frac{2 \frac{EA_j}{l/n} \cdot \frac{1}{(\tilde{A}_j + 1)}}{\rho A_{j+1} l/n} = \frac{2n^2 E}{l^2 \rho} \cdot \frac{\tilde{A}_j}{(\tilde{A}_j + 1)}, & \tilde{A}_j &= \frac{A_j}{A_{j+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \\ \frac{c_n^*}{m_n} &= \frac{2c_n}{m_n} = \frac{2 \frac{EA_n}{l/n}}{\rho A_n l/n} = \frac{2n^2 E}{l^2 \rho}. \end{aligned} \tag{15}$$

Если стержень однородный, имеет постоянную площадь A поперечных сечений по длине, то

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 &= -\frac{n^2 E}{l^2 \rho} (u_1 - u_2), \\ \ddot{u}_2 &= \frac{n^2 E}{l^2 \rho} (u_1 - 2u_2 + u_3), \\ &\dots, \\ \ddot{u}_{n-1} &= \frac{n^2 E}{l^2 \rho} (u_{n-2} - 2u_{n-1} + u_n), \\ \ddot{u}_n &= \frac{n^2 E}{l^2 \rho} (u_{n-1} - 3u_n). \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая, что в волновой механике [1, 2] $E/\rho = a^2$, и

$$\frac{n^2 E}{l^2 \rho} = \frac{n^2 a^2 \rho}{l^2 \rho} = \frac{n^2 a}{l \cdot l/a} = \frac{n^2 a}{l \cdot T_0}, \quad T_0 = \frac{l}{a}, \quad \frac{n^2 E}{l^2 \rho} = \frac{n^2 a}{l \cdot T_0},$$

получим

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 &= -\frac{n^2 a}{l \cdot T_0} (u_1 - u_2), \\ \ddot{u}_2 &= \frac{n^2 a}{l \cdot T_0} (u_1 - 2u_2 + u_3), \\ &\dots, \\ \ddot{u}_{n-1} &= \frac{n^2 a}{l \cdot T_0} (u_{n-2} - 2u_{n-1} + u_n), \\ \ddot{u}_n &= \frac{n^2 a}{l \cdot T_0} (u_{n-1} - 3u_n), \end{aligned} \quad (17)$$

Выделим дифференциальное уравнение движения j -й массы:

$$\ddot{u}_j = \frac{2n^2 a}{l \cdot T_0} \cdot \frac{\tilde{A}_{j-1}}{(\tilde{A}_{j-1} + 1)} (u_{j-1} - u_j) - \frac{2n^2 a}{l \cdot T_0 (\tilde{A}_j + 1)} (u_j - u_{j+1}), \quad \tilde{A}_{j-1} = \frac{A_{j-1}}{A_j}. \quad (18)$$

Скорость и перемещение j -й массы определяются как

$$\dot{u}_j = \dot{u}_{j,0} + \int_{t_0}^t \ddot{u}_j \cdot dt, \quad u_j = u_{j,0} + \int_{t_0}^t \dot{u}_j \cdot dt. \quad (19)$$

Дальнейшие приближения строятся по формуле

$$(\ddot{u}_j)_i = \frac{2n^2 a}{l \cdot T_0} \cdot \frac{\tilde{A}_{j-1}}{(\tilde{A}_{j-1} + 1)} [(u_{j-1})_{i-1} - (u_j)_{i-1}] - \frac{2n^2 a}{l \cdot T_0 (\tilde{A}_j + 1)} [(u_j)_{i-1} - (u_{j+1})_{i-1}], \quad (20)$$

$$(\dot{u}_j)_i = \dot{u}_{j,0} + \int_{t_0}^t (\ddot{u}_j)_i \cdot dt, \quad (u_j)_i = u_{j,0} + \int_{t_0}^t (\dot{u}_j)_i \cdot dt, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (21)$$

от интегральных выражений можем перейти к алгебраическим:

$$(\ddot{u}_j)_i = \frac{2n^2 a}{l \cdot T_0} \cdot \frac{\tilde{A}_{j-1}}{(\tilde{A}_{j-1} + 1)} [(u_{j-1})_{i-1} - (u_j)_{i-1}] - \frac{2n^2 a}{l \cdot T_0 (\tilde{A}_j + 1)} [(u_j)_{i-1} - (u_{j+1})_{i-1}],$$

$$(\dot{u}_j)_i = \dot{u}_{j,0} + (\ddot{u}_j)_{i-1} \cdot \Delta t, \quad (u_j)_i = u_{j,0} + (\dot{u}_j)_{i-1} \cdot \Delta t, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (22)$$

Представленные алгебраические равенства (22) преобразуем к универсальному виду:

$$\frac{(u_j)_i}{l} = \frac{u_{j,0}}{l} + \frac{(\dot{u}_j)_{i-1}}{l} \cdot \Delta t \cdot \frac{v_0}{v_0}, \quad (\tilde{u}_j)_i = \tilde{u}_{j,0} + (\tilde{\dot{u}}_j)_{i-1} \cdot \frac{v_0 \cdot \Delta t}{l}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

$$(\tilde{u}_j)_i = \tilde{u}_{j,0} + (\tilde{\dot{u}}_j)_{i-1} \cdot \frac{v_0 \cdot \Delta t}{a \cdot T_0} = \tilde{u}_{j,0} + (\tilde{\dot{u}}_j)_{i-1} \cdot \Delta \tilde{t} \cdot \frac{v_0}{a}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (23)$$

Аналогично приведем к безразмерному виду выражение для расчета скорости j -й массы в i -м приближении:

$$\frac{(\dot{u}_j)_i}{v_0} = \frac{\dot{u}_{j,0}}{v_0} + \frac{a}{v_0} \left[\frac{2n^2 \cdot \tilde{A}_{j-1}}{(\tilde{A}_{j-1} + 1)} ((\tilde{u}_{j-1})_i - (\tilde{u}_j)_i) - \frac{2n^2}{(\tilde{A}_j + 1)} ((\tilde{u}_j)_i - (\tilde{u}_{j+1})_i) \right] \cdot \frac{\Delta t}{T_0},$$

$$(\tilde{\dot{u}}_j)_i = \tilde{\dot{u}}_{j,0} + \frac{a}{v_0} \left[\frac{2n^2 \cdot \tilde{A}_{j-1}}{(\tilde{A}_{j-1} + 1)} ((\tilde{u}_{j-1})_i - (\tilde{u}_j)_i) \right] - \frac{a}{v_0} \left[\frac{2n^2}{(\tilde{A}_j + 1)} ((\tilde{u}_j)_i - (\tilde{u}_{j+1})_i) \right] \cdot \Delta \tilde{t}.$$

В случае, если масса конечного элемента сосредоточена в его начальном сечении (рис. 4, б), то расчетная модель стержня, представляющая последовательно сопряженные конечные элементы (рис. 7, а), примет вид, изображенный на рис. 7, б).

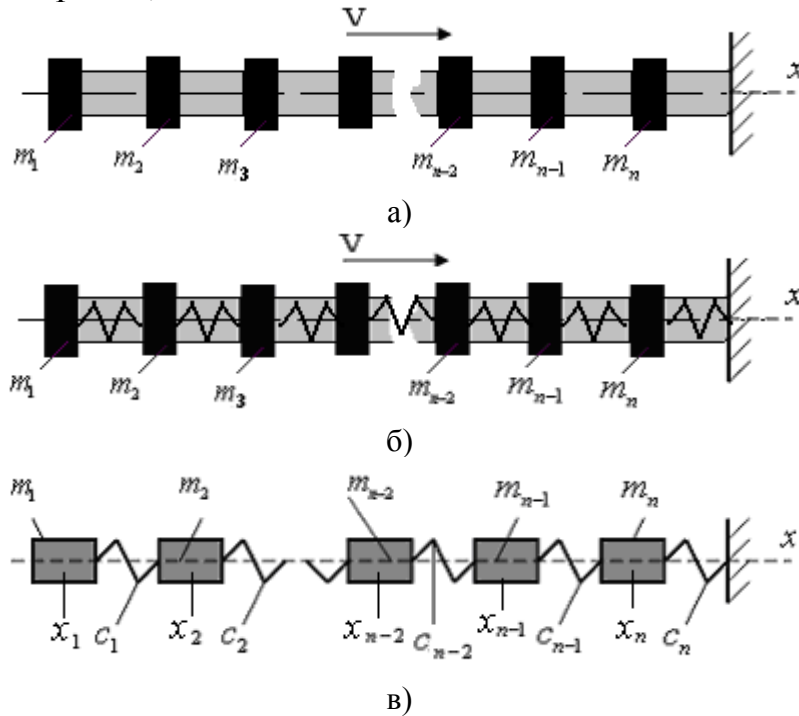


Рис. 7.

В конечном итоге расчетную модель стержня можно представить совокупностью сосредоточенных масс $m_1, m_1, \dots, m_{n-2}, m_{n-1}, m_n$ (рис. 7, в) и упругих элементов. Причем

$$m_j = \frac{l}{n} \rho \cdot A_j, \quad m_2 = \frac{l}{n} \rho \cdot A_2, \dots, \quad m_j = \frac{l}{n} \rho \cdot A_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$c_j = \frac{E_j A_j}{l_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, n.$$

Систему дифференциальных уравнений (4) можно представить следующими равенствами

$$\ddot{u}_1 = -\frac{c_1}{m_1}(u_1 - u_2),$$

$$\ddot{u}_2 = \frac{c_1}{m_2}(u_1 - u_2) - \frac{c_2}{m_2}(u_2 - u_3),$$

.....,

$$\ddot{u}_{n-1} = \frac{c_{n-2}}{m_{n-1}}(u_{n-2} - u_{n-1}) - \frac{c_{n-1}}{m_{n-1}}(u_{n-1} - u_n),$$

$$\ddot{u}_n = \frac{c_{n-1}}{m_n}(u_{n-1} - u_n) - \frac{c_n}{m_n}u_n,$$

начальные условия $u_j = u_{j,0}, \quad \dot{u}_j = \dot{u}_{j,0}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, n.$

В дифференциальных уравнениях движения отношение жесткости упругого элемента c_j к соответствующей массе m_j можно представить следующими равенствами:

$$\frac{c_1}{m_1} = \frac{\frac{EA_1}{l/n}}{\rho A_1 l/n} = \frac{n^2 E}{l^2 \rho}, \quad \frac{c_1}{m_2} = \frac{\frac{EA_1}{l/n}}{\rho A_2 l/n} = \frac{n^2 E}{l^2 \rho} \tilde{A}_1, \quad \tilde{A}_1 = \frac{A_1}{A_2},$$

$$\frac{c_2}{m_2} = \frac{\frac{EA_2}{l/n}}{\rho A_2 l/n} = \frac{n^2 E}{l^2 \rho},$$

....., (24)

$$\frac{c_{j-1}}{m_j} = \frac{\frac{EA_{j-1}}{l/n}}{\rho A_j l/n} = \frac{n^2 E}{l^2 \rho} \tilde{A}_{j-1}, \quad \tilde{A}_{j-1} = \frac{A_{j-1}}{A_j},$$

$$\frac{c_j}{m_j} = \frac{\frac{EA_j}{l/n}}{\rho A_j l/n} = \frac{n^2 E}{l^2 \rho}.$$

Если стержень однородный, имеет постоянную площадь A поперечных сечений по длине, то в этом случае система дифференциальных уравнений примет вид

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 &= -\frac{n^2 E}{l^2 \rho} (u_1 - u_2), \\ \ddot{u}_2 &= \frac{n^2 E}{l^2 \rho} (u_1 - 2u_2 + u_3), \\ &\dots, \\ \ddot{u}_{j-1} &= \frac{n^2 E}{l^2 \rho} (u_{j-2} - 2u_{j-1} + u_j), \\ \ddot{u}_j &= \frac{n^2 E}{l^2 \rho} (u_{j-1} - 2u_j), \end{aligned} \quad (25)$$

В волновой механике $E/\rho = a^2$. Тогда

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 &= -\frac{n^2 a}{l \cdot T_0} (u_1 - u_2), \\ \ddot{u}_2 &= \frac{n^2 a \tilde{A}_1}{l \cdot T_0} (u_1 - u_2) - \frac{n^2 a}{l \cdot T_0} (u_2 - u_3), \quad \tilde{A}_1 = \frac{A_1}{A_2}, \\ &\dots, \\ \ddot{u}_{j-1} &= \frac{n^2 a \tilde{A}_{j-2}}{l \cdot T_0} (u_{j-2} - u_{j-1}) - \frac{n^2 a}{l \cdot T_0} (u_{j-1} - u_j), \quad \tilde{A}_{j-2} = \frac{A_{j-2}}{A_{j-1}}, \\ \ddot{u}_j &= \frac{n^2 a \tilde{A}_{j-1}}{l \cdot T_0} (u_{j-1} - u_j) - \frac{n^2 a}{l \cdot T_0} u_j, \quad \tilde{A}_{j-1} = \frac{A_{j-1}}{A_j}. \end{aligned} \quad (26)$$

Выделим дифференциальное уравнение движения j -й массы:

$$\ddot{u}_j = \frac{n^2 a \tilde{A}_{j-1}}{l T_0} (u_{j-1} - u_j) - \frac{n^2 a}{l T_0} (u_j - u_{j+1}), \quad \tilde{A}_{j-1} = \frac{A_{j-1}}{A_j}.$$

Скорость и перемещение j -й массы определяются как

$$\dot{u}_j = \dot{u}_{j,0} + \int_{t_0}^t \ddot{u}_j \cdot dt, \quad u_j = u_{j,0} + \int_{t_0}^t \dot{u}_j \cdot dt. \quad (27)$$

Первые приближения представим как

$$\begin{aligned} (\ddot{u}_j)_1 &= \frac{n^2 a \tilde{A}_{j-1}}{l T_0} [(u_{j-1})_0 - (u_j)_0] - \frac{n^2 a}{l T_0} [(u_j)_0 - (u_{j+1})_0], \\ (\dot{u}_j)_1 &= \dot{u}_{j,0} + \int_{t_0}^t (\ddot{u}_j)_1 \cdot dt, \quad (u_j)_1 = u_{j,0} + \int_{t_0}^t (\dot{u}_j)_1 dt, \end{aligned} \quad (28)$$

Учитывая первые приближения в выражениях (28), находим вторые приближения:

$$(\ddot{u}_j)_2 = \frac{n^2 a \tilde{A}_{j-1}}{l T_0} \left[(u_{j-1})_1 - (u_j)_1 \right] - \frac{n^2 a}{l T_0} \left[(u_j)_1 - (u_{j+1})_1 \right],$$

$$(\dot{u}_j)_2 = \dot{u}_{j,0} + \int_{t_0}^t (\ddot{u}_j)_2 \cdot dt, \quad (u_j)_1 = u_{j,0} + \int_{t_0}^t (\dot{u}_j)_2 dt,$$

Дальнейшие приближения строятся по формуле

$$(\ddot{u}_j)_i = \frac{n^2 a \tilde{A}_{j-1}}{l T_0} \left[(u_{j-1})_{i-1} - (u_j)_{i-1} \right] - \frac{n^2 a}{l T_0} \left[(u_j)_{i-1} - (u_{j+1})_{i-1} \right],$$

$$(\dot{u}_j)_i = \dot{u}_{j,0} + \int_{t_0}^t (\ddot{u}_j)_i \cdot dt, \quad (u_j)_i = u_{j,0} + \int_{t_0}^t (\dot{u}_j)_i dt, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

От интегральных выражений можем перейти к алгебраическим:

$$(\ddot{u}_j)_i = \frac{n^2 a \tilde{A}_{j-1}}{l T_0} \left[(u_{j-1})_{i-1} - (u_j)_{i-1} \right] - \frac{n^2 a}{l T_0} \left[(u_j)_{i-1} - (u_{j+1})_{i-1} \right],$$

$$(\dot{u}_j)_i = \dot{u}_{j,0} + (\ddot{u}_j)_{i-1} \cdot \Delta t, \quad (u_j)_i = u_{j,0} + (\dot{u}_j)_{i-1} \cdot \Delta t, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Перемещения j -й массы в i -м приближении в безразмерных параметрах:

$$(\tilde{u}_j)_i = \tilde{u}_{j,0} + (\tilde{\dot{u}}_j)_{i-1} \cdot \frac{v_0 \cdot \Delta t}{a \cdot T_0} = \tilde{u}_{j,0} + (\tilde{\dot{u}}_j)_{i-1} \cdot \Delta \tilde{t} \cdot \frac{v_0}{a}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Аналогично приведем к безразмерному виду выражение для расчета скорости j -й массы в i -м приближении:

$$\frac{(\dot{u}_j)_i}{v_0} = \frac{\dot{u}_{j,0}}{v_0} + \frac{a}{v_0} \left[\frac{n^2 a \tilde{A}_{j-1}}{l T_0} \left((\tilde{u}_{j-1})_i - (\tilde{u}_j)_i \right) - \frac{n^2 a}{l T_0} \left((\tilde{u}_j)_i - (\tilde{u}_{j+1})_i \right) \right] \cdot \frac{\Delta t}{T_0},$$

$$(\tilde{\dot{u}}_j)_i = \tilde{\dot{u}}_{j,0} + \frac{a}{v_0} \left[\frac{n^2 a \tilde{A}_{j-1}}{l \cdot T_0} \left((\tilde{u}_{j-1})_i - (\tilde{u}_j)_i \right) \right] - \frac{a}{v_0} \left[\frac{n^2 a}{l \cdot T_0} \left((\tilde{u}_j)_i - (\tilde{u}_{j+1})_i \right) \right] \cdot \Delta t.$$

Предложенная схема может быть использована для построения алгоритма численного решения системы дифференциальных уравнений, описывающих процесс удара стержня о жесткую преграду, и разработки процедуры моделирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алимов О. Д., Манжосов В. К., Еремьянц В. Э. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах. – М. : Наука, 1985. – 386 с.
2. Манжосов В. К. Продольный удар. – Ульяновск : 2007. – 358 с.

Б. В. Логинов, Д. В. Старостин (г. Ульяновск)

БИФУРКАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛОННЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЕЁ ВЕСА С УЧЁТОМ СИММЕТРИИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Задача о критической длине цилиндрической колонны при воздействии её собственного веса рассматривалась в [1-4]. Здесь при использовании методов теории ветвления решений нелинейных уравнений [5] эта задача рассмотрена в нелинейной постановке при учёте симметрии поперечных сечений в том числе и для колонны формы усеченного конуса (пирамиды). Вычислена асимптотика соответствующих изгибных форм. Полученные результаты поддержаны грантом РФФИ – Румынская Академия, №07 – 01 – 91680 – а.

#

1. **Постановка задачи.** В теории упругости [1] известно уравнение изгибных форм колонны (ось ОХ направлена вверх от основания из его центра):

$$EI(x) \frac{y''(x)}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} = M(x), \quad (1)$$

где E – модуль Юнга, $I(x)$ – момент поперечного сечения, $M(x)$ – изгибающий момент выражающийся определённым интегралом :

$$M(x) = \int_x^1 q(\xi) [y(\xi) - y(x)] d\xi, \quad (2)$$

Форма поперечного сечения учитывается в моменте инерции $I(x)$ и выражении $q(x)$. В работе [4] исследована потеря устойчивости колонны формы усечённого конуса со сплошным круговым сечением. Здесь рассматриваются случаи: **А**- кольцевое круглое сечение, **В**- квадратное сплошное сечение и **С**- квадратное кольцевое. В случаях **В** и **С** угол наклона α образующих к оси ОХ максимален в вершинах квадрата и минимален в серединах боковых сторон. Этот угол предполагается равным для внешней и внутренней образующих в случаях кольцевых сечений.

Соответственно: для **А**

$$\begin{aligned} q(x) &= \gamma\pi(R_x^2 - r_x^2) = \gamma\pi\{[R_0 + (l-x)tg\alpha]^2 - [r_0 + (l-x)tg\alpha]^2\} = \\ &= \gamma\pi x(R_0^2 - r_0^2) + 2(R_0 - r_0)(l-x)tg\alpha; \end{aligned}$$

где $R_0(r_0)$ – радиус внешнего (внутреннего) круга в верхнем сечении $x=l$ усечённого конуса, $R_x(r_x)$ – те же величины на высоте x ;

для **В**

$$q(x) = \gamma H_x^2 = \gamma [H_0 + 2(l-x)tg\alpha]^2;$$

где $H_x(H_0)$ – сторона квадрата в сечении x (верхнем сечении $x=l$), α – угол между боковой гранью и осью OX ;

для **С**

$$\begin{aligned} q(x) &= \gamma(H_x^2 - h_x^2) = \gamma\{[H_0 + 2(l-x)tg\alpha]^2 - [h_0 + 2(l-x)tg\alpha]^2\} = \\ &= \gamma(H_0 - h_0)[(H_0 + h_0) + 4(l-x)tg\alpha]; \end{aligned}$$

где $H_0(h_0)$ и $H_x(h_x)$ – стороны внешних (внутренних) квадратов в сечениях $x=l$ и x ; γ – удельный вес.

Соответственно: для **А**

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{\pi R_x^4}{4} - \frac{\pi r_x^4}{4} = \frac{\pi}{4} (R_0 - r_0) [(R_0 + r_0)(R_0^2 + r_0^2) + 4(R_0^2 + R_0 r_0 + r_0^2)(l-x)tg\alpha + \\ &+ 6(R_0 + r_0)(l-x)^2 tg^2\alpha + 4(l-x)^3 tg^3\alpha]; \end{aligned}$$

для **В**

$$I(x) = \frac{H_x^4}{12} = \frac{1}{12} [H_0 + 2(l-x)tg\alpha]^4;$$

для **С**

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{12} (H_x^4 - h_x^4) = \frac{1}{12} (H_0 - h_0) [(H_0^3 + H_0^2 h_0 + H_0 h_0^2 + h_0^3) + 4(H_0^2 + H_0 h_0 + \\ &+ h_0^2)(l-x)tg\alpha + 6(H_0 + h_0)(l-x)^2 tg^2\alpha + 4(l-x)^3 tg^3\alpha]. \end{aligned}$$

Подставляя (2) в (1) и дифференцируя, приходим к уравнению:

$$\frac{d}{dx} [EI(x) \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}] = -y' \int_x^l q(\xi) d\xi \quad (3)$$

с граничными условиями:

$$y(0)=0, y'(0)=0, M(l)=0 \Rightarrow y''(l)=0. \quad (4)$$

Рассматриваются задачи о критической длине l_c колонны, в окрестности которой колонна начинает изгибаться под действием собственного веса, и вычислении соответствующих изгибных форм. Первая является задачей возмущения первого собственного значения λ_0 линеаризованного дифференциального уравнения (3), (4), вторая – бифуркационная. Обе задачи рассматриваются здесь методами теории ветвления решений нелинейных уравнений для колонны формы усеченного конуса (пирамиды для случаев **В** и **С**) с малым параметром $\varepsilon = tg\alpha$.

2. Построение нелинейных задач на собственные значения. Переходя к безразмерным переменным $x=x^*l$, $y=y^*l$, опуская "*" и полагая $R_0/l=a$, $r_0/l=b$, соответственно $H_0/l=a$, $h_0/l=b$, $\varepsilon=tg\alpha$, рассмотрим случаи **А**, **В** и **С**.

А. Для колонны кольцевого круглого сечения получаем двухточечную граничную задачу в безразмерных переменных.

$$[(a+b)(a^2+b^2)+4(a^2+ab+b^2)(1-x)\varepsilon+6(a+b)(1-x)^2\varepsilon^2+4(1-x)^3\varepsilon^3](y''''-\frac{3y'y''^2}{1+y'^2})-4\varepsilon[(a^2+ab+b^2)+3(a+b)(1-x)\varepsilon+3(1-x)^2\varepsilon^2]y'''+$$

$$+\lambda^*y'(1+y'^2)^{3/2}[(a+b)+\varepsilon(1-x)](1-x)=0;$$

$$\lambda^* = \frac{4\gamma l}{E};$$

$$y(0)=0, y'(0)=0, y''(1)=0; \quad (6)$$

В. Для колонны квадратного сплошного сечения приходим к двухточечной граничной задаче:

$$[a+2(1-x)\varepsilon]^4(y''''-\frac{3y'y''^2}{1+y'^2})-8y''\varepsilon[a+2(1-x)\varepsilon]^3+\lambda^*y'(1+y'^2)^{3/2}(1-x)[a^2+2a\varepsilon(1-x)+\frac{4}{3}\varepsilon^2(1-x)^2]=0;$$

$$\lambda^* = \frac{12\gamma l}{E};$$

с условиями (6)

С. Для колонны квадратного кольцевого сечения получаем ту же нелинейную задачу на собственные значения (5),(6), где $a=H_0/l$, $b=h_0/l$,

$$\lambda^* = \frac{12\gamma l}{E}.$$

3. Колонна цилиндрической формы, $\varepsilon=tg\alpha=0$. Невозмущенные уравнения (5), (7) с граничными условиями (6) сводятся к общего вида нелинейной задаче на собственные значения:

$$y''''+\lambda(1-x)y'(1+y'^2)^{3/2}-\frac{3y'y''^2}{1+y'^2}=0; \quad y(0)=0, y'(0)=0, y''(1)=0; \quad (8)$$

где для случая **А**
$$\lambda = \frac{4\gamma l}{E} \frac{a+b}{a^3+a^2b+ab^2+b^3} = \frac{4\gamma l}{E} \frac{1}{a^2+b^2} = \frac{4\gamma l^3}{E(R_0^2+r_0^2)},$$

для **В**
$$\lambda = \frac{12\gamma l}{Ea^2} = \frac{12\gamma l^3}{EH_0^2}$$
 и в условиях **С**
$$\lambda = \frac{12\gamma l^3}{E(H_0^2+h_0^2)}.$$

Для применения метода Ляпунова-Шмидта, полагая $y'=u$, определим подпространство нулей линеаризованного оператора $B: C^3[0;1] \rightarrow C^1[0;1]$, заданного дифференциальным выражением $L(u) = u''_{xx} + \lambda(1-x)u$ и граничными условиями $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$. Подстановка $s = \frac{2}{3}\lambda^{1/2}(1-x)^{3/2}$ и $u(x) = (1-x)^{1/2}z'_s(s)$ сводит [2] это уравнение к уравнению Бесселя относительно $z'_s(s)$:

$$\frac{2s}{3}\lambda^{1/2}[z''''(s) + \frac{1}{s}z''(s) + (1 - \frac{1}{9s^2})z'(s)] = 0,$$

откуда следует, что $z'_s(s) = C_1 J_{1/3}(s) + C_2 J_{-1/3}(s)$. Согласно граничному условию при $x=1$ нетрудно видеть, что

$$u''_{xx}(1) = \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=1} = -2^{-2/3}3^{-1/3}\lambda^{1/6}[s^{-1/3}z'_s(s) + 3s^{2/3}z''_{ss}(s)] \Big|_{s=0} = 0.$$

Принимая во внимание только главные члены в последнем выражении, находим:

$$\frac{C_1}{\Gamma(4/3)} + \frac{s^{-2/3}2^{1/3}}{\Gamma(2/3)}C_2 + \frac{C_1}{\Gamma(4/3)2^{1/3}} - \frac{s^{-2/3}2^{1/3}}{\Gamma(2/3)}C_2 + \dots = 0,$$

откуда следует $C_1 = 0$, C_2 – произвольная постоянная. Следовательно, $z'_s(s) = C_2 J_{-1/3}(\frac{2}{3}\lambda^{1/2}(1-x)^{3/2})$ и граничные условия при $x=0$ определяют первую точку бифуркации – критическую длину цилиндрической колонны – через первый корень функции $\mu_1^{(-1/3)}$ Бесселя $J_{-1/3}$.

Соответственно для **A**, **B** и **C**:

$$1,8663 \approx \mu_1^{(-1/3)} = \frac{2}{3}\lambda_0^{1/2} = \begin{cases} \frac{4}{3} \left(\frac{\mathcal{K}_c^3}{E(R_0^2 + r_0^2)} \right)^{1/2} \Rightarrow l_c = \left(\frac{E(R_0^2 + r_0^2)}{\gamma} \right)^{1/3} \left(\frac{3}{4} \mu_1^{(-1/3)} \right)^{2/3} \\ \frac{4}{\sqrt{3}H_0} \left(\frac{\mathcal{K}_c^3}{E} \right)^{1/2} \Rightarrow l_c = \left(\frac{3E}{\gamma} \right)^{1/3} \left(\frac{H_0}{4} \mu_1^{(-1/3)} \right)^{2/3} \\ \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{\mathcal{K}_c^3}{E(H_0^2 + h_0^2)} \right)^{1/2} \Rightarrow l_c = \left(\frac{3E(H_0^2 + h_0^2)}{\gamma} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{4} \mu_1^{(-1/3)} \right)^{2/3} \end{cases} \quad (9)$$

Соответствующая собственная функция имеет вид:

$$\varphi(x) = (1-x)^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3}\lambda_0^{1/2}(1-x)^{3/2} \right). \quad (10)$$

Положим в (8) $y' = u$, $\lambda = \lambda_0 + \delta$ и рассмотрим нелинейную задачу :

$$u'' + \lambda_0(1-x)u = -\delta(1-x)u - \frac{3}{2}\lambda_0(1-x)u^3 + 3uu'^2 + \dots \quad (11)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0;$$

Применяя лемму Шмидта, выпишем соответствующее (11) уравнение разветвления [5]:

$$L_{11}\xi\delta + L_{30}\xi^3 + \dots = 0,$$

где $L_{11} = -\langle (1-x)\varphi, \varphi \rangle = -\int_0^1 (1-x)^2 J_{-1/3}^2\left(\frac{2}{3}\lambda_0^{1/2}(1-x)^{3/2}\right) dx < 0,$

$$L_{30} = -\frac{3}{2}\lambda_0 \int_0^1 (1-x)\varphi^4(x) dx + 3 \int_0^1 \varphi^2(x)\varphi'^2(x) dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\lambda_0 \int_0^1 (1-x)^3 J_{-1/3}^4\left(\frac{2}{3}\lambda_0^{1/2}(1-x)^{3/2}\right) dx +$$

$$+ 3\lambda_0 \int_0^1 (1-x)^3 J_{-1/3}^2\left(\frac{2}{3}\lambda_0^{1/2}(1-x)^{3/2}\right) J_{2/3}^2\left(\frac{2}{3}\lambda_0^{1/2}(1-x)^{3/2}\right) dx.$$

При вычислении второго интеграла в L_{30} была использована формула [6]:

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{J_\nu(s)}{s^\nu} \right] = -\frac{J_{\nu+1}(s)}{s^\nu}. \text{ Действительно, } ds = -\lambda_0^{1/2}(1-x)^{1/2} dx \text{ и}$$

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{(1-x)^{-1/2}} J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\lambda_0^{1/2}(1-x)^{3/2}\right) \right] =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\lambda_0^{1/2}\right)^{-1/3} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\lambda_0^{1/2}(1-x)^{3/2}\right)^{-1/3}} J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\lambda_0^{1/2}(1-x)^{3/2}\right) \right] =$$

$$= -\lambda_0^{1/2}(1-x)^{1/2} \left(\frac{2}{3}\lambda_0^{1/2}\right)^{-1/3} \frac{d}{ds} \left(\frac{J_{-1/3}(s)}{s^{-1/3}} \right) =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\lambda_0^{1/2}\right)^{-1/3} \lambda_0^{1/2}(1-x)^{1/2} \left(\frac{2}{3}\lambda_0^{1/2}\right)^{1/3} (1-x)^{1/2} J_{2/3}\left(\frac{2}{3}\lambda_0^{1/2}(1-x)^{3/2}\right) =$$

$$\lambda_0^{1/2}(1-x) J_{2/3}\left(\frac{2}{3}\lambda_0^{1/2}(1-x)^{3/2}\right).$$
(12)

Таким образом,

$$L_{30} = -\frac{3}{2}\lambda_0 \int_0^1 t^3 J_{-1/3}^4\left(\frac{2}{3}\lambda_0^{1/2}t^{3/2}\right) dt + 3\lambda_0 \int_0^1 t^3 J_{-1/3}^2\left(\frac{2}{3}\lambda_0^{1/2}t^{3/2}\right) J_{2/3}^2\left(\frac{2}{3}\lambda_0^{1/2}t^{3/2}\right) dt < 0,$$

где знак L_{30} определён разложением в ряды функций Бесселя. Следовательно, решение нелинейной задачи (11) представляется [5] в виде сходящегося ряда по степеням $(-\delta)^{1/2}$ в достаточно малой окрестности $\delta = 0$.

$$y'(x) = u(x) = \pm \left(-\frac{L_{11}\delta}{L_{30}} \right)^{1/2} (1-x)^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda_0^{1/2} (1-x)^{3/2} \right) + o(\delta), \quad \delta < 0,$$

и бифуркация подкритическая.

3. Колонна в виде усечённого конуса (пирамиды). Рассмотрим нашу задачу при $\varepsilon \neq 0$. Критическая длина такой колонны определяется следующими возмущёнными задачами на собственные значения:

А и С.

$$\begin{aligned} L(y, \xi) \equiv & \left[1 + \varepsilon \frac{4(a^2 + ab + b^2)}{(a+b)(a^2 + b^2)} (1-x) + \varepsilon^2 \frac{6}{a^2 + b^2} (1-x)^2 + \right. \\ & \left. + \varepsilon^3 \frac{4}{(a+b)(a^2 + b^2)} (1-x)^3 \right] y''' - \\ & - 4\varepsilon \left[\frac{a^2 + ab + b^2}{(a+b)(a^2 + b^2)} + \varepsilon \frac{3}{a^2 + b^2} (1-x) + \varepsilon^2 \frac{3}{(a+b)(a^2 + b^2)} (1-x)^2 \right] y'' + \\ & + \lambda(1-x) \left[1 + \frac{\varepsilon(1-x)}{a+b} \right] y' = 0; \end{aligned}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(1) = 0.$$

В.

$$\begin{aligned} L(y, \xi) \equiv & \left[1 + \varepsilon \frac{2}{a} (1-x) \right]^4 y''' - \varepsilon \frac{8}{a} \left[1 + \frac{2}{a} (1-x) \varepsilon \right]^3 y'' + \lambda(1-x) \left[1 + \varepsilon \frac{2}{a} (1-x) + \right. \\ & \left. + \varepsilon^2 \frac{4}{3a^2} (1-x)^2 \right] y' = 0; \end{aligned}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(1) = 0.$$

Действуя согласно применению теории бифуркаций к задаче о возмущении собственных чисел и элементов фредгольмовых операторов ([5], §32) определим первое приближение λ_1 к возмущённому собственному значению $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \varepsilon + \dots$

А и С.

$$\lambda_1 = \frac{1}{0} \int_0^1 \left\{ 4 \frac{a^2 + ab + b^2}{(a+b)(a^2 + b^2)} [(1-x)\varphi'' + \varphi'] + \frac{\lambda_0}{a+b} (1-x)^2 \varphi \right\} \varphi dx \left(\int_0^1 (1-x)\varphi^2(x) dx \right)^{-1};$$

В.

$$\lambda_1 = \frac{1}{0} \int_0^1 \left\{ \frac{8}{a} [(1-x)\varphi'' + \varphi'] + \frac{2\lambda_0}{a} (1-x)^2 \varphi \right\} \varphi dx \left(\int_0^1 (1-x)\varphi^2(x) dx \right)^{-1},$$

где $\varphi(x)$ собственная функция (10) невозмущённого оператора. Знак λ_1 определяется разложением в ряды функций Бесселя.

$$\begin{aligned}
\lambda_{1A;C} &= \left(\int_0^1 t^2 J_{-1/3}^2 \left(\frac{2}{3} \lambda_0^{1/2} t^{3/2} \right) dt \right)^{-1} \left[\frac{4(a^2 + ab + b^2)}{(a+b)(a^2 + b^2)} * \right. \\
&* \left. \left\{ \lambda_0^{1/2} \int_0^1 t^{3/2} J_{2/3} \left(\frac{2}{3} \lambda_0^{1/2} t^{3/2} \right) J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda_0^{1/2} t^{3/2} \right) - \right. \right. \\
&\left. \left. - \lambda_0^{1/2} t^3 J_{-1/3}^2 \left(\frac{2}{3} \lambda_0^{1/2} t^{3/2} \right) \right] dt \right\} + \frac{\lambda_0}{a+b} \int_0^1 t^3 J_{-1/3}^2 \left(\frac{2}{3} \lambda_0^{1/2} t^{3/2} \right) dt \right] > 0; \\
\lambda_{1B} &= \left(\int_0^1 t^2 J_{-1/3}^2 \left(\frac{2}{3} \lambda_0^{1/2} t^{3/2} \right) dt \right)^{-1} \left[\frac{8}{a} \left\{ \lambda_0^{1/2} \int_0^1 t^{3/2} J_{2/3} \left(\frac{2}{3} \lambda_0^{1/2} t^{3/2} \right) J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda_0^{1/2} t^{3/2} \right) - \right. \right. \\
&\left. \left. - \lambda_0^{1/2} t^3 J_{-1/3}^2 \left(\frac{2}{3} \lambda_0^{1/2} t^{3/2} \right) \right] dt \right\} + \frac{2\lambda_0}{a} \int_0^1 t^3 J_{-1/3}^2 \left(\frac{2}{3} \lambda_0^{1/2} t^{3/2} \right) dt \right] > 0;
\end{aligned} \tag{13}$$

Последнее неравенство показывает, что критическая длина колонны формы усечённого конуса и усечённой пирамиды больше (меньше) l_c (9) цилиндрической колонны, если $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 0$), т. е. если большее основание расположено снизу (соответственно сверху) колонны.

Асимптотика y' определяется нелинейными задачами на собственные значения (5) – (7) с двумя малыми параметрами ε и δ , $\lambda = \lambda_0 + \delta$. Применение метода Ляпунова-Шмидта [5] к (5) – (7), записанным соответствующим образом: для случаев А и С

$$\begin{aligned}
u'' + \lambda_0(1-x)u &= - \left[\varepsilon \frac{4(a^2 + ab + b^2)}{(a+b)(a^2 + b^2)} (1-x) + \varepsilon^2 \frac{6}{a^2 + b^2} (1-x)^2 + \right. \\
&+ \left. \varepsilon^3 \frac{4}{(a+b)(a^2 + b^2)} (1-x)^3 \right] \left(u'' - \frac{3uu'}{1+u^2} \right) + \frac{3uu'^2}{1+u^2} + \\
&+ 4\varepsilon \left[\frac{(a^2 + ab + b^2)}{(a+b)(a^2 + b^2)} + \varepsilon \frac{3}{a^2 + b^2} (1-x) + \varepsilon^2 \frac{3}{(a+b)(a^2 + b^2)} (1-x)^2 \right] u' - \\
&- \{ (\lambda_0 + \delta) u (1+u^2)^{3/2} \left[1 + \frac{\varepsilon(1-x)}{a+b} \right] - \lambda_0 u \} (1-x);
\end{aligned}$$

и для случая В

$$\begin{aligned}
u'' + \lambda_0(1-x)u &= - \left[\left(1 + \frac{2}{a} (1-x)\varepsilon \right)^4 - 1 \right] \left(u'' - \frac{3uu'}{1+u^2} \right) + \frac{3uu'}{1+u^2} - \{ (\lambda_0 + \\
&+ \delta) u (1+u^2)^{3/2} \left[1 + \frac{2}{a} \varepsilon (1-x) + \frac{4}{3a^2} \varepsilon^2 (1-x)^2 \right] - \lambda_0 u \} (1-x);
\end{aligned}$$

для случая **В**, с граничными условиями $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$, сводит эти задачи к эквивалентным им уравнениям разветвления:

$$\varepsilon L_{110} + \delta L_{101} + \xi^2 L_{300} + \dots = 0, \tag{14}$$

где $L_{300} < 0$ совпадает с (12), а $L_{110} > 0$ с числителем (13), и

$L_{101} = -\int_0^1 (1-x)\varphi^2(x)dx < 0$. Следовательно, асимптотика $y'(x) = u(x)$

определяется по формуле:

$$y'(x) = u(x) = \pm \left(-\frac{L_{110}\varepsilon + L_{101}\delta}{L_{300}} \right)^{1/2} (1-x)^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda_0^{1/2} (1-x)^{3/2} \right) dt + \\ + o(\sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2}).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука 1964. – 864 с.
2. Кузьмин Р. О. Бесселевы функции. – М.: ГИТИ, 1935. – 265 с.
3. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – М.: Наука, физматлит 1968. – 504 с.
4. Petrov K. M., Grishina S. A., Kim – Tyan L. R. Bifurcation problem about stability loss of a column under its own weight. – Межвузовский сборник научных трудов “функциональный анализ”, Ульяновск: УлГПУ, в.39, 2005. – С.83-87.
5. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решения нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 524 с.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736с.

В. Г. Малинов (г. Ульяновск)

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАЗВОРОТЕ САМОЛЁТА В ПЛОСКОСТИ ГОРИЗОНТА

1. При решении задач оптимального управления движением дозвуковых и сверхзвуковых самолетов с воздушно-реактивными двигателями (т.е. аппаратов, скорость которых намного меньше круговой скорости) в пространстве и в горизонтальной плоскости имеются значительные трудности: удовлетворения заданным конечным условиям; учёта ограничений на фазовые координаты и управляющие функции; "овражности" и многоэкстремальности получаемой для минимизации вспомогательной функции. Решить задачу оптимального управления (ЗОУ) численным методом на порядок труднее, чем обычную задачу оптимизации. В работах [1], [2] для решения таких трудных задач минимизации были предложены проекционные двухэтапные двухшаговые методы, ориентированные на решение задач минимизации функций с овражными поверхностями уровней. Целью данной работы является апробация их модификаций на задачах оптимального управления движением самолётов в плоскости горизонта.

2. Для численного решения ЗОУ рассмотрим модификации: метода из [1], – проекционный обобщённый двухшаговый двухэтапный четырехпараметрический метод,

$$1 \text{ этап. } \mathbf{z}^k = P_Q \left[\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k / \|\mathbf{y}^k\| \right],$$

$$2 \text{ этап. } \mathbf{x}^{k+1} = P_Q \left[\mathbf{z}^k + \beta_k \left(\gamma_{1k} \mathbf{y}^k / \|\mathbf{y}^k\| - \gamma_{2k} \nabla f(\mathbf{z}^k) / \|\nabla f(\mathbf{z}^k)\| \right) \right], \quad k \geq 0; \quad (1)$$

метода из [2], – обобщённый двухшаговый двухэтапный метод переменной метрики,

$$1 \text{ этап. } \mathbf{z}^k = P_Q \left[\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k / \|\mathbf{y}^k\| \right];$$

$$2 \text{ этап. } \mathbf{x}^{k+1} = P_Q \left[\mathbf{z}^k - \gamma_k \mathbf{B}(\mathbf{z}^k) \nabla f(\mathbf{z}^k) / \|\nabla f(\mathbf{z}^k)\| \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где $\mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^0 \in E^n$; $P_Q[\mathbf{v}]$ – проекция точки \mathbf{v} на множество $Q \subset E^n$; α_k ,

$\beta_k, \gamma_k, \gamma_{1k}, \gamma_{2k}$ – параметры методов; $\mathbf{B}(\mathbf{z}^k) = \mathbf{B}_k$ – последовательность положительно определённых диагональных матриц; $\mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}$; как в [2] указано, $\mathbf{B}(\mathbf{x}): E^n \rightarrow E^n$ при каждом фиксированном $\mathbf{x} \in E^n$ есть

положительно определённый самосопряжённый линейный оператор, изменяющий метрику пространства. Используются реализации (1) с одномерной минимизацией

$$\beta_k = \arg \min_{\beta > 0} f \left[\mathbf{z}^k + \beta \left(\gamma_{1k} \mathbf{y}^k / \|\mathbf{y}^k\| - \gamma_{2k} \nabla f(\mathbf{z}^k) / \|\nabla f(\mathbf{z}^k)\| \right) \right]$$

для поиска только одного параметра β_k , при остальных параметрах – выбираемых константах, а также версия с одномерной минимизацией для вычисления еще одного параметра,

$$\gamma_{2k} = \arg \min_{\gamma_2 > 0} f \left[\mathbf{z}^k - \gamma_2 \nabla f(\mathbf{z}^k) / \|\nabla f(\mathbf{z}^k)\| \right].$$

Предлагаемые методы здесь

используются в алгоритмах штрафных функций (МШФ). Они отличаются от исследованных ранее в [1] и [2] наличием оператора проектирования на первом этапе, что позволяет предотвратить выброс из "оврага" на первом этапе работы методов.

3. Описание задачи и предыстория. При оптимизации режимов плоского движения самолетов принято разделять два типа задач: к первому типу относят задачи, приводящие к оптимизации по быстродействию, а ко второму типу – приводящие к оптимизации траекторий полётов самолётов.

Задачи первого типа связаны с изучением различного рода форсированных манёвров, оптимальных по быстродействию. В этом случае, если протяжённость оптимизируемого участка траектории будет малой, без существенных погрешностей можно пренебрегать сферичностью Земли и изменением силы тяжести (веса) самолета в процессе манёвра.

Задачи второго типа связаны с использованием оптимальных траекторий большой протяжённости, соответствующих крейсерскому полёту самолёта.

Варианты задач оптимального разворота в горизонтальной плоскости решены А.А. Белолипецким [3], Р.Д. Иродовым, оптимального по топливу и времени набора высоты и скорости самолётов и ракет в вертикальной плоскости решены И.В. Остославским и А.А. Лебедевым, а также другими авторами. Рассмотрение задачи в рамках классического вариационного исчисления при заданном режиме работы двигателей было проведено И.В. Остославским, В.С. Пышновым, Р.Д. Иродовым и другими. В их исследованиях остался открытым вопрос о влиянии на структуру оптимального управления и характеристики оптимального разворота самолёта неучтённых, дополнительных факторов. А именно: влияния управления величиной силы тяги двигателей, с одновременным учётом ограничений на величины нормальной перегрузки n_y и коэффициента подъёмной силы c_y . Целью данной статьи является численное исследование вариантов такой задачи.

Различают задачи о развороте самолёта в плоскости горизонта и об оптимальном правильном вираже (отмечая этим термином разворот с выполнением трёх условий правильного виража). В данной работе рассмотрим задачу о развороте самолёта в горизонтальной плоскости при

изменяющихся массе и скорости самолёта.

4. Пример задачи о развороте в плоскости горизонта. Для этого варианта задачи построим математическую модель на основе задачи о пространственном развороте самолёта ([5], с.353-355) и используем данные последней и обозначения. Предполагаем, что: высота полёта постоянная; угол θ наклона траектории к плоскости местного горизонта нулевой. Тогда система дифференциальных уравнений движения самолёта имеет вид:

$$\begin{aligned} dD / dt &= V \cos(\eta) = f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}); \\ dZ / dt &= -V \sin(\eta) = f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}); \quad dm / dt = -c_s = f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u}); \\ dV / dt &= g [u_1 P \cos \alpha - c_x q^0 S] / m = f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}); \\ d\eta / dt &= -g u_2 N \sin(u_4) / V = f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $q^0 = \rho(h) V^2 / 2$; $\rho(h) = 3.3 \cdot 10^{-10} h^2 - 1.155 \cdot 10^{-5} h + 0.125$;
 $P = [10 + V^2 / [a(h)]^2] (25000 - h) / 12.5$; $a(h) = 340.3 - 0.00408h$;
 $\alpha = u_2 N w / (u_1 P + 4.6q^0 S)$; $c_s = [0.7 + 2(u_1 - 0.3)^2] u_1 P / 3600$; $S = 55 \text{ м}^2$;
 $c_x = 0.02 + 3.174\alpha^2 + 0.03u_3$; $N = \min(q^0 S / w; 150000 / w; 8)$;

$D = x_1, Z = x_2$ – декартовы координаты самолёта (продольная и боковая); h – высота над Землёй; $V = x_3$ – модуль вектора скорости; $\eta = x_4$ – угол курса; $m = x_5$ – вес самолёта; u_1 – величина тяги двигателя, отнесённая к максимальному значению тяги P ; u_2 – величина перегрузки, отнесённая к максимальному значению перегрузки N ; u_3 – величина тормозящей силы, отнесённая к её максимальному значению; $\gamma = u_4$ – угол крена; α – угол атаки; S – характерная площадь самолёта; q^0 – скоростной напор; c_x – коэффициент аэродинамического сопротивления; c_s – секундный расход топлива; $g=9.81$. Заметим, что $\rho(h)$ и $a(h)$ будут постоянными. Ограничения на управления и их производные: $0.05 \leq u_1 \leq 1$; $0.01 \leq u_2 \leq 1$; $0 \leq u_3 \leq 1$;

$$\left| \frac{du_1}{dt} \right| \leq 0.2; \quad \left| \frac{du_2}{dt} \right| \leq 0.25; \quad \left| \frac{du_3}{dt} \right| \leq 1; \quad \left| \frac{du_4}{dt} \right| \leq 1.57 \text{ рад} / \text{с}. \quad (2)$$

Начальные условия для фазовых координат и значения управлений:

$$\begin{aligned} x_1(0) = x_2(0) = 0; \quad h(0) = 7000 \text{ м}; \quad x_3(0) = 300 \text{ м} / \text{с}; \quad x_4(0) = 0; \\ x_5 = 20000 \text{ кг}; \quad u_1(0) = u_1^0; \quad u_2(0) = 1 / N(x(0)); \quad u_3(0) = u_3^0; \quad u_4(0) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Конечные значения фазовых координат и управлений:

$$h(T) = 7000 \text{ м}; \quad x_4(T) = -\pi; \quad u_2(T) = 1 / N(x(T)); \quad u_4(T) = 0. \quad (4)$$

Для задачи (1)–(4) фазовый вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in E^5$, а вектор управлений $\mathbf{u} \in E^4$. Рассмотрим две её подзадачи.

5. Численное решение задачи (1)–(4). Она численно решается по методике из [4]–[6]. В качестве первой подзадачи для (1)–(4) решается задача оптимального быстрогодействия: найти вектор $\mathbf{u}(t)$ управлений, удовлетворяющий системе (1), ограничениям (2), (4) и переводящий самолёт из горизонтального полёта на высоте 7000 м в горизонтальный полёт на высоте 7000 м с разворотом вектора скорости на 180° за наименьшее время при условиях (3). Результаты решения первой подзадачи приведены в таблицах 1, 2.

Таблица 1.

t	$m(t)$	V	η°	D	Z
0	20000.0	300.0	0.0	0.0	0.0
.79145	19996.945	303.334	-0.00001	249.300	0.00001
1.5829	19993.885	305.231	-3.35100	501.370	0.00002
2.3743	19990.821	304.796	-10.7920	754.583	14.827
3.1657	19987.758	301.469	-20.5470	1003.389	62.255
4.7486	19984.700	291.093	-42.5740	1447.516	279.245
6.3314	19978.613	281.931	-63.9180	1767.756	633.777
7.9143	19972.556	273.879	-84.6130	1933.061	1066.470
9.4971	19966.527	266.776	-104.737	1935.865	1516.841
11.080	19960.520	260.488	-124.356	1788.287	1930.352
12.6629	19954.534	254.904	-143.530	1517.429	2263.059
14.2457	19948.564	249.934	-162.308	1160.299	2484.284
15.0371	19942.610	249.043	-170.451	962.427	2547.403
15.8286	19940.685	249.175	-176.723	758.340	2581.734
16.620	19939.402	250.030	-180.0808	551.614	2593.571

Минимизируется время движения T , условия (4) образуют систему терминальных ограничений. Начальные приближения для МШФ: $T_0 = 20c$, $u_1(t) = 0.476$; $u_2(t) = 0.31$; $u_3(t) = 0.001$; $u_4(t) = 1.5 \sin(\pi t / T_0)$.

Обозначения в таблицах: $m(t)$ – переменный вес самолёта в моменты времени t по мере расхода горючего; V – скорость самолёта; η° – угол курса в градусах; D – продольная дальность; Z – боковая дальность. В таблице 1: $\eta^\circ = -180.0807^\circ$ соответствует $\eta = -3.1430018$; время счёта для одного значения штрафного коэффициента ($it=5$) $10c$, всего $30c$. В таблице 2 $\gamma_{\max} = 1.2636$ соответствует максимальному углу крена $72^\circ 24'$. Конечное значение ограничения равенства $u_2(T) - 1 / N(x(T)) = 0.000004$.

Таблица 2. Оптимальные значения управляющих переменных.

t	$u_1(t)$	$u_2(t)$	$u_3(t)$	$u_4(t)$
0	0.75500	0.01	0.001	0.00001
.79145	0.75500	0.1800	0.001	0.7200
1.5829	0.75500	0.4400	0.001	1.26360
2.3743	0.75500	0.6800	0.001	1.26360
3.1657	0.75500	0.8900	0.001	1.26360
4.7486	0.75500	1.0000	0.001	1.26360
6.3314	0.75500	1.0000	0.001	1.26360
7.9143	0.75500	1.0000	0.001	1.26360
9.4971	0.75500	1.0000	0.001	1.26360
11.080	0.75500	1.0000	0.001	1.26360
12.6629	0.75500	1.0000	0.001	1.26360
14.2457	0.75500	0.8800	0.001	1.26360
15.0371	0.61000	0.6800	0.001	1.26300
15.8286	0.4760	0.4500	0.0240	0.88000
16.620	0.4760	0.1936	0.0240	0.00000

Системе (1) соответствует функция Понтрягина $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{i=5} p_i f_i(x, u)$, где начальные значения сопряжённых переменных $p_i(0) = c_i = 1, i \in \{1:5\}$, а вычисленный в ходе минимизации вектор сопряжённых переменных первой подзадачи $\mathbf{p}=(1.00049; 1.00215; 0.99995; 1.00000; 0.99996)$.

Для сравнения результатов первая подзадача задачи (1)–(4) о развороте самолёта на высоте 7000м решена МШФ на базе различных методов. Основные результаты приведены в сводной таблице 3; в них приняты обозначения базовых методов: TSVM – обобщённый двухшаговый двухэтапный метод переменной метрики (исследованный в работе [2]); LEDM – проекционная модификация, проведённая автором данной работы, метода Le D [7]; THS – трёхшаговый ММПГ Ф.П. Васильева и А. Недич в нашей реализации; TWS – версия обобщённого двухшагового двухэтапного метода автора; MPG – реализация модифицированного метода проекции градиента $\mathbf{x}^{k+1} = P_Q \left[\mathbf{x}^k - \gamma_k \nabla f(\mathbf{x}^k) / \|\nabla f(\mathbf{x}^k)\| \right]$, $k \geq 0$, с одномерной минимизацией по MUM [8]; GFPM – четырёхпараметрический обобщённый двухшаговый двухэтапный проекционный [1]; GTPM – наш проекционный обобщённый двухпараметрический двухшаговый, ODM – его другая реализация; ПЧМ1 – модификация четырёхпараметрического обобщённого двухшагового двухэтапного проекционного метода (1) (см. [1]), ПЧМ2 – его другая реализация. Заголовки столбцов таблицы 3: $V(T)$ и $m(T)$ – скорость и вес самолёта в момент времени T ; η° – угол курса в градусах;

$R = u_2(T) - 1 / N(x(T))$ – невязка ограничения равенства из (4); itp – произведение числа итераций метода на количество проходов МШФ с новым значением штрафного коэффициента; $time$ – время (сек) счёта для метода.

Таблица 3.

№	Метод	T	V(T)	$m(T)$	η°	R	itp	$time$
1	TWS	16.625	249.228	19940.333	180.100	.00005	2*3	21
2	THS	16.625	250.021	19939.385	180.131	.000074	1*2	22
3	LeDM	16.62	249.843	19939.658	180.073	.000002	12	15
4	GTPM	16.625	250.020	19939.391	180.130	.000052	1*4	16
5	ODM	16.625	250.021	19939.385	180.131	.000003	4*4	128
6	GFPM	16.62	250.030	19939.402	180.081	.000097	4*2	21
7	ПЧМ1	16.62	250.030	19939.402	180.081	.000004	4*2	18
8	ПЧМ2	16.625	250.011	19939.395	180.131	.000052	5*3	15
9	TSVM	16.62	250.030	19939.402	180.081	.000002	4*1	7
10	MPG	16.625	249.026	19940.521	180.094	.000014	75*2	110

Общие для всех методов таблицы 3: невязки ограничений в штрафной функции – менее 1.3×10^{-4} ; шаг 0.05 после замены переменной как в [5]; значения относительного сопротивления $u_3 \in [0.001; 0.024]$; начальный вектор сопряжённых переменных $\mathbf{p}^0 = 1$; полная размерность задачи $n=94$; конечные значения сопряжённых переменных незначительно отличаются от 1; $u_1^{\max} = 0.755$; $\gamma_{\max} = 1.2636$ соответствует максимальному углу крена $72^\circ 24'$; перегрузка $u_2^{\max} = 1$; конечные значения сопряжённых переменных незначительно отличаются от 1. Например, крайние случаи: для ODM $\mathbf{p}^T = (1.00005; 1.00021; 0.99999; 1; 1)$, для GTPM $\mathbf{p}^T = (1.15561; 1.73187; 0.98622; 0.99942; 0.9832)$, для других методов координаты $p_i \in [0.99999; 1.1] \forall i \in \{1:5\}$.

6. Вторая подзадача оптимального быстродействия для (1)–(4) – задача о развороте самолёта на другой высоте. Постановка второй подзадачи: найти вектор $\mathbf{u}(t)$ управлений, удовлетворяющий системе (1), ограничениям (2), (4) и переводящий самолёт из горизонтального полёта на высоте 6000 м в горизонтальный полёт на высоте 6000 м с разворотом вектора скорости на 180° за наименьшее время при условиях (3).

Результаты её решения TSVM приведены в таблицах 4 и 5.

Таблица 4.

T	$m(t)$	V	η°	D	Z
0	20000.0	300.0	0.0	0.0	0.0
0.7476	19995.423	302.571	-0.00001	235.500	0.00001
1.4952	19993.138	303.962	-3.17300	473.018	0.00002
2.2429	19990.850	303.354	-10.1330	711.262	13.209
2.9905	19988.561	300.280	-19.2600	945.681	55.103
4.4857	19983.969	290.576	-40.1530	1369.875	247.527
5.9810	19979.372	279.981	-61.7710	1685.622	568.394
7.4762	19974.464	270.001	-83.1690	1854.186	967.827
8.9714	19969.480	261.577	-103.8360	1866.352	1386.405
10.4667	19964.529	254.878	-123.8780	1735.176	1770.724
11.9619	19959.379	247.722	-143.3680	1487.997	2078.707
13.4571	19956.513	240.822	-162.3830	1160.849	2282.169
14.2048	19955.217	238.396	-170.5670	980.670	2339.383
14.9524	19953.928	237.785	-176.8270	796.059	2370.055
15.700	19953.940	238.705	-180.1440	609.685	2380.388

В таблицах 4 и 5: угол курса $\eta^\circ = -180.144^\circ$ (градусов) соответствует $\eta = -3.144115$ радиан; $\gamma_{\max} = 1.2223$ соответствует максимальному углу крена $70^\circ 2'$; время счёта для одного значения штрафного коэффициента ($it=5$) $7c$, полное время $28c$; $u_2(T) - 1/N(x(T)) = 0.0000002$; вычисленный этим методом вектор сопряжённых переменных второй подзадачи $p = (1.00353; 1.00386; 1.00343; 1.00344; 1.00343)$.

Таблица 5. Оптимальные значения управляющих переменных.

t	$u_1(t)$	$u_2(t)$	$u_3(t)$	$u_4(t)$
0	0.4760	0.01	0.001	0.0
0.7476	0.66057	0.19831	0.02913	0.00001
1.4952	0.65927	0.43997	0.02978	0.7200
2.2429	0.65884	0.67996	0.03022	1.22230
2.9905	0.65949	0.88995	0.02985	1.22230
4.4857	0.66182	1.00000	0.02785	1.22230
5.9810	0.66493	1.00000	0.02521	1.22230
7.4762	0.68006	1.00000	0.01932	1.22230
8.9714	0.69501	1.00000	0.01415	1.22230
10.4667	0.69379	1.00000	0.01362	1.22230
11.9619	0.70096	1.00000	0.01338	1.22230
13.4571	0.50813	0.87994	0.01324	1.22230
14.2048	0.48239	0.67995	0.01367	1.22230
14.9524	0.47944	0.45000	0.02744	0.85500
15.700	0.47944	0.18991	0.02744	0.00000

Вторая подзадача для сравнения результатов также решена МШФ на базе различных методов. Для всех методов шаг после замены переменной взят 0.05; $n=94$ с учётом сопряжённых переменных и переменной для времени.

Таблица 6.

№	Метод	V(T)	m(T)	η°	R	itp	time	u_1^{\max}
1	TWS	239.733	19952.979	180.142	.00001	2*6	18	.69195
2	THS	239.097	19953.240	180.130	.000038	1*5	35	.70349
3	LeDM	240.259	19951.671	180.147	.0000002	13	17	.74398
4	GTPM	239.206	19949.570	180.146	.000034	1*5	15	.75373
5	ODM	239.885	19952.313	180.148	.000039	4*1	6	.75400
6	GFPM	240.139	19949.757	180.155	.00012	4*7	25	.75397
7	ПЧМ1	239.467	19953.360	180.148	.000001	4*5	30	.69185
8	ПЧМ2	239.912	19953.082	180.143	.000065	4*5	30	.68488
9	TSVM	238.705	19953.934	180.144	.0000002	5*4	24	.71501
10	MPG	248.943	19939.735	180.162	.01304	74	51	.73119

Результаты расчёта параметров оптимального разворота самолёта в плоскости горизонта на высоте 6000м приведены в сводной таблице 6; обозначения методов те же, что и в таблице 3.

Общие для всех методов таблицы 6: время разворота $T=15.7$ сек за исключением ODM (для него $T=15.58$ сек); $\gamma_{\max} = 1.2223$, что соответствует максимальному углу крена $70^\circ 2'$ (для всех методов $1.22155 \leq \gamma_{\max} \leq 1.2223$); $u_1^{\max} = 0.755$ – полученная максимальная величина относительной тяги двигателей; перегрузка $0.9978 \leq u_2^{\max} \leq 1$; невязки ограничений в штрафной функции – менее 1.3×10^{-4} ; шаг 0.05 после замены переменной как в [5]; значения относительного сопротивления $u_3 \in [0.001; 0.12915]$; начальный вектор сопряжённых переменных $p^0 = 1$; полная размерность задачи $n=94$; конечные значения сопряжённых переменных незначительно отличаются от 1. Например, крайние случаи: модифицированным методом LeD получен вектор сопряжённых переменных $p^T = (1.00011; 1.00039; 0.99999; 1; 0.99999)$, для GTPM $p^T = (1.1137; 1.14247; 1.1047; 1.1051; 1.10381)$. Вторая подзадача интересна для сравнения изменения параметров оптимального разворота с увеличением высоты: скорость, тяга и расход горючего при этом растут.

7. Численное решение другого примера. Кроме приведённых в пп. 5,6 расчётов, модель (1)–(4) использована для решения аналогичной задачи в случае самолёта со следующими данными:

$$S = 200 \text{ м}^2; \quad x_3(0) = 200 \text{ м / с}; \quad h = 8000 \text{ м}; \quad m(0) = 90000 \text{ кг}; \quad u_4(0) = 0;$$

$$h(T) = 8000 \text{ м}; \quad x_4(T) = -\pi; \quad u_2(T) = 1 / N(x(T)); \quad u_4(T) = 0. \quad (4')$$

ММ (1)–(2), (4') с исходными данными для краткости ссылок будем называть *задачей В*. Фазовый вектор $\mathbf{x} \in E^5$, вектор управлений $\mathbf{u} \in E^4$. Задача В решается на *оптимальное быстроедействие*:

найти вектор $\mathbf{u}(t)$ управлений, удовлетворяющий системе (1), ограничениям (2) и переводящий самолёт из горизонтального полёта на высоте 8000м в горизонтальный полёт на высоте 8000м с разворотом вектора скорости на 180° за наименьшее время при условиях (4').

Задача решается МШФ на базе TSVM. Вспомогательная функция задачи минимизации включает функцию Понтрягина с отрицательным знаком. Начальные приближения для метода штрафных функций следующие. $T_0 = 38.8$ сек; начальные значения управляющих функций – переменных минимизации: тяга $u_1(0) = 0.476$; перегрузка $u_2(0) = 0.31$; тормозная сила $u_3(0) = 0.024$; $u_4(t) = 1.5 \sin(\pi t / T_0)$. Результаты решения задачи В приведены в таблицах 7 и 8.

Таблица 7.

t сек	$m(t)$	V	η°	D	Z
0	90000.0	200.0	0.0	0.0	0.0
1.524	89997.771	196.863	-6.8812	304.800	0.0
3.048	89995.533	193.721	-13.8723	602.657	35.946
6.096	89990.962	187.394	-28.1991	1160.457	210.700
9.144	89986.334	181.204	-43.0144	1640.622	508.884
12.192	89981.688	175.322	-58.3332	2014.919	907.205
15.240	89976.471	169.862	-74.1674	2261.305	1375.037
18.328	89970.248	164.935	-90.4962	2366.236	1876.862
21.336	89964.230	160.120	-106.6461	2326.880	2373.236
22.860	89962.167	157.403	-114.5411	2256.977	2607.032
25.908	89958.378	152.164	-129.9330	2031.319	3024.575
30.480	89953.232	144.885	-152.0761	1531.090	3485.965
35.052	89948.595	138.254	-173.1769	924.958	3717.316
36.576	89947.152	136.172	-179.995	715.751	3742.348
38.100	89945.983	134.111	-180.0012	508.224	3742.367

Таблица 8. Оптимальные значения управляющих переменных задачи В.

t сек.	$u_1(t)$	$u_2(t)$	$u_3(t)$	$u_4(t)$
0	0.28567	0.99989	0.99998	0.00001
1.524	0.28624	0.99989	0.99999	1.30200
3.048	0.28885	0.99989	0.99999	1.30200
6.096	0.29303	0.99989	0.93400	1.30200
9.144	0.31067	0.99989	0.61643	1.30240
12.192	0.38298	0.99990	0.35950	1.30240
15.240	0.41995	0.99990	0.04805	1.30240

Окончание таблицы 8.

t сек.	$u_1(t)$	$u_2(t)$	$u_3(t)$	$u_4(t)$
18.328	0.43709	0.99989	0.04805	1.30240
21.336	0.37631	0.99988	0.04805	1.30240
22.860	0.29146	0.99988	0.04805	1.30240
25.908	0.28649	0.99988	0.04805	1.30240
30.480	0.28490	0.99988	0.04805	1.30200
35.052	0.28372	0.99988	0.04805	1.30200
36.576	0.28155	0.99987	0.04805	1.30199
38.100	0.28006	0.90291	0.04806	0.00001

Для решения задачи В: число итераций одного прохода МШФ $it=5$; величина шага после замены переменной 0.04; число переменных $n=101$; время одного прохода МШФ 8 секунд (для 5 итераций). В таблице 6 $\gamma_{\max} = 1.3024$ соответствует максимальному углу крена $74^{\circ}37'$. Другие результаты расчёта задачи В: $|u_2(T) - 1 / N(x(T))| = 0.000002$; $|\eta - \pi| = 0.000021$; $P(t) - Q(t) = 0$.

8. Вывод. Результаты показывают работоспособность предлагаемых методов при решении ЗОУ, достаточную скорость и точность минимизации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Малинов В. Г. Четырёхпараметрические двухшаговые проекционные методы минимизации первого порядка // Журнал вычислит. математ. и матем. физики, 1996. – Т. 36. № 12. – С. 48-56.
2. Малинов В. Г. Проекционный двухшаговый обобщенный двухпараметрический метод минимизации первого порядка с переменной метрикой // Учёные записки УлГУ. Серия "Фундаментальные проблемы математики и механики". Вып.1(13). – Ульяновск: УлГУ, 2003. – С. 127-138.
3. Белолипецкий А. А. Оптимальный вираж самолёта с изменяющимся вектором тяги // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1981. № 3. – С.3-12.
4. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1971. – 424 с.
5. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982. – 432 с.
6. Дикусар В. В., Милютин А. А. Качественные и численные методы в принципе максимума. – М.: Наука. 1989. – 141 с.
7. Le D. A Fast and Robust unconstrained optimization method Requiring minimum storage // Mathematical Programming. 1985. V. 32. № 1. – P. 41-68.
8. Малинов В. Г. Некоторые одномерные экстремальные задачи и методы их решения. – Ульяновск. Изд-во УлГУ, 2004. – 64 с.

П. К. Маценко (г. Ульяновск)

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ВОЗМУЩЕНИЕМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Рассматривается оператор, полученный из дифференциального оператора первого порядка с «размазанным» краевым условием возмущением, зависящим от дифференциального оператора высшего порядка. Найдено распределение собственных значений этого оператора и получены достаточные условия разложимости функции в ряд по системе его собственных и присоединенных функций.

Пусть Y – множество m раз непрерывно дифференцируемых на $[-\pi, \pi]$ функций, удовлетворяющих условию

$$U_{m+1}[y] \equiv \int_{-\pi}^{\pi} y(x) du_{m+1}(x) = 0,$$

причем $Var(u_{m+1}) < +\infty$. На множестве Y определим оператор A по формуле

$$Ay(x) = Dy(x) + \sum_{k=0}^m U_k[D^k y] \varphi_k(x), \quad (1)$$

где $D = -i \frac{d}{dx}$ – оператор дифференцирования, $i = \sqrt{-1}$, $\varphi_k(x) \in C[-\pi, \pi]$, а функционалы $U_k[\]$ имеют вид:

$$U_k[y] = \int_{-\pi}^{\pi} y(x) du_k(x), \quad k = \overline{0, m-1}, \quad \text{причем } Var(u_k) < +\infty;$$

$U_m[y] = h_1 y(-\pi) + h_2 y(\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} y(x) u_m(x) dx$, причем h_1, h_2 – некоторые

ненулевые константы, $u'_m(x) \in L(-\pi, \pi)$. На функции $\varphi_k(x)$ ($k = \overline{0, m}$) наложим дополнительные условия:

- $\varphi_k(x)$ ($k = \overline{0, m}$) линейно независимы на $[-\pi, \pi]$;
- $\varphi_k^{(m+1)}(x)$ – ограничены на $[-\pi, \pi]$;
- $U_{m+1}[\varphi_m] \neq 0$.

В работе получена асимптотическая формула распределения собственных значений оператора A (теорема 1) и найдены достаточные условия

разложимости функции в ряд по системе собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) оператора A (теорема 2). Подобные задачи для интегро-дифференциального оператора рассматривались в работах А.П.Хромова (см., например, [1,2]). Характерной особенностью этих работ является то обстоятельство, что порядок дифференциального оператора, входящего в возмущение, не выше порядка исходного дифференциального оператора. В предлагаемой работе возмущающая часть оператора (1) может содержать дифференциальный оператор любого порядка, в том числе и более высокого, чем порядок оператора D .

Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений. Введем в рассмотрение оператор M_λ следующим образом:

$$M_\lambda f = \int_{-\pi}^x i e^{i\lambda(x-t)} f(t) dt, \quad \text{Im } \lambda \geq 0 \quad \text{и} \quad M_\lambda f = -\int_x^\pi i e^{i\lambda(x-t)} f(t) dt, \quad \text{Im } \lambda < 0. \quad (2)$$

Легко доказать, что

$$DM_\lambda f(x) = f(x) + \lambda M_\lambda f(x). \quad (3)$$

Введем в рассмотрение блочную матрицу

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} [\delta_{sk} + U_s[D^s M_\lambda \varphi_k]]_{s,k=0}^m & [\lambda^s U_s[e^{i\lambda x}]]_{s=0}^m \\ [U_{m+1}[M_\lambda \varphi_k]]_{k=0}^m & U_{m+1}[e^{i\lambda x}] \end{bmatrix},$$

в которой δ_{sk} – символ Кронекера.

Лемма 1. Собственные значения оператора A и только они являются корнями уравнения $\det B(\lambda) = 0$.

Доказательство. Пусть λ – собственное значение оператора A , значит, краевая задача

$$Dy(x) + \sum_{k=0}^m U_k[D^k y]\varphi(x) - \lambda y(x) = 0, \quad U_{m+1}[y] = 0$$

имеет ненулевое решение. Значит, ненулевое решение имеет задача

$$y(x) + \sum_{k=0}^m U_k[D^k y] \cdot M_\lambda \varphi_k(x) + c e^{i\lambda x} = 0, \quad U_{m+1}[y] = 0,$$

в которой c – некоторая константа. На обе части уравнения сначала подействуем оператором D^s и функционалом $U_s[\]$ ($s = \overline{0, m}$), затем функционалом $U_{m+1}[\]$; в итоге получим систему уравнений

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^m (\delta_{sk} + U_s[D^s M_\lambda \varphi_k]) U_k[D^k y] + c \lambda^s \cdot U_s[e^{i\lambda x}] = 0, & s = \overline{0, m}, \\ \sum_{k=0}^m U_{m+1}[M_\lambda \varphi_k] \cdot U_k[D^k y] + c \cdot U_{m+1}[e^{i\lambda x}] = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Система (4) должна иметь ненулевое решение, значит, ее определитель $\det B(\lambda)$ равен 0.

Обратно, пусть λ – корень уравнения $\det B(\lambda) = 0$. Значит, система

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^m (\delta_{sk} + U_s[D^s M_\lambda \varphi_k]) c_k + c_{m+1} \lambda^s \cdot U_s[e^{i\lambda x}] = 0, & s = \overline{0, m}, \\ \sum_{k=0}^m U_{m+1}[M_\lambda \varphi_k] \cdot c_k + c_{m+1} \cdot U_{m+1}[e^{i\lambda x}] = 0 \end{cases} \quad (5)$$

имеет ненулевое решение: c_0, c_1, \dots, c_{m+1} . Введем в рассмотрение функцию

$$y = \sum_{k=0}^m c_k M_\lambda \varphi_k + c_{m+1} e^{i\lambda x}. \quad (6)$$

Покажем, что y – собственная функция оператора A . Легко видеть, что эта функция ненулевая. Из последнего уравнения системы (5) следует $U_{m+1}[y] = 0$. Далее находим

$$U_s[D^s y] = \sum_{k=0}^m c_k U_s[D^s M_\lambda \varphi_k] + c_{m+1} \lambda^s U_s[e^{i\lambda x}] = -c_s \quad (s = \overline{0, m})$$

в силу s – го уравнения системы (5). Значит, равенство (6) можно переписать в виде

$$y + \sum_{k=0}^m U_k[D^k y] M_\lambda \varphi_k = c_{m+1} e^{i\lambda x}.$$

Применив к обеим частям этого уравнения оператор D и учтя формулу (3), получим

$$\begin{aligned} Dy + \sum_{k=0}^m U_k[D^k y](\varphi_k + \lambda M_\lambda \varphi_k) &= c_{m+1} \lambda e^{i\lambda x}, \\ Dy + \sum_{k=0}^m U_k[D^k y] \varphi_k + \lambda \left(\sum_{k=0}^m U_k[D^k y] \varphi_k - c_{m+1} \lambda e^{i\lambda x} \right) &= 0, \end{aligned}$$

$Ay - \lambda y = 0$. Значит, y – собственная функция оператора A . Лемма доказана.

Лемма 2. Если λ не является собственным значением оператора A , то для любой непрерывной $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ краевая задача

$$Dy(x) + \sum_{k=0}^m U_k[D^k y] \cdot \varphi_k(x) - \lambda y(x) = f(x), \quad U_{m+1}[y] = 0 \quad (7)$$

имеет единственное решение. Это решение представимо в виде

$$y(x) \equiv R_\lambda f(x) = \frac{1}{\det B(\lambda)} \cdot \det H_\lambda f(x), \quad (8)$$

где $\det H_\lambda f(x)$ – определитель блочной матрицы

$$H_\lambda f(x) = \begin{bmatrix} [\delta_{sk} + U_s[D^s M_\lambda \varphi_k]]_{s,k=0}^m & [\lambda^s U_s[e^{i\lambda x}]]_{s=0}^m & [U_s[D^s M_\lambda f]]_{s=0}^m \\ [U_{m+1}[M_\lambda \varphi_k]]_{k=0}^m & U_{m+1}[e^{i\lambda x}] & U_{m+1}[M_\lambda f] \\ [M_\lambda \varphi_k(x)]_{k=0}^m & e^{i\lambda x} & M_\lambda f(x) \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Предварительно разложим определитель $\det H_\lambda f(x)$ сначала по элементам последней строки, затем полученные определители – по элементам последнего столбца. В итоге формулу (8) заменим равносильной формулой

$$y(x) = M_\lambda f(x) - \frac{1}{\det B(\lambda)} \left\{ \sum_{k=0}^m M_\lambda \varphi_k \sum_{r=0}^{m+1} b_r[f] \Delta_{rk}(\lambda) + e^{i\lambda x} \sum_{r=0}^{m+1} b_r[f] \Delta_{rk}(\lambda) \right\}, \quad (9)$$

в которой $b_r[f] = U_r[D^r M_\lambda f]$ ($r = \overline{0, m}$), $b_{m+1}[f] = U_{m+1}[M_\lambda f]$,

$\Delta_{rk}(\lambda)$ – алгебраические дополнения элементов определителя $\det B(\lambda)$.

Пусть $y = R_\lambda f$ – решение краевой задачи (7). Значит, y – решение задачи

$$y(x) + \sum_{k=0}^m U_k[D^k y] \cdot M_\lambda \varphi_k(x) + ce^{i\lambda x} = M_\lambda f, \quad U_{m+1}[y] = 0, \quad (10)$$

в которой c – некоторая константа. На обе части уравнения (10) сначала подействуем оператором D^r и функционалом $U_r[\cdot]$ ($r = \overline{0, m}$), затем функционалом $U_{m+1}[\cdot]$. В итоге получим систему уравнений

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^m (\delta_{rk} + U_r[D^r M_\lambda \varphi_k]) U_k[D^k y] + c \lambda^r \cdot U_r[e^{i\lambda x}] = U_r[D^r M_\lambda f], \\ \sum_{k=0}^m U_{m+1}[M_\lambda \varphi_k] \cdot U_k[D^k y] + c \cdot U_{m+1}[e^{i\lambda x}] = U_{m+1}[M_\lambda f]. \end{cases} \quad r = \overline{0, m},$$

Определитель системы отличен от нуля, поэтому система однозначно разрешима, и решение имеет вид

$$U_k[D^k y] = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{r=0}^{m+1} \Delta_{rk}(\lambda) b_r[f], \quad k = \overline{0, m}; \quad c = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{r=0}^{m+1} \Delta_{rk}(\lambda) b_r[f].$$

Подставив эти формулы в (10), получим формулу (9), т. е. формулу (8).

Обратно, пусть функция y имеет представление (8). Поскольку в определителе $U_{m+1}[\det H_\lambda f(x)]$ совпадают две последние строки, то он равен нулю. Значит, в силу (8) $U_{m+1}[y] = 0$. В определителе $U_p[D^p \det H_\lambda f(x)]$ ($p = \overline{0, m}$) p -ую строку вычтем из последней; последняя строка будет состоять из элементов вида: $-\delta_{pk}$, $k = \overline{0, m+2}$. Теперь определитель $U_p[D^p \det H_\lambda f(x)]$ разложим сначала по элементам последней строки, затем каждый новый определитель – по элементам последнего столбца. В итоге на основании формулы (8) получим

$$U_p[D^p y] = \frac{1}{\det B(\lambda)} U_p[D^p \det H_\lambda f] = \frac{1}{\det B(\lambda)} \sum_{r=0}^{m+1} b_r[f] \Delta_{rp}(\lambda), \quad p = \overline{0, m}.$$

С учетом этой формулы перепишем (9) в виде

$$y = M_\lambda f - \sum_{k=0}^m U_k [D^k y] M_\lambda \varphi_k - c e^{i\lambda x},$$

где c – некоторая константа. Значит, y – решение задачи (10), т. е. краевой задачи (7). Лемма доказана.

Лемма 3. Если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[-\pi, \pi]$, то справедлива формула

$$DM_\lambda f(x) = M_\lambda Df(x) + \theta(\lambda, f) e^{i\lambda x}, \quad (11)$$

в которой $\theta(\lambda, f) = f(-\pi) e^{i\pi\lambda}$ для $\text{Im } \lambda \geq 0$ и $\theta(\lambda, f) = f(\pi) e^{-i\pi\lambda}$ для $\text{Im } \lambda < 0$.

Доказательство леммы приведено в работе [3].

Лемма 4. Справедливы формулы:

$$M_\lambda \varphi_k(x) = \tilde{\varphi}_k(x, \lambda) + \beta_k(\lambda) e^{i\lambda x}, \quad k = \overline{0, m}, \quad (12)$$

$$U_s [D^s M_\lambda \varphi_k] = \lambda^s \alpha_{sk}(\lambda) + \lambda^s \beta_k(\lambda) U_s [e^{i\lambda x}], \quad s, k = \overline{0, m}, \quad (13)$$

в которых $\beta_k(\lambda) = \sum_{p=0}^m \lambda^{-p-1} \theta(\lambda, D^p \varphi_k)$,

$$\tilde{\varphi}_k(x, \lambda) = - \sum_{p=0}^m \lambda^{-p-1} D^p \varphi_k(x) + O(|\lambda|^{-m-1}), \quad |\lambda| \rightarrow +\infty,$$

$$\alpha_{sk}(\lambda) = - \sum_{p=s}^m \lambda^{-p-1} U_s [D^p \varphi_k] + O(|\lambda|^{-m-1}), \quad |\lambda| \rightarrow +\infty.$$

При этом оценки $O(\cdot)$ равномерны по $x \in [-\pi, \pi]$.

Доказательство. Сначала для функций $\varphi_k(x)$ ($k = \overline{0, m}$) докажем формулу

$$D^s M_\lambda \varphi_k(x) = \sum_{p=0}^{s-1} \lambda^{s-p-1} D^p \varphi_k(x) + \lambda^s M_\lambda \varphi_k(x), \quad s = \overline{0, m}. \quad (14)$$

Для $s=0$ формула очевидна. Для $s=1$ формула (14) следует из (3). Предположим, что формула (14) верна для некоторого s ; тогда

$$\begin{aligned} D^{s+1} M_\lambda \varphi_k &= D \left(\sum_{p=0}^{s-1} \lambda^{s-p-1} D^p \varphi_k \right) + \lambda^s D(M_\lambda \varphi_k) = \sum_{p=0}^{s-1} \lambda^{s-p-1} D^{p+1} \varphi_k + \\ &+ \lambda^s (\varphi_k + \lambda M_\lambda \varphi_k) = \sum_{p=0}^s \lambda^{s-p} D^p \varphi_k + \lambda^{s+1} M_\lambda \varphi_k. \end{aligned}$$

Формула (14) доказана.

Теперь докажем формулу (12). Предварительно докажем, что для $Df \in C[-\pi, \pi]$ справедлива формула

$$M_\lambda f = -\lambda^{-1} f(x) + \lambda^{-1} \theta(\lambda, f) e^{i\lambda x} + \lambda^{-1} M_\lambda Df. \quad (15)$$

В самом деле, в случае $\text{Im } \lambda \geq 0$

$$M_\lambda Df(x) = \int_{-\pi}^x e^{i\lambda(x-t)} f'(t) dt = f(x) - \theta(\lambda, f) e^{i\lambda x} + \lambda M_\lambda f(x),$$

что доказывает (15). В случае $\text{Im } \lambda < 0$ доказательство (15) аналогично.

Применим формулу (15) к функциям $\lambda^{-p} D^p \varphi_k(x)$ ($p = \overline{0, m}$), получим систему равенств

$$\lambda^{-p} M_\lambda D^p \varphi_k = -\lambda^{-p-1} D^p \varphi_k + \lambda^{-p-1} \theta(\lambda, D^p \varphi_k) e^{i\lambda x} + \lambda^{-p-1} M_\lambda D^{p+1} \varphi_k, \\ p = \overline{0, m}.$$

Просуммируем левые и правые части этих равенств:

$$M_\lambda \varphi_k + \sum_{p=1}^m \lambda^{-p} M_\lambda D^p \varphi_k = -\sum_{p=0}^m \lambda^{-p-1} D^p \varphi_k + \sum_{p=0}^m \lambda^{-p-1} \theta(\lambda, D^p \varphi_k) e^{i\lambda x} + \\ + \sum_{p=0}^{m-1} \lambda^{-p-1} M_\lambda D^{p+1} \varphi_k + \lambda^{-m-1} M_\lambda D^{m+1} \varphi_k,$$

получим формулу

$$M_\lambda \varphi_k = -\sum_{p=0}^m \lambda^{-p-1} D^p \varphi_k + \sum_{p=0}^m \lambda^{-p-1} \theta(\lambda, D^p \varphi_k) e^{i\lambda x} + \lambda^{-m-1} M_\lambda D^{m+1} \varphi_k.$$

Из этой формулы с учетом оценки $M_\lambda D^{m+1} \varphi_k = O(1)$, равномерной по $x \in [-\pi, \pi]$, следует асимптотическая формула (12). Теперь подставим (12) в (14), получим формулу

$$D^s M_\lambda \varphi_k = -\sum_{p=s}^m \lambda^{s-p-1} D^p \varphi_k + \lambda^s \beta_k(\lambda) e^{i\lambda x} + O(|\lambda|^{s-m-1}), \quad (16)$$

из которой следует (13).

Лемма 5. Если функция $f^{(m+1)}(x) \in L(-\pi, \pi)$, то справедливы формулы

$$M_\lambda f = \tilde{f}(x, \lambda) + \beta_f(\lambda) e^{i\lambda x}, \quad (17)$$

$$U_s[D^s M_\lambda f] = \lambda^s \alpha_f(\lambda, s) + \lambda^s \beta_f(\lambda) U_s[e^{i\lambda x}], \quad s = \overline{0, m}, \quad (18)$$

в которых $\beta_f(\lambda) = \sum_{p=0}^m \lambda^{-p-1} \theta(\lambda, D^p f)$, а функции $\tilde{f}(x, \lambda)$, $\alpha_f(\lambda, s)$ имеют

при $|\lambda| \rightarrow +\infty$ равномерные по $x \in [-\pi, \pi]$ оценки

$$\tilde{f}(x, \lambda) = O(|\lambda|^{-1}) \cdot \sigma(f), \quad \alpha_f(\lambda, s) = O(|\lambda|^{-s-1}) \cdot \sigma(f), \quad (19)$$

где $\sigma(f) = \sum_{p=0}^m \|f^{(p)}\| + \|f^{(m+1)}\|_1$, $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ – нормы элемента соответственно в

пространствах $C[-\pi, \pi]$ и $L(-\pi, \pi)$.

Доказательство. Аналогично (16) доказывается формула

$$D^s M_\lambda f(x) = -\lambda^s \sum_{p=s}^m \lambda^{-p-1} D^p f(x) + \lambda^s \beta_f(\lambda) e^{i\lambda x} + O(|\lambda|^{s-m-1}) \cdot \|f^{(m+1)}\|_1,$$

из которой следует утверждение леммы.

Теорема 1. Спектр оператора A состоит только из собственных значений. Собственные значения λ_k образуют счетную последовательность с асимптотикой

$$\lambda_k = k + \frac{1}{2i\pi} \ln\left(-\frac{h_1}{h_2}\right) + \nu_k, \text{ в которой } |\nu_k| \leq \delta, \quad k = \pm k_\delta, \pm(k_\delta + 1), \dots, \quad (20)$$

причем $\delta > 0$ – любая наперед заданная малая константа, k_δ – некоторое натуральное число, величина которого зависит от δ .

Доказательство. Из лемм 1, 2 следует, что спектр оператора A состоит только из собственных значений, и они являются корнями функции $\det B(\lambda)$. Элементы первых $m+1$ столбцов определителя $\det B(\lambda)$ представим по формулам (12), (13). Затем последний столбец определителя умножим на $-\beta_k(\lambda)$ и прибавим к k -му столбцу ($k = \overline{0, m}$). Получим

$$\det B(\lambda) = \begin{vmatrix} [\delta_{sk} + \lambda^s \alpha_{sk}(\lambda)]_{s,k=0}^m & [\lambda^s U_s[e^{i\lambda x}]]_{s=0}^m \\ [U_{m+1}[\tilde{\varphi}_k]]_{k=0}^m & U_{m+1}[e^{i\lambda x}] \end{vmatrix}.$$

Определитель $\det B(\lambda)$ разложим сначала по элементам последней строки, затем каждый новый определитель – по элементам последнего столбца. В итоге на основании леммы 4, получим

$$\det B(\lambda) = - \sum_{k=0}^m \sum_{s=0}^m U_{m+1}[\tilde{\varphi}_k] \cdot \lambda^s U_s[e^{i\lambda x}] \Omega_{sk}(\lambda) + \Omega(\lambda) U_{m+1}[e^{i\lambda x}], \quad (21)$$

где $\Omega(\lambda) = \det [\delta_{sk} + \lambda^s \alpha_{sk}(\lambda)]_{s,k=0}^m$, $\Omega_{sk}(\lambda)$ – алгебраические дополнения элементов определителя $\Omega(\lambda)$. Несложно доказать, что при $|\lambda| \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \alpha_{sk}(\lambda) &= O(|\lambda|^{-s-1}), \quad s, k = \overline{0, m}, \\ \Omega(\lambda) &= 1 + O(|\lambda|^{-1}), \quad \Omega_{sk}(\lambda) = \delta_{sk} + O(|\lambda|^{-1}), \quad s, k = \overline{0, m}. \end{aligned} \quad (22)$$

Кроме того, легко видеть, что

$$U_{m+1}[\tilde{\varphi}_k] = -\lambda^{-1} U_{m+1}[\varphi_k] + O(|\lambda|^{-2}), \quad U_s[e^{i\lambda x}] = O(1) e^{\pi |\operatorname{Im} \lambda|}, \quad s = \overline{0, m+1}. \quad (23)$$

С учетом формул (22), (23) формула (21) примет вид

$$\det B(\lambda) = -\lambda^{m-1} U_{m+1}[\varphi_m] \cdot U_m[e^{i\lambda x}] + O(|\lambda|^{m-2}) \cdot e^{\pi |\operatorname{Im} \lambda|}, \quad s = \overline{0, m+1}. \quad (24)$$

Теперь учтем вид функционала $U_m[\]$ и получим

$$\begin{aligned} U_m[e^{i\lambda x}] &= h_1 e^{-i\lambda\pi} + h_2 e^{i\lambda\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda x} u_{m0}(x) dx = h_1 e^{-i\lambda\pi} + \\ &+ h_2 e^{i\lambda\pi} + O(|\lambda|^{-1}) \cdot e^{\pi |\operatorname{Im} \lambda|}. \end{aligned}$$

Значит, асимптотическая формула (24) примет окончательный вид

$$\det B(\lambda) = -\lambda^{m-1} U_{m+1}[\varphi_m] \cdot (h_1 e^{-i\lambda\pi} + h_2 e^{i\lambda\pi}) + O(|\lambda|^{m-2}) \cdot e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|}. \quad (25)$$

Введем в рассмотрение функцию $F_0(\lambda) = h_1 e^{-i\lambda\pi} + h_2 e^{i\lambda\pi}$. Легко видеть, что нули функции $F_0(\lambda)$ распределены по формуле

$$\lambda_k^{(0)} = k + \frac{1}{2i\pi} \ln\left(-\frac{h_1}{h_2}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

причем вне δ -окрестностей точек $\lambda_k^{(0)}$ имеет место оценка (см., например, [4, с. 78])

$$|F_0(\lambda)| \geq C_{0\delta} \cdot e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|}, \quad (26)$$

где $C_{0\delta} > 0$ – константа, величина которой зависит только от δ . Далее из формулы (25) следует представление

$$\left(-\lambda^{m-1} U_{m+1}[\varphi_m]\right)^{-1} \det B(\lambda) - F_0(\lambda) = O(|\lambda|^{-1}) \cdot e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|}.$$

Отсюда с учетом оценки (26) и теоремы Руше [5, с. 425] следует, что при достаточно больших $|k|$ внутри δ -окрестностей точек $\lambda_k^{(0)}$ находятся корни функции $\left(-\lambda^{m-1} U_{m+1}[\varphi_m]\right)^{-1} \det B(\lambda)$ первой кратности. Тем самым асимптотическая формула (20), а вместе с нею и утверждение теоремы, доказаны.

Замечание. Обозначим через Λ_δ комплексную λ -плоскость, из которой выброшены все δ -окрестности собственных значений оператора A . Доказывается, что для всех $\lambda \in \Lambda_\delta$, $|\lambda| \gg 1$ имеет место оценка

$$|\det B(\lambda)| \geq C_{1\delta} |\lambda|^{m-1} \cdot e^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|}, \quad (27)$$

в которой $C_{1\delta} > 0$ – новая константа, величина которой зависит от δ .

В самом деле, выберем $\delta_1 = \delta/3$. Согласно выше доказанному δ_1 -окрестность точки $\lambda_k^{(0)}$ лежит внутри δ -окрестности точки λ_k для $|k| \gg 1$. Поэтому вне δ -окрестностей точек λ_k при $|k| \gg 1$ выполняется неравенство (26). Из представления (25) и оценки (26) следует оценка (27).

Введем в рассмотрение $\{\gamma_k\}$ – последовательность достаточно малых круговых контуров, центрами которых являются собственные значения оператора A .

Теорема 2. Пусть функция $f(x) \in Y$, причем $f^{(m+1)}(x) \in L(-\pi, \pi)$. Тогда существует последовательность натуральных чисел $\{s_n\}$ ($s_n \uparrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$) такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{-\pi \leq x \leq \pi} \left| f(x) + \sum_{k=1}^{s_n} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_k} R_\lambda f(x) d\lambda \right| = 0,$$

Доказательство. В области Λ_δ выберем систему окружностей $\Gamma_n = \{\lambda : |\lambda| = r_n\}$, причем все $r_n \gg 1$ и $r_n \uparrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Понятно, что контуры Γ_n состоят только из регулярных точек оператора A . Раз $f \in Y$, то $f(x) = R_\lambda Af(x) - \lambda R_\lambda f(x)$; отсюда следует формула

$$f(x) + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_n} R_\lambda f(x) d\lambda = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_n} \frac{1}{\lambda} R_\lambda Af(x) d\lambda. \quad (28)$$

Оценим $\|R_\lambda Af\|$ в области Λ_δ ; для этого воспользуемся формулой (8). Элементы определителя $\det H_\lambda f(x)$ представим по формулам (12), (13), (17), (18), затем проведем преобразование его столбцов аналогично столбцам $\det B(\lambda)$. В итоге определитель $\det H_\lambda f(x)$ примет вид:

$$\det H_\lambda f(x) = \begin{vmatrix} [\delta_{sk} + \lambda^s \alpha_{sk}(\lambda)]_{s,k=0}^m & [\lambda^s U_s [e^{i\lambda x}]]_{s=0}^m & [\lambda^s \alpha_f(\lambda, s)]_{s=0}^m \\ [U_{m+1}[\tilde{\varphi}_k]]_{k=0}^m & U_{m+1}[e^{i\lambda x}] & U_{m+1}[\tilde{f}] \\ [\tilde{\varphi}_k(x, \lambda)]_{k=0}^m & e^{i\lambda x} & \tilde{f}(x, \lambda) \end{vmatrix}.$$

Теперь, используя формулы (19), (22), (23), будем иметь

$$\det H_\lambda f(x) = \begin{vmatrix} [\delta_{sk} + O(|\lambda|^{-1})]_{s,k=0}^m & [O(|\lambda|^s) e^{\pi|\text{Im} \lambda}|]_{s=0}^m & [O(|\lambda|^{-1}) \sigma(f)]_{s=0}^m \\ [O(|\lambda|^{-1})]_{k=0}^m & O(1) e^{\pi|\text{Im} \lambda}| & O(|\lambda|^{-1}) \sigma(f) \\ [O(|\lambda|^{-1})]_{k=0}^m & O(1) e^{\pi|\text{Im} \lambda}| & O(|\lambda|^{-1}) \sigma(f) \end{vmatrix}.$$

Разложив определитель по элементам двух последних строк, легко получить равномерную по $x \in [-\pi, \pi]$ оценку

$$\det H_\lambda f = O(|\lambda|^{m-2}) e^{\pi|\text{Im} \lambda}| \sigma(f). \quad (29)$$

Из формулы (8) и оценок (27), (29) для $\lambda \in \Lambda_\delta$ следует оценка: $\|R_\lambda f\| \leq C_{1\delta} |\lambda|^{-1} \sigma(f)$, где $C_{1\delta} > 0$ – некоторая новая константа, величина которой зависит от δ . Значит, в формуле (28) на контурах Γ_n при $n \gg 1$ справедлива асимптотическая оценка: $\|R_\lambda Af\| = O(r_n^{-1})$.

Теперь из формулы (28) с учетом теоремы о вычетах следует доказательство теоремы 2

Заметим, что входящая в теорему величина s_n – это количество собственных значений оператора A , попавших внутрь контура Γ_n . Заметим также, что интегралы по контурам γ_n являются операторами проецирования на корневые подпространства оператора A (см., например, [6, с. 19 – 24]), поэтому теорема 2 дает достаточные условия разложимости функции $f(x)$ в ряд по системе с.п.ф. оператора A .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. П. Теоремы равносходимости для интегральных и интегро-дифференциальных операторов // Матем. сб., 1981, т.114, №3, с. 378 – 405.
2. Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям конечномерных возмущений оператора интегрирования // Вестник МГУ, сер. 1, 2000, №2, с. 21 – 26.
3. Маценко П. К. Спектральные характеристики дифференциального оператора первого порядка с возмущением, зависящим от дифференциального оператора второго порядка // Прикладная математика и механика: Сб. научн. трудов, вып. 7. – Ульяновск, изд-во Ульяновск. техн. ун-та, 2007, с. 201 – 209.
4. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М: Наука, 1969. – 585 с.
5. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций, т. 1. – М.: Наука, 1967.- 488 с.
6. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М.: Наука, 1965. – 448 с.

Ю. А. Решетников (г. Ульяновск)

ТЕОРЕМА ПЛОЩАДЕЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Получено неравенство, которому удовлетворяют коэффициенты разложения функции, осуществляющей квазиконформное отображение плоскости.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК №П1122, а также поддержана грантом РФФИ № 09-01-97005.

В геометрической теории функций комплексного переменного одним из основных методов для получения оценок различных функционалов является метод, основанный на теоремах площадей (см. [1], [2] и приведенную там библиографию). В случае конформных отображений эти теоремы выражают в терминах коэффициентов лорановских разложений отображающих функций неотрицательность площади непокрытой части в плоскости образа заданной области. Для квазиконформных отображений теорему площадей в простейшем виде можно сформулировать следующим образом [3].

Пусть $\Sigma(k)$ – класс K -квазиконформных автоморфизмов $w = f(z)$ плоскости \mathbb{C} , $K = \frac{1+k}{1-k}$, $0 \leq k < 1$, сужения которых на область $D = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > 1\}$ имеют вид

$$f(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^{-n}. \quad (1)$$

Тогда коэффициенты разложения (1) удовлетворяют точному неравенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha_n|^2 \leq k^2. \quad (2)$$

Эта теорема допускает обобщения в различных направлениях, подобно соответствующим результатам для конформных отображений. Докажем, что имеет место следующая

ТЕОРЕМА.

Пусть $f(z) \in \Sigma(k)$ и

$$\left(\frac{f(z)}{z} \right)^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(\lambda) z^{-n}, \quad D_0(\lambda) = 1, \quad \lambda > 0, \quad z \in D. \quad (3)$$

Тогда

1) если λ – целое число, то

$$\sum_{n=\lambda+1}^{\infty} (n-\lambda)|D_n(\lambda)|^2 \leq k^2 \sum_{n=0}^{\lambda-1} (\lambda-n)|D_n(\lambda)|^2; \quad (4)$$

2) если λ – нецелое и $f(z) = az + o(|z|)$, $a = const$, в окрестности $z = 0$, то

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} (n-p)|D_n(\lambda)|^2 \leq \frac{k^2}{1-k^2} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-n)|D_n(\lambda)|^2, \quad (5)$$

где p – целое, $\lambda < p < \lambda + 1$.

Доказательство. Рассмотрим $I(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^{2\lambda} d\theta$, где $R = |f(z)|$, $z = \rho e^{i\theta}$,

$\rho > 1$. Дифференцируя по параметру ρ и пользуясь условиями Коши-Римана, будем иметь

$$I'(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\lambda R^{2\lambda-1} \frac{\partial R}{\partial \rho} d\theta = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} R^{2\lambda-1} \frac{R}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta = \frac{\lambda}{\pi \rho} \int_0^{2\pi} R^{2\lambda} d\phi,$$

где $\phi = \arg f(\rho e^{i\theta})$.

Пусть Γ -образ окружности $|z| = \rho$ при отображении $w = f(z)$. Введем новую систему полярных координат R_* и ϕ_* по формулам $R_* = R^\lambda$, $\phi_* = \phi$. При таком преобразовании кривая Γ перейдет снова в замкнутую простую (без самопересечений) кривую Γ_* с тем же направлением обхода. Поэтому

$$I'(\rho) = \frac{\lambda}{\pi \rho} \int_0^{2\pi} R^{2\lambda} d\phi = \frac{2\lambda}{\pi \rho} \cdot \frac{1}{2} \int_{\Gamma_*} R_*^2 d\phi_* = \frac{2\lambda}{\pi \rho} S_\rho,$$

где S_ρ -площадь конечной области, ограниченной кривой Γ_* . При $\rho \rightarrow 1$ получим

$$I'(1) = \frac{2\lambda}{\pi} S, \quad S = \lim_{\rho \rightarrow 1} S_\rho. \quad (6)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} I(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^{2\lambda} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} \right|^{2\lambda} \cdot \rho^{2\lambda} d\theta = \\ &= \frac{\rho^{2\lambda}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} D_n(\lambda) \rho^{-n} e^{-in\theta} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \overline{D_n(\lambda)} \rho^{-n} e^{in\theta} \right) d\theta = \\ &= \frac{\rho^{2\lambda}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |D_n(\lambda)|^2 \rho^{-2n} \right) d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |D_n(\lambda)|^2 \rho^{2\lambda-2n}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$I'(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} |D_n(\lambda)|^2 (2\lambda - 2n) \rho^{2\lambda-2n-1},$$

$$I'(1) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} |D_n(\lambda)|^2 (\lambda - n). \quad (7)$$

Сопоставляя (6) и (7), найдем

$$S = \frac{\pi}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - n) |D_n(\lambda)|^2. \quad (8)$$

Далее, величину площади S можно найти также по формуле

$$S = \iint_E \frac{\partial(u_*, v_*)}{\partial(x, y)} dx dy, \text{ где } E = \{z \in \bar{\mathbb{C}}, |z| < 1\}, u_* = \operatorname{Re} f_*(z), v_* = \operatorname{Im} f_*(z),$$

$$f_*(z) = R_* e^{i\phi_*} = R^\lambda e^{i\phi},$$

$$\frac{\partial(u_*, v_*)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} (R^\lambda \cos \phi)'_x & (R^\lambda \cos \phi)'_y \\ (R^\lambda \sin \phi)'_x & (R^\lambda \sin \phi)'_y \end{vmatrix} = \lambda R^{2\lambda-1} (R'_x \phi'_y - R'_y \phi'_x) = \lambda R^{2\lambda-1} \frac{\partial(R, \phi)}{\partial(x, y)}.$$

Но $\frac{\partial(R, \phi)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{R} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$, где $u = \operatorname{Re} f(z)$, $v = \operatorname{Im} f(z)$, поэтому

$$\frac{\partial(u_*, v_*)}{\partial(x, y)} = \lambda R^{2\lambda-2} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}, \text{ а}$$

$$S = \iint_E \lambda R^{2\lambda-2} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} dx dy = \iint_E \lambda R^{2\lambda-2} (|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2) dx dy.$$

Так как $f(z) \in \Sigma(k)$, то $|f_{\bar{z}}| \leq k |f_z|$, следовательно,

$$\begin{aligned} S &= \lambda \iint_E R^{2\lambda-2} |f_{\bar{z}}|^2 \left(\frac{|f_z|^2}{|f_{\bar{z}}|^2} - 1 \right) dx dy \geq \lambda \iint_E R^{2\lambda-2} |f_{\bar{z}}|^2 \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right) dx dy = \\ &= \frac{\lambda(1-k^2)}{k^2} \iint_E R^{2\lambda-2} |f_{\bar{z}}|^2 dx dy. \end{aligned}$$

Чтобы продолжить оценку дальше, рассмотрим в $\bar{\mathbb{C}}$ функцию $F(z) = z^p \left(\frac{f(z)}{z} \right)^\lambda$. Если λ – целое число, то полагаем $p = \lambda$. С учетом того,

что $F_{\bar{z}} = \lambda z^{p-1} f_{\bar{z}} \left(\frac{f(z)}{z} \right)^{\lambda-1}$, будем иметь

$$S \geq \frac{\lambda(1-k^2)}{k^2} \iint_E R^{2\lambda-2} |f_{\bar{z}}|^2 dx dy = \frac{1-k^2}{\lambda k^2} \iint_E |F_{\bar{z}}|^2 \rho^{2(\lambda-p)} dx dy \geq \frac{1-k^2}{\lambda k^2} \iint_E |F_{\bar{z}}|^2 dx dy.$$

Докажем, что имеет место неравенство

$$\iint_E |F_{\bar{z}}|^2 dx dy \geq \pi \sum_{n=p+1}^{\infty} (n-p) |D_n(\lambda)|^2. \quad (9)$$

Пусть $z \in \mathbb{C}$, G – односвязная область с границей L , такая, что $z \in G$ и

$E \subset G$. Ввиду разложения (3) функция $F_1(z) = F(z) - \sum_{n=0}^p D_n(\lambda)z^{p-n}$ регулярна

в D , поэтому, пользуясь формулой Бореля-Помпею, получим

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_1(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{(F_1)_{\bar{\zeta}} d\bar{\zeta}d\eta}{\zeta - z} = F_1(\infty) - \frac{1}{\pi} \iint_E \frac{F_{\bar{\zeta}} d\bar{\zeta}d\eta}{\zeta - z}, \text{ то есть}$$

$$F(z) - \sum_{n=0}^p D_n(\lambda)z^{p-n} = -\frac{1}{\pi} \iint_E \frac{F_{\bar{\zeta}} d\bar{\zeta}d\eta}{\zeta - z}. \quad (10)$$

Дифференцируя (10), получим

$$F_z - \sum_{n=0}^p (p-n)D_n(\lambda)z^{p-n-1} = -\frac{1}{\pi} \iint_E \frac{F_{\bar{\zeta}} d\bar{\zeta}d\eta}{(\zeta - z)^2} \equiv T(F_{\bar{z}}),$$

а так как [3]

$$\iint_C |T(F_{\bar{z}})|^2 dx dy \leq \iint_C |F_{\bar{z}}|^2 dx dy, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} \iint_E |F_{\bar{z}}|^2 dx dy &= \iint_C |F_{\bar{z}}|^2 dx dy \geq \iint_C |T(F_{\bar{z}})|^2 dx dy = \\ &= \iint_C \left| F_z - \sum_{n=0}^p (p-n)D_n(\lambda)z^{p-n-1} \right|^2 dx dy \geq \\ &\geq \iint_D \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} (p-n)D_n(\lambda)z^{p-n-1} \right|^2 dx dy = \pi \sum_{n=p+1}^{\infty} (n-p)|D_n(\lambda)|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, выполняется (9), следовательно,

$$S \geq \frac{1-k^2}{\lambda k^2} \iint_E |F_{\bar{z}}|^2 dx dy \geq \frac{\pi(1-k^2)}{\lambda k^2} \sum_{n=p+1}^{\infty} (n-p)|D_n(\lambda)|^2.$$

Из этого неравенства и формулы (8) следует (5). Если λ - целое число, то $p = \lambda$ и неравенство (5) принимает вид (4). Теорема доказана.

Следствия. При $\lambda = 1$ из неравенства (4) следует (2). Если $k \rightarrow 1$, то каждое из неравенств (4), (5) сводится к следующему: $\sum_{n=1}^{\infty} (n-\lambda)|D_n(\lambda)|^2 \leq \lambda$. В таком виде теорема площадей была доказана Правицем (см., например, [2]).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М. : Наука, 1966. – 628 с.
2. Милин И. М. Однолистные функции и ортономированные системы. – М. : Наука, 1971. – 256 с.
3. Крушкаль С. Л. Квазиконформные отображения и римановы поверхности. – Новосибирск : Наука, 1975. – 196 с.

Ю. Б. Русак (г. Канберра, Австралия),

Б. В. Логинов (г. Ульяновск),

Л. Р. Ким-Тян (г. Москва).

ОБОБЩЕННЫЕ ЖОРДАНОВЫ ЦЕПОЧКИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ЛИНЕЙНОЙ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

В теории ветвления решений нелинейных уравнений и дифференциальных уравнениях в банаховых пространствах с фредгольмовыми операторами при производной известна роль обобщенной жордановой структуры (ОЖС) оператор-функций спектрального параметра [1-5]. На основе ОЖС оператор-функций установлены критерии устойчивости стационарных и периодических решений для дифференциальных уравнений с необратимым (вырожденным) оператором при производной [5-10]. При этом в случае линейной оператор-функции спектрального параметра исключался случай, когда операторы A и B имеют общие нули. Целью этой работы является изучение такого одномерного вырождения операторов с помощью введения аппарата незакончивающихся жордановых цепочек.

1. Введение. Систематическое применение теории обобщенных жордановых цепочек (ОЖЦ) и наборов (ОЖН) оператор-функций спектрального параметра в теории ветвления решений нелинейных уравнений (бифуркаций) и теории возмущений спектрального разложения было предложено в работах В.А. Треногина (см. [1]) и развито во многих публикациях его научной школы (см. [11-15]). Поскольку целью настоящей работы является применение теории ОЖН к вопросам устойчивости разветвляющихся решений, мы используем терминологию и обозначения [1-10].

Рассматриваются линейные оператор-функции спектрального параметра $B - \varepsilon A$ с целью исследования исключенного в [1-10] случая наличия общих нулей фредгольмовых операторов B и A . Поскольку полученные здесь результаты являются лишь началом дальнейшей работы, рассматривается линейная вырожденная система дифференциальных уравнений (ВДУ)

$$B \frac{dx}{dt} = Ax, \quad A, B: E_1^n \rightarrow E_2^n \quad (1)$$

в конечномерных пространствах в наиболее простом случае $\dim N(B) = 1$, $\varphi \in N(B)$. Это оправдано тем, что в случае банаховых пространств $A, B \in L(E_1 \rightarrow E_2)$ фредгольмовы операторы A и B действуют в так

называемых инвариантных парах подпространств [4-10]. Общий случай будет предметом дальнейшей работы.

Полученные результаты поддержаны грантом РФФИ-АН Румынии 07-01-91680-а.

2. Незаканчивающиеся ОЖЦ. Согласно определению ОЖЦ в [1] множество элементов $\{\varphi^{(1)} = \varphi, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(p)}\}$ образует A - жорданову цепочку нуля φ оператора B , если элементы этого набора построены по следующему правилу. Пусть γ какой-нибудь функционал такой что $\gamma(\varphi) = 1$. Он порождает разложение $E_1^n = E_1^1 \dot{+} E_1^{n-1}$, где $E_1^1 = \text{span}\{\varphi\} = L(\varphi)$ и $E_1^{n-1} = \{x | \langle x, \gamma \rangle = 0\}$. Если $A\varphi \in R(B)$ то существует единственный элемент $\varphi^{(2)} \in E_1^{n-1}$, такой что $B\varphi^{(2)} \in A\varphi^{(1)}$. Аналогично, если $A\varphi^{(k)} \in R(B) = \text{Im}(B)$, то существует единственный элемент $\varphi^{(k+1)} \in E_1^{n-1}$, такой что $B\varphi^{(k+1)} = A\varphi^{(k)}$. A - жорданова цепочка элемента $\varphi^{(1)}$ заканчивается, если $A\varphi^{(p)} \notin R(B)$. Элемент $\varphi^{(p)}$ называется тогда последним элементом этой цепочки.

Определение 1. A - жорданова цепочка элемента $\varphi \in N(B)$ называется незакончивающейся, если на некотором шаге $A\varphi^{(k)} = 0$ и тогда все последующие элементы ее являются нулями.

Лемма 1. Если элементы жордановой цепочки $\{\varphi^{(1)} = \varphi, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(k)}\}$ линейно зависимы, то функционал γ можно выбрать так, что цепочка, построенная по паре $\{\varphi, \gamma\}$, будет незакончивающейся и все ненулевые ее элементы будут линейно независимы.

Доказательство. Предположим что $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(s)}$ первые s линейно независимых элементов цепочки и элемент $\varphi^{(s+1)}$ является их линейной комбинацией. В этом случае очевидно что

$$\varphi^{(s+1)} = \lambda_2 \varphi^{(2)} + \dots + \lambda_s \varphi^{(s)} \quad (2)$$

или

$$A\varphi^{(s)} = \lambda_2 A\varphi^{(1)} + \dots + \lambda_s A\varphi^{(s-1)} \quad (3)$$

Рассмотрим элементы ${}_1\varphi^{(k)}$, задаваемые формулами:

$$\begin{aligned} {}_1\varphi^{(1)} &= \varphi^{(1)}, \\ {}_1\varphi^{(2)} &= \varphi^{(2)} - \lambda_s \varphi^{(1)}, \\ {}_1\varphi^{(3)} &= \varphi^{(3)} - \lambda_s \varphi^{(2)} - \lambda_{s-1} \varphi^{(1)}, \\ &\dots\dots\dots, \\ {}_1\varphi^{(s)} &= \varphi^{(s)} - \lambda_s \varphi^{(s-1)} - \lambda_{s-1} \varphi^{(s-2)} - \dots - \lambda_2 \varphi^{(1)}. \end{aligned}$$

Элементы ${}_1\varphi^{(1)}, {}_1\varphi^{(2)}, \dots, {}_1\varphi^{(s)}$ линейно независимы и удовлетворяют соотношениям: $B_1\varphi^{(m+1)} = A_1\varphi^{(m)}$ $m = 1, \dots, s-1$. Поэтому, если взять ${}_1\gamma$ таким что $\langle \varphi, {}_1\gamma \rangle = 1$ и $\langle {}_1\varphi^{(j)}, {}_1\gamma \rangle = 0$ при $j > 1$ то набор $\{ {}_1\varphi^{(1)}, {}_1\varphi^{(2)}, \dots, {}_1\varphi^{(s)} \}$ будет жордановой цепочкой построенной по паре $\{ \varphi, {}_1\gamma \}$. Тогда в силу формулы (3)

$$A_1\varphi^{(s)} = A\varphi^{(s)} - \lambda_s A\varphi^{(s-1)} - \lambda_{s-1} A\varphi^{(s-2)} - \dots - \lambda_s A\varphi^{(1)} = 0$$

Простейшим примером незаканчивающейся цепочки является случай, когда операторы A и B имеют общий ноль $\varphi: A\varphi = B\varphi = 0$.

Условие 1. В пространстве E_1^n существует элемент e_1 такой что $\langle Ae_1, \psi \rangle \neq 0$.

В противном случае исходное вырожденное дифференциальное уравнение редуцируется к невырожденному. Действительно, обозначим $E_{2,n-1} = R(B)$ и рассмотрим разложение $E_1^n = L\{\varphi\} \dot{+} E_1^{n-1}$, где E_1^{n-1} какое-нибудь прямое дополнение к $L\{\varphi\}$. В силу этого разложения любой вектор x из E_1^n может быть представлен как

$$x = u + \xi\varphi, \text{ где } u \in E_1^{n-1}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в исходное уравнение (1), получим $Bu' = A(u + \xi\varphi)$.

Т. к. оператор $B: E_1^{n-1} \rightarrow R(B)$ обратим, то (обозначим обратный к B оператор через T) исходное уравнение эквивалентно (невырожденному) дифференциальному уравнению $u' = TA(u + \xi\varphi)$, зависящему от произвольной непрерывной функции $\xi(t)$.

Будем строить теперь жорданову цепочку оператор-функции $B - \varepsilon A$ которая бы заканчивалась элементом e_1 . Если $Be_1 \in R(A)$, то существует вектор e_2 такой что $Ae_2 = Be_1$ и так далее, пока мы не придем к элементу $e_s: Be_s \in R(A)$, т. е. жорданова цепочка элемента e_s закончится элементом e_1 и $Ae_1 \in R(B)$. $Ae_{k+1} = Be_k$ – формула для элементов этой цепочки.

Лемма 2. Элементы цепочек $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(k)}, e_s, \dots, e_1$ линейно независимы.

Доказательство проведем методом математической индукции. Проверим что $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(k)}, e_1$ линейно независимы. Предположим противное, пусть $\lambda_1\varphi^{(1)} + \dots + \lambda_k\varphi^{(k)} + \mu_1e_1 = 0$. Применим к этому равенству оператор A и функционал ψ , получим $\mu_1 = 0$ и, следовательно $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

Предположим теперь что векторы $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(k)}, e_1, \dots, e_r$ линейно независимы и покажем что векторы $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(k)}, e_1, \dots, e_r, e_{r+1}$ также линейно независимы. От противного, пусть

$$\lambda_1 \varphi^{(1)} + \dots + \lambda_k \varphi^{(k)} + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_r e_r + \mu_{r+1} e_{r+1} = 0.$$

Как и выше сразу получаем что $\mu_1 = 0$. Применим оператор A

$$\lambda_1 A \varphi^{(1)} + \dots + \lambda_k A \varphi^{(k)} + \mu_1 A e_1 + \dots + \mu_r A e_r + \mu_{r+1} A e_{r+1} = 0,$$

так как $A \varphi^{(k)} = 0$

$$\lambda_1 B \varphi^{(2)} + \dots + \lambda_{k-1} B \varphi^{(k)} + \mu_2 B e_1 + \dots + \mu_r B e_{r-1} + \mu_{r+1} B e_r = 0,$$

или

$$\lambda_1 \varphi^{(2)} + \dots + \lambda_{k-1} \varphi^{(k)} + \mu_2 e_1 + \dots + \mu_r e_{r-1} + \mu_{r+1} e_r = \nu \varphi^{(1)}.$$

По предположению индукции эти элементы линейно независимы т.е.

$$\mu_2 = \dots = \mu_r = \mu_{r+1} = 0,$$

и следовательно $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

Следствие. Векторы $B \varphi^{(2)}, \dots, B \varphi^{(k)}, B e_s, \dots, B e_1, A e_1$ также линейно независимы.

Доказательство. Вектор $A e_1 \in R(B)$, поэтому он очевидно линейно независим с остальными элементами набора. Если бы

$$\lambda_2 B \varphi^{(2)} + \dots + \lambda_k B \varphi^{(k)} + \mu_1 B e_1 + \dots + \mu_s B e_s = 0,$$

то

$$\lambda_2 \varphi^{(2)} + \dots + \lambda_k \varphi^{(k)} + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_s e_s = \nu \varphi^{(1)},$$

что противоречит Лемме 2.

Рассмотрим в E_2^n подпространство

$$E_{2,p+s-1} = L \left\{ A e_s = B e_{s-1}, A e_{s-1} = B e_{s-2}, \dots, A e_2 = B e_1, A e_1 = z, A \varphi^{(1)} = B \varphi^{(2)}, \dots, A \varphi^{(p-1)} = B \varphi^{(p)} \right\}. \quad (5)$$

Функционал ψ удовлетворяет условиям: $\langle z, \psi \rangle = 1$ и обращается в ноль на всех остальных векторах системы (5) составляющих базис $E_{2,p+s-1}$.

Используя введенный ранее функционал γ , построим операторы Шмидта:

$$\tilde{B} = B + \langle \cdot, \gamma \rangle z \text{ и } \Gamma = (\tilde{B})^{-1}.$$

С их помощью определим функционалы:

$$\psi_1 = \psi, \psi_2 = (\Gamma^* A^*) \psi_1, \dots, \psi_s = (\Gamma^* A^*)^{s-1} \psi_1.$$

Лемма 3. Система функционалов ψ_1, \dots, ψ_s биортогональна к векторам $A e_1, A e_2 = B e_1, \dots, A e_s = B e_{s-1}$ и обращается в ноль на векторах $\{A \varphi^{(j)}\}$.

Действительно,

$$\langle A e_t, \psi_t \rangle = \langle A(\Gamma A)^{s-t} e_s, (\Gamma^* A^*)^{t-1} \psi_1 \rangle = \langle A(\Gamma A)^{s-1} e_s, \psi \rangle = 1.$$

Аналогично

$$\langle A e_m, \psi_t \rangle = \langle A(\Gamma A)^{s-m} e_s, (\Gamma^* A^*)^{t-1} \psi_1 \rangle = \langle A(\Gamma A)^{s+t-m-1} e_s, \psi \rangle. \quad (6)$$

Если $t < m$, то последнее выражение равно нулю, так как при $m + 1 - t < s$

$$(\Gamma A)^{s+t-m-1} e_s = e_{m+1-t}.$$

Если $t > m$, то в силу формулы $(\Gamma A)^s e_s = \varphi$, (6) снова обращается в 0.

Аналогичным образом $\langle A\varphi^{(j)}, \psi_t \rangle = 0$.

Выберем теперь функционал χ , удовлетворяющий условиям

$$\langle A\varphi^{(p-1)}, \chi \rangle = 1 \text{ и } \langle a, \chi \rangle = 1$$

для всех остальных элементов a из системы (5) и построим функционалы $\chi^{(j)}$ $j = 1, \dots, p-1, \dots$, по формулам

$$\chi^{(1)} = \chi, \chi^{(2)} = (\Gamma^* A^*) \chi^{(1)}, \dots, \chi^{(p-1)} = (\Gamma^* A^*)^{p-2} \chi^{(1)}.$$

Лемма 4. Система функционалов $\chi^{(1)}, \dots, \chi^{(p-1)}$ биортогональна к элементам $A\varphi^{(p-1)}, \dots, A\varphi^{(1)}$ и обращается в ноль на векторах $Ae_s, Ae_{s-1}, \dots, Ae_1 = z$.

Проверим сначала биортогональность к $A\varphi^{(j)}$

$$\begin{aligned} \langle A\varphi^{(p-i)}, \chi^{(i)} \rangle &= \langle A(\Gamma A)^{p-i-1} \varphi^{(1)}, (\Gamma^* A^*)^{i-1} \chi^{(1)} \rangle = \langle A(\Gamma A)^{p-2} \varphi^{(1)}, \chi^{(1)} \rangle = \\ &= \langle A\varphi^{(p-1)}, \chi^{(1)} \rangle = 1. \end{aligned}$$

Поскольку $i \neq k + mp$, то $\langle A\varphi^{(p-k)}, \chi^{(i)} \rangle = \langle A(\Gamma A)^{p-k+i-1} \varphi^{(1)}, \chi^{(1)} \rangle = 0$, так как $(\Gamma A)^p \varphi = \varphi$.

Аналогично

$$\begin{aligned} \langle Ae_k, \chi^{(i)} \rangle &= \langle A(\Gamma A)^{s-k} e_s, (\Gamma^* A^*)^{i-1} \chi^{(1)} \rangle = \\ &= \langle A(\Gamma A)^{s-k+i-1} e_s, \chi^{(1)} \rangle \quad i < p. \end{aligned} \quad (7)$$

Если $s - k + i - 1 < s$ то (7) обращается в ноль по определению χ , так как это один из e_i . Если $i > k$ то, так как $(\Gamma A)^s e_s = \varphi$, $A(\Gamma A)^{s+i-k-1} e_s = A(\Gamma A)^{i-k-1} \varphi$. Поскольку $k > 0$ и $i < p$ то $i - k - 1 < p - 2$ и таким образом снова, по определению χ , (7) обращается в ноль.

Рассмотрим теперь в E_1^n набор $\{e_s, \dots, e_2, e_1, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(p-1)}\}$. Функционалы $A^* \psi_s, \dots, A^* \psi_2, A^* \psi_1, A^* \chi^{(1)}, \dots, A^* \chi^{(p-1)}$ будут биортогональны к этому набору. Используя эти биортогональные системы, построим разложения пространств E_1^n и E_2^n в прямые суммы:

$$E_1^n = E_{1,s+p-1} \dot{+} E_1 \text{ и } E_2^n = E_{2,s+p-1} \dot{+} E_2.$$

Здесь через $E_{1,s+p-1}$ обозначена линейная оболочка $L\{e_s, \dots, e_2, e_1, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(p-1)}\}$, а через $E_{2,s+p-1}$ – линейная оболочка $L\{Ae_s, \dots, Ae_2, Ae_1, A\varphi^{(1)}, \dots, A\varphi^{(p-1)}\}$. Пусть

$${}_1E_1 = \{u \in E_1^n \mid \langle u, A^* \psi_i \rangle = 0 \text{ и } \langle u, A^* \chi^{(j)} \rangle = 0\},$$

$${}_1E_2 = \{v \in E_2^n \mid \langle v, \psi_i \rangle = 0 \text{ и } \langle v, \chi^{(j)} \rangle = 0\}.$$

Лемма 5. Построенные разложения инвариантны относительно A , т. е. $A: E_{1,s+p-1} \rightarrow E_{2,s+p-1}$ и $A: {}_1E_1 \rightarrow {}_1E_2$.

Доказательство. Первая часть очевидна. Если $u \in {}_1E_1$, то

$$\langle Au, \psi_i \rangle = \langle u, A^* \psi_i \rangle = 0 \text{ и } \langle Au, \chi^{(j)} \rangle = \langle u, A^* \chi^{(j)} \rangle = 0.$$

Покажем, что если $u \in {}_1E_1$, то $\langle Bu, \psi_i \rangle = 0$. Очевидно (по определению B), что $\langle Bu, \psi_i \rangle = 0$. Для ψ_i $i > 1$ $\psi_i(z) = 0$, таким образом $\langle Bu, \psi_i \rangle = \langle \tilde{B}u, \psi_i \rangle$ (здесь $B = B + \langle \cdot, \gamma \rangle z = \langle u, (\Gamma^{-1})^* (\Gamma^* A^*)^{i-1} \psi_1 \rangle = \langle u, A^* (\Gamma^* A^*)^{i-2} \psi_1 \rangle = \langle u, A^* \psi_{i-1} \rangle = 0$).

Аналогично при $\chi^{(j)} \neq \chi^{(1)}$ $\langle Bu, \chi^{(j)} \rangle = 0$.

Замечание 1. Существует $u \in {}_1E_1$ такое что $\langle Bu, \chi^{(1)} \rangle \neq 0$.

Действительно, $\varphi^{(p)} \in {}_1E_1$, так как $\langle \varphi^{(p)}, A^* \psi_i \rangle = \langle A\varphi^{(p)}, \psi_i \rangle = 0$ поскольку $A\varphi^{(p)} = 0$. Аналогично $\langle \varphi^{(p)}, A^* \chi^{(j)} \rangle = 0$, но $\langle B\varphi^{(p)}, \chi^{(1)} \rangle = \langle A\varphi^{(p-1)}, \chi^{(1)} \rangle = 1$.

Замечание 2. B не всегда отображает $E_{1,s+p-1} \rightarrow E_{2,s+p-1}$, так как $E_{2,s+p-1} \subset R(A)$, а $Be_s \notin R(A)$ (этот случай может осуществляться если цепочка «исчерпывает» пространство).

Определим проектор $Q: E_2^n \rightarrow E_{2,s+p-1}$ параллельно ${}_1E_2$

$$Qw = \sum_{i=1}^s \langle w, \psi_i \rangle Ae_i + \sum_{k=1}^{p-1} \langle w, \chi^{(k)} \rangle A\varphi^{(p-k)}$$

и проектор $P: E_2^n \rightarrow {}_1E_1$ параллельно $E_{2,s+p-1}: P = I - Q$.

3. Теоремы о редукции ВДУ.

Теорема 1. Вырожденное дифференциальное уравнение (1) с незаканчивающейся жордановой цепочкой $\{\varphi^{(1)} = \varphi, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(p)}\}$ $A\varphi^{(p)} = 0$ можно свести к аналогичному вырожденному дифференциальному уравнению

$$B_1 \frac{dx}{dt} = A_1 x$$

с незаканчивающейся жордановой цепочкой длины 1, т. е. $B_1 \varphi_1 = 0$ и $A_1 \varphi_1 = 0$.

Доказательство. Для исходного дифференциального уравнения (1) используя разложение

$$x = \sum_{i=1}^s \mu_i e_i + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \varphi^{(k)} + u, \quad u \in_1 E_1$$

получим

$$B \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^s \mu_i e_i + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \varphi^{(k)} + u \right) = A \left(\sum_{i=1}^s \mu_i e_i + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \varphi^{(k)} + u \right)$$

или

$$\sum_{i=1}^s \mu'_i B e_i + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda'_k B \varphi^{(k)} + B u' = \sum_{i=1}^s \mu_i A e_i + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k A \varphi^{(k)} + A u.$$

Применим к этому равенству функционалы $\psi_1, \dots, \psi_s, \chi^{(1)}, \dots, \chi^{(p-1)}$ и проектор P . Получим

$$\begin{aligned} \psi_1 : \mu_1 &= 0, \\ \psi_2 : \mu'_1 &= \mu_2, \dots, \psi_s : \mu'_{s-1} = \mu_s, \end{aligned}$$

то есть $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_s = 0$.

$$\chi^{(p-1)} : \lambda'_2 = \lambda_1; \chi^{(p-2)} : \lambda'_3 = \lambda_2; \dots; \chi^{(2)} : \lambda'_{p-1} = \lambda_{p-2}; \chi^{(1)} : \langle B u', \chi^{(1)} \rangle = \lambda_{p-1}.$$

Применим теперь проектор P (учитывая что $\mu_i = 0$): $P B u' = A u$.

Оператор $P B$ имеет единственный ноль $\varphi^{(p)}$ на ${}_1 E_1$, т.к.

$$\begin{aligned} P B u = 0 &\Rightarrow B u = \sum_{i=1}^s \langle B u, \psi_i \rangle A e_i + \sum_{k=1}^{p-1} \langle B u, \chi^{(k)} \rangle A \varphi^{(p-k)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow B u = \langle B u, \chi^{(1)} \rangle A \varphi^{(p-1)} = \langle B u, \chi^{(1)} \rangle B \varphi^{(p)} \end{aligned}$$

Поскольку при $u \in_1 E_1$ только $\langle B u, \chi^{(1)} \rangle$ может быть отлично от нуля, то $u = \lambda \varphi^{(p)}$.

Так как $A \varphi^{(p)} = 0$, то исходное ВДУ свелось к ВДУ с незаканчивающейся цепочкой длины 1.

Теперь рассмотрим случай незаканчивающейся цепочки длины 1.

Модернизируем построенные выше разложения

$$E_1^n = E_{1,s+p-1} \dot{+} E_1 \quad \text{и} \quad E_2^n = E_{2,s+p-1} \dot{+} E_2.$$

Как и выше, элементы e_1, \dots, e_s , таковы что $\langle A e_1, \psi \rangle = 1$, $B e_1 = A e_2, \dots, B e_{s-1} = A e_s$ и $B e_s \in \overline{R(A)}$. Функционалы $\psi_i = (\Gamma^* A^*)^{i-1} \psi_1$ биортогональны к элементам $A e_1, \dots, A e_s$. Т.к элемент $B e_s \in \overline{R(A)}$, то он линейно независим с векторами $A e_1, \dots, A e_s$.

Лемма 6. Все функционалы ψ_i обращаются в ноль на $B e_s$.

Доказательство. Функционал ψ_1 обращается в ноль на $R(B)$. Пусть теперь $\psi_k = (\Gamma^* A^*)^{k-1} \psi_1$. Тогда

$$\langle B e_s, \psi_k \rangle = \langle \tilde{B} e_s + \langle e_s, \gamma \rangle z, \psi_k \rangle = \langle \tilde{B} e_s, \psi_k \rangle$$

и, т. к. $\langle z, \psi_k \rangle = 0$ при $k > 1$, то

$$\langle Be_s, \psi_k \rangle = \langle e_s, (\Gamma^{-1})^* (\Gamma^* A^*)^{k-1} \psi_1 \rangle = \langle e_s, A^* \psi_{k-1} \rangle = 0$$

поскольку выше мы видели, что $\{e_s, e_{s-1}, \dots, e_2, e_1\}$ биортогональны к функционалам $\{A^* \psi_s, \dots, A^* \psi_2, A^* \psi_1\}$.

Существует функционал χ такой, что $\chi(Be_s) = 1$ и χ обращается в ноль на $R(A)$. Функционалы $\psi_1, \dots, \psi_s, \chi$ линейно независимы, так как они биортогональны к линейно независимой системе векторов Ae_1, \dots, Ae_s, Be_s .

Рассмотрим в пространстве E_1^* функционалы $A^* \psi_1, \dots, A^* \psi_s, B^* \chi$. Простые примеры показывают что эти функционалы могут быть как линейно зависимыми, так и линейно независимыми.

Рассмотрим эти случаи отдельно.

А) Предположим что функционалы $A^* \psi_1, \dots, A^* \psi_s, B^* \chi$ линейно зависимы.

Рассмотрим функционал γ биортогональный к φ и такой что $e_1, \dots, e_s \in N(\gamma)$ и построим, используя функционалы $A^* \psi_1, \dots, A^* \psi_s, \gamma$, разложение $E_1^n = E_1^{s+1} \dot{+} E_1^{n-s-1}$, где $E_1^{s+1} = L\{\varphi, e_1, \dots, e_s\}$, а E_1^{n-s-1} - подпространство общих нулей функционалов $A^* \psi_1, \dots, A^* \psi_s, \gamma$.

Аналогично построим разложение $E_2^n = E_2^{s+1} \dot{+} E_{2, n-s-1}$, где $E_{2, s+1} = L\{Ae_1, \dots, Ae_s, Be_s\}$, а $E_{2, n-s-1}$ - подпространство общих нулей функционалов $\psi_1, \dots, \psi_s, \chi$.

Лемма 7. $A, B : E_1^{n-s-1} \rightarrow E_{2, n-s-1}$.

Доказательство. Пусть $u \in E_1^{n-s-1}$. Тогда $\langle Au, \psi_i \rangle = \langle u, A^* \psi_i \rangle = 0$, $\langle Au, \chi \rangle = 0$, так как χ обращается в ноль на $R(A)$.

Рассмотрим теперь оператор B .

По определению ψ_1 $\langle Bu, \psi_1 \rangle = 0$. Учитывая, что $\tilde{B} = B + \langle \cdot, \gamma \rangle z$ и $\Gamma = (\tilde{B})^{-1}$, а также $\langle u, \gamma \rangle = 0$ и поэтому $\tilde{B}u = Bu$, для $i > 1$ получим, $\langle Bu, \psi_i \rangle = \langle \Gamma^{-1}u, \psi_i \rangle = \langle u, (\Gamma^{-1})^* \psi_i \rangle = \langle u, A^* \psi_{i-1} \rangle = 0$ Таким образом, $\langle Bu, \psi_i \rangle = 0$ для любого i . Рассмотрим теперь $\langle Bu, \chi \rangle = \langle u, B^* \chi \rangle$. Так как по предположению $B^* \chi$ является линейной комбинацией $A^* \psi_i$, то $\langle u, B^* \chi \rangle = 0$.

Лемма 8. В случае А) ВДУ (1) сводится к невырожденному дифференциальному уравнению.

Используя введенные разложения, проведем редукцию ВДУ (1)

$$x = \lambda\varphi + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_s e_s + u, \quad u \in E_1^{n-s-1}.$$

Тогда

$$B(\lambda\varphi + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_s e_s + u)' = A(\lambda\varphi + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_s e_s + u),$$

или

$$\mu'_1 B e_1 + \dots + \mu'_s B e_s + B u' = \mu_1 A e_1 + \dots + \mu_s A e_s + A u.$$

Применяя поочередно функционалы ψ_1, \dots, ψ_s , получим

$$\psi_1 : \mu_1 \langle A e_1, \psi_1 \rangle = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0$$

$$\psi_2 : \mu'_1 = \mu_2 \Rightarrow \mu_2 = 0 \text{ и т.д.}$$

Проектируя на $E_{2,n-s-1}$, получим $B u' = A u$. Учитывая, что B не имеет нулей на E_1^{n-s-1} , существует оператор Γ_1 обратный к сужению B на E_1^{n-s-1} и таким образом, исходное ВДУ сводится к решению невырожденного линейного дифференциального уравнения.

Замечание 3. Решение исходной вырожденной системы будет неединственным, так как будет включать слагаемое $\lambda(t)\varphi$, где $\lambda(t)$ произвольная функция от t нужной степени гладкости.

Б) Перейдем теперь к случаю, когда функционалы $A^* \psi_1, \dots, A^* \psi_s, B^* \chi$ линейно независимы.

Выше мы видели, что $\langle e_s, A^* \psi_s \rangle = \langle A e_s, \psi_s \rangle = 1$ и $\langle e_s, B^* \chi \rangle = \langle B e_s, \chi \rangle = 1$.

Поэтому вместо функционала $B^* \chi$ рассмотрим функционал ${}^1\gamma = B^* \chi - A^* \psi_s$, который также будет линейно независим с $A^* \psi_1, \dots, A^* \psi_s$.

Очевидно что ${}^1\gamma(e_i) = 0 \quad i = 1, \dots, s$. Действительно, ${}^1\gamma(e_s) = B^* \chi(e_s) - A^* \psi_s(e_s) = 1 - 1 = 0$. Если $i < s$, то $B^* \chi(e_i) = \chi(B e_i) = \chi(A e_{i+1}) = 0$, т. к. χ обращается в ноль на $R(A)$. В то же время $\langle e_i, A^* \psi_s \rangle = 0$, так как функционалы $A^* \psi_i$ биортогональны к e_j .

Выберем элемент $\omega \in E_1^n$, такой что $\langle \omega, A^* \psi_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, s$, а ${}^1\gamma(\omega) = 1$.

Рассмотрим теперь разложения пространств $E_1^n = E_1^{s+2} \dot{+} E_1^{n-s-2}$ и $E_2^n = E_{2,s+1} \dot{+} E_{2,n-s-1}$, где $E_1^{s+2} = L\{\varphi, e_1, \dots, e_s, \omega\}$ и $E_{2,s+1} = L\{A e_1, \dots, A e_s, B e_s\}$. Пространство E_1^{n-s-2} - это подпространство общих нулей функционалов $A^* \psi_1, \dots, A^* \psi_s, \gamma, {}^1\gamma$, а $E_{2,n-s-1}$ - подпространство общих нулей функционалов $\psi_1, \dots, \psi_s, \chi$.

Лемма 9. $A, B : E_1^{n-s-2} \rightarrow E_{2,n-s-1}$.

Доказательство. Пусть $u \in E_1^{n-s-2}$, тогда $\langle Au, \psi_i \rangle = \langle u, A^* \psi_i \rangle = 0$, $\langle Au, \chi \rangle = 0$ потому что χ обращается в ноль на образе A . Таким образом, $Au \in E_{2, n-s-1}$. Рассмотрим теперь оператор B : $\langle Bu, \psi_1 \rangle = 0$ по определению ψ_1 . Если $i > 1$ то, как и выше, $\tilde{B}u = Bu$ и $\langle Bu, \psi_i \rangle = \langle \tilde{B}u, \psi_i \rangle = \langle \Gamma^{-1}u, \psi_i \rangle = \langle u, (\Gamma^{-1})^* \psi_i \rangle = \langle u, (\Gamma^{-1})^* \psi_i \rangle = \langle u, A^* \psi_{i-1} \rangle = 0$, так как $u \in E_1^{n-s-2}$. Наконец $\langle Bu, \chi \rangle = \langle u, B^* \chi \rangle = \langle u, {}^1\gamma + A^* \psi_s \rangle = 0$.

Лемма 10. В случае Б) вырожденное дифференциальное уравнение (1) редуцируется к вырожденному неоднородному дифференциальному уравнению в пространстве меньшей размерности.

Как и в случае А) используем разложения пространств E_1^n и E_2^n для редукции исходного ВДУ (1):

$$x = \lambda\varphi + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_s e_s + v\omega + u, \quad u \in E_1^{n-s-2},$$

$$B(\lambda\varphi + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_s e_s + v\omega + u)' = A(\lambda\varphi + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_s e_s + v\omega + u)$$

или

$$\mu'_1 B e_1 + \dots + \mu'_s B e_s + v' B \omega + B u' = \mu_1 A e_1 + \dots + \mu_s A e_s + v A \omega + A u.$$

Применим функционал ψ_1 (левая часть обращается в ноль по определению B) $\psi_1: \mu_1 + v \langle A\omega, \psi_1 \rangle = 0$ $\langle A\omega, \psi_1 \rangle = \langle \omega, A^* \psi_1 \rangle = 0$ в силу биортогональности систем $(A^* \psi_i; {}^1\gamma)$ и $(e_i; \omega)$. Таким образом, $\mu_1 = 0$.

Применяем ψ_2 . Учитывая, что $B e_i = A e_{i+1}$ при $i < s$ и биортогональность ψ_i и $A e_i$, получим

$$\mu'_1 + v' \langle B\omega, \psi_2 \rangle + \mu'_s \langle B e_s, \psi_2 \rangle = \mu_s + v \langle A\omega, \psi_2 \rangle.$$

Как и выше $\tilde{B} e_s = B e_s = \Gamma^{-1} e_s$, поэтому

$$\langle B e_s, \psi_2 \rangle = \langle e_s, (\Gamma^{-1})^* \psi_2 \rangle = \langle e_s, A^* \psi_1 \rangle = 0.$$

Аналогично $\langle B\omega, \psi_2 \rangle = \langle \omega, A^* \psi_1 \rangle = 0$ и $\langle A\omega, \psi_2 \rangle = \langle \omega, A^* \psi_2 \rangle = 0$.

Таким образом, $\mu_2 = 0$. И так далее. Применяя ψ_s , получим

$$\mu'_{s-1} + v' \langle B\omega, \psi_s \rangle + \mu'_s \langle B e_s, \psi_s \rangle = \mu_s + v \langle A\omega, \psi_s \rangle.$$

Учитывая, что $\langle B e_s, \psi_s \rangle = \langle e_s, A^* \psi_{s-1} \rangle = 0$, находим $\langle B\omega, \psi_s \rangle = \langle \omega, A^* \psi_{s-1} \rangle = 0$ и $\langle A\omega, \psi_s \rangle = \langle \omega, A^* \psi_s \rangle = 0$.

Получаем $\mu_s = 0$ и уравнение приводится к виду

$$v' B \omega + B u' = v A \omega + A u.$$

Применим функционал χ . Так как

$\langle B\omega, \chi \rangle = \langle \omega, B^* \chi \rangle = \langle \omega, {}^1\gamma + A^* \psi_s \rangle = \langle \omega, {}^1\gamma \rangle = 1$ и по определению χ $\langle A\omega, \chi \rangle = 0$, получим $v' = 0$, т.е. $v \equiv const = v_0$.

Уравнение теперь имеет вид

$$Bu' = \nu_0 A \omega + Au$$

Заметим, что $A\omega \in E_{2,n-s-1}$, т.к. $\langle A\omega, \psi_i \rangle = \langle \omega, A^* \psi_i \rangle = 0$ и $\langle A\omega, \chi \rangle = 0$.

Таким образом, исходная линейная однородная система свелась к линейной неоднородной системе в пространстве меньшей размерности.

Замечание 4. 1⁰ Хотя на подпространстве E_1^{n-s-2} оператор B не имеет нулей система по-прежнему вырождена, так как $\dim E_1^{n-s-2} = \dim E_{2,n-s-1} - 1$. Добавляя к подпространству E_1^{n-s-2} элемент $\{\varphi\}$, получаем задачу с «обычным» вырождением.

2⁰ Леммы 8 и 10 справедливы и для неоднородных систем.

Лемма 11. В случае А) вырожденное неоднородное линейное уравнение $B \frac{dx}{dt} = Ax + \nu Q_n(t)$, где $Q_n(t)$ полином степени n от t и ν неопределенная константа (см. Лемму 10), сводится к аналогичному невырожденному линейному уравнению.

Доказательство. Как и выше

$$x = \lambda \varphi + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_s e_s + u, \quad u \in E_1^{n-s-1},$$

откуда

$$\mu'_1 \nu e_1 + \dots + \mu'_s \nu e_s + Bu' = \mu_1 A e_1 + \dots + \mu_s A e_s + Au + \nu Q_n(t). \quad (8)$$

Применяя ψ_1 , получим $\mu_1 + \nu \langle Q_n(t), \psi_1 \rangle = 0$, т.е. μ_1 – полином степени $\leq n$ от t . Применяем ψ_2 : $\mu'_1 = \mu_2 + \nu \langle Q_n(t), \psi_2 \rangle$ и снова μ_2 – полином степени $\leq n$ от t . И так далее. Применяя ψ_s , получим $\mu'_{s-1} = \mu_s + \nu \langle Q_n(t), \psi_s \rangle$ или μ_s – полином степени $\leq n$ от t . Применяя χ , получим $\mu'_s = \nu \langle Q_n(t), \chi \rangle$.

Если полученная переопределенная система для μ_1, \dots, μ_s не имеет решений, то $\nu = 0$.

Проектируя уравнения (8) на подпространство E_1^{n-s-1} , получим

$$Bu' = Au + \nu P Q_n(t) \quad (P - \text{проектор на } E_1^{n-s-1}).$$

Т. к. оператор B на подпространстве E_1^{n-s-1} обратим, то мы приходим к невырожденному неоднородному линейному уравнению с правой частью – полиномом степени $\leq n$.

Лемма 12. В случае Б) вырожденная неоднородная линейная система в правой части которой полином степени n , сводится к вырожденной неоднородной системе, в пространстве меньшей размерности, в правой части которой – полином степени $\leq n + 1$.

Для случая Б)

$$x = \lambda \varphi + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_s e_s + \nu \omega + u, \quad u \in E_1^{n-s-2}$$

$$B(\lambda \varphi + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_s e_s + \nu \omega + u)' = A(\lambda \varphi + \mu_1 e_1 + \dots + \mu_s e_s + \nu \omega + u) + \varepsilon Q_n(t)$$

где ε – неопределенная константа, пришедшая из предыдущего шага редукции, т.е.

$$\mu'_1 B e_1 + \dots + \mu'_s B e_s + v' B \omega + B u' = \mu_1 A e_1 + \dots + \mu_s A e_s + v A \omega + A u + \varepsilon Q_n(t).$$

Применяя ψ_1 , как и выше, получим $\mu_1 + \varepsilon \langle Q_n(t), \psi_1 \rangle = 0$, т. е. μ_1 полином степени $\leq n$. Применяя $\psi_2 : \mu'_1 = \mu_2 + \varepsilon \langle Q_n(t), \psi_2 \rangle \Rightarrow \mu_2$ – полином степени $\leq n$. И так далее. Применяя $\psi_2 : \mu'_1 = \mu_2 + \varepsilon \langle Q_n(t), \psi_2 \rangle \Rightarrow \mu_2$ – полином степени $\leq n$. Применяя χ , получим $\mu'_s + v' = \varepsilon \langle Q_n(t), \chi \rangle \Rightarrow v - \varepsilon$ – полином степени $\leq n + 1$. Проектируя уравнение на подпространство $E_{2, n-s-1}$, получим

$$B u' = A u + \varepsilon(v(t) A \omega + P Q_n(t)).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Методом последовательного редуцирования вырожденная линейная система линейных дифференциальных уравнений в случае незаканчивающейся цепочки может быть сведена к невырожденной неоднородной системе линейных дифференциальных уравнений с неоднородностью – полиномом степени $\leq k$ где k число проведенных редукций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вайнберг, М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., Наука, 1969. – 624 с. Wolter-Noordorf. Leyden 1975.
2. Русак Ю.Б. Некоторые соотношения между жордановыми наборами аналитической оператор-функции и сопряженной к ней. Известия АН УзССР, физ.-мат. н., - 1978, №2, 15-19.
3. Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления. В сб. «Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными» (М.С. Салахитдинов – ред.) АНУзССР – Ташкент: ФАН, 1978 – 133-148.
4. Loginov B.V. On the stability of solutions of differential equations with degenerate operator at the derivative. Известия АН УзССР, физ.-мат. н., - 1988, №1 – 29-32; Letter to the Editor – 1988, №2 – 78.
5. Loginov B.V., Rousak Yu.B. Generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions. Nonlinear Analysis. TMA. -1991 – 17(3) – 219-232.
6. Loginov B.V., Kim-Tyan L.R., Rousak Yu.B. Modification of the Lyapounov-Schmidt method and the stability of solutions of differential equations with a singular operator of finite index multiplying the derivative. Russ. Acad. Sci., Dokl. Math. – 1993 – 47(3) – 599-603.

7. Kim-Tyan L.R., Loginov B.V., Rousak Yu.B. On the stability of periodic solutions for differential equations with a Fredholm operator at the highest derivative. *Nonlinear Analysis. TMA.* – 2007 – 67(5) – 1570-1585.
8. Коноплева И.В., Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Симметрия и потенциальность уравнений разветвления в корневых подпространствах в неявно заданных стационарных и динамических бифуркационных задачах. *Известия Северо-Кавказского Научн. Центра ВШ* – 2009 – в печати.
9. Konopleva I.V., Loginov V.B., Rousak Yu.B. Branching equation in the root – subspace for equations nonresolved with respect to the derivative and stability of bifurcating solutions, *ROMAI Journal* – 2009 – 5(2) (in print).
10. Kim-Tyan L.R., Loginov B.V., Rousak Yu.B. Stability of bifurcating periodical solutions at Poincaré-Andronov-Hopf bifurcation for singular differential equations in Banach spaces. *ROMAI Journal* – 2009 – 5(2) (in print).
11. Сидоров Н.А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления. *Изд-во Иркутского Университета.* - 312 с. 1982.
12. Логинов Б.В. Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности. Ташкент: ФАН, АНУзССР 1985 – 184с.
13. Логинов Б.В. Ветвление решений нелинейных уравнений и групповая симметрия. *Вестник Самарского Университета* 1998, 4(10). 15-75.
14. Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения (В.А. Треногин, В.А. Филиппов – ред.) М., Физматгиз, 2003.
15. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapounov - Schmidt Method in Nonlinear Analysis and Applications. *MIA.v.550. Kluwer Acad. Publ. Dordrecht.* 2002. – 548 с.

Ю. Н. Санкин, М. В. Гурьянов (г. Ульяновск)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВНУТРЕННЕГО РАССЕЯНИЯ ЭНЕРГИИ В МАТЕРИАЛЕ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА ПРИ ПОМОЩИ АНАЛИЗА ВИБРОУДАРНОГО ПРОЦЕССА, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ ЕГО УДАРЕ О ЖЁСТКОЕ ПРЕПЯТСТВИЕ

При исследовании колебаний сложных механических систем необходимо знать величины коэффициентов внутреннего рассеяния энергии. К числу таких объектов относится автомобильная шина. При этом наибольшую сложность при моделировании шины составляет определение параметра рассеяния энергии в боковом направлении, так как демпфирование в шине носит сложный характер и является сочетанием кулонова и вязкого демпфирования. Достоверный коэффициент демпфирования шины можно получить только при её испытаниях. Наиболее распространенным методом определения коэффициента демпфирования некатящейся шины в радиальном направлении на сегодняшний день является метод сбрасывания [1,2]. При испытаниях шина под определённой нагрузкой опускается с некоторой высоты. Высота выбирается из условия, когда колебания шины происходят без нарушения контакта с опорной поверхностью. Более простым является способ, основанный на анализе виброударного процесса [3,4]. В данной работе для определения коэффициента внутреннего рассеяния энергии в материале используется виброударный процесс, возникающий при боковом ударе физического маятника.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК №П1122.

Ключевые слова: внутреннее рассеяние энергии; существенно нелинейный виброударный процесс; физический маятник; коэффициент внутреннего рассеяния энергии

Рассмотрим существенно нелинейный виброударный процесс, возникающий при боковом ударе колеса с шиной, представляющего собой физический маятник. Коэффициент внутреннего трения найдем из энергетических соображений. Пусть изменение потенциальной энергии колеса между двумя соседними ударами равно:

$$\Delta\Pi = mg(h_1 - h_2) = mg\Delta h = mgl(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1) \approx mgl/2(\varphi_1^2 - \varphi_2^2), \quad (1)$$

где m – масса колеса, g – ускорение свободного падения, h_1 – высота опускания колеса, h_2 – высота подъема колеса при отскоке, Δh – разница высот, φ_1, φ_2 – углы отклонения колеса между двумя соседними ударами, l – расстояние от точки подвеса физического маятника до центра тяжести.

Пренебрегая трением об воздух, оценим рассеяние энергии за цикл. За один цикл колесо проходит путь, равный $2A$, где A – малая амплитуда

сжатия колеса. Предположим, что демпфирующая сила пропорциональна A и не зависит от частоты колебаний:

$$F_v = -C_0 A, \quad (2)$$

где C_0 – коэффициент демпфирования. Рассеяние энергии за один цикл движения, полагая трение малым, будет составлять:

$$\Delta E = 2C_0 A^2. \quad (3)$$

Приравняв убыль потенциальной энергии $\Delta\Pi$ величине рассеяния энергии в материале шины ΔE , получим:

$$2C_0 A^2 = mgl/2(\varphi_1^2 - \varphi_2^2), \quad (4)$$

Характер процесса представлен на рис. 1.

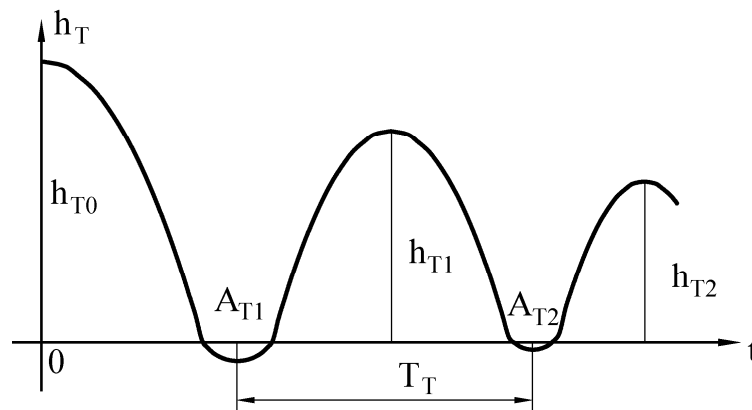


Рис. 1. Процесс затухания качаний пневматической шины

Верхняя часть графика (рис. 1) следует закону незатухающей синусоиды, а нижняя – закону затухающей синусоиды.

Потенциальная энергия, накапливаемая в материале шины, уменьшится за период на величину:

$$\begin{aligned} \Delta\Pi &= \frac{NA_i^2}{2} - \frac{NA_{(i+1)}^2}{2} = \\ &= \frac{N}{2}(A_i + A_{i+1})(A_i - A_{i+1}) \approx NA_i \Delta A_i, \end{aligned} \quad (5)$$

где N – боковая жесткость шины.

Составим дифференциальное уравнение изменения высоты качаний колеса. Изменение потенциальной энергии равно:

$$\Delta\Pi = NA_i \Delta A_i = mg\Delta h. \quad (6)$$

Пусть $\frac{\Delta\varphi^2}{\Delta A} \approx \frac{d\varphi^2}{dA}$. Тогда из уравнения (6) получаем:

$$\frac{NA}{mgl} = \frac{1}{2} \frac{d\varphi^2}{dA}; \quad A = \frac{mgl}{2N} \frac{d\varphi^2}{dA}.$$

Приближенно положим:

$$\frac{\Delta A}{T} \approx -\frac{dA}{dt}. \quad (7)$$

где T – период качаний шины.

Тогда $\Delta A = -T \frac{dA}{dt}$ и, следовательно, можно записать: $\Delta \Pi = -HA T \frac{dA}{dt}$.

Учитывая (3) и (7) находим:

$$2C_0 A = -HT \frac{dA}{dt}. \quad (8)$$

подставляя в (8) $dA = \frac{mgl}{H} \frac{d\varphi^2}{A}$, получаем:

$$\frac{2C_0}{H} A^2 = -\frac{Tmg}{H} \frac{d\varphi^2}{dt}. \quad (9)$$

Обозначим коэффициент внутреннего рассеяния энергии в материале шины: $\gamma = \frac{4C_0}{\pi H}$. Тогда $\frac{2C_0}{H} = \frac{\gamma\pi}{2}$, и формула (9) записывается в форме:

$$\frac{1}{2} \gamma \pi A^2 = -\frac{Tmg}{H} \frac{d\varphi^2}{dt}. \quad (10)$$

Период отскоков: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, где ω – частота отскоков шины, тогда

$$\frac{1}{2} \gamma A^2 = -\frac{2mg}{H\omega} \frac{dh}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} \gamma HA^2 = -\frac{2mgl}{\omega} \frac{d\varphi^2}{dt}.$$

Учитывая, что $\frac{HA^2}{2} = \frac{1}{2} mgl\varphi^2$, получаем $\frac{1}{2} \gamma mgl\varphi^2 = -\frac{2mgl}{\omega} \frac{d\varphi^2}{dt}$, или $-\gamma\omega dt = 4 \frac{d\varphi^2}{\varphi^2}$. Откуда, интегрируя, находим: $-\gamma\omega t = 4 \ln \frac{\varphi^2}{\varphi_0^2}$.

Полагая $t = T$, то есть, учитываем изменение энергии за период отскоков, находим: $-\gamma\omega T = 4 \ln \frac{\varphi^2}{\varphi_0^2}$. Откуда следует:

$$\gamma = \frac{2 \ln \frac{\varphi_0^2}{\varphi^2}}{\pi} = \frac{4 \ln \frac{\varphi_0}{\varphi}}{\pi}. \quad (11)$$

Для n -го количества отскоков имеем:

$$\gamma = \frac{4 \ln \frac{\varphi_0}{\varphi_n}}{\pi n}. \quad (12)$$

На основе формулы (12) возможно определение коэффициента внутреннего рассеяния энергии в материале шины [3] в боковом направлении

без использования специальной виброзаписывающей аппаратуры, в связи с чем процедура определения коэффициента внутреннего рассеяния энергии упрощается и удешевляется.

Особенность заключается в том, что колесо подвешивают, а затем свободно отпускают, после чего оно начинает совершать качания. Например, для шины «Кама-205» размерностью 175/70R13 углы отклонения уменьшались в среднем на 22%. Следовательно, коэффициент внутреннего рассеяния энергии в боковом направлении $\gamma = 0,253$.

Рекомендуемые значения коэффициентов внутреннего рассеяния энергии в шине выбираются исходя из конкретных динамических свойств автомобиля. Учёт внутреннего рассеяния энергии необходим не только для пневматических шин, но и для деталей соединения упругой системы, несущих конструкций, а также узлов и агрегатов автомобиля.

Данный способ определения коэффициентов внутреннего рассеяния энергии запатентован [3]. Ранее на подобный способ на основании замеров скачков колеса также был получен патент [4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вонг, Дж. Теория наземных транспортных средств: [пер. с англ.] / Дж. Вонг ; пер. с англ. А. И. Аксенова. – М. : Машиностроение, 1982. – 284 с.
2. Ломакин, В. В. Исследование упругих и демпфирующих характеристик шин легковых автомобилей на стенде / В. В. Ломакин, Л. А. Черепанов, В. Н. Вермеюк // Автомобильная промышленность. – 1976. – № 8. – С. 25–26.
3. Способ определения коэффициента внутреннего рассеяния энергии в материале пневматической шины в боковом направлении: пат. 2336515 Рос. Федерация: МПК⁷ G01 M17/02 / Санкин Ю. Н., Гурьянов М. В.; заявитель и патентообладатель Ульяновский государственный технический университет. – № 2007129862/11; заявл. 03.08.07; опубл. 20.10.08, Бюл. № 29. – 5 с. : ил.,
4. Способ определения коэффициента внутреннего рассеяния энергии в материале пневматической шины : пат. 2261427 Рос. Федерация: МПК⁷ G01 M17/02 / Санкин Ю. Н., Гурьянов М. В.; заявитель и патентообладатель Ульяновский государственный технический университет. – № 2004108655/11; заявл. 23.03.04; опубл. 27.09.05, Бюл. № 27. – 7 с.

Н. О. Седова (г. Ульяновск)

ПАРЫ ЛЯПУНОВА-РАЗУМИХИНА В ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В статье предложена новая методика исследования устойчивости для уравнений с неограниченным запаздыванием $r(t)$ (здесь t обозначает независимую переменную – время) в случае, когда и $r(t)$, и $t - r(t)$ неограниченно возрастают с ростом t . Рассмотрены примеры, иллюстрирующие применение теоретических результатов, проводится сравнение полученных условий устойчивости с известными ранее.

Введение

Рассмотрим дифференциальное уравнение с неограниченным запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t). \quad (1)$$

Здесь $t \in R^+$, $x(t) \in R^n$, а функционал f в момент времени t зависит от значений функции x на интервале $[t - r(t), t]$, где $r(t) \in C(R^+, R^+)$, $r(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, и для функции $x \in C([t_0 - r(t_0), A], R^n)$, $0 \leq t_0 < A \leq +\infty$ отображение $x_t : [t_0, A) \rightarrow R^n$ определяется по формуле $x_t(s) = x(t + s)$, $s \in [-r(t), 0]$.

Решение $x(t; t_0, \varphi)$ этого уравнения с начальной функцией $\varphi : [-r(t_0), 0] \rightarrow R^n$ при $t \in [t_0, \beta)$, $\beta > t_0$, определяется как непрерывное и удовлетворяющее уравнению (1) на $[t_0, \beta)$, и такое, что $x_{t_0}(t_0, \varphi) = \varphi$.

Как и в случае ограниченного и бесконечного запаздывания, исследование устойчивости и асимптотического поведения решений уравнений с неограниченным запаздыванием, начиная с фундаментальной работы [10], осуществляется как на основе метода функционалов, так и с использованием функций и условий Разумихина [4, 6]. При этом большинство работ посвящено исследованию уравнений специального вида, и выбор фазового пространства и метода исследования определяется структурой уравнения (см., например, [3, 14]).

В представленной работе предлагается метод исследования устойчивости для уравнения (1), основанный на использовании аксиоматического определения фазового пространства [2, 5] и пары Ляпунова–Разумихина [7].

1. Основные определения и предположения

Пусть $|\cdot|$ – норма в R^n , B – действительное векторное пространство либо непрерывных функций, отображающих $R^- = (-\infty, 0]$ в R^n , и $\varphi = \psi$ в B , если $\varphi(s) = \psi(s)$ для всех $s \in R^-$, либо измеримых функций, отображающих R^- в R^n , и $\varphi = \psi$ в B , если $\varphi(s) = \psi(s)$ для почти всех $s \in R^-$ и $\varphi(0) = \psi(0)$, и в пространстве B определена норма $|\cdot|_B$ такая, что $(B, |\cdot|_B)$ является сепарабельным банаховым пространством. Для произвольного $a > 0$ определим множества $B_a = \{\varphi \in B \mid |\varphi|_B < a\}$, $\bar{B}_a = \{\varphi \in B \mid |\varphi|_B \leq a\}$.

Допустим теперь, что для правой части уравнения (1) имеют место следующие предположения:

Предположение 1.

а) $f \in C(R^+ \times B_H, R^n)$ для некоторого $0 < H \leq \infty$, и для любого $h \in (0, H)$ существует $m = m(h)$ такое, что $|f(t, \varphi)| \leq m(h)$ для всех $(t, \varphi) \in R^+ \times \bar{B}_h$;

б) функционал $f(t, \varphi)$ равномерно непрерывен на каждом множестве $R^+ \times K$, где $K \subset B_H$ – компакт.

Предположение 2. Для каждой начальной точки $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times B_H$ существует непродолжаемое решение $x(t; \alpha, \varphi)$ уравнения (1), определенное для $t \in [\alpha, \beta)$ для некоторого $\beta > \alpha$, то есть непрерывное и удовлетворяющее уравнению (1) на $[\alpha, \beta)$, и такое, что $x_\alpha = \varphi$. Кроме того, если выполняется условие Липшица, а именно, для любых $t \in R^+$, $\varphi, \psi \in B_a$, $a \in (0, H)$ справедлива оценка

$$|f(t, \varphi_2) - f(t, \varphi_1)| \leq l(a) |\varphi_2 - \varphi_1|_B \quad (2)$$

для некоторого $l(a) > 0$, то такое решение единственно и имеет место непрерывная зависимость решения от начальной точки, и для любого $\varepsilon \in (0, H)$ и $x(t)$ – непродолжаемого решения (1) на $[\alpha, \beta)$, такого, что $x_\alpha \in B_\varepsilon$, либо $\beta = +\infty$, либо $|x_{t_1}|_B = \varepsilon$ для некоторого $t_1 \in (\alpha, \beta)$.

Предположение 3. Если $x(t, \alpha, \varphi)$ -- ограниченное решение уравнения (1), определенное для всех $t \geq \alpha$, то положительная орбита $\{x_t(\alpha, \varphi) : t \geq \alpha\}$ предкомпактна в B , и если $x(t_n + s) \rightarrow \varphi(s)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $s \in [-T, 0]$ для любого $T > 0$, то $\varphi \in B$ и $|x_{t_n} - \varphi|_B \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $F_f = C(R^+ \times B_H, R^n)$ – пространство непрерывных функционалов, определенных на $R^+ \times B_H$ со значениями в R^n . Для $f \in F_f$ определим семейство сдвигов $T(f) = \{f_\tau(t, \varphi) = f(\tau + t, \varphi), \tau \in R^+\}$ и обозначим $H(f)$

замыкание множества $T(f)$ в пространстве F_f . Так как пространство B сепарабельно, то $f^* \in H(f)$, если и только если существует последовательность $\{t_n\} \subset R^+$ такая, что $f(t+t_n, \varphi) \rightarrow f^*(t, \varphi)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно на компактных подмножествах из $R^+ \times B$ [12]. В силу Предположения 1 множество $H(f)$ компактно в пространстве F_f и $\Omega(f) = \{f^* \in F_f | \exists \{t_n\}, t_n \rightarrow +\infty : f_{t_n} \rightarrow f^* \hat{a} F_f\}$ непусто.

Уравнению (1) сопоставим семейство *предельных уравнений*

$$\dot{x}(t) = f^*(t, x_t), \quad (3)$$

где $f^*(t, \varphi) \in \Omega(f)$ есть предельный к f функционал, определяемый некоторой последовательностью $t_k \rightarrow +\infty$, то есть $f^*(t, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(t+t_k, \varphi)$

для $(t, \varphi) \in R^+ \times B_H$ (при этом сходимость равномерна на каждом множестве $[0, T] \times K$, где $T > 0$, K – компакт из B_H).

Если выполняются Предположения 1–3, то справедливы следующие утверждения:

Лемма 1 [12]. *Предположим, что $f(t+t_m, \varphi) \rightarrow f^*(t, \varphi)$ равномерно на компактах из $R^+ \times B$. Для каждого m пусть $x^m(t)$ – решение уравнения (1) на $[\alpha_m, +\infty)$, такое, что $\{x^m(t) : t \geq \alpha_m\}$ – семейство равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций и $x_{t_m}^m \rightarrow \varphi$ при $m \rightarrow \infty$.*

Тогда существует подпоследовательность m_j и решение $x^(t)$ уравнения (3) с начальной точкой $(0, \varphi)$ такое, что $x^{m_j}(t+t_{m_j}) \rightarrow x^*(t)$, а $x_{t+t_{m_j}}^{m_j} \rightarrow x_t^*$*

равномерно на компактных подмножествах из R^+ при $j \rightarrow \infty$.

Лемма 2 [7]. *Предположим, что правая часть уравнения (1) удовлетворяет Предположению 1, и решение $x(t; \alpha, \varphi)$ ограничено при всех $t \geq \alpha$. Тогда положительное предельное множество*

$$\omega^+(x_t(\alpha, \varphi)) = \bigcap_{t \geq \alpha} \text{Cl}\{x_s : s \geq t\}$$

непусто, компактно и квазиинвариантно по отношению к семейству предельных уравнений (3), то есть для каждой точки $\psi \in \omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$ существует предельное уравнение и его решение $x^(t; 0, \psi)$, удовлетворяющее соотношению $\{x_t^*(0, \psi) : t \in R^+\} \subset \omega^+$.*

Итак, если выполняются Предположения 1–3, то можно определить семейство предельных уравнений для уравнения (1), и свойства решений этих уравнений аналогичны тем, которые имеют место для уравнений с конечным запаздыванием [1]. Заметим, что в случае конечного запаздывания Предположение 1 гарантирует выполнение Предположений 2, 3. Однако если запаздывание бесконечно, ситуация осложняется. В случае конечного запаздывания свойства отображения $T(t, \alpha)\varphi: \varphi \rightarrow x_t(\alpha, \varphi)$ не зависят от выбора пространства начальных функций, если решение определяется естественным образом, т.е. как непрерывное продолжение функции φ вправо от $t = \alpha$, удовлетворяющее уравнению. По прошествии одного интервала запаздывания функция x_t становится непрерывной независимо от пространства начальных функций. Поэтому достаточно рассматривать уравнение в пространстве $C([-r, 0], R^n)$. Если же запаздывание бесконечно, то при каждом t x_t «содержит» часть начальной функции, поскольку $x_t(\theta) = \varphi(t + \theta - \alpha)$ при $\theta \leq t - \alpha$. Это значит, что качественное поведение отображения $T(t, \alpha)\varphi$ зависит от начальных данных.

Поэтому важно понять, какие свойства пространства B позволят, в первую очередь, обеспечить выполнение Предположения 2. Кроме того, с точки зрения качественного поведения решений уравнения, в частности, устойчивости, необходимо выяснить, какие свойства пространства обеспечат предкомпактность орбиты ограниченного решения в пространстве B , и как связаны понятия устойчивости в R^n и в функциональном пространстве B (в случае $B = C([-r, 0], R^n)$ они, очевидно, эквивалентны).

Определение таких свойств в виде «аксиом» – формальных требований к пространству B – оказалось очень удобным и продуктивным подходом. Впервые систематически изложенный в работе [2], аксиоматический подход стал активно использоваться в последующих исследованиях уравнений с бесконечным запаздыванием, в первую очередь в вопросах асимптотического поведения и устойчивости. При этом требования, предъявляемые к пространству, могут отличаться в деталях, что определяется целями исследования и удобством формулировок и доказательств. В данной работе используется следующее определение:

Определение 1. *Пространство B назовем допустимым, если существуют постоянные $K, J > 0$ и непрерывная функция $M: R^+ \rightarrow R^+$ такие, что выполняются следующие условия. Если $0 \leq a < A \leq \infty$ и функция $x: (-\infty, A) \rightarrow R^n$ непрерывна на $[a, A)$ и $x_a \in B$, то для всех $t \in [a, A)$*

(B1) $x_t \in B$ и x_t непрерывно по t относительно $|\cdot|_B$;

(B2) $|x_t|_B \leq K \max_{a \leq s \leq t} |x(s)| + M(t - a) |x_a|_B$;

кроме того,

(B3) $|\varphi(0)| \leq J \|\varphi\|_B$ для всех $\varphi \in B$;

(B4) если $\{\varphi_k\} \subset B$ равномерно ограничена: $\sup_k \sup_{s \leq 0} |\varphi_k(s)| < \infty$, и $\varphi_k \rightarrow \varphi$

равномерно на компактах из R^- , то $\varphi \in B$ и $\varphi_k \rightarrow \varphi$ в B .

Условия (B1)–(B3) гарантируют, что для правой части, удовлетворяющей Предположению 1, выполняется Предположение 2 [2].

Определим $B_0 = \{\varphi \in B : \varphi(0) = 0\}$ и для $\varphi \in B_0$ оператор $S_0(t)$:

$$[S_0(t)\varphi](s) = \begin{cases} 0, & -t \leq s \leq 0, \\ \varphi(t+s), & s < -t \end{cases}$$

Определение 2 [2]. Допустимое пространство B назовем пространством с исчезающей памятью, если

$$\|S_0(t)\varphi\|_B \rightarrow 0 \text{ при } |t| \rightarrow +\infty \text{ для каждого } \varphi \in B_0.$$

Заметим, что если B – пространство с исчезающей памятью, то функция $M(t)$ в условии (B2) ограничена, $M(t) \leq M_1$ для всех $t \in R^+$.

Лемма 3 [12]. Если B – пространство с исчезающей памятью, то из Предположения 1 следует Предположение 3.

Рассмотрим один класс допустимых пространств. Пусть

$$g : R^- \rightarrow [1, \infty) \text{ – непрерывная невозрастающая функция, } g(0) = 1, \quad (g1)$$

$$g(s) \rightarrow \infty \text{ при } s \rightarrow -\infty. \quad (g2)$$

Обозначим через C_g пространство непрерывных функций φ , отображающих R^- в R^n , таких, что $\sup_{s \leq 0} |\varphi(s)|/g(s) < \infty$. Тогда C_g с нормой

$\|\varphi\|_g = \|\varphi\|_{C_g} = \sup_{s \leq 0} |\varphi(s)|/g(s)$ есть банахово пространство. Рассмотрим

следующее подпространство в C_g : $C_g^0 = \{\varphi \in C_g : \lim_{s \rightarrow -\infty} |\varphi(s)|/g(s) = 0\}$.

Пространство C_g^0 является допустимым с исчезающей памятью при условиях (g1), (g3) [13]. Во многих примерах в качестве функции g используется $e^{-\gamma s}$ для некоторого $\gamma > 0$.

Предположим теперь, что $f(t, 0) \equiv 0$, тогда уравнение (1) имеет нулевое решение, которое мы и будем исследовать на устойчивость.

Определения различных видов устойчивости по Ляпунову нулевого решения для уравнения (1) вполне аналогичны определениям для обыкновенных дифференциальных уравнений. Единственная особенность состоит в том, что в случае бесконечного запаздывания свойства устойчивости

в конечномерном и в фазовом пространстве, вообще говоря, не эквивалентны, поэтому в определениях требуется уточнение:

Определение 3. Нулевое решение уравнения (1) устойчиво в R^n [в B], если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\alpha \in R^+$ существует $\delta(\alpha, \varepsilon) > 0$ такое, что $|x(t; \alpha, \varphi)| < \varepsilon$ [$|x_t(\alpha, \varphi)|_B < \varepsilon$] для всех $t \geq \alpha$ при $|\varphi|_B < \delta$. Если при этом число δ не зависит от α , то нулевое решение равномерно устойчиво.

Аналогично даются определения других видов устойчивости и притяжения.

Если запаздывание ограничено, то определения устойчивости по отношению к нормам в R^n и в фазовом пространстве, очевидно, эквивалентны. В случае неограниченного запаздывания это в общем случае не так. Например, если в качестве фазового пространства мы выберем пространство C_0 , то ненулевое решение никогда не стремится к нулю по отношению к норме этого пространства, то есть $|x_t|_{C_0} = \sup_{s \leq 0} |x(t+s)| \not\rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В то же время если $|x(t)| \rightarrow 0$, то $\sup_{s \leq 0} |x(t+s)| e^{\gamma s} \rightarrow 0$ для любого $\gamma > 0$. Справедлив следующий результат [2]:

Лемма 4. Для допустимого пространства B с исчезающей памятью определения (равномерной) устойчивости и асимптотической устойчивости в B и в R^n эквивалентны.

В оставшейся части этой статьи пространство B , если иное не оговаривается, считается допустимым пространством с исчезающей памятью.

Пусть $V = V(t, x)$, $V \in C^1(R \times G_H, R^+)$ есть функция Ляпунова, где $G_H = \{x \in R^n : |x| < H\}$. Ее производная в силу уравнения (1) есть функционал $V': R^+ \times B_H \rightarrow R: V'(t, \varphi) = \partial V(t, \varphi(0))/\partial t + \sum_{i=1}^n (\partial V(t, \varphi(0))/\partial x_i) f_i(t, \varphi)$.

Определим также функционал $W \in C(R^+ \times B_H, R^+)$. Используем следующее определение [7]:

Определение 4. Пара (V, W) называется парой Ляпунова-Разумихина, если $V(t, x) \geq 0$, $V(t, 0) = 0$, $W(t, 0) = 0$, и для каждого $\rho > 0$, $t \geq \rho$ и $\varphi \in B_H$ такой, что $\varphi_{-\rho} \in B_H$ и φ непрерывна на $[-\rho, 0]$, выполняется

$$V(t, \varphi(0)) \leq W(t, \varphi) \leq \max\{ \max_{-\rho \leq s \leq 0} V(t+s, \varphi(s)), W(t-\rho, \varphi_{-\rho}) \}, \quad (\text{LR1})$$

$$\text{если } 0 < V(t, \varphi(0)) = W(t, \varphi), \text{ то } V'(t, \varphi) \leq 0. \quad (\text{LR2})$$

Для удобства определения знакоопределённых функций используем следующий класс функций:

$$K = \{ \sigma \in C(R^+, R^+) : \sigma(s) \text{ строго возрастает и } \sigma(0) = 0 \}$$

Введем также дополнительные предположения:

Предположение 4. Функция $V(t, x)$ равномерно непрерывна и ограничена на каждом множестве $R^+ \times \bar{G}_r$, $\bar{G}_r = \{x \in R^n : |x| \leq r < H\}$, а функционалы $W(t, \varphi)$ и $U(t, \varphi)$: $0 \leq U(t, \varphi) \leq |V'(t, \varphi)|$ равномерно непрерывны на каждом множестве $R^+ \times K$, $K \subset B_H$ --- компакт.

В данных предположениях семейство сдвигов $\{V_\tau(t, x) = V(\tau + t, x) | \tau \in R^+\}$ предкомпактно в пространстве $C(R^+ \times G_H, R^+)$ с компактно-открытой топологией, а семейства $\{U_\tau(t, \varphi) = U(\tau + t, \varphi) | \tau \in R^+\}$ и $\{W_\tau(t, \varphi) = W(\tau + t, \varphi) | \tau \in R^+\}$ предкомпактны в пространствах $C(R^+ \times B_H, R)$ и $C(R^+ \times B_H, R^+)$ соответственно, и можно определить предельные $V^*: R \times G_H \rightarrow R^+$, $W^* \in C(R^+ \times B_H, R^+)$ и $U^* \in C(R^+ \times B_H, R^+)$.

Функционалы f^* , V^* , W^* , U^* образуют предельную совокупность, если они являются предельными для одной и той же последовательности $t_n \rightarrow +\infty$.

Для каждой предельной совокупности, определяемой последовательностью $t_k \rightarrow +\infty$, и чисел $t \in R^+$, $c \in R^+$ определим множества

$$L(t, U^*) = \{\varphi \in B_H | U^*(t, \varphi) = 0\}, S(t, W^*, c) = \{\varphi \in B_H | W^*(t, \varphi) = c\}.$$

Предположим, что в уравнении (1) функция $t - r(t)$ — монотонно возрастающая и неограниченная. Заметим, что в качестве пространства начальных функций для этого уравнения естественно взять пространство BC непрерывных на $R^- = (-\infty, 0]$ ограниченных функций с супремум-нормой. В качестве фазового пространства уравнения, содержащего все такие начальные функции, используем пространство с исчезающей памятью $B = C_g^0$.

2. Локализация положительного предельного множества и асимптотическая устойчивость.

Рассмотрим пару $V(x) = x^2$, $W(t, \varphi) = \max_{-r(t) \leq s \leq 0} \varphi^2(s)$. Для любого $\rho > 0$ в силу неравенства $t - r(t) \geq t - \rho - r(t - \rho)$ для всех $t \in R^+$ справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \varphi^2(0) &\leq \max_{-r(t) \leq s \leq 0} \varphi^2(s) \leq \max_{-r(t-\rho) - \rho \leq s \leq 0} \varphi^2(s) \leq \\ &\leq \max \left\{ \max_{-\rho \leq s \leq 0} \varphi^2(s), \max_{-r(t-\rho) \leq s \leq 0} (\varphi_{-\rho}(s))^2 \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, пара $(x^2, \max_{-r(t) \leq s \leq 0} \varphi^2(s))$ удовлетворяет условию (LR1).

Аналогичный вывод справедлив для пары $V(x) = x^2$, $W(t, \varphi) = \max \{ \max_{-r(t) \leq s \leq 0} \varphi^2(s), |\varphi|_g^2 \}$.

Нетрудно убедиться, что если функция $V(x)$ удовлетворяет равенству $V(0) = 0$ и $V(x)$ – неубывающая по $|x|$ (либо функции $V_i(x_i)$, $i = 1, \dots, n$ удовлетворяют равенствам $V_i(0) = 0$ и $V_i(x_i)$ – неубывающие по $|x_i|$), то пары $(V(x), W(t, \varphi) = \max_{-r(t) \leq s \leq 0} V(\varphi(s)))$, $(V(x) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} V_i(x_i), W(t, \varphi) = \max\{\max_{-r(t) \leq s \leq 0} V(\varphi(s)), \sup_{s \leq 0} V(\varphi(s)/g(s))\})$ удовлетворяют условию (LR1).

Первые результаты об устойчивости и асимптотической устойчивости для уравнений с неограниченным запаздыванием, использующие функции Ляпунова, появились в 1962 году в статье R.D. Driver [10]. В этой работе правая часть уравнения предполагалась зависящей от значений $x(g(t))$, где $-\infty \leq \alpha \leq g(t) \leq t$, и в каждый момент времени t определенной в пространстве ограниченных функций из $C([\alpha, t], R^n)$ с супремум-нормой (в случае $\alpha = -\infty$ полагается $[\alpha, t] = (-\infty, t]$). В этом случае оценка $V'(t, \psi(\cdot)) \leq w(t, V(t, \psi(t)))$ для функций $\psi \in C([\alpha, t], G_H)$, удовлетворяющих неравенству $V(s, \psi(s)) \leq V(t, \psi(t))$, гарантирует устойчивость нулевого решения уравнения с запаздыванием в R^n при условии устойчивости нулевого решения уравнения $\dot{y} = w(t, y)$. Для асимптотической устойчивости множество, на котором проверяется отрицательная определенность производной функции V , определяется традиционным неравенством $V(s, \psi(s)) < \eta(V(t, \psi(t)))$, где $\eta \in K$ и $\eta(u) > u$ для $u > 0$, однако интервал значений s меняется на $[g(t), t]$, и требуется дополнительно, чтобы $g(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Если же требуется доказать равномерную асимптотическую устойчивость, то множество, на котором оценивается производная, еще больше расширяется: неравенство $V(s, \psi(s)) < \eta(V(t, \psi(t)))$ должно выполняться лишь для $s \in [t - h, t]$ для некоторого $h \geq 0$. Разумность таких требований наглядно подтверждается следующим примером:

Пример 1. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(g(t)),$$

с постоянными a и b , удовлетворяющими условию $a > |b| > 0$, и $\alpha \leq g(t) \leq t$. Если $g(t) = t - r$, то нулевое решение этого уравнения равномерно асимптотически устойчиво [10]. Если функция $g(t)$ ограничена, $\alpha \leq g(t) \leq T$, то нулевое решение устойчиво, но не асимптотически. Действительно, возьмем произвольное $t_0 > T$ и положим $\psi(t) \equiv \delta > 0$ для $t \in [\alpha, t_0]$. Тогда $\dot{x}(t) = -ax(t) - b\delta$ для $t \geq t_0$, откуда $x(t) = -b\delta/a + \delta(1 + b/a)e^{a(t_0 - t)}$, и $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -b\delta/a \neq 0$. Если же $g(t) = t/2$, то, используя изложенное выше утверждение из [10] и простейшую функцию $V(x) = x^2$, получаем

асимптотическую устойчивость. Однако она не будет равномерной [11]: если для произвольных $\delta > 0$ и $T > 0$ выбрать $\varepsilon_0 = \delta |b| / 2a$, $t_0 = T$, $\psi(t) = \delta/2$ для $t \in [0, t_0]$ и $t_1 = t_0 + T$, то соответствующее решение уравнения удовлетворяет равенствам

$$x(t_1) = x(t_0)e^{-a(t_1-t_0)} + be^{-at_1} \int_{t_0}^{t_1} e^{as} x(s/2) ds = (\delta/2)(1 - b/a)e^{-aT} + \delta b / (2a) \geq \delta b / (2a) = \varepsilon_0.$$

Таким образом, нулевое решение не является равномерно притягивающим.

Некоторое уточнение формулировки работы [10] получили в статье [11]. В частности, знак производной в этой статье предлагается проверять начиная не с начального момента t_0 , а лишь при $t \geq t_0 + T$ (справедливость такой замены следует из непрерывной зависимости решения от начальной функции), а в оценке производной отрицательно определенная функция координаты заменяется неположительной функцией времени с расходящимся интегралом. Такое ослабление условий позволяет упростить доказательство асимптотической устойчивости в конкретных примерах.

Неправомерность «естественного» обобщения теоремы Красовского об асимптотической устойчивости [4] на уравнения с неограниченным и бесконечным запаздыванием была отмечена позднее и в работах [14, 15]: знакоопределенность производной на множестве функций, определяемом неравенством $V(s, \psi(s)) < \eta(V(t, \psi(t)))$, $s \in [\alpha, t]$ ($\eta \in K$ и $\eta(u) > u$ для $u > 0$), не гарантирует асимптотическую устойчивость (см. [14]).

Условия же устойчивости [15], а затем и равномерной устойчивости [16] (в последнем случае рассматривается случай $\alpha = -\infty$) являются непосредственным обобщением соответствующих теорем для случая конечного запаздывания [4, 6], т.е. множества для оценки производной изменяются на $\{\varphi \in C([\alpha, t], R^n): V(s, \varphi(s)) \leq V(t, \varphi(0)), \alpha \leq s \leq t\}$ и $\{\varphi \in C([\alpha, t], R^n): V(s, \varphi(s)) \leq \eta(V(t, \varphi(0))), \alpha \leq s \leq t\}$ соответственно.

Рассмотрим задачу о локализации положительного предельного множества ограниченного решения уравнения с неограниченным запаздыванием, а также сформулируем достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения в терминах пары Ляпунова-Разумихина, удовлетворяющей следующему предположению:

Предположение 5. *Предположим, что пара (V, W) удовлетворяет Предположению 4. Тогда для любой последовательности $t_n \rightarrow +\infty$, определяющей предельную пару (V^*, W^*) , каждой равномерно непрерывной функции $\varphi \in B_H$ и каждого числа $t \in R^+$ выполняется условие $W^*(t, \varphi) \leq \sup_{s \leq 0} V^*(t + s, \varphi(s))$.*

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. Предположим, что для уравнения (1) существует пара Ляпунова-Разумихина (V, W) , выполняются Предположения 1, 4, 5 и решение уравнения (1) определено и ограничено при всех $t \geq \alpha$, $|x(t; \alpha, \varphi)| \leq q$.

Тогда существует $c_0 = \text{const} \geq 0$, такое, что для любой $\psi \in \omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$ существует предельная совокупность (f^*, V^*, W^*, U^*) , и решение $x^*(t; 0, \psi)$ предельного уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$ такие, что $x_t^* \in \omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$, $x_t^* \in S(t, W^*, c_0)$ для всех $t \in R^+$, и если $\sup_{s \leq 0} V^*(t+s, x^*(t+s)) = V^*(t, x^*(t))$, то $x_t^* \in L(t, U^*)$.

Следует отметить, что в общем случае существование t , для которого выполняется равенство $\sup_{s \leq 0} V^*(t+s, x^*(t+s)) = V^*(t, x^*(t))$, не следует из условий Теоремы 1. Однако для пары $V(t, x)$, $W(t, \varphi) = \max_{-r(t) \leq s \leq 0} V(t+s, \varphi(s))$, удовлетворяющей в случае $r(t) \rightarrow +\infty$, $t - r(t) \rightarrow +\infty$ условию (LR1) и Предположению 5, можно в условиях Теоремы 1 утверждать существование по крайней мере одной последовательности $t_k \rightarrow +\infty$, для которой указанное равенство для соответствующей предельной функции V^* выполняется при $t = 0$.

Действительно, зафиксируем произвольную последовательность $\bar{t}_k \rightarrow +\infty$. Тогда для любого ограниченного решения $x(t) = x(t; \alpha, \varphi)$ справедливо равенство $\sup_{-r(\bar{t}_k) \leq s \leq 0} V(\bar{t}_k + s, x(\bar{t}_k + s; \alpha, \varphi)) = V(\bar{t}_k, x(\bar{t}_k; \alpha, \varphi))$ для некоторой последовательности $t_k: t_k \in [\bar{t}_k - r(\bar{t}_k), \bar{t}_k]$, и в силу неограниченного возрастания последовательности $\bar{t}_k - r(\bar{t}_k)$ получаем, что $t_k \rightarrow +\infty$. По Теореме 1 предел последовательности $\sup_{-r(\bar{t}_k) \leq s \leq 0} V(\bar{t}_k + s, x(\bar{t}_k + s; \alpha, \varphi))$ (или ее некоторой подпоследовательности) равен постоянной c_0 , зависящей только от решения $x(t)$, а последовательность x_{t_k} (или ее некоторая подпоследовательность) сходится к $\psi \in B$. Отсюда для функции V^* и решения $x^*(t) = x^*(t; 0, \psi) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t; t_k, x_{t_k})$ предельного уравнения, соответствующего $\{t_k\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{-r(\bar{t}_k) \leq s \leq 0} V(\bar{t}_k + s, x(\bar{t}_k + s; \alpha, \varphi)) = c_0 = V^*(0, x^*(0)) = \sup_{s \leq 0} V^*(s, x^*(s))$.

Аналогичный результат получаем для пары $(V(x), W(t, \varphi) = \max\{\max_{-r(t) \leq s \leq 0} V(\varphi(s)), \sup_{s \leq 0} V(\varphi(s)/g(s))\})$.

Из Теоремы 1 и полученных в предыдущем абзаце результатов можно получить следствия об устойчивости нулевого решения уравнения (1) с

неограниченным запаздыванием. В частности, справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *Предположим, что для уравнения (1) выполняется Предположение 1, и существует функция $V(t, x)$ такая, что пара $(V(t, x), W(t, \varphi) = \max_{-r(t) \leq s \leq 0} V(t + s, \varphi(s)))$ (либо $(V(x), W(t, \varphi) = \max_{-r(t) \leq s \leq 0} \{ \max_{s \leq 0} V(\varphi(s)), \sup_{s \leq 0} V(\varphi(s)/g(s)) \})$) является парой Ляпунова-Разумихина на множестве $R^+ \times B_H$, удовлетворяет Предположению 4, и $V(t, x) \geq a(|x|)$ для $(t, x) \in R^+ \times G_{H_1}$, где $H_1 \leq H$, $a(u) \in K$. Если для любой $t_k \rightarrow +\infty$ множество $S = \{ \varphi : \sup_{s \leq 0} V^*(s, \varphi(s)) = V^*(0, \varphi(0)) = c_0 \geq 0, U^*(0, \varphi) = 0 \}$ состоит из точки $\varphi = 0$, то нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво.*

Замечание 1. Теорему 1 можно доказать без Предположений 1б), 4. Множество $S(t, W^*, c)$ при этом заменяется на множество

$$S_\infty(t, t_n, c) = \{ \varphi \in B_H \mid \exists \{ \varphi_n \} \in B_H : \varphi_n \rightarrow \varphi, \lim_{n \rightarrow \infty} W(t + t_n, \varphi_n) = c \},$$

а Предположение 5 заменяется на следующее:

Предположение 6. *Для каждой равномерно непрерывной функции $\varphi \in B_H$, произвольных последовательностей $\varphi_n \rightarrow \varphi$ ($\varphi_n \in B_H$), $t_n \rightarrow +\infty$ и любого $t \in R^+$ выполняется условие*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W(t_n + t, \varphi_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \leq 0} V(t_n + t + s, \varphi_n(s)).$$

Теорема 2 без Предположений 1б), 4 также останется справедливой, если множество S заменить на

$$S_\infty = \left\{ \varphi \in B_H \mid \exists \varphi_n \rightarrow \varphi, t_n \rightarrow +\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \leq 0} V(t_n + s, \varphi_n(s)) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(t_n, \varphi_n(0)) = c_0 \geq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} U(t_n, \varphi_n) = 0 \right\}.$$

Если, кроме того, правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию Липшица (2), то в Теореме 2 достаточно, чтобы оценка производной в условии (LR2) выполнялась лишь для $t \geq T$, $T > 0$.

Предложенная методика применения функций в исследовании устойчивости уравнений с неограниченным запаздыванием является более гибкой и удобной в применении по сравнению с известными ранее.

3. Примеры

Рассмотрим неавтономную систему Лотки-Вольтерра вида:

$$\dot{x}_i(t) = b(x_i(t))f_i(t, x_t) = b(x_i(t))[r_i(t) - a_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{l_{ij}} b_{ijl}(t)x_j(t - \tau_{ijl}(t)) + \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^0 b_{ij}(t, s)x_j(t + s)ds], \quad (4)$$

$$i = 1, \dots, n$$

где все коэффициенты непрерывны на R^+ , $b(0) = 0$, $b(x) > 0$ при $x > 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{du}{b(u)} = +\infty$, $\int_0^1 \frac{du}{b(u)} = +\infty$; $r_i(t)$, $a_i(t)$, $b_{ijl}(t)$ ограничены, $a_i(t) > 0$ для $t \in R^+$; $0 \leq \tau_{ijl}(t) \leq \tau(t)$, $\dot{\tau}_{ijl}(t) < 1$; $|b_{ij}(t, s)| \leq \tilde{b}_{ij}(s)$ и $\int_{-\infty}^0 \tilde{b}_{ij}(s)ds < B_{ij} < \infty$. Начальные условия для этой системы имеют вид $x_{t_0} = \varphi$, $\varphi \in BC(R^-, R^n)$, $\varphi_i(s) > 0$ при $s \in R^-$, $i = 1, \dots, n$, при этом в силу свойств функции b все решения остаются положительными на всем интервале определения [9].

Системы такого вида широко используются в моделировании динамики взаимодействующих биологических видов. Очевидно, рассматриваемая система допускает нулевое положение равновесия. Обычно при изучении асимптотического поведения подобных моделей предполагается наличие еще и положительного равновесия в системе, которое исследуется на устойчивость. Тем не менее и в том случае, когда такого равновесия не существует, можно получить условия, при которых решения системы будут иметь конечный ненулевой предел.

Рассмотрим систему в допустимом фазовом пространстве C_g^0 , где функция g удовлетворяет условиям (g1), (g2) и $\int_{-\infty}^0 \tilde{b}_{ij}(s)g(s)ds < B_{ij}$.

Предположим, что существует постоянный положительный вектор $\bar{K} = (K, \dots, K)$, такой что

$$f_i(t, \bar{K}) + k_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

для некоторых неположительных функций $k_i(t) \in L_1$.

Положим $x_i = y_i + K$. Тогда

$$\dot{y}(t) = b(y_i(t) + K)[-a_i(t)y_i(t) + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{l_{ij}} b_{ijl}(t)y_j(t - \tau_{ijl}(t)) + \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^0 b_{ij}(t, s)y_j(t + s)ds - k_i(t)], \quad i = 1, \dots, n.$$

Заметим, что если $y_{t_0} > 0$, то $y(t) > 0$ для всех $t \geq t_0$, т.е. множество

$M_+ = \{y : y_i > 0, i = 1, \dots, n\} \subset R^n$ положительно инвариантно относительно последней системы.

Рассмотрим на множестве M_+ пару

$$V(y) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} v(y_i) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \int_0^{y_i} \frac{du}{b(u+K)},$$

$$W(t, \varphi) = \max \left\{ \max_{-\tau(t) \leq s \leq 0} V(\varphi(s)), \sup_{s \leq 0} V(\varphi(s)/g(s)) \right\}.$$

Заметим, что $V(y)$ положительно определена на множестве M_+ , условия (LR1) и Предположение 5 выполняются, кроме того, $V(y) \rightarrow +\infty$ при $|y| \rightarrow +\infty$ в силу свойств функции b . Оценивая производную функции $V(y)$ на множестве $\varphi: V(\varphi(0)) = W(t, \varphi)$ и используя Теорему 2, получаем, что если справедливы соотношения

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} a_i(t) - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{l=1}^{l_{ij}} |b_{ijl}(t)| + B_{ij} \right) > a_0 > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

то для всех решений $x(t)$ системы (4), для которых $x_{t_0} > \bar{K}$, выполняется неравенство $x(t) > \bar{K}$ при всех $t \geq t_0$ и $x(t) \rightarrow \bar{K}$ при $t \rightarrow +\infty$.

Если оценка запаздываний в системе (4) – функция $\tau(t)$ – ограничена конечной величиной $\tau > 0$, то в силу теоремы о равномерной асимптотической устойчивости из [8] условие (6) достаточно для равномерной сходимости $x(t) \rightarrow K$ при $t \rightarrow +\infty$, при условии, что $x_{t_0} > K$.

Если же зависящие от времени коэффициенты системы и запаздывания $\tau_{ijl}(t)$ ограничены и равномерно непрерывны по $t \in R^+$, то более простая пара Ляпунова-Разумихина позволяет получить более общий результат для системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & b_i(x_i(t))f_i(t, x_t) = b(x_i(t))[r_i(t) - a_i(t)x_i(t) + \\ & + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{l_{ij}} b_{ijl}(t)x_j(t - \tau_{ijl}(t)) + \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^0 b_{ij}(t, s)x_j(t+s)ds], \end{aligned} \quad (7)$$

где функции $b_i(x_i)$ (возможно, различные) удовлетворяют тем же условиям, что и функция b в системе (4), кроме условия $\int_1^{+\infty} \frac{du}{b(u)} = +\infty$, которое можно опустить. При этом компоненты вектора \bar{K} могут быть различными и устанавливается сходимость к \bar{K} всех решений системы (7).

А именно, в силу о равномерной асимптотической устойчивости для возмущенной системы (см., например, [8, Теорема 3]), для доказательства равномерной сходимости всех решений этой системы к $K(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ достаточно установить равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения системы

$$\dot{y}(t) = b_i(y_i(t) + K_i)[-a_i(t)y_i(t) + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{l_{ij}} b_{ijl}(t)y_j(t - \tau_{ijl}(t)) + \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^0 b_{ij}(t,s)y_j(t+s)ds],$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Требуемое утверждение доказывается при помощи пары

$$V(y) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} v(y_i) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} y_i^2, \quad W(\varphi) = \max\{\max_{-\tau \leq s \leq 0} V(\varphi(s)),$$

$\sup_{s \leq 0} V(\varphi(s)/g(s))\}$, где $\tau \geq \tau_{ijl}(t)$ для всех $t \in R^+$. Поскольку допустимые решения системы (4) при всех $t \geq t_0$ содержатся в множестве M^+ , условия Теоремы 1 из [8] для такой пары выполняются, если справедливы неравенства (6). Заметим также, что знак функций $k_i(t)$ в этом случае значения не имеет.

Полученные утверждения дополняют результат из [9], где исследуется сходимость решений системы (7) к функции $K(t)$ (не обязательно постоянной), удовлетворяющей системе

$$\dot{K}_i(t) = b_i(K_i(t))[f_i(t, K(t)) + k_i(t)], \quad i = 1, \dots, n.$$

Для исследования использовался довольно громоздкий функционал, а полученные достаточные условия сходимости отличаются от приведенных зависимостью от запаздываний и постоянного положительного вектора c :

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} c_i a_i(t) - \sum_{j=1}^n c_j \left(\sum_{l=1}^{l_{ji}} \frac{|b_{jil}(\psi_{jil}^{-1}(t))|}{1 - \dot{\tau}_{jil}(\psi_{jil}^{-1}(t))} + B_{ji} \right) > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8)$$

где $\dot{\tau}_{jil}(t) < 1$, $\psi_{jil}^{-1}(t)$ есть функция, обратная к $\psi_{jil}(t) = t - \tau_{jil}(t)$.

Применение функции в паре с функционалом позволяет улучшить оценку (8) в случае постоянной $K(t)$, если запаздывание неограничено, а ограниченность $\tau(t)$ позволяет утверждать, что сходимость равномерна. При этом доказательство сходимости не использует непрерывную дифференцируемость запаздываний, которая может быть заменена следующими условиями: функция $t - \tau(t)$ не убывает при достаточно больших t и $t - \tau(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$; Наконец, условия (6) в некотором смысле более продуктивны, поскольку во многих моделях запаздывание (особенно переменное) оказывается параметром, оценка которого встречает наибольшие трудности.

Рассмотрим, например, скалярное уравнение [9]

$$\dot{x}(t) = x(t) \left[\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{1+t^2} - \frac{\pi}{\sqrt{3+4t}} + \frac{\pi}{2\sqrt{1+t}} - \frac{2}{\sqrt{3+4t}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3+4t}} - \cos t \right) - \left(\frac{3}{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{1+t}} \right) x(t) + \right. \quad (9)$$

$$\left. + \cos t \cdot x(t - \tau(t)) + \int_0^\infty \frac{x(t-s)}{s^2 - s + t + 1} ds \right]$$

Равенство (5) для этого уравнения выполняется при $K = 1$, $k(t) = -\frac{1}{1+t^2}$.

Нетрудно убедиться, что условие (6) справедливо при $a_0 = 0.4$, и в силу результатов раздела 3 из неравенства $x_{t_0} > 1$ следует $x(t) > 1$ при всех $t \geq t_0$ и $x(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow +\infty$ (при этом сходимость равномерна в случае $\tau(t) \leq \tau = \text{const}$). Заметим, что в работе [9] сходимость $x(t) \rightarrow 1$ для решений уравнения (9) доказана в случае постоянного $\tau(t)$. В этом случае, поскольку коэффициенты уравнения ограничены и равномерно непрерывны, приведенные результаты гарантируют равномерность сходимости. Если же запаздывание неограничено, условие (8) (в отличие от условия (6)) может не выполняться, например, при $\tau(t) = t/2$.

Другой пример – система [17]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= e^{x_1(t)} \left[-4x_1(t) + x_2(t - \sin^2 t) + \int_0^\infty \frac{2}{\pi[1+s^2]} x_2(t-s) ds \right] \\ \dot{x}_2(t) &= e^{x_2(t)} \left[-3x_1(t) + x_1(t - \cos^2 t) + \int_0^\infty 2e^{-2s} x_1(t-s) ds \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Полагая $K = 0$, можно сделать вывод о глобальной равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы, поскольку выполняются неравенства (6) и коэффициенты системы не зависят от t . В статье [17] для данной системы доказан тот же результат, но в предлагаемом там методе ограниченность запаздываний (вторые слагаемые в квадратных скобках) принципиальна, в то время как полученное здесь утверждение позволяет отказаться от этого ограничения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-01-00741) и в рамках программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/6194).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андреев А. С. Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск: УлГУ, 2005.
2. Hale J., Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay // Funkcialaj Ekvacioj. 1978. V.21. P.11–41.
3. Колмановский В. Б. Об устойчивости некоторых систем с произвольным последствием // Докл. РАН. 1993. Т.331. № 4. С.421–424.
4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1959.

5. Мартынюк А. А., Като Д., Шестаков А. А. Устойчивость движения: метод предельных уравнений. Киев: Наукова думка, 1990.
6. Разумихин Б. С. Устойчивость эрдитарных систем. М.: Наука, 1988.
7. Седова Н. О. К методу Ляпунова-Разумихина для уравнений с бесконечным запаздыванием // Диффер. уравнения. 2002. Т.10. – С.1338–1347.
8. Седова Н. О. О развитии прямого метода Ляпунова для функционально-дифференциальных уравнений с бесконечным запаздыванием // Мат. заметки. 2008. Т.84, вып. 6. – С.888–906.
9. Bereketoglu H., Györi I. Global asymptotic stability in a nonautonomous Lotka-Volterra type system with infinite delay // Journal of Math. Anal. and Appl. 1997. V.210. – P.279–291.
10. Driver R. D. Existence and stability of solutions of a delay-differential system // Arch. Ration. Mech. and Anal. 1962. V.10. – P.401–426.
11. Hara T., Yoneyama T., Miyazaki R. Some refinements of Razumikhin's method and their applications // Funkcialaj Ekvacioj. 1992. V.35. – P. 279–305.
12. Hino Y., Murakami S., Naito T. Functional differential equations with infinite delay // Lecture Notes in Math. V. 1473. Springer-Verlag, 1991.
13. Murakami S., Naito T. Fading memory spaces and stability properties for functional differential equations with infinite delay // Funkcialaj Ekvacioj. 1989. V.32. – P.91–105.
14. Seifert G. Liapunov-Razumikhin conditions for asymptotic stability in functional differential equations of Volterra type // J. Differential equations. 1974. V.16. – P.289–297.
15. Seifert G. Liapunov-Razumikhin conditions for stability and boundedness of functional differential equations of Volterra type // J. Differential equations. 1973. V.14. P.424–430.
16. Seifert G. Uniform stability for delay-differential equations with infinite delay // Funkcialaj Ekvacioj. 1982. V.25. – P.347–356.
17. Zhang Y., Wang M. Two families of Liapunov functions for functional differential systems // Acta Mathematica Sinica, English Series. 1999. V.15. – P.197–206.

А. С. Семенов (г. Ульяновск)

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О БРАХИСТОХРОНЕ С ОГРАНИЧЕНИЕМ КАК ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ФАЗОВЫЕ КООРДИНАТЫ

Задача о брахистохроне [1], в которой оптимальная кривая не может выйти ниже заданной прямой, аналитически решена как вариационная задача оптимального управления с ограничением на фазовые координаты первого порядка.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК №П1122.

1. Пусть на вертикальной плоскости с декартовой системой координат, выбранной так, как показано на рис. 1, заданы две прямые: вертикальная прямая с уравнением $x = l$ и прямая с уравнением

$$y = kx + b \quad (b \geq 0, 0 < k < \infty). \quad (1)$$

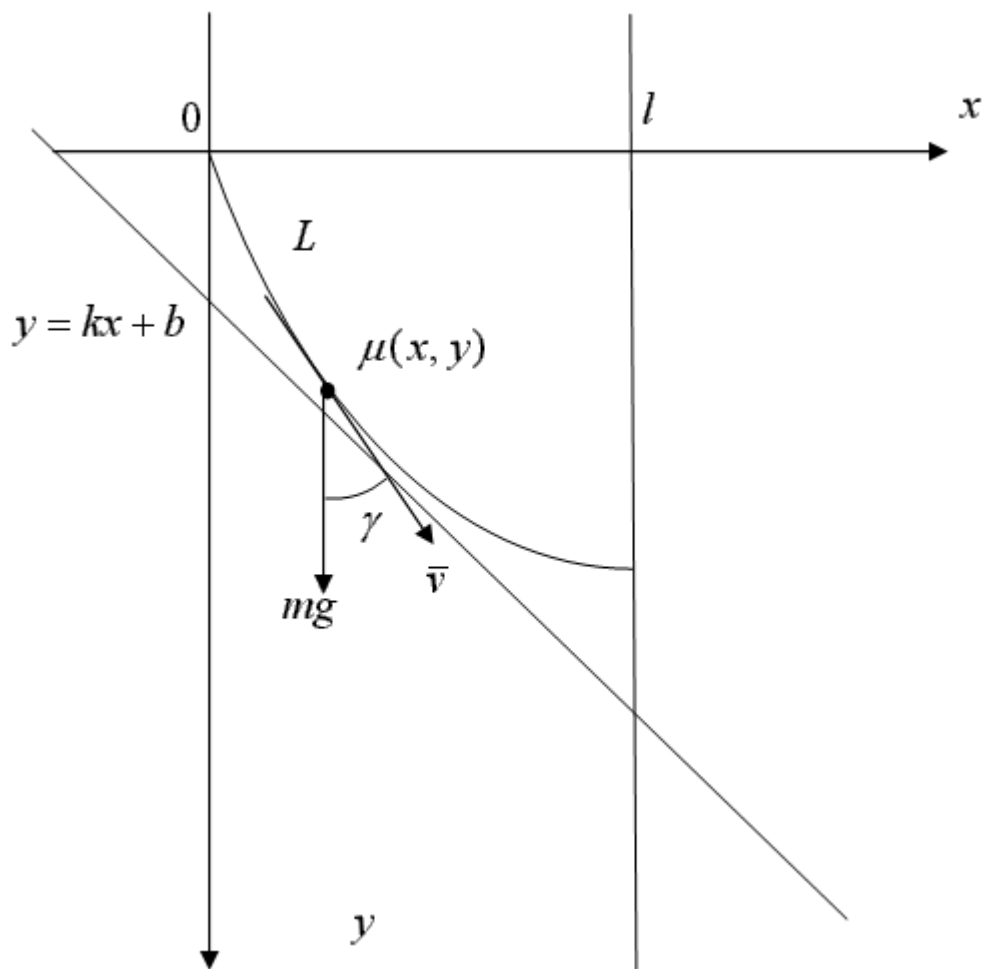


Рис. 1. Иллюстрация к задаче

Рассмотрим следующую задачу. Требуется на множестве всех гладких плоских, кривых, лежащих в первом квадранте и не ниже прямой (1), найти такую кривую L , двигаясь по которой из начала координат с нулевой начальной скоростью под действием силы тяжести материальная точка массы m в кратчайшее время достигнет прямой $x = l$.

Построим математическую модель задачи. Пусть $s(t)$ – длина дуги OM кривой L , где точка $M(x(t), y(t))$ определяет в момент времени t ($t \geq 0$) положение материальной точки, движущейся по кривой L . Тогда сила, действующая на материальную точку в направлении скорости движения \vec{v} , т.е. касательной к кривой L , выразится в виде $mg \cos \gamma$, и, согласно, второму закону Ньютона, имеем

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = mg \cos \gamma, \quad (2)$$

где g – ускорение силы тяжести, а γ – угол, который составляет с осью Oy вектор скорости точки. Как известно из векторного анализа $\frac{dy}{ds} = \cos \beta$,

поэтому уравнение (2) преобразуется к виду $\frac{d^2 s}{dt^2} = g \frac{dy}{ds}$. Умножая обе части

последнего уравнения на $2 \frac{ds}{dt}$ и интегрируя по t с условиями $y(0) = 0$,

$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = 0$, $\frac{ds}{dt} \geq 0$, получаем $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$. Следовательно, уравнение движения

материальной точки можно записать в виде следующей системы дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{ds}{dt} \sin \gamma = \sqrt{2gy} \sin \gamma, \\ \dot{y} = \frac{ds}{dt} \cos \gamma = \sqrt{2gy} \cos \gamma. \end{cases} \quad (3)$$

Введем безразмерные переменные

$$x_1 = \frac{x}{l}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{y}{l}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{2g}{l}} t, \quad u_1 = \sin \gamma, \quad u_2 = \cos \gamma, \quad (u_1 \geq 0, u_2 \geq 0). \quad (4)$$

Тогда в новых переменных система (3) запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = x_2 u_1, \\ \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{1}{2} u_2, \end{cases} \quad (5)$$

которую следует дополнить очевидным соотношением

$$\varphi_1(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2 - 1 = 0. \quad (6)$$

Сформулируем теперь следующую задачу оптимального управления. Среди непрерывных и неотрицательных функций $x_1(\tau)$, $x_2(\tau)$, $u_1(\tau)$, $u_2(\tau)$, удовлетворяющих на отрезке $[\tau_0; T]$ системе (5), соотношению (6), и неравенству

$$\theta_0(x_1, x_2) = x_2^2 - kx_1 - \beta \leq 0 \quad (\beta = \frac{b}{l}), \quad (7)$$

а на концах отрезка – условиям

$$x_1(\tau_0) = 0, \quad x_2(\tau_0) = 0, \quad x_1(T) = 1, \quad \tau_0 = 0, \quad (8)$$

найти такие, которые сообщают функционалу

$$I = T \quad (9)$$

минимальное значение.

Заметим, что при использовании терминологии оптимальных систем функции x_1 и x_2 должны быть названы фазовыми координатами, а функции u_1 и u_2 – управлениями. Неравенством (7) задается замкнутая область допустимых изменение фазовых координат. Следовательно, сформулированная задача является задачей оптимизации процесса управления с ограничением на фазовые координаты [2].

2. Прежде всего рассмотрим соответствующую задачу оптимизации без ограничения (7). Решение ее позволит определить интервалы значений параметров k и β , входящих в неравенство (7), при которых это неравенство следует учитывать. Применяем метод вариационного исчисления [2]. Строим функции

$$H = H_\lambda + H_\mu = \lambda_1 x_2 u_1 + \lambda_2 \frac{1}{2} u_2^2 + \mu_1 (u_1^2 + u_2^2 - 1),$$

$$\varphi = T + \rho_1 x_1(\tau_0) + \rho_2 x_2(\tau_0) + \rho_3 [x_1(T) - 1] + \rho_4 \tau_0,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ – переменные, а $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ – постоянные множители Лагранжа [2].

Используя необходимые условия правила множителей, получаем

$$\frac{d\lambda_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\lambda_2}{d\tau} = -\lambda_1 u_1, \quad (10)$$

$$\lambda_1 x_2 + 2\mu_1 u_1 = 0, \quad \frac{1}{2} \lambda_2 + 2\mu_1 u_2 = 0, \quad (11)$$

$$\lambda_1(\tau_0) = \rho_1, \quad \lambda_2(\tau_0) = \rho_2, \quad \lambda_1(T) = -\rho_3, \quad \lambda_2(T) = 0. \quad (12)$$

Кроме того, в силу автономности системы, имеем [2]

$$H_\lambda = \text{const} = -\rho_4 = 1. \quad (13)$$

Из соотношений (6) и (11), учитывая условие Клебша, которое в рассматриваемой задаче имеет вид $\mu_1 \leq 0$, получаем

$$\mu_1 = -\frac{1}{2} f, \quad u_1 = \frac{\lambda_1 x_2}{f}, \quad u_2 = \frac{\lambda_2}{f}, \quad (14)$$

где $f = \sqrt{\lambda_1^2 x_2^2 + \frac{\lambda_2^2}{4}}$; а дифференциальные уравнения (5) и (10) принимают вид

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{\lambda_1 x_2^2}{f}, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{1}{4} \frac{\lambda_2}{f}, \quad \frac{d\lambda_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\lambda_2}{d\tau} = -\frac{\lambda_1^2 x_2}{f}. \quad (15)$$

Система уравнений (15) имеет первый интеграл,

$$f = \sqrt{\lambda_1^2 x_2^2 + \frac{\lambda_2^2}{4}} \equiv C = \frac{\rho_2}{2}, \quad (16)$$

что легко установить дифференцированием по τ обеих частей равенства (16).

Интегрируя теперь систему (15) при начальных условиях из (8) и (12), получаем

$$\lambda_1 = \text{const} = \rho_1 = -\rho_3; \quad \lambda_2 = 2C \cos \frac{\rho_1}{2C} \tau,$$

$$x_1 = -\frac{C^2}{2\rho_1^2} \sin \frac{\rho_1}{C} \tau + \frac{C}{2\rho_1} \tau, \quad x_2 = \frac{C}{\rho_1} \sin \frac{\rho_1}{2C} \tau.$$

Для определения значений параметров C , ρ_1 и T используем краевые условия $x_1(T)=1$, $\lambda_2(T)=0$ и равенство (13) в точке $\tau=T$. В результате получаем

$$C = 1, \quad T = \sqrt{2\pi}, \quad \rho_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Следовательно, в задаче без ограничений оптимальная кривая, параметрически заданная в безразмерных переменных, имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\pi} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tau - \sin \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tau \right), \\ x_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tau. \end{cases} \quad (17)$$

Если возвратится к размерным переменным задачи, то получаем известное [1] параметрическое решение о брахистохроне со свободным концом на вертикальной прямой

$$\begin{cases} x = \frac{l}{\pi} (2\varphi - \sin 2\varphi), \\ y = 2 \frac{l}{\pi} \sin^2 \varphi, \end{cases} \quad (18)$$

где $\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi g}{l} \right)^{1/2} t$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

3. Найдем уравнение касательной к кривой (18) в ее произвольной точке, соответствующей значению параметра $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, с координатами

$$x_\varphi = \frac{l}{\pi}(2\varphi - \sin 2\varphi), \quad y_\varphi = \frac{2l}{\pi}(\sin^2 \varphi).$$

Как известно из дифференциального исчисления, уравнение искомой касательной имеет вид

$$y = y_\varphi + y'_x(\varphi)(x - x_\varphi),$$

так как

$$y' = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{2 \frac{l}{\pi} 2 \sin \varphi \cos \varphi}{2 \frac{l}{\pi} (1 - \cos 2\varphi)} = \operatorname{ctg} \varphi,$$

то уравнение касательной будет таким

$$y = \operatorname{ctg} \varphi \cdot x + \frac{2l}{\pi} \left(\sin^2 \varphi - \operatorname{ctg} \varphi \cdot \varphi + \operatorname{ctg} \varphi \sin \varphi \cos \varphi \right)$$

или $y = \operatorname{ctg} \varphi \cdot x + \frac{2l}{\pi} (1 - \varphi \cdot \operatorname{ctg} \varphi).$ (19)

Используя теперь уравнение (19), представим фазовое ограничение (7) в следующем виде

$$\theta_0(x_1, x_2) = x_2^2 - kx_1 - \frac{2}{\pi} \alpha \left(1 - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} k \right) k \right) \leq 0, \quad (20)$$

где параметры k и α могут изменяться в интервалах $0 < k < \infty$, $0 < \alpha < \infty$. Заметим, что при значениях $\alpha \geq 1$, $k \in (0, \infty)$ все точки кривой (17) удовлетворяют ограничению (20), как следствие построения правой части его. Следовательно, имеет смысл рассмотреть задачу оптимального управления для значений параметра $\alpha \in (0; 1)$, так как в этом случае необходимо учитывать ограничение (20) и допускать возможность выхода материальной точки на границу области, определяемой этим неравенством. Точка будет находиться на границе в интервале $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$, если в момент $\tau = \tau_1$ выполняется равенство

$$\theta_0(x_1(\tau_1), x_2(\tau_1)) = x_2^2(\tau_1) - kx_1(\tau_1) - \alpha h = 0, \quad (21)$$

где $h = \frac{2}{\pi} \left(1 - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} k \right) k \right)$, а при $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ выполняется условие

$$\theta_1(x, u) = \frac{d\theta_0}{d\tau} = x_2 u_2 - kx_2 u_1 = 0. \quad (22)$$

Функция θ_1 явно зависит от управлений, следовательно, ограничение (20) является фазовым ограничением типа неравенства первого порядка. Поэтому для решения задачи воспользуемся результатами, представленными в работе [3], полагая в них $q = 1$.

4. Предположим, что оптимальная кривая имеет лишь один граничный участок, соответствующий подынтервалу $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$. Тогда уравнения для внутренних участков кривой, соответствующих интервалам $[0; \tau_1)$ и $(\tau_2; T]$, совпадают с уравнениями (14), (15), а для граничного участка будут справедливы [3] уравнения (5), (6), (21) и уравнения

$$\frac{d\lambda_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\lambda_2}{d\tau} = -\lambda_1 u_1, \quad (23)$$

$$\lambda_1 x_2 + 2\mu_1 u_1 - \alpha_1 k x_2 = 0, \quad \frac{1}{2} \lambda_2 + 2\mu_1 u_2 + \alpha_1 x_2 = 0. \quad (24)$$

Соотношения (6) и (22) дают

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \quad u_2 = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}},$$

так что основные уравнения для граничного участка кривой принимают вид

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{x_2}{\sqrt{1+k^2}}, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{k}{2\sqrt{1+k^2}}, \quad \frac{d\lambda_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\lambda_2}{d\tau} = -\frac{-\lambda_1}{\sqrt{1+k^2}}. \quad (25)$$

В результате интегрирования уравнений (25) получаем

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4} \frac{k}{1+k^2} \tau^2 + \frac{A_1}{\sqrt{1+k^2}} \tau + A_2, \\ x_2 &= \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \tau + A_1, \\ \lambda_1 &= C_2, \quad \lambda_2 = -\frac{C_2}{\sqrt{1+k^2}} \tau + A_3, \end{aligned} \quad (26)$$

где A_1 , A_2 , A_3 и C_2 , подлежащие определению постоянные интегрирования, причем A_1 и A_2 связаны соотношением

$$A_1^2 = kA_2 + \alpha h, \quad (27)$$

которое получается после подставки в равенство (22) функций x_1 и x_2 из (26).

Условия сопряжения в точке $\tau = \tau_1$ представляются равенствами [3]

$$\begin{aligned} \lambda_1(\tau_1 - 0) &= \lambda_1(\tau_1 + 0) + \nu_0 k, \\ \lambda_2(\tau_1 - 0) &= \lambda_2(\tau_1 + 0) - 2\nu_0 x_2(\tau_1), \\ H(\tau_1 - 0) &= H(\tau_1 + 0) \end{aligned} \quad (28)$$

а в точке $\tau = \tau_2$ – равенствами

$$\lambda_1(\tau_2 - 0) = \lambda_1(\tau_2 + 0), \quad \lambda_2(\tau_2 - 0) = \lambda_2(\tau_2 + 0), \quad H(\tau_2 - 0) = H(\tau_2 + 0). \quad (29)$$

Из соотношений (28), (29) следует непрерывность функции H на интервале $0 \leq \tau \leq T$ и, следовательно, наличие первого интеграла (13).

Интегрируя уравнения (15) на интервале $[0; \tau_1]$, соответствующим внутренним точкам области (20), имеем

$$\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2 \cos \frac{\rho_1}{\rho_2} \tau, \quad (30)$$

$$x_2 = \frac{\rho_2}{2\rho_1} \sin \frac{\rho_1}{\rho_2} \tau, \quad x_1 = \frac{\rho_2}{4\rho_1} \tau - \frac{\rho_2^2}{8\rho_1^2} \sin \frac{2\rho_1}{\rho_2} \tau.$$

Из условия (13) при $\tau = 0$ следует $\rho_2 = 2$.

На интервале $[\tau_2; T]$ решение уравнений (15), получаемое интегрированием с правого конца, может быть записано в форме

$$\lambda_1 = -\rho_3, \lambda_2 = c_1 \sin \frac{\rho_3}{C_1} (\tau - T), \quad (31)$$

$$x_1 = 1 + \frac{C_1^2}{8\rho_3^2} \left(-\frac{2\rho_3}{C_1} (\tau - T) - \sin \frac{2\rho_3}{C_1} (\tau - T) \right).$$

Постоянную интегрирования C_1 находим из условия (13) при $\tau = T$, получаем $C_1 = 2$.

Используя полученные решения (26), (30) и (31), условия сопряжения множителей и непрерывности фазовых координат в точках $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$ примут вид

$$\begin{aligned} \rho_1 &= C_2 + \nu_0 k, & 2 \cos \frac{\rho_1}{2} \tau_1 &= -\frac{C_2}{\sqrt{1+k^2}} \tau_1 + A_3 - 2\nu_0 \left(\frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \tau_1 + A_1 \right), \\ \frac{1}{\rho_1} \sin \frac{\rho_1}{2} \tau_1 &= \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \tau_1 + A_1, & \frac{1}{2\rho_1^2} (\rho_1 \tau_1 - \sin \rho_1 \tau_1) &= \frac{1}{4} \frac{k}{1+k^2} \tau_1^2 + \frac{A_1}{\sqrt{1+k^2}} \tau_1 + A_2, \\ C_2 &= -\rho_3, & -\frac{C_2}{\sqrt{1+k^2}} \tau_2 + A_2 &= 2 \sin \frac{\rho_3}{2} (\tau_2 - T), \\ & & \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \tau_2 + A_1 &= -\frac{1}{\rho_3} \cos \frac{\rho_3}{2} (\tau_2 - T), \\ & & \frac{1}{4} \frac{k}{1+k^2} \tau_2^2 + \frac{A_1}{\sqrt{1+k^2}} \tau_2 + A_2 &= 1 + \frac{1}{2\rho_3^2} (\rho_3 (\tau_2 - T) - \sin \rho_3 (\tau_2 - T)). \end{aligned} \quad (32)$$

Дополнив соотношения (32) условием непрерывности функции H в точке $\tau = \tau_1$, которое представится равенством

$$C_2 A_1 + \frac{1}{2} k A_3 = \sqrt{1+k^2},$$

и зависимостью (27), имеем систему десяти уравнений относительно десяти неизвестных $\rho_1, C_2, \nu_0, \tau_1, A_3, A_1, A_2, \rho_3, \tau_2, T$.

Решая эту систему, получаем единственное решение

$$\rho_1 = \left(\frac{1 - \frac{k}{2}(\pi - 2\arctgk)}{\alpha h} \right)^{1/2}, \quad C_2 = -\rho_3 = \left(\frac{\frac{1}{k} + \arctgk}{1 + \frac{\alpha h}{k}} \right)^{1/2},$$

$$A_1 = \left(\frac{\alpha h \left(1 - \frac{k}{2}(\pi - 2\arctgk) \right)}{1 + k^2} \right)^{1/2}, \quad A_2 = -\alpha h \frac{\frac{\pi}{2} - \arctgk + k}{1 + k^2},$$

$$A_3 = \frac{2}{k} \left((1 + k^2)^{1/2} - \frac{\alpha h \left(\frac{1}{k} + \arctgk \right) \left(1 - \frac{k}{2}(\pi - 2\arctgk) \right)}{\left(1 + \frac{\alpha h}{k} \right) (1 + k^2)} \right)^{1/2},$$

$$v_0 = \frac{\rho_1 - C_2}{k}, \quad \tau_1 = 2(\alpha h)^{1/2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctgk \right) \left(1 - \frac{k}{2}(\pi - 2\arctgk) \right)^{-1/2},$$

$$\tau_2 = \frac{2}{k} \left(\left(\frac{1 + \frac{\alpha h}{k}}{\frac{1}{k} + \arctgk} \right)^{1/2} - \left(\frac{\alpha h}{k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\pi + \arctgk \right) \right)^{1/2} \right),$$

$$T = 2 \left(\left(\left(1 + \frac{\alpha h}{k} \right) \left(\frac{1}{k} + \arctgk \right) \right)^{1/2} - \left(\left(\frac{\alpha h}{k} \right) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\pi + \arctgk \right) \right)^{1/2} \right).$$

Таким образом, оптимальная траектория поставленной задачи оптимального управления найдена. Для полноты решения определим оставшиеся множители Лагранжа μ_1 и α_1 для граничного участка траектории. Используя условия (13), (22) и (24) получаем

$$\mu_1 = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{\lambda_1}{k} - \frac{u_1}{kx_2}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1969. – 424 с.
2. Троицкий В. А. Оптимальные процессы колебаний механических систем / В. А. Троицкий. – Л. : Машиностроение, 1976. – 246 с.
3. Семенов А. С. Необходимые условия в вариационных задачах оптимизации процессов управления с ограничениями на фазовые координаты g-го порядка. // А. С. Семенов. Труды ЛПИ №-318, «Механика и процессы управления. Вычислительная математика», 1971. – С. 122-130.

А. Г. Ташлинский, И. Н. Кавеев, А. М. Хорева (г. Ульяновск)

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЛАНА ВЗЯТИЯ ОТСЧЕТОВ ПРИ ОЦЕНИВАНИИ МЕЖКАДРОВЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ

При псевдоградиентном оценивании параметров изображений характер сходимости оценок и вычислительные затраты зависят от объема и плана локальной выборки отсчетов изображений, используемой для нахождения псевдоградиента целевой функции. В работе рассмотрен подход к решению задачи оптимизации псевдоградиентных процедур за счет выбора плана отсчетов локальной выборки.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 07-01-00138-а)

Введение

В результате межкадровых геометрических деформаций изображений (МГДИ) одни и те же элементы сцены на разных кадрах изображений имеют различные координаты, что можно представить как преобразование системы координат опорного $\mathbf{Z}^{(1)}$ изображения в систему координат деформированного $\mathbf{Z}^{(2)}$ изображения. Для синтеза процедур оценивания параметров деформаций нужно задаться их моделью. Во многих случаях модель может быть задана в параметрической форме, например, набором параметров поворота, масштаба, изменения положения приемника и другими. В частности, для плоских изображений при ортонормированной системе координат, когда каждой точке изображения \mathbf{Z} ставится в соответствие упорядоченная пара чисел $\bar{j} = (j_x, j_y)^T$ декартовых координат, примерами могут служить евклидова, аффинная и проективная модели [1]. Будем считать, что кадры изображений заданы на регулярной прямоугольной сетке Ω_j с единичным шагом, деформированное изображение получено из опорного посредством некоторого функционального преобразования, известного с точностью до параметров $\bar{\alpha}$, а наблюдаемые изображения возмущены аддитивной помехой.

Существует большое число методов оценивания межкадровых деформаций, которые были разработаны для различных ограничений на исходные данные. Одним из наиболее перспективных является псевдоградиентное оценивание [2]. Класс псевдоградиентных процедур (ППГ) очень широк и включает в себя процедуры стохастической аппроксимации Робинса-Монро и Кифера-Вольфовица, регулярного и случайного поиска,

покоординатного спуска, обобщенного стохастического градиента и многие другие. В общем виде ПГП [3] можно представить как

$$\hat{\alpha}_{t+1} = \hat{\alpha}_t - \Lambda_{t+1} \bar{\beta}_{t+1} \left(J(Z_{t+1}, \hat{\alpha}_t) \right), \quad (1)$$

где $\bar{\alpha}$ – вектор оцениваемых параметров; t – номер итерации; Λ – матрица усиления; $\bar{\beta}$ – псевдоградиент целевой функции (ЦФ) $J(\cdot)$, характеризующей качество оценивания; $Z_t = \{z_{j_t}^{(2)}, \tilde{z}_{j_t}^{(1)}\}$ – локальная выборка отсчетов, используемая для нахождения псевдоградиента на t -й итерации; $z_{j_t}^{(2)} \in \mathbf{Z}^{(2)}$, $\bar{j}_t \in \Omega_t \in \Omega_{\bar{j}}$; Ω_t – план локальной выборки (координаты отсчетов $z_{j_t}^{(2)}$, попавших в локальную выборку); $\tilde{z}_{j_t}^{(1)} = \tilde{z}^{(1)}(\bar{j}_t, \hat{\alpha}_{t-1}) \in \tilde{\mathbf{Z}}$ – отсчеты непрерывного изображения $\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}$, полученного из $\mathbf{Z}^{(1)}$, например, интерполяцией [4]. Объем выборки равен числу отсчетов $z_{j_t}^{(2)}$.

ПГП обладают рядом несомненных достоинств. Они применимы к обработке изображений в условиях априорной неопределенности, предполагают небольшие вычислительные затраты, не требуют предварительной оценки параметров исследуемых изображений, формируемые ими оценки устойчивы к импульсным помехам. Однако этим процедурам присущи и два существенных недостатка. Первый - наличие локальных экстремумов оценки ЦФ, что на отдельных реализациях изображений существенно замедляет скорость сходимости оценок параметров или даже может привести к ее срыву. На борьбу с этим недостатком направлена апостериорная оптимизация объема выборки, предполагающая синтез процедур, в которых объем автоматически адаптируется на каждой итерации для выполнения некоторого условия, способствующего выходу процедуры из локальных экстремума [5, 6]. Другим недостатком является сравнительно небольшой рабочий диапазон, в котором обеспечивается эффективная сходимость оценок. На скорость сходимости оценок существенное влияние оказывают объем и план отсчетов локальной выборки, используемой для нахождения псевдоградиента. Априорная оптимизация объема выборки по различным критериям рассмотрена в работах [7, 8]. Вопросы же оптимизации плана отсчетов локальной выборки исследованы недостаточно.

Постановка задачи

Для нахождения оптимального плана взятия отсчетов локальной выборки необходимо выбрать критерий оптимальности. Сходимость оценок при псевдоградиентном оценивании параметров изображений зависит от большого числа факторов, как заданных априорно: ЦФ, распределения вероятностей и корреляционные функции изображений и мешающих шумов, так и зависящих от используемой процедуры: способ вычисления псевдоградиента, вид

матрицы усиления и число итераций. Для анализа факторы первой группы желательно описать возможно меньшим числом величин. Известно [9] использование в качестве таких величин вероятностей $\rho_i^+(\bar{\varepsilon})$, $\rho_i^o(\bar{\varepsilon})$, $\rho_i^-(\bar{\varepsilon})$ изменения оценок $\hat{\alpha}_i$ в пространстве рассогласований $\bar{\varepsilon} = \hat{\alpha} - \bar{\alpha}^*$ параметров, где $\rho_i^+(\bar{\varepsilon})$, $\rho_i^o(\bar{\varepsilon})$, $\rho_i^-(\bar{\varepsilon})$ – вероятности изменения $\hat{\alpha}_i$ к α_i^* , не изменения $\hat{\alpha}_i$ и изменения $\hat{\alpha}_i$ от α_i^* , соответственно; α_i^* – оптимальное значение параметра; $i = \overline{1, m}$. На их основе для релейных ППП предложен коэффициент улучшения оценки: $\mathfrak{R}_i = \rho_i^+(\bar{\varepsilon}) - \rho_i^-(\bar{\varepsilon})$, характеризующий вероятностные характеристики изменения оценок в процессе сходимости, и найдены выражения для коэффициента как функционала дисперсии яркости, отношения сигнал/шум и корреляционной функции изображения.

Если оценивается один параметр, то для нахождения оптимальной области взятия отсчетов можно в качестве критерия оптимальности выбрать максимум коэффициента улучшения исследуемого параметра [10]. Однако такой подход к оптимизации плана локальной выборки мало приемлем при оценивании вектора параметров. Это связано с тем, что нахождение коэффициента улучшения вектора оценок в целом встречает труднопреодолимые математические трудности. Рассмотрим иной подход.

Заметим, что для отсчета локальной выборки $z^{(2)} = z$, взятого из деформированного изображения, на опорном изображении по модели деформаций находится его оценка $\tilde{z}^{(1)} = \tilde{z}$ с координатами (\tilde{x}, \tilde{y}) . При этом положение точки (\tilde{x}, \tilde{y}) относительно истинных координат (x, y) можно описать через евклидово расстояние рассогласования (ЕРР) $\mathfrak{E} = \sqrt{(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2}$ и угол $\phi = \arg \operatorname{tg}((y - \tilde{y}) / (x - \tilde{x}))$. Можно показать, что существует оптимальное ЕРР \mathfrak{E}_{op} , обеспечивающее наилучшую сходимость вектора оценок, которое не зависит от модели деформаций и определяется только характеристиками изображений и ЦФ. Тогда нахождение оптимальной (субоптимальной) области можно разбить на два этапа:

1) нахождение для заданной ЦФ оптимального евклидова расстояния как функции распределения яркостей, корреляционной функции полезного изображения и отношения сигнал/шум;

2) определение по модели деформаций и вектору рассогласования оценок области, в которой обеспечивается оптимальное евклидово расстояние.

Решение первой из этих задач рассмотрено в работе [11], где показано, что в ситуации, когда в качестве ЦФ выступает средний квадрат межкадровой разности для нахождения \mathfrak{E}_{op} необходимо знать корреляционную функцию изображений и отношение сигнал/шум. Если же ЦФ является ковариация или

коэффициент корреляции отсчетов изображений $\mathbf{Z}^{(1)}$ и $\mathbf{Z}^{(2)}$, то для нахождения \mathcal{E}_{op} достаточно знать только корреляционную функцию.

Рассмотрим второй этап решения задачи нахождения оптимальной области, заключающийся в нахождении по модели МГДИ и вектору рассогласования оценок параметров области взятия отсчетов, как области, в которой обеспечивается оптимальное значение ЕРР. Для определенности будем считать, что модель МГДИ аффинная: $\bar{\alpha} = (h_x, h_y, \varphi, \kappa)^T$, где (h_x, h_y) – параллельный сдвиг, φ – угол поворота; κ – масштабный коэффициент.

Выбор начального приближения оценок

Сходимость оценок параметров зависит от их начального приближения $\hat{\alpha}_0$. Поэтому определим правило выбора начального приближения из условия минимума математического ожидания ЕРР, создаваемого начальным приближением каждого параметра. В этом случае начальное приближение для каждого параметра должно соответствовать математическому ожиданию ЕРР, создаваемого возможными значениями параметра:

$$M[\mathcal{E}] = \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \sqrt{(\tilde{x}(\alpha) - x^*)^2 + (\tilde{y}(\alpha) - y^*)^2} w(\alpha) d\alpha,$$

где $(\tilde{x}(\alpha), \tilde{y}(\alpha))$ – текущая оценка координат точки (x^*, y^*) , полученной при подстановке в модель деформаций истинных значений параметров; $w(\alpha)$ – распределение вероятностей возможных значений параметра α .

Если область определения возможных значений параметров: $\Omega_{\bar{\alpha}} : \{h_{x\min} \div h_{x\max}, h_{y\min} \div h_{y\max}, \varphi_{\min} \div \varphi_{\max}, \kappa_{\min} \div \kappa_{\max}\}$ и $w(\alpha)$ равномерна, то для сдвига и угла поворота начальные приближения

$$\hat{h}_{x0} = \frac{h_{x\min} + h_{x\max}}{2}, \hat{h}_{y0} = \frac{h_{y\min} + h_{y\max}}{2}, \varphi_0 = \frac{\varphi_{\min} + \varphi_{\max}}{2}.$$

Для коэффициента масштаба κ :

$$M[\mathcal{E}] = \int_{\kappa_{\min}}^{\kappa_{\max}} \frac{\sqrt{(x - x_0 - \kappa(x - x_0))^2 + (y - y_0 - \kappa(y - y_0))^2}}{\kappa_{\max} - \kappa_{\min}} d\kappa =$$

$$= \left(1 - \frac{\kappa_{\max} + \kappa_{\min}}{2}\right) \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

т. е. для начального приближения κ также получаем: $\kappa_0 = \frac{\kappa_{\max} + \kappa_{\min}}{2}$.

Нахождение субоптимальной области при заданном векторе рассогласования оценок

Опорной точкой для построения субоптимальной области выберем координаты заданного центра поворота (x_0, y_0) . Для произвольной точки (\tilde{x}, \tilde{y}) ЕРР зависит от всех оцениваемых параметров. При этом вклад в ЕРР параметров сдвига h_x и h_y не зависит от местоположения точки на кадре:

$$\Delta f_h = \sqrt{(\varepsilon_x)^2 + (\varepsilon_y)^2}, \quad \phi_h = \arg \operatorname{tg} \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x},$$

где ε_x и ε_y – рассогласование оценок \hat{h}_x и \hat{h}_y от оптимальных значений h_x^* и h_y^* ; Δf_h и ϕ_h – модуль и аргумент вектора вклада в ЕРР рассогласования по сдвигу.

Величина вклада параметров φ и κ зависит от расстояния L от центра поворота. Так, если рассогласование оценки $\hat{\varphi}$ от оптимального значения φ^* равно ε_φ , то это дает вклад в ЕРР

$$\Delta f_\varphi = 2L \sin \frac{\varepsilon_\varphi}{2},$$

где $L = \sqrt{(\tilde{x} - x_0)^2 + (\tilde{y} - y_0)^2}$; Δf_φ – модуль вектора вклада, аргумент которого равен $\phi_\varphi = \arg \operatorname{tg} \frac{\tilde{y} - y_0 - (\tilde{x} - x_0) \sin \varepsilon_\varphi - (\tilde{y} - y_0) \cos \varepsilon_\varphi}{\tilde{x} - x_0 - (\tilde{x} - x_0) \cos \varepsilon_\varphi + (\tilde{y} - y_0) \sin \varepsilon_\varphi}$. Для оценки $\hat{\kappa}$ соответственно получаем:

$$\Delta f_\kappa = L(1 + \varepsilon_\kappa), \quad \phi_\kappa = \arg \operatorname{tg} \frac{\tilde{y} - y_0}{\tilde{x} - x_0}.$$

Для совокупности параметров:

$$f = \sqrt{L^2 \left(1 + (\varepsilon_\kappa)^2 - 2(1 + \varepsilon_\kappa) \cos \varepsilon_\varphi \right) + (\varepsilon_x)^2 + (\varepsilon_y)^2 - 2L \left(\varepsilon_x (\cos \gamma - (1 + \varepsilon_\kappa) \cos (\gamma + \varepsilon_\varphi)) + \varepsilon_y (\sin \gamma - (1 + \varepsilon_\kappa) \sin (\gamma + \varepsilon_\varphi)) \right)}, \quad (2)$$

где $\gamma = \arg \sin \frac{\tilde{y} - y_0}{L}$ – угол, определяющий направления L относительно базовой оси изображения $0 - x$. Приведенные выше рассуждения поясняются рис. 1. Можно показать, что всегда существует точка, при выборе которой центром поворота ЕРО не зависит от сдвига. Однако координаты этой точки априорно не известны.

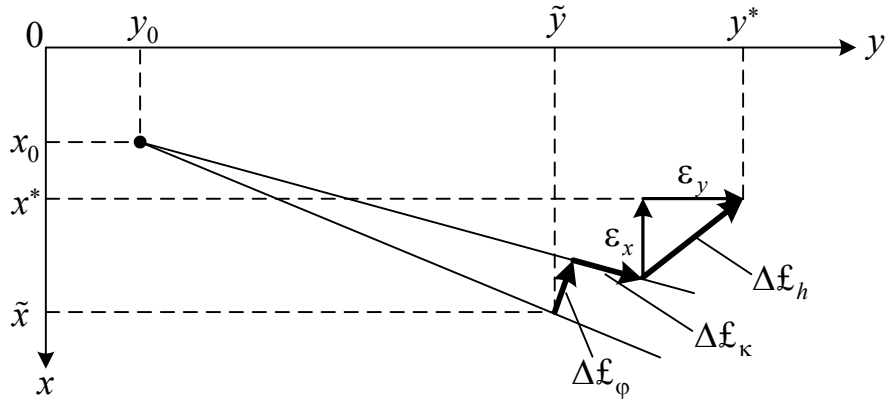


Рис. 1. Зависимость EPP от вектора рассогласования

Если \mathbf{f}_{op} и вектор $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_\kappa)^T$ известны, то выражение (2) позволяет найти оптимальное значение L_{op} как функцию угла γ , например, решением уравнения $L_{op}^2 - 2aL_{op} + b = 0$:

$$L_{op} = a + \sqrt{a^2 - b}, \quad (3)$$

где $a = \frac{(\varepsilon_x (\cos \gamma - (1 + \varepsilon_\kappa) \cos (\gamma + \varepsilon_\varphi)) + \varepsilon_y (\sin \gamma - (1 + \varepsilon_\kappa) \sin (\gamma + \varepsilon_\varphi)))}{1 + (1 + \varepsilon_\kappa)^2 - 2(1 + \varepsilon_\kappa) \cos \varepsilon_\varphi}$;

$$b = \frac{(\varepsilon_x)^2 + (\varepsilon_y)^2 - (\mathbf{f}_{op})^2}{1 + (1 + \varepsilon_\kappa)^2 - 2(1 + \varepsilon_\kappa) \cos \varepsilon_\varphi}.$$

Решение также может быть получено и другими методами. Например, несложно показать, что при аффинной модели деформаций и векторе рассогласования $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_\kappa)^T$ геометрическое место точек, для которого EPP равно \mathbf{f}_{op} , представляет собой окружность

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

с центром в точке

$$\left(a = \frac{\varepsilon_x - (1 + \varepsilon_\kappa)(\varepsilon_x \cos \varepsilon_\varphi + \varepsilon_y \sin \varepsilon_\varphi)}{1 + (1 + \varepsilon_\kappa)^2 - 2(1 + \varepsilon_\kappa) \cos \varepsilon_\varphi}, b = \frac{\varepsilon_y - (1 + \varepsilon_\kappa)(\varepsilon_y \cos \varepsilon_\varphi - \varepsilon_x \sin \varepsilon_\varphi)}{1 + (1 + \varepsilon_\kappa)^2 - 2(1 + \varepsilon_\kappa) \cos \varepsilon_\varphi} \right)$$

и радиусом

$$r = \frac{(\mathbf{f}_{op})^2 - (\varepsilon_x)^2 - (\varepsilon_y)^2}{1 + (1 + \varepsilon_\kappa)^2 - 2(1 + \varepsilon_\kappa) \cos \varepsilon_\varphi} + a^2 + b^2.$$

Заметим, что для цифровых изображений окружность с радиусом L_{op} можно считать оптимальной областью только условно, поскольку вероятность ее пересечения с узлами сетки отсчетов крайне мала. Для получения субоптимальной области можно задаться некоторым приемлемым диапазоном, которому соответствуют значения L_1 и L_2 , задающие границы субоптимальной области.

Формирование вектора рассогласования оценок

Границы субоптимальной области L_1 и L_2 соответствуют некоторому диапазону ЕРР от \mathcal{E}_1 до \mathcal{E}_2 , в котором либо улучшение ЕРР за итерацию больше заданного порога, либо $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{op} - \Delta_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{op} + \Delta_{\mathcal{E}}$, где $\Delta_{\mathcal{E}}$ – некоторое отклонение, определенное экспериментально.

Зависимость рассогласования вектора оценок от числа итераций может быть сформирована различными способами и, в общем случае, зависит от условий решаемой задачи. Например, для обеспечения наилучшей сходимости в среднем можно предложить следующий алгоритм.

1⁰. Задать начальное рассогласование $\bar{\epsilon}$ вектора оценок параметров МГДИ.

2⁰. Исходя из распределения вероятностей оценок параметров, найти математическое ожидание каждой из оценок.

3⁰. Используя (2) найти границы L_1 и L_2 субоптимальной области взятия отсчетов локальной выборки.

4⁰. После выполнения ПГП итерации рассчитать усредненные (по всем возможным положениям отсчетов локальной выборки) распределения вероятностей оценок, используя методику расчета для конечного числа итераций [9, 12].

5⁰. Повторить операторы 2⁰–4⁰ до достижения заданной точности оценивания.

Большой практический интерес представляет минимаксный подход. В этом случае вначале находится зависимость субоптимальной подобласти от числа итераций для начального приближения, соответствующего максимально возможному рассогласованию параметров (для наихудшего случая). Определяется число итераций, необходимое для достижения заданной точности оценивания. В дальнейшем полученный закон изменения субоптимальной подобласти от номера итерации применяется для любого начального приближения параметров, обеспечивая точность оценивания не хуже заданной. При этом для заданного класса изображений (заданных автокорреляционной функции и распределений яркостей изображений) закон изменения субоптимальной области может быть найден аналитически с использованием методики расчета при конечном числе итераций. Границы L_1 и L_2 субоптимальной области можно найти также по рассогласованию оценок параметров, полученному для каждой итерации экспериментально и усредненному по заданному ансамблю реализаций.

Отметим, что для параметров поворота и масштаба в предположении достаточно большого размера изображения теоретически всегда может быть найдена субоптимальная подобласть. Рассогласование по сдвигу инвариантно для любой точки изображения (строго говоря, это утверждение справедливо,

если задан только параллельный сдвиг), и может существенно превышать \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 , особенно на начальном этапе оценивания (при этом (3) дает комплексное число). В этом случае по некоторому критерию должна быть задана базовая область, в которой берутся отсчеты локальной выборки до тех пор, пока уменьшение рассогласования по сдвигу не позволит сформировать субоптимальную область, исходя из \mathcal{L}_1 до \mathcal{L}_2 .

Для примера на рис. 2 приведены субоптимальные области взятия отсчетов локальной выборки на изображении размером 1024×1024 с гауссовской автокорреляционной функцией радиуса корреляции 13 и отношением сигнал/шум $g = 50$. В качестве ЦФ использовался средний квадрат межкадровой разности. Оптимизация проводилась для релейной ППП с параметрами диагональной матрицы усиления $\lambda_x = 0.1$, $\lambda_y = 0.1$, $\lambda_\varphi = 0,15^\circ$, $\lambda_\kappa = 0.01$. Начальное рассогласование вектора параметров составляло $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_{x0} = 10, \varepsilon_{y0} = 10, \varepsilon_{\varphi0} = 25, \varepsilon_{\kappa0} = 1.5)^T$. Размер базовой области 64×64 . Субоптимальная область формировалась по правилу: $L_1 = L_{op} - 12$, $L_2 = L_{op} + 12$. Вектор рассогласования оценок для нахождения ЕРР определялся в соответствии с минимаксным подходом статистическим моделированием. На рисунке показаны субоптимальные области для 1, 200, 400 и 700 итераций, которые соответствуют векторам рассогласования:

$$\begin{aligned} \text{при } t = 200 & - \bar{\varepsilon} = (\varepsilon_x = 4.9, \varepsilon_y = 7.9, \varepsilon_\varphi = 15.4, \varepsilon_\kappa = 0.33)^T, \\ \text{при } t = 400 & - \bar{\varepsilon} = (\varepsilon_x = 0.8, \varepsilon_y = 2.7, \varepsilon_\varphi = 2.9, \varepsilon_\kappa = 0.03)^T, \\ \text{при } t = 700 & - \bar{\varepsilon} = (\varepsilon_x = 0.02, \varepsilon_y = 0.21, \varepsilon_\varphi = 0.04, \varepsilon_\kappa = 0.008)^T. \end{aligned}$$

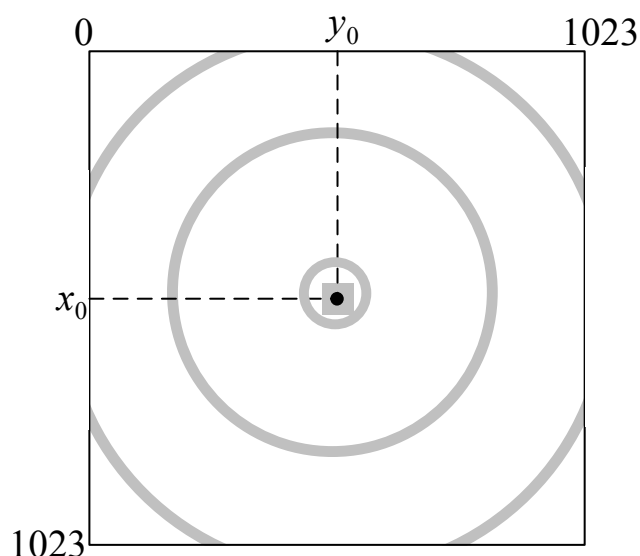


Рис. 2. Субоптимальные области взятия отсчетов для различных итераций

На рис. 3 приведены зависимости евклидова расстояния (при $L = 20$) от числа итераций с использованием субоптимальной области (кривая 1) и без нее (кривая 2). Результаты усреднены по 100 реализациям. Видно, что примерно до 120 итерации (пока отсчеты локальной выборки берутся из базовой области) скорость сходимости ЕРР несколько ниже, поскольку не обеспечиваются условия оптимальности. Уменьшение скорости сходимости наблюдается также при малых значениях ЕРР, что обусловлено выходом субоптимальной области за размеры изображения. Сказанное иллюстрируется также рис. 4, где приведена зависимость L_{op} от числа итераций.

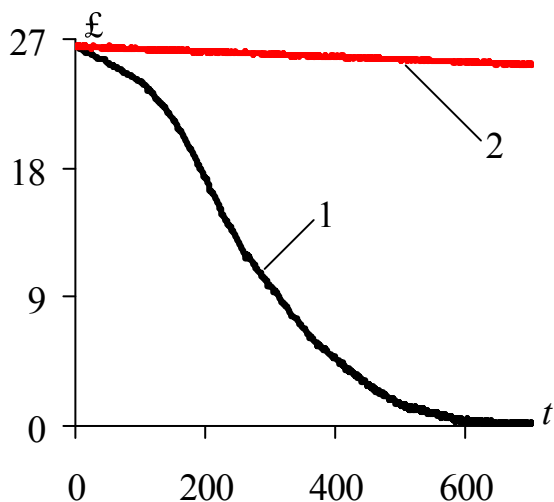


Рис. 3 Сходимость ЕРР

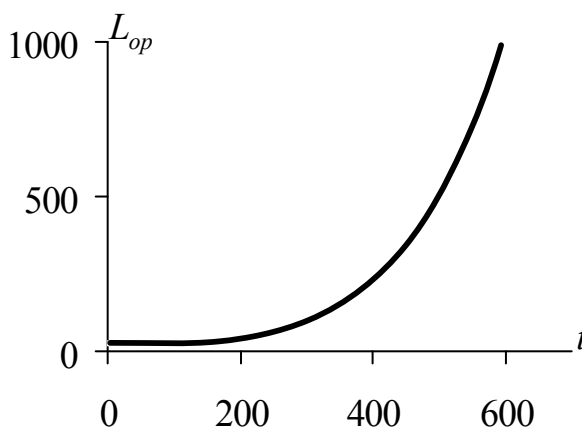


Рис. 4. Зависимость L_{op} от числа итераций

Заключение

При псевдоградиентном оценивании параметров МГДИ план локальной выборки отсчетов, используемых для нахождения псевдоградиента, существенно влияет на характер сходимости оценок параметров. Для случая оценивания вектора параметров предложена методика нахождения по модели МГДИ и вектору рассогласования оценок параметров оптимальной (субоптимальной) области взятия отсчетов локальной выборки, как области, в которой обеспечивается оптимальное значение ЕРР. Оптимизация области взятия отсчетов локальной выборки позволяет значительно (иногда в десятки раз) снизить вычислительные затраты для достижения той же точности оценивания. В частности, в приведенном примере $\epsilon=0.5$ при оптимизации достигается за 600 итераций, а без оптимизации – за 14000 итераций, что соответствует выигрышу в быстродействии в 24 раза.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Gonzalez, R. C., Woods, R. E. Digital Image Processing. New Jersey: Prentice Hall, 2002.

2. Tashlinskii A. G. Pseudogradient Estimation of Digital Images Interframe Geometrical Deformations / *Vision Systems: Segmentation & Pattern Recognition*. – Vienna, Austria : I-Tech Publishing, 2007, pp. 465-494.

3. Цыпкин Я.З. Информационная теория идентификации. - М.: Наука. Физматлит, 1995.

4. Minkina G.L., Samoilov M. Yu., Tashlinskii A. G. Choice of goal function at pseudogradient measurement of image parameters / *Pattern Recognition and Image Analysis*, 2007, No. 1 (vol. 17), pp. 136–139.

5. Ташлинский А. Г., Минкина Г. Л., Дикарина Г. В. Адаптивное формирование объема локальной выборки в псевдоградиентных процедурах оценивания межкадровых геометрических деформаций изображений / *Вестник УлГТУ*, 2006, № 3, с. 81-83.

6. Ташлинский А. Г., Лазарев С. Н., Лазарева О. А. Апостериорная оптимизация псевдоградиентной процедуры оценивания межкадровых деформаций изображений / *Инфокоммуникационные технологии*, 2008, том 6, № 1, с. 72-75.

7. Самойлов М. Ю. Оптимизация процедур псевдоградиентного оценивания параметров межкадровых геометрических деформаций изображений / *Радиолокация, навигация, связь: Труды XII междунауч. научн.-техн. конференции*, Воронеж: Саквее, 2006, с. 162-167.

8. Dikarina G. V., Minkina G. L., Repin A. I., Tashlinskii A. G. Pseudogradient Optimization in the Problem of Image Interframe Geometrical Deformations Estimation / *8-th International Conference «Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies»: Conference Proceeding*. Yoshkar-Ola, 2007, Vol. 1, pp. 72-74.

9. Ташлинский А.Г., Тихонов В.О. Методика анализа погрешности псевдоградиентного измерения параметров многомерных процессов / *Известия вузов: Радиоэлектроника*, 2001, том 44, № 9, с. 75-80.

10. Tashlinskii A. G., Horeva A. M. Optimization of local sample samples region when pseudogradient estimating image interframe geometrical deformations // *9-th International Conference «Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies»: Conference Proceeding*. Nizhni Novgorod, 2008, Vol. 2, pp. 197-290.

11. Tashlinskii A. G., Dikarina G. V., Minkina G. L. Pseudogradient Optimization in the Estimation of Geometric Interframe Image Deformations // *Pattern Recognition and Image Analysis*, 2008, Vol. 18, No. 4, pp. 707–712.

12. Ташлинский А. Г., Минкина Г. Л., Дикарина Г. В., Сеницин В. И. Методика анализа точности псевдоградиентного оценивания геометрических деформаций последовательности изображений / *Наукоемкие технологии*, 2007, том 8, № 9, с. 14-23.

А. Г. Ташлинский, О. А. Лазарева (г. Ульяновск)

СХОДИМОСТЬ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ МЕЖКАДРОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ ПСЕВДОГРАДИЕНТНОМ ОЦЕНИВАНИИ

Локальная выборка отсчетов изображений, используемая для нахождения псевдоградиента при оценивании параметров изображений, влияет как на характер сходимости оценок, так и на вычислительные затраты. В работе для задачи оценивания параметров межкадровых геометрических деформаций изображений проведен анализ и выбор величин, характеризующих скорость сходимости оценок параметров, которые могут быть использованы для оптимизации локальной выборки по различным критериям.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 07-01-00138-а)

Введение

Оценивание параметров межкадровых геометрических деформаций изображений (МГДИ) является одной из часто встречаемых задач при обработке последовательностей изображений [1]. Существует большое число подходов к оцениванию межкадровых деформаций, которые разработаны для различных ограничений на исходные данные. Одним из подходов является псевдоградиентное оценивание [2]. Класс псевдоградиентных процедур очень широк и включает в себя процедуры стохастической аппроксимации Робинса-Монро и Кифера-Вольфовица [3], регулярного и случайного поиска [4], покоординатного спуска [5], обобщенного стохастического градиента [6] и многие другие. Сочетание хороших точностных характеристик и устойчивости оценок в условиях шумов с высоким быстродействием делает процедуры этого класса весьма привлекательными для использования в технологиях, направленных на решение задач при временных ограничениях.

При псевдоградиентном оценивании на каждой итерации находится псевдоградиент [2] целевой функции, характеризующей качество оценивания. Правило формирования оценки $\hat{\alpha}_{i,t}$ параметра α_i на текущей t -й итерации предполагает дискретное изменение предыдущей оценки $\hat{\alpha}_{i,t-1}$:

$$\hat{\alpha}_t = \hat{\alpha}_{t-1} + \Delta \hat{\alpha}_t, \quad (1)$$

где $\bar{\alpha}$ - вектор параметров оцениваемых деформаций изображений $\mathbf{Z}^{(1)} = \{z_j^{(1)}\}$ и $\mathbf{Z}^{(2)} = \{z_j^{(2)}\}$; $\Delta \hat{\alpha}_t = -\mathbf{\Lambda}_t \bar{\beta}_t (\mathbf{J}(\mathbf{Z}_t, \hat{\alpha}_{t-1}))$; $\bar{\beta}$ - псевдоградиент целевой функции

$J(Z_t, \hat{\alpha}_{t-1})$; Λ_t – матрица усиления, задающая величину изменения оценок параметров на итерации; $Z_t = \{z_{j_t}^{(2)}, \tilde{z}_{j_t}^{(1)}\}$ – локальная выборка отсчетов из опорного $Z^{(1)}$ и деформированного $Z^{(2)}$ изображений, используемая для нахождения $\bar{\beta}$ на $(t+1)$ -й итерации [7], $z_{j_t}^{(2)} \in Z^{(2)}$, $j_t \in \Omega_t$; Ω_t – план локальной выборки (координаты отсчетов $z_{j_t}^{(2)}$, выбранных в локальную выборку); $\tilde{z}_{j_t}^{(1)}$ – отсчеты непрерывного изображения $\tilde{Z}^{(1)}$, полученного из $Z^{(1)}$, например, интерполяцией. Объем локальной выборки (ОЛВ) равен числу отсчетов $z_{j_t}^{(2)}$. Увеличение ОЛВ приводит с одной стороны к увеличению скорости сходимости оценок параметров, а с другой стороны, в силу увеличения вычислительных затрат снижает быстроедействие.

Правила формирования объема и плана локальной выборки на различных итерациях оценивания при прочих равных условиях во многом определяют характер сходимости оценок $\bar{\alpha}$ и вычислительные затраты. Поэтому интерес представляет задача нахождения и исследования вероятностных свойств скорости сходимости оценок параметров при заданных моделях изображений и помех. Другой важной задачей является анализ и выбор величин, характеризующих скорость сходимости, которые могут быть использованы для оптимизации псевдоградиентных процедур по различным критериям. С решением поставленных задач тесно связан и выбор характеристики, позволяющей комплексно характеризовать параметры исследуемых изображений и мешающих шумов.

Для исследования скорости сходимости вектора оценок $\hat{\alpha}$ исследуемых параметров к оптимальному значению $\bar{\alpha}^*$ целесообразно в качестве исходной информации использовать распределения вероятностей этих оценок на соответствующих итерациях. При этом скорость сходимости $\hat{\alpha}$ можно характеризовать различными численными величинами:

- математическим ожиданием;
- вероятностью превышения некоторого порогового значения;
- доверительным интервалом и т. д.

Рассмотрим возможность и особенности использования этих величин при оценивании параметров МГДИ [8]. Если вектор $\bar{\alpha}$ содержит только один параметр, то приведенные выше характеристики непосредственно применимы его оценке. Если же оценивается совокупность параметров, то в общем случае на одной и той же итерации для каждого i -го параметра может потребоваться своя локальная выборка, обеспечивающее выполнение заданного критерия. Однако на каждой итерации локальная выборка должна формироваться один раз, соответственно для критерия необходима единая мера. Для задачи оценивания МГДИ в качестве такой единой меры в настоящей работе предлагается использовать распределение вероятностей расстояний между

точками изображений опорного изображения, вошедшими в локальную выборку, и возможными местоположениями этих точек на деформированном изображении. Рассмотрим предлагаемый подход подробнее.

Евклидово расстояние оценки

Для определенности будем считать, что оцениваются параметры аффинной модели МГДИ [9]: параллельный сдвиг $\bar{h} = (h_x, h_y)^T$, угол поворота φ и коэффициент масштаба k . Такое ограничение набора параметров не ограничивает общности приведенного ниже рассмотрения, которое предполагает задание некоторой модели МГДИ. Предположим, что ОЛВ $\mu_{it}=1$, а к $(t+1)$ -й итерации вектор оценок равен $\hat{\alpha}_t = (\hat{h}_{xt}, \hat{h}_{yt}, \hat{\varphi}_t, \hat{k}_t)^T$. Тогда для точки (a, b) (например, узла сетки отсчетов деформированного кадра $\mathbf{Z}^{(2)}$) на интерполированном опорном кадре $\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}$ в локальную выборку будет выбрана точка с координатами (x, y) :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \hat{k}_t((a - x_0)\cos\hat{\varphi}_t - (b - y_0)\sin\hat{\varphi}_t) + \hat{h}_{xt}; \\ y &= y_0 + \hat{k}_t((a - x_0)\sin\hat{\varphi}_t + (b - y_0)\cos\hat{\varphi}_t) + \hat{h}_{yt}. \end{aligned} \quad (2)$$

где (x_0, y_0) – принятые координаты центра поворота.

При этом оценке каждого из параметров \hat{h}_{xt} , \hat{h}_{yt} , $\hat{\varphi}_t$ и \hat{k}_t соответствует некоторое распределение вероятностей: $w_t(\hat{h}_x)$, $w_t(\hat{h}_y)$, $w_t(\hat{\varphi})$ и $w_t(\hat{k})$. При использовании для нахождения этих распределений методики, предложенной в работах [10] и предполагающей дискретизацию области определения параметров, получим дискретные распределения вероятностей

$$\begin{aligned} p_l(\hat{h}_x) &= P(\hat{h}_x = h_{xl}), \quad l = \overline{1, L_x}, \quad p_l(\hat{h}_y) = P(\hat{h}_y = h_{yl}), \quad l = \overline{1, L_y}, \\ p_l(\hat{\varphi}) &= P(\hat{\varphi} = \varphi_l), \quad l = \overline{1, L_\varphi}, \quad p_l(\hat{k}) = P(\hat{k} = k_l), \quad l = \overline{1, L_k}, \end{aligned}$$

где L_x , L_y , L_φ и L_k – число дискретов разбиения областей определения параметров h_x , h_y , φ и k соответственно. Таким образом, с соответствующей вероятностью оценка параметра может принять любое из возможных положений в пространстве параметров. Так, с вероятностью

$$P_{1111} = p_1(\hat{h}_x)p_1(\hat{h}_y)p_1(\hat{\varphi})p_1(\hat{k})$$

в пару к точке (a, b) кадра $\mathbf{Z}^{(2)}$ на кадре $\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}$ в локальную выборку будет выбрана точка с координатами

$$\begin{aligned} x_{1111} &= x_0 + k_1((a - x_0)\cos\varphi_1 - (b - y_0)\sin\varphi_1) + h_{x1}, \\ y_{1111} &= y_0 + k_1((a - x_0)\sin\varphi_1 + (b - y_0)\cos\varphi_1) + h_{y1}, \end{aligned}$$

соответствующая сочетанию значений \hat{h}_{x1} , \hat{h}_{y1} , $\hat{\varphi}_1$ и \hat{k}_1 оценок параметров, и т. д. вплоть до точки с координатами

$$x_{LxLyL\varphi L\kappa} = x_0 + \kappa_{L\kappa} \left((a - x_0) \cos \varphi_{L\varphi} - (b - y_0) \sin \varphi_{L\varphi} \right) + h_{xLx};$$

$$y_{LxLyL\varphi L\kappa} = y_0 + \kappa_{L\kappa} \left((a - x_0) \sin \varphi_{L\varphi} + (b - y_0) \cos \varphi_{L\varphi} \right) + h_{yLy};$$

соответствующей сочетанию значений h_{Lx} , h_{Ly} , $\varphi_{L\varphi}$ и $\kappa_{L\kappa}$ оценок параметров, которая будет выбрана с вероятностью

$$P_{LxLyL\varphi L\kappa} = p_{Lx}(\hat{h}_x) p_{Ly}(\hat{h}_y) p_{L\varphi}(\hat{\varphi}) p_{L\kappa}(\hat{\kappa}).$$

Таким образом, можно построить дискретное распределение вероятностей расстояний между точкой (a, b) и возможными оценками местоположения этой точки на t -й итерации, т.е. получить распределение евклидова расстояния r между истинным положением точки и его оценкой. Назовем это расстояние евклидовым расстоянием оценки (ЕРО).

Рассмотрим пример расчета распределения вероятностей ЕРО. Пусть модель наблюдаемых изображений гауссовская, а начальная невязка параметров составила $\hat{h}_{x0} = 1.5$, $\hat{h}_{y0} = 1.5$, $\hat{\varphi}_0 = 15^\circ$, $\hat{\kappa}_0 = 1.1$, отношение сигнал/шум $g = 14$ и используется релейная процедура (1) с матрицей усиления

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_{hx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{hy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{\kappa} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.005 \end{vmatrix}.$$

Рассчитанное после 55 итерации распределение $w_{55}(r)$ приведено на рис. 1. При этом для получения возможных координат (x_{abcd}, y_{abcd}) оценок использовалось выражение (2), а для расчета ЕРО соотношение $r_{abcd} = \sqrt{(a - x_{abcd})^2 + (b - y_{abcd})^2}$. Математическое ожидание ЕРО составило 1.98, а дисперсия – 4.

Пусть ОЛВ $\mu > 1$ и на каждой итерации выборка формируется в соответствии с некоторым планом. Например, при $\mu = 3$ координаты (R_1, ζ_1) первого отсчета деформированного кадра $\mathbf{Z}^{(2)}$ выбираются случайным образом в пределах некоторой области, а двух последующих по правилу $(R_2, \zeta_2 = \zeta_1 + 120^\circ)$, $(R_3, \zeta_3 = \zeta_1 + 240^\circ)$, где $R_1 = \sqrt{(a - x_0)^2 + (b - y_0)^2}$, $\zeta_1 = \arctg \frac{b - y_0}{a - x_0}$, (x_0, y_0) – координаты центра поворота R_2 и R_3 – случайные значения. Совокупности точек плана локальной выборки соответствует суммарное распределение ЕРО. Это распределение и может быть использовано для критериев оптимизации локальной выборки.

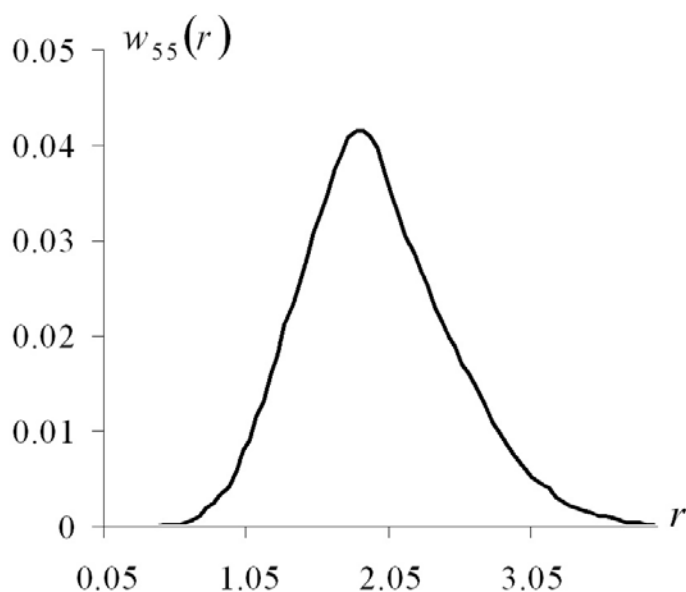


Рис. 1. Дискретное распределение ЕРО при $\mu = 1$

Пример рассчитанного распределения ЕРО для приведенного выше плана выборки и начальных условий, идентичных примеру рис. 1, приведен на рис. 2.

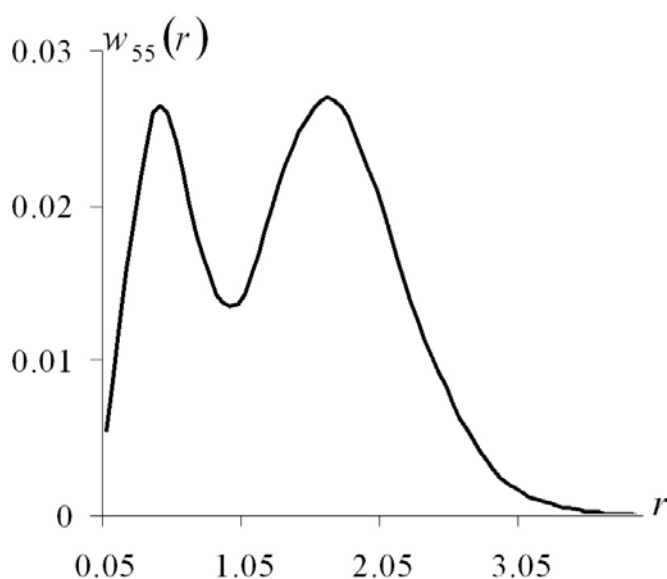


Рис. 2. Дискретное распределение ЕРО при $\mu = 3$

Анализ результатов показывает, что при увеличении ОЛВ распределение не нормализуется. Отсутствие эффекта нормализуемости распределения вероятностей вызвано нелинейной зависимостью ЕРО от параметров МГДИ, в результате чего разные точки плана локальной выборки могут давать отличные друг от друга математические ожидания и дисперсии ЕРО.

Отметим также, что в ряде случаев ЕРО целесообразно использовать и при оценивании одного параметра, например, когда требуется сравнить результаты, полученные для параметров разной размерности.

Математическое ожидание скорости сходимости

Теперь, после введения понятия ЕРО найдем с его помощью численные величины, характеризующие скорость сходимости ЕРО к нулю на конкретной t -й итерации. Для этого сравним распределения вероятностей ЕРО на $(t - 1)$ -й и t -й итерациях. Математическое ожидание изменения оценки при ОЛВ μ , равном m , составит

$$M[\Delta r] \Big|_{\mu=m} = \int_0^{\infty} r(w_{t-1}(r) - w_t(r)) dr \Big|_{\mu=m}.$$

Положительное значение Δr говорит об улучшении вектора $\hat{\alpha}$ оценок параметров, отрицательное – об ухудшении. На рис. 3 для приведен пример разности распределений вероятностей ЕРО на 68 и 69 итерациях при $\mu = 1$. Видно, что при больших ЕРО разности положительны, а при малых – отрицательны, что дает положительную величину математического ожидания $M[\Delta r]$ изменения ЕРО на 68 итерации, равную 0.017 [11].

Аналогично может быть рассчитано и математическое ожидание $M[\Delta r(+k)]$ улучшения вектора оценок параметров при увеличении ОЛВ μ на k . Так, например, при увеличении ОЛВ μ на 1 улучшение составит величину

$$M[\Delta r(+k)] = \int_{-\infty}^{\infty} r(w_t(r) \Big|_{\mu=m+1} - w_t(r) \Big|_{\mu=m}) dr.$$

Отметим, что параметр $M[\Delta r(+k)]$ также может быть использован при оптимизации локальной выборки.

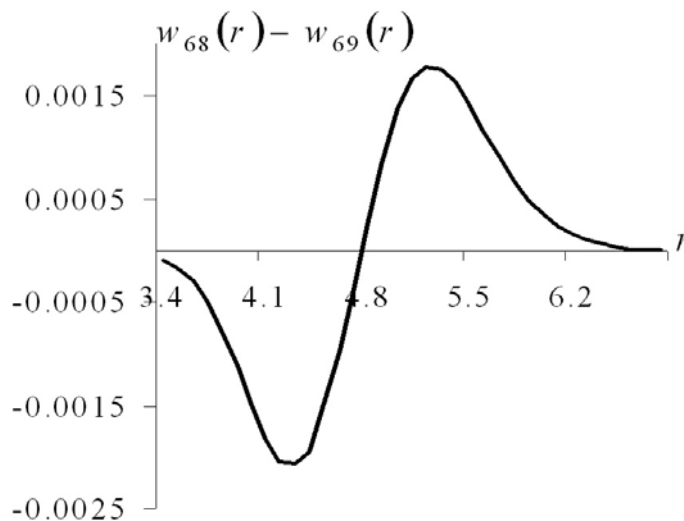


Рис. 3. Зависимость разности распределений вероятностей ЕРО на 68 и 69 итерациях

Вероятность превышения скоростью сходимости заданной величины

Рассмотрим возможность использования в качестве меры скорости сходимости v_r ЕРО вероятности P_k превышения некоторого порогового

значения v_{rk} . Это условие должно выполняться либо на каждой итерации оценивания, либо в заданном диапазоне итераций. Для нахождения доверительной вероятности на текущей итерации необходимо знать распределение $w_t(v_r)$ скорости сходимости. Тогда вероятность того, что скорость сходимости превысит $v_{rп}$ и составит величину

$$P = 1 - \int_{-\infty}^{v_{rk}} w_t(v_r) dv_r.$$

Численное значение v_r можно найти как разность между значением r на текущей итерации и математическим ожиданием ЕРО $M_{t-1}[r]$ на предыдущей итерации:

$$v_r = M_{t-1}[r] - r,$$

где $M_{t-1}[r] = \int_0^{\infty} r w_{t-1}(r) dr$, $w_{t-1}(r)$ – распределение вероятностей ЕРО на $(t-1)$ -й итерации. Тогда задача сводится к нахождению ОЛВ μ , обеспечивающего выполнение условия

$$P = \int_{v_{rп}}^{M_{t-1}[r]} w_t(v_r(\mu)) dv_r > P_k.$$

Для примера на рис. 4 показана зависимость вероятности P превышения скоростью сходимости порогового значения $v_{rk} = 0.21$ от объема локальной выборки μ . Видно, что с ростом μ вероятность P растет, достигая при $\mu = 5$ значения 0.99. Результаты получены для $\mu = 1$, плана локальной выборки и других условий, аналогичных условиям рассмотренным выше примеров.

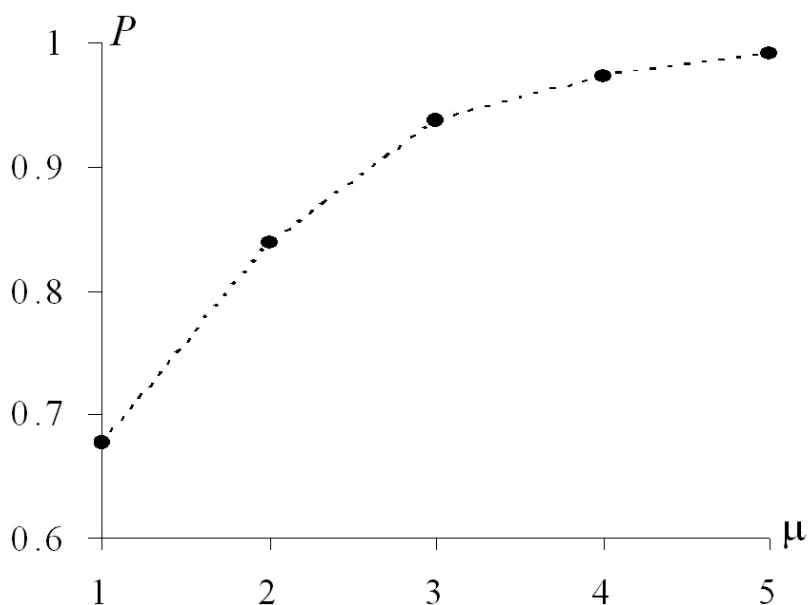


Рис. 4. Зависимость вероятности превышения от ОЛВ

Отметим, что аналогично можно получить выражения и для случая использования условия превышения скоростью сходимости заданного порогового значения оценками параметров деформаций.

Доверительный интервал скорости сходимости

Если в качестве меры скорости сходимости вектора оценок выбрать доверительный интервал при заданной доверительной вероятности, то как численное значение этой меры может быть использовано изменение границ доверительного интервала на $(t + 1)$ -й итерации по сравнению с t -й итерацией

$$\Delta r = r_{Lt} - r_{L(t+1)} + r_{Rt} - r_{R(t+1)}, \quad (3)$$

где индексы «L» и «R» означают соответственно левые и правые границы доверительных интервалов.

Математическое ожидание $M[\Delta r(+k)]$ улучшения оценки при увеличении ОЛВ μ также может быть охарактеризовано границами доверительных интервалов. Так, при увеличении ОЛВ μ на k

$$\Delta r(+k) = r_{Lt} \Big|_{\mu=m} - r_{Lt} \Big|_{\mu=m+k} + r_{Rt} \Big|_{\mu=m} - r_{Rt} \Big|_{\mu=m+k}. \quad (4)$$

Необходимо также отметить, что формулы (3) и (4) справедливы только для ЕРО, поскольку этот параметр не может принимать отрицательных значений, а следовательно $\varepsilon = \hat{r} - r^* = \hat{r}$ всегда положительно. При анализе измерения границ доверительных интервалов параметров МГДИ, которые могут принимать как положительные, так и отрицательные значения (угол поворота, параллельный сдвиг и др.), необходимо учитывать еще знаки рассогласования $\varepsilon = \hat{\alpha} - \alpha^*$ оценки и оптимального значения параметра. Если $\varepsilon > 0$, то формулы (3) и (4) справедливы. Если же $\varepsilon < 0$, то

$$\begin{aligned} \Delta r &= r_{L(t+1)} - r_{Lt} + r_{R(t+1)} - r_{Rt}, \\ \Delta r(+k) &= r_{Lt} \Big|_{\mu=m+k} - r_{Lt} \Big|_{\mu=m} + r_{Rt} \Big|_{\mu=m+k} - r_{Rt} \Big|_{\mu=m}. \end{aligned}$$

Обобщая можно записать

$$\begin{aligned} \Delta r &= (r_{Lt} - r_{L(t+1)} + r_{Rt} - r_{R(t+1)}) \text{sign } \varepsilon_t, \\ \Delta r(+k) &= (r_{Lt} \Big|_{\mu=m} - r_{Lt} \Big|_{\mu=m+k} + r_{Rt} \Big|_{\mu=m} - r_{Rt} \Big|_{\mu=m+k}) \text{sign } \varepsilon_t. \end{aligned}$$

Проведенные исследования показали, что для задачи оценивания деформаций изображений доверительный интервал является менее информативным параметром по сравнению со средним значением и вероятностью превышения порогового значения. Связано это с тем, что вид распределения ЕРО изменяется от итерации к итерации и существенно зависит как от плана локальной выборки, так и от совокупности оцениваемых параметров. Поэтому на смежных итерациях изменение границ ЕРО не всегда характеризует улучшение вектора оценок в целом.

Коэффициент улучшения оценки

В результате итерации псевдоградиентного оценивания (1) оценка $\hat{\alpha}_{it}$ параметра α_i изменяется дискретно. Если $\text{sign}(\varepsilon_{it}) = \text{sign}\Delta\alpha_{i,t+1}$ (где $\varepsilon_{it} = \hat{\alpha}_{it} - \alpha_i^*$), то изменение оценки направлено от оптимального значения α_i^* параметра с вероятностью $\rho_i^-(\bar{\varepsilon}_t)$. При $\Delta\alpha_{it} = 0$ оценка не изменяется с вероятностью $\rho_i^0(\bar{\varepsilon}_t)$. Если $-\text{sign}(\varepsilon_{it}) = \text{sign}\Delta\alpha_{i,t+1}$, то изменение оценки направлено к оптимальному значению с некоторой вероятностью $\rho_i^+(\bar{\varepsilon}_t)$ [10]. Вероятности $\rho_i^+(\bar{\varepsilon}_t)$, $\rho_i^0(\bar{\varepsilon}_t)$ и $\rho_i^-(\bar{\varepsilon}_t)$ зависят и от текущих рассогласований $\bar{\varepsilon}_t$ других оцениваемых параметров. По своему смыслу $\rho_i^+(\bar{\varepsilon}_t)$ – это вероятность того, что направление проекции псевдоградиента на ось параметра α_i совпадает с истинным направлением проекции градиента. Если целевая функция максимизируется и $\varepsilon_{i,t} > 0$, то $\rho_i^+(\bar{\varepsilon}_t)$ – вероятность того, что проекция β_i псевдоградиента на ось параметра α_i будет отрицательной, а $\rho_i^-(\bar{\varepsilon}_t)$ – положительной:

$$\begin{aligned} \rho_i^+(\bar{\varepsilon}_t) &= P\{\beta_i < 0\} = \int_{-\infty}^0 w(\beta_i(Z_t, \hat{\alpha}_{i,t-1})) d\beta_i, \\ \rho_i^-(\bar{\varepsilon}_t) &= P\{\beta_i > 0\} = \int_0^{\infty} w(\beta_i(Z_t, \hat{\alpha}_{i,t-1})) d\beta_i, \end{aligned} \quad (5)$$

где $w(\beta_i(Z_t, \hat{\alpha}_{i,t-1}))$ – распределение вероятностей проекции β_i на ось α_i .

Через вероятности рассмотренных событий можно найти математическое ожидание оценки $\hat{\alpha}_i$ на t -й итерации

$$M[\hat{\alpha}_{i,t}] = \hat{\alpha}_{i,t-1} - \lambda_{i,t} (\rho^+(\bar{\varepsilon}_{t-1}) - \rho^-(\bar{\varepsilon}_{t-1})) \quad (6)$$

Если $\rho^+(\bar{\varepsilon}_{t-1}) > \rho^-(\bar{\varepsilon}_{t-1})$, то оценка улучшится, если же $\rho^+(\bar{\varepsilon}_{t-1}) < \rho^-(\bar{\varepsilon}_{t-1})$ – ухудшится. Величину $\mathfrak{R}_i = \rho_i^+(\bar{\varepsilon}) - \rho_i^-(\bar{\varepsilon})$ назовем коэффициентом улучшения оценки (КУО) [8]. Используя (5), получаем

$$\mathfrak{R}_i = \int_{-\infty}^0 w(\beta_i(Z_t, \hat{\alpha}_{i,t-1})) d\beta_i - \int_0^{\infty} w(\beta_i(Z_t, \hat{\alpha}_{i,t-1})) d\beta_i.$$

Диапазон изменения КУО от -1 до $+1$. При этом значение $+1$ соответствует улучшению математического ожидания оценки $M[\hat{\alpha}_{i,t}]$ на $\lambda_{i,t}$.

В соответствии с (6) свойства КУО определяются свойствами вероятностей $\rho_i^+(\bar{\varepsilon})$ и $\rho_i^-(\bar{\varepsilon})$, которые исследованы в работе [10] и зависят не только от характеристик изображений, но также от шумов, погрешности квантования изображений по яркости и погрешности интерполяции $\mathbf{Z}^{(1)}$. При отсутствии влияния указанных факторов КУО $\mathfrak{R}(\varepsilon)$ монотонно убывает (рис. 5, кривая 1) от 1 до 0 по мере уменьшения коррелированности отсчетов,

попавших в локальную выборку Z_i . При этом $\rho^0(\varepsilon) = 0$, т. к. вероятность полного совпадения яркостей отсчетов в локальной выборке нулевая, кроме ситуации $\varepsilon = 0$, когда $\rho^0(\bar{\varepsilon}) = 1$ и, соответственно, $\mathfrak{R}(\varepsilon) = 0$.

Если отсчеты изображений $Z^{(1)}$ и $Z^{(2)}$ квантованы, то $\rho^0(\varepsilon)$ становится отличной от нуля. В этом случае $\mathfrak{R}(\varepsilon)$ также монотонно убывает, но его максимальное значение меньше 1 на величину $\rho^0(\varepsilon)$ (рис. 5, кривая 2).

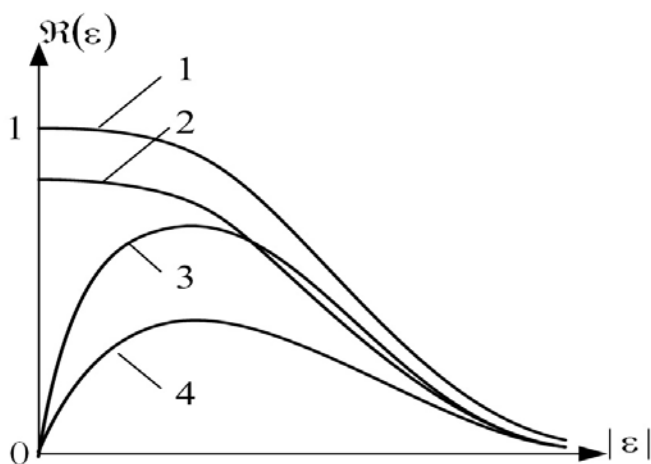


Рис. 5. Зависимость КУО от рассогласования оценки

При наличии шумов и погрешности интерполяции зависимость $\mathfrak{R}(\varepsilon)$ носит иной характер (кривая 3). В этом случае при $\varepsilon \rightarrow 0$ КУО также стремятся к 0. Связано это с тем, что при этом математическое ожидание псевдоградиента близко к нулю, поэтому $\rho_i^-(\bar{\varepsilon})$ и $\rho_i^+(\bar{\varepsilon}) \rightarrow 0.5$ (знак изменения оценки параметра определяется только независимым шумом). При увеличении $|\varepsilon|$ КУО вначале увеличивается, поскольку возрастающая величина математического ожидания псевдоградиента постепенно подавляет влияние шумов. Затем начинает убывать из-за уменьшения коррелированности попавших в выборку отсчетов изображений $\tilde{Z}^{(1)}$ и $Z^{(2)}$, стремясь к 0 при $\varepsilon \rightarrow \infty$. Чем выше интенсивность шумов, тем меньше $\mathfrak{R}(\varepsilon)$ (кривая 4).

Выше были описаны свойства КУО при оценивании одного параметра. Сходный характер зависимостей сохраняется и при оценивании вектора параметров, если оценки этих параметров независимы, например, для проекций параллельного сдвига. Если же оценки зависимы, то поведение КУО может носить сложный характер с несколькими локальными экстремумами.

Заключение

Локальная выборка отсчетов изображений, используемых для нахождения псевдоградиента целевой функции влияет как на характер сходимости оценок, так и на вычислительные затраты. Анализ величин, характеризующих скорость сходимости оценок параметров, показал, что для задачи оценивания

параметров МГДИ наиболее информативными являются математическое ожидание и вероятность превышения некоторого порогового значения. При оценивании одного параметра указанные характеристики непосредственно применимы к его оценке. Если же оценивается совокупность параметров, то для критерия оптимальности необходима единая мера. В качестве такой единой меры предложено использовать распределение вероятностей ЕРО. Показано, что при увеличении объема выборки распределение ЕРО не нормализуется, что объясняется нелинейной зависимостью ЕРО от параметров МГДИ. Для исследования вероятностных свойств ЕРО и влияния на них локальной выборки предложен коэффициент улучшения оценки, позволяющий комплексно характеризовать параметры исследуемых изображения и мешающих шумов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Gonzalez, R. C., Woods, R. E. Digital Image Processing. New Jersey : Prentice Hall, 2002.
2. Цыпкин Я.З. Информационная теория идентификации. – М. : Наука. Физматлит, 1995.
3. Невельсон М. Б. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание / М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский. – М. : Наука, 1972.
4. Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений. – М. : Сов. радио, 1979.
5. Цыпкин Я. З. Достижимая Точность алгоритмов адаптации / Доклады АН СССР, 1974, Е. 218, № 3, с. 532–535.
6. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю. В. Прохоров. – М. : Сов. Энциклопедия, 1988.
7. Ташлинский А. Г. Оценивание параметров пространственных деформаций последовательностей изображений. – Ульяновск : УлГТУ, 2000.
8. Tashlinskii A. G., Dikarina G. V., Minkina G. L. Pseudogradient Optimization in the Estimation of Geometric Interframe Image Deformations // Pattern Recognition and Image Analysis, 2008, Vol. 18, No. 4, pp. 707–712.
9. Грузман И. С., Киричук В. С., Косых В. П. и др. Цифровая обработка изображений в информационных системах. – Новосибирск : НГТУ, 2002.
10. Ташлинский А.Г., Тихонов В.О. Методика анализа погрешности псевдоградиентного измерения параметров многомерных процессов / Известия вузов: Радиоэлектроника, 2001, том 44, № 9, с. 75-80.
11. Самойлов М. Ю. Сходимость оценок при псевдоградиентном оценивании параметров межкадровых деформаций изображений / Информатика, системы искусственного интеллекта и моделирование технических систем: труды международной конференции «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке и технике». – Ульяновск, 2006, Т. 4, с. 261–263.

В. В. Учайкин (г. Ульяновск)

МЕТОД ВАРИАЦИОННОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ В ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА (I)

Применительно к дробным производным распределенного порядка рассматривается задача об определении функционала от искомого решения для заданного оператора по известным решениям задачи для нескольких близких операторов. В основу анализа положен вариационный функционал Швингера и принцип двойственности, сформулированный с помощью прямого и сопряженного (в смысле Лагранжа) операторов обобщенной теории переноса.

1. Вероятностные истоки уравнения переноса

В основе большинства кинетических моделей лежит предположение об экспоненциальном распределении длительности T случайных интервалов времени, разделяющих последовательные мгновенные (нулевой длительности) события:

$$P(T > t) = e^{-\mu t}, \quad t \geq 0.$$

В классических моделях такими событиями являются столкновения частиц (атомов, молекул), в квантовых – переходы между дискретными состояниями. Простейшей вероятностной моделью такого типа является пуассоновский процесс $N(t)$, $t \geq 0$. Каждая реализация такого процесса представляет собой ступенчатую кривую, высота каждой ступеньки которой равна единице. Удобным образом такого процесса является поток мгновенных импульсов, идущих с измерительного прибора (детектора) на пересчетное устройство. *Считающая функция* $N(t)$, представляющая собой показание пересчетного прибора, увеличивается на единицу с приходом каждого нового импульса. Распределение вероятностей случайного числа $N(t)$ событий в промежутке $[0, t)$

$$p_n(t) = P(N(t) = n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{dp_n}{dt} + \mu[p_n(t) - p_{n-1}(t)] = \delta(t)\delta_{n0}.$$

Последний член левой части может быть представлен в виде

$$\mu p_{n-1} = \mu \sum_{k=0}^{\infty} W_{nk} p_k,$$

где

$$W_{nk} = \delta_{n-1,k}$$

– матрица вероятностей перехода (из состояния k в состояние n).

Если пересчетный прибор заменить устройством, измеряющим суммарный заряд $X(t)$, принесенный потоком за время измерения t , то высота ступенек окажется случайной (разные импульсы будут иметь разные амплитуды и нести разные порции заряда, которые могут оказаться даже отрицательными). В этом случае матрица перехода будет иметь более сложный вид. Если пренебречь дискретной структурой переносимого заряда, можно перейти к плотностям распределений:

$$p_n(t) \mapsto f(x,t)dx, \quad W_{nk} \mapsto w(x' \rightarrow x)dx, \quad \delta_{n_0} \mapsto \delta(x - x')dx.$$

В результате приходим к интегро-дифференциальному уравнению, описывающему процесс Колмогорова-Феллера:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + \mu f(x,t) - \mu \int dx' f(x',t)w(x' \rightarrow x) = \delta(t)\delta(x - x_0).$$

Это – по-прежнему скачкообразный процесс блужданий по оси (которую, впрочем, легко заменить 3-мерным, или даже многомерным пространством). Скачки мгновенны, и частица проводит своё время в покое: $f(x,t)dx$ – вероятность того, что в момент времени t частица будет обнаружена в элементе dx .

Разумеется, реальной частице необходимо некоторое время, чтобы перейти из одной точки пространства в другую. В большинстве реальных ситуаций частица и не останавливается в точках взаимодействия со средой, а в течение короткого времени изменяет направление и величину скорости \vec{v} . Пренебрегая этим временем (по сравнению со временем, затрачиваемым на пробег), получаем стандартную схему переноса в модели мгновенных столкновений. Переход к уравнению переноса в этой модели осуществляется расширением фазового пространства

$$(x \mapsto (\vec{r}, \vec{v}), f(x,t)dx \mapsto g(\vec{r}, \vec{v}, t; \vec{r}_0, \vec{v}_0, t_0) d\vec{r} d\vec{v})$$

и дополнением оператора частной производной по времени до полной:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mapsto \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \nabla.$$

В результате приходим к уравнению переноса Больцмана, точнее, к уравнению для функции Грина уравнения Больцмана

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \nabla + \mu \right] g(\vec{r}, \vec{v}, t; \vec{r}_0, \vec{v}_0, t_0) - \mu \int d\vec{v}' g(\vec{r}, \vec{v}', t; \vec{r}_0, \vec{v}_0, t_0) w(\vec{v}' \rightarrow \vec{v}) = \\ = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(\vec{v} - \vec{v}_0) \delta(t - t_0).$$

Умножая обе части этого уравнения на $S(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t_0) d\vec{r}_0 d\vec{v}_0 dt_0$ и интегрируя по всем переменным, получим для фазовой плотности

$$\Phi(\vec{r}, \vec{v}, t) = \iiint g(\vec{r}, \vec{v}, t; \vec{r}_0, \vec{v}_0, t_0) S(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t_0) d\vec{r}_0 d\vec{v}_0 dt_0$$

уравнение

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\nabla + \mu \right] \Phi(\vec{r}, \vec{v}, t) - \mu \int d\vec{v}' \Phi(\vec{r}, \vec{v}', t) w(\vec{v}' \rightarrow \vec{v}) = S(\vec{r}, \vec{v}, t),$$

в котором частный тип источника (точечный мгновенный единичный) заменен источником с произвольной плотностью распределения $S(\vec{r}, \vec{v}, t)$.

На практике редко требуется столь подробная информация $\Phi(\vec{r}, \vec{v}, t)$, которую предоставляет это уравнение. Обычно необходимо знать один или несколько линейных функционалов от этого распределения:

$$J = (D, \Phi) \equiv \int D(x) \Phi(x) dx.$$

Здесь x обозначает теперь совокупность всех независимых переменных (\vec{r}, \vec{v}, t) , $D(x)$ – отклик детектора на присутствие одной частицы в точке x , а $dx = d\vec{r} d\vec{v} dt$. Интегрирование ведется по всей рассматриваемой пространственно-временной области с учетом начальных и граничных условий (подробнее см. в книге [1]). С формальной точки зрения само значение искомой плотности Φ в заданной точке, скажем, x_1 , может рассматриваться как функционал

$$J_1 = (\delta_1, \Phi) = \int \delta(x - x_1) \Phi(x) dx = \Phi(x_1).$$

2. Сопряженное уравнение переноса

Проблема вычисления линейного функционала

$$J = (D, \Phi)$$

от решения линейного уравнения

$$L\Phi = S,$$

как известно, допускает альтернативное представление. Введем оператор Грина G , обратный оператору L , так что решение последнего уравнения запишется в виде

$$\Phi = GS, \quad GS = \int g(x, x_0) S(x_0) dx_0.$$

Подставив его в выражение для функционала, получим

$$J = (D, GS) = (G^+ D, S) = (\Phi^+, S),$$

где G^+ – лагранжево сопряженный к G , то есть, удовлетворяющий условию

$$(G^+ f_2, f_1) = (f_2, G f_1)$$

оператор, а

$$\Phi^+ = G^+ D$$

– сопряженная функция, называемая также ценностью. Смысл последнего термина легко устанавливается подстановкой $S(x) = \delta(x - x_0)$:

$$J_0 = (\Phi^+, \delta_0) = \int \Phi^+(x) \delta(x - x_0) dx = \Phi^+(x_0).$$

Число $\Phi^+(x_0)$ есть средний вклад в показание детектора частицы, помещенной в точку x_0 расширенного фазового пространства, сам же

функционал J представляется взвешенным (с плотностью источника) интегралом этого вклада по всей области, занимаемой источником.

В терминах теории переноса двойственность подхода к решению рассматриваемой задачи может быть сформулирована следующим образом.

Принцип двойственности. *Найти показание детектора с функцией чувствительности D , помещенного в среду с распределением источников S , можно одним из двух следующих способов:*

1) *решить прямое уравнение переноса*

$$L\Phi = S$$

и вычислить функционал от его решения

$$J = (D, \Phi);$$

2) *решить сопряженное уравнение переноса*

$$L^+\Phi^+ = D$$

и вычислить функционал от его решения

$$J = (\Phi^+, S).$$

Очевидно,

$$(\Phi^+, S) = (D, \Phi) = J.$$

Пользуясь определяющим свойством лагранжева сопряжения, имеем:

$$L\Phi = \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\nabla + \mu \right] \Phi(\vec{r}, \vec{v}, t) - \mu \int d\vec{v}' \Phi(\vec{r}, \vec{v}', t) w(\vec{v}' \rightarrow \vec{v}),$$

$$L^+\Phi^+ = \left[-\frac{\partial}{\partial t} - \vec{v}\nabla + \mu \right] \Phi^+(\vec{r}, \vec{v}, t) - \mu \int d\vec{v}' w(\vec{v} \rightarrow \vec{v}') \Phi^+(\vec{r}, \vec{v}', t).$$

Вывод сопряженного уравнения непосредственно из физических соображений можно найти в книге [1]. Стоит отметить, что в отличие от вывода основного уравнения, основанного на понятии вероятности, вывод сопряженного уравнения базируется на понятии математического ожидания.

На первый взгляд, принципиальной разницы между этими операторами не заметно: их структуры подобны. Ситуация меняется в случае, когда правые части этих уравнений имеют разные степени симметрии. Если, например, источник является точечным изотропным, а детектор – точечным направленным (коллимированным), удобнее решать основное уравнение, содержащее меньшее число независимых переменных. В обратном случае (изотропный детектор и направленный источник) предпочтение следует отдать сопряженному уравнению (сферическая симметрия выше цилиндрической). Качественно новая ситуация возникает в случаях, когда доступны решения обоих (прямого и сопряженного) уравнений. Наличие такой информации открывает широкие возможности перед теорией возмущений, вариационными методами и другими средствами современной вычислительной теории [2].

3. Обобщенная теория переноса

Вернемся к основе кинетической теории – пуассоновскому процессу. Дифференциальное уравнение (1) можно привести к интегральному виду

$$p_n(t) = \delta_{n0} \int_t^{\infty} \psi_1(t') dt' + [1 - \delta_{n0}] \int_t^{\infty} p_{n-1}(t-t') \psi_1(t') dt', \quad (1)$$

где $\psi_1(t) = \mu e^{-\mu t}$ – плотность распределения длительности интервала между событиями, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d\psi_1(t)}{dt} + \mu\psi_1(t) = \mu\delta(t).$$

Мы имеем дело здесь с частным случаем *процесса восстановления*. Более общее семейство процессов этого класса под названием *пуассоновский процесс дробного порядка (дробный пуассоновский процесс)* характеризуется плотностью $\psi_\nu(t)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению дробного порядка [3]

$${}_0\partial_t^\nu \psi_\nu(t) + \mu\psi_\nu(t) = \mu\delta(t), \quad 0 < \nu \leq 1,$$

где

$${}_a\partial_t^\nu \psi_n(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{\psi_n(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\nu}$$

– дробная производная Римана-Лиувилля порядка ν . Решение этого уравнения, выражающееся через двухпараметрическую функцию Миттаг-Леффлера

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}$$

соотношением

$$\psi_\nu(t) = \mu t^{\nu-1} E_{\nu,\nu}(-\mu t^\nu), \quad t > 0,$$

играет роль «дробной экспоненты». Как и «настоящая», дробная экспонента – нормированная на единицу, положительная монотонно убывающая функция. Главное отличие ее от «настоящей» – асимптотическое поведение в области малых и больших значений аргумента:

$$\psi_\nu(t) \cong \begin{cases} \frac{\mu^\nu}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1}, & t \rightarrow 0; \\ \frac{\nu\mu^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} t^{-\nu-1}, & t \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Физические причины, приводящие к дробно-экспоненциальному распределению времени между событиями, и, следовательно, длины свободного пробега, рассмотрены в [1].

Таким образом, вместо уравнения (1) получаем

$$p_n(t) = \delta_{n0} \int_t^{\infty} \psi_\nu(t') dt' + [1 - \delta_{n0}] \int_0^t p_{n-1}(t-t') \psi_\nu(t') dt'.$$

Преобразование Лапласа приводит к уравнению

$$\lambda^\nu \hat{p}_n(\lambda) = \mu[\hat{p}_{n-1}(\lambda) - \hat{p}_n(\lambda)] + \lambda^{\nu-1} \delta_{n0}, \quad \hat{p}_{-1}(\lambda) = 0,$$

обращение которого дает дробно-дифференциальное уравнение:

$${}_0\partial_t^\nu p_n(t) + \mu[p_n(t) - p_{n-1}(t)] = \frac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} \delta_{n0}.$$

Уравнение Колмогорова-Феллера в этом случае принимает вид

$${}_0\partial_t^\nu f(x,t) + \mu f(x,t) - \mu \int dx' f(x',t) w(x' \rightarrow x) = \frac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} \delta(x-x_0),$$

а дробный аналог больцмановского уравнения содержит материальную производную ν -го порядка

$$(\partial_t + \vec{v}\nabla)^\nu \Phi(\vec{r}, \vec{v}, t) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t \frac{\Phi(\vec{r} - \vec{v}(t-\tau), \vec{v}, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\nu}:$$

$$[(\partial_t + \vec{v}\nabla)^\nu] \Phi(\vec{r}, \vec{v}, t) + \mu \Phi(\vec{r}, \vec{v}, t) - \mu \int d\vec{v}' \Phi(\vec{r}, \vec{v}', t) w(\vec{v}' \rightarrow \vec{v}) = S(\vec{r}, \vec{v}, t).$$

Заметим, что нижний предел в материальной производной отодвинут до минус бесконечности (до включения источника $\Phi = 0$ везде, поэтому интеграл сходится). Сопряженное уравнение имеет вид

$$[(\partial_t + \vec{v}\nabla)^\nu]^+ \Phi^+(\vec{r}, \vec{v}, t) + \mu \Phi^+(\vec{r}, \vec{v}, t) - \mu \int d\vec{v}' w(\vec{v} \rightarrow \vec{v}') \Phi^+(\vec{r}, \vec{v}', t) = D(\vec{r}, \vec{v}, t),$$

где

$$[(\partial_t + \vec{v}\nabla)^\nu]^+ \Phi^+(\vec{r}, \vec{v}, t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_t^\infty \frac{d\Phi^+(\vec{r} + \vec{v}(\tau-t), \vec{v}, \tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{(\tau-t)^\nu}.$$

В более общей постановке дифференциальный оператор может характеризоваться не единственным значением порядка ν , а набором значений ν_1, \dots, ν_n , который может образовывать даже непрерывное множество, характеризуемое спектральной плотностью $s(\nu)$:

$$D_t^{s(\cdot)} \equiv \int_0^1 (\partial_t + \vec{v}\nabla)^\nu s(\nu) d\nu$$

Как показано в нашей работе [4], спектральная плотность связана с механизмами взаимодействия частей системы. Ниже под операторами L и L^+ мы будем понимать дробно-дифференциальные операторы распределенного типа:

$$L\Phi = D_t^{s(\cdot)} \Phi(\vec{r}, \vec{v}, t) + \mu \Phi(\vec{r}, \vec{v}, t) - \mu \int d\vec{v}' \Phi(\vec{r}, \vec{v}', t) w(\vec{v}' \rightarrow \vec{v}),$$

$$L^+\Phi^+ = [D_t^{s(\cdot)}]^+ \Phi^+(\vec{r}, \vec{v}, t) + \mu \Phi^+(\vec{r}, \vec{v}, t) - \mu \int d\vec{v}' w(\vec{v} \rightarrow \vec{v}') \Phi^+(\vec{r}, \vec{v}', t).$$

4. Метод малых возмущений

Пусть требуется найти функционал
 $J' = (D, \Phi')$

от решения уравнения

$$L'\Phi' = S$$

при условии, что известны решения Φ и Φ^+ прямого и сопряженного уравнений с операторами L и L^+ соответственно и теми же D, S и граничными условиями. Искомый функционал J' (назовем его *возмущенным*) представим в виде суммы *невозмущенного* функционала

$$J = (D, \Phi) = (\Phi^+, S)$$

и *возмущения* $\Delta J = J' - J$, обусловленного возмущением оператора $L \mapsto L' = L + \Delta L$. Аналогичные обозначения введем и для возмущений решений прямого и сопряженного уравнений:

$$\Phi \mapsto \Phi' = \Phi + \Delta\Phi, \quad \Phi^+ \mapsto \Phi'^+ = \Phi^+ + \Delta\Phi^+.$$

Записав сопряженное уравнение для возмущенной функции

$$(L^+ + \Delta L^+)(\Phi^+ + \Delta\Phi^+) = D,$$

раскрыв скобки и вычтя из него сопряженное уравнение для невозмущенной функции, получим уравнение для возмущения ценности

$$L^+\Delta\Phi^+ = -\Delta L^+\Phi^+ - \Delta L^+\Delta\Phi^+,$$

для решения которого необходимо знать исходную (невозмущенную) ценность Φ^+ . В линейном приближении вторым справа членом можно пренебречь:

$$L^+\Delta\Phi^+ = -\Delta L^+\Phi^+.$$

Формулу эту легко привести к виду, известному под названием *формулы теории малых возмущений*. Применяв к обеим ее частям сопряженный оператор Грина и воспользовавшись свойством сопряженных операторов, получим:

$$\Delta J = -(\Delta L^+\Phi^+, \Phi) = -(\Phi^+, \Delta L\Phi). \quad (2)$$

Таким образом, возмущение ΔJ выражается через две функции Φ и Φ^+ , характеризующие перенос частиц в невозмущенной среде. Очевидно, формула является приближенной, справедливой в области применимости линейной теории возмущений.

5. Вариационный функционал швингера

Выход за пределы линейного приближения может быть осуществлен различными способами. Наиболее известный из них – теория возмущений высших порядков – подробно описан во многих работах (см., например, [1]).

Здесь мы изложим другой, более эффективный метод, основанный на использовании вариационных функционалов[5-7].

Представление вычисляемой характеристики процесса (показания детектора), основанное на использовании только прямого уравнения,

$$J = (D, \Phi), \quad L \Phi = S,$$

в случае неточного вычисления Φ приводит к погрешности ΔJ в определении J , имеющей тот же порядок, что и погрешность $\Delta \Phi$:

$$\Delta J = (D, \Delta \Phi).$$

Аналогичным недостатком обладает и сопряженный способ представления:

$$J = (\Phi^+, D), \quad L^+ \Phi^+ = S.$$

Если, однако, в нашем распоряжении имеются решения обоих – прямого и сопряженного уравнений, то можно найти функционал $I(\Phi^+, \Phi)$, обладающий следующими свойствами:

1) на функциях Φ и Φ^+ , являющихся точными решениями соответствующих уравнений, он дает точное значение величины J ;

2) при малых погрешностях этих функций его значение отличается от точного на величину высшего порядка малости.

Другими словами, на точном решении задачи (задаваемом теперь парой функций Φ и Φ^+) функционал $I(\Phi^+, \Phi)$ должен быть стационарен: его вариационные производные первого порядка должны обращаться в нуль:

$$I(\Phi^+, \Phi) = J, \quad \delta I / \delta \Phi(x) = 0, \quad \delta I / \delta \Phi^+(x) = 0.$$

Простейшим примером такого функционала является билинейный функционал

$$I(\Phi^+, \Phi) = (D, \Phi) + (\Phi^+, S) - (\Phi^+, L\Phi). \quad (3)$$

Действительно,

$$I(\Phi^+, \Phi) = J,$$

$$\delta I / \delta \Phi(x) = D(x) - L^+ \Phi^+(x) = 0,$$

$$\delta I / \delta \Phi^+(x) = S(x) - L\Phi(x) = 0.$$

Вторые производные имеют вид

$$\delta^2 I / \delta \Phi(x_1) \delta \Phi(x_2) = \delta^2 I / \delta \Phi^+(x_1) \delta \Phi^+(x_2) = 0,$$

и

$$\delta^2 I / \delta \Phi(x_1) \delta \Phi^+(x_2) = -L \delta(x_1 - x_2) = -L^+ \delta(x_1 - x_2),$$

так что погрешность искомой величины J в случае представления ее стационарным функционалом (7.1) оценивается формулой

$$\Delta J = -(\Delta \Phi^+, L\Delta \Phi) = -(L^+ \Delta \Phi^+, \Delta \Phi).$$

Недостаток функционала (3) заключается в его зависимости от нормировки пробных функций Φ и Φ^+ , тогда как в ряде случаев проще

предсказать относительное изменение искомой функции в фазовом пространстве, чем ее абсолютные значения. В этом случае функционал J можно модифицировать следующим образом. Пусть $\Phi' = \alpha\Phi$, $\Phi^{+'} = \alpha^+\Phi^+$, отличающиеся от правильно нормированных на постоянные α и α^+ . Тогда

$$I(\alpha^+\Phi^+, \alpha\Phi) = \alpha(D, \Phi) + \alpha^+(\Phi^+, S) - \alpha^+\alpha(\Phi^+, L\Phi), \quad (4)$$

и из условий стационарности относительно α и α^+

$$\begin{aligned} \partial I / \partial \alpha &= (D, \Phi) - \alpha^+(\Phi^+, L\Phi) = 0, \\ \partial I / \partial \alpha^+ &= (\Phi^+, S) - \alpha(\Phi^+, L\Phi) = 0, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \alpha^+ &= (D, \Phi) / (\Phi^+, L\Phi), \\ \alpha &= (\Phi^+, S) / (\Phi^+, L\Phi). \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения коэффициентов α и α^+ в (4), приходим к другому вариационному функционалу

$$I_S(\Phi^+, \Phi) = \frac{(D, \Phi)(\Phi^+, S)}{(\Phi^+, L\Phi)}, \quad (5)$$

известному как *функционал Швингера*. Оценка погрешности вычисления J с использованием этого функционала имеет вид:

$$\Delta I_S = \frac{(D, \Delta\Phi)(\Delta\Phi^+, S) - (\Phi^+, L\Delta\Phi)}{(\Phi^+, L\Phi)}. \quad (6)$$

Предположим, что единственное отличие пробных функций от точных заключается в нормировке, тогда (5) даст точное значение J (погрешность (6) равна нулю).

6. Вариационный метод интерполирования

Представим себе теперь, что в интересующей нас области «операторного пространства», имеются два или более опорных операторов L_i , для которых известны решения основной (Φ_i) и сопряженной (Φ_i^+) задач, следовательно, известны $J_i = J(L_i)$. Нашей целью является отыскание $J(L)$ по имеющейся информации. Другими словами, необходимо интерполировать функционал по нескольким известным его значениям (вместе с Φ и Φ^+) в указанных «точках» L_i . Практическая важность такой постановки задачи очевидна: во-первых, физические свойства среды (например, атмосферы) могут существенно меняться, и вместо набора всех возможных вариантов достаточно провести расчеты для двух-трех типичных, а для остальных пользоваться указанным методом.

Реализовать идею интерполирования удобно на основе вариационных функционалов. Представим Φ и Φ^+ , соответствующие оператору L , в виде линейных комбинаций опорных решений

$$\Phi = \sum_i c_i \Phi_i, \quad \Phi^+ = \sum_i c_i^+ \Phi_i^+. \quad (7)$$

В предыдущем пункте было показано, что в случае $\Phi = \alpha \Phi_1$ и $\Phi^+ = \alpha^+ \Phi_1^+$ стационарное значение функционала (3) совпадает с таковым для функционала Швингера. Аналогичный результат получается и для представления (7). Подставим (7) в (3):

$$I = \sum_j c_j (D, \Phi_j) + \sum_i c_i^+ (\Phi_i^+, S) - \sum_{ij} c_i^+ c_j (\Phi_i^+, L \Phi_j) = \sum_j c_j J_j + \sum_i c_i^+ J_i - \sum_{ij} L_{ij} c_i^+ c_j. \quad (8)$$

Здесь введены обозначения для матричных элементов оператора L и опорных значений функционала J :

$$L_{ij} = (\Phi_i^+, L \Phi_j), \quad J_i = (D, \Phi_i) = (\Phi_i^+, S).$$

Потребуем стационарности функционала (8) относительно переменных c_k и c_k^+ :

$$\begin{aligned} \partial I / \partial c_k &= J_k - \sum_i L_{ik} c_i^+ = 0, \\ \partial I / \partial c_k^+ &= J_k - \sum_j L_{kj} c_j = 0. \end{aligned}$$

Данные уравнения имеют единственное решение в том случае, когда определитель матрицы элементов L_{ij} отличен от нуля. Обозначим L_{ij}^{-1} элементы матрицы обратной L_{ij} , тогда коэффициенты c_j и c_i^+ могут быть вычислены по формулам

$$c_i^+ = \sum_k L_{ik}^{-1} J_k, \quad c_j = \sum_k L_{kj}^{-1} J_k. \quad (9)$$

Покажем, что вычисленные таким образом коэффициенты c_j и c_i^+ удовлетворяют условию стационарности также и функционала Швингера. Подставим (7) в (5) и воспользуемся условием стационарности:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sum_{ij} c_i^+ c_j J_i J_j}{\sum_{ij} c_i^+ c_j J_{ij}}, \quad (10) \\ \sum_i c_i^+ J_i J_k \sum_{im} L_{im} c_m^+ c_m - \sum_m L_{mk} c_m^+ \sum_{ji} c_i^+ c_j J_i J_j &= 0, \\ \sum_j c_j J_j J_k \sum_{im} L_{im} c_i^+ c_m - \sum_m L_{km} c_m \sum_{ji} c_i^+ c_j J_i J_j &= 0. \end{aligned}$$

В случае отличного от нуля J данные уравнения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{ij} c_i^+ c_j [J_k L_{ij} - J_j L_{ik}] &= 0, \\ \sum_{ij} c_i^+ c_j [J_k L_{ij} - J_i L_{kj}] &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Полученные уравнения являются квадратичными формами относительно коэффициентов c_j и c_i^+ . Существует бесконечное множество решений данных систем уравнений, при этом значения функционала (10) будут оставаться одинаковыми. Это связано с тем, что, как было доказано в предыдущем параграфе, функционал (10) не зависит от нормировки коэффициентов c_i^+ и c_j . Таким образом, для нахождения значения функционала по формуле (10) достаточно найти одно из этих решений. Подстановкой (9) в (11)

$$\begin{aligned} \sum_i c_i^+ \sum_{jm} L_m^{-1} J_m J_k L_{ij} - \sum_j c_j \sum_{im} L_i^{-1} J_m J_j L_{ik} &= \sum_i c_i^+ J_i J_k - \sum_j c_j J_j J_k = \\ &= J_k \left[\sum_{ij} L_i^{-1} J_i J_j - \sum_{ij} L_i^{-1} J_i J_j \right] = 0, \end{aligned}$$

убеждаемся в том, что выбор коэффициентов c_j и c_i^+ в виде (9) приводит к совпадению численных значений билинейного функционала и дробно-линейного функционала Швингера, которые могут быть вычислены по одной из следующих формул

$$J(L) \approx \sum_i c_i^+ J_i = \sum_i c_j J_j = \sum_{i,j} L_{ij} c_i^+ c_j.$$

В [6] показано, что в окрестности каждого из L_i эта формула дает тот же результат, что и теория малых возмущений, так что расширение области применимости метода вариационного интерполирования по сравнению с теорией малых возмущений очевидно.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-01-00517).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кольчужкин А. М., Учайкин В. В. Введение в теорию прохождения частиц через вещество. – М. : Атомиздат, 1978.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М. : Наука, 1977.
3. Учайкин В. В. Метод дробных производных. – Ульяновск, Изд-во «Артишок», 2008.
4. Uchaikin V. V. Relaxation processes and fractional differential equations // Int. J. Theor. Phys. **42**, 121-134 (2003).
5. Льюинс Дж. Ценность. Сопряженная функция. – М.: Атомиздат, 1972.
6. Учайкин В. В. Вариационный метод интерполирования ядерно-технических расчётов // Атомная энергия **67**, 54-55 (1989).
7. Учайкин В. В., Литвинов В. А. Вариационный метод интерполирования в теории переноса излучений // Оптика атмосферы **2**, 36-40 (1989).

Т. Е. Бадюкина (г. Саранск), *Б. В. Логинов* (г. Ульяновск)

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНЫ-ПОЛОСЫ С ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННЫМИ И ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КРАЯМИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА, СЖИМАЕМОЙ ИЛИ РАСТЯГИВАЕМОЙ ВНЕШНИМИ КРАЕВЫМИ УСИЛИЯМИ.

Рассмотрена краевая задача для нелинейного обыкновенного интегро-дифференциального уравнения с двумя бифуркационными (спектральными) параметрами, описывающая изгиб тонкой гибкой пластины-полосы в сверхзвуковом потоке газа вдоль оси Ox , сжимаемой или растягиваемой внешними краевыми условиями на границе $x=0$ и $x=1$. Строится функция Грина для линеаризованной задачи для двух случаев граничных условий А) $w(0)=0, w'(0)=0, w(1)=0, w'(1)=0$ и С) $w(0)=0, w''(0)=0, w(1)=0, w''(1)=0$. В известном справочнике [1] отмечено, что функции Грина для задач аэроупругости ранее не строились. В работе [2] нами определена функция Грина для граничных условий $w''(0)=0, w'''(0)=0, w(1)=0, w'(1)=0$ и $w(0)=0, w'(0)=0, w''(1)=0, w'''(1)=0$. Возникающие технические трудности преодолены с помощью выражения бифуркационных кривых через корни соответствующих характеристических уравнений. Построение функций Грина доказывает фредгольмовость соответствующих спектральных задач.

Полученные результаты поддержаны грантами РФФИ - Академия Наук Румынии № 07-01-91680-RAa и РФФИ 09-01-97005-р_поволжье_a.

1. Введение. Задача об изгибе тонкой гибкой пластины-полосы в сверхзвуковом потоке газа сжимаемой или растягиваемой вдоль оси Ox внешними краевыми условиями описывается уравнением:

$$\chi^2 \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} \right) - T \frac{d^2 w}{dx^2} = kK \left(\frac{dw}{dx}, M, \kappa \right) + \theta w'' \int_0^1 \left[(1+w'^2)^{1/2} - 1 \right] dx, \quad (1)$$

где $K(w'_x, M, \kappa) = \left[1 - \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M w'_x \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} \right]$ для одностороннего обтекания и

$K(w'_x, M, \kappa) = \left[\left(1 - \frac{\kappa-1}{2} M w'_x \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} - \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M w'_x \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} \right]$ для двустороннего

обтекания пластины сверхзвуковым потоком газа вдоль оси Ox . Здесь $w=w(x)$

– прогиб пластины полосы, $0 \leq x_1 \leq d$, $-\infty < y_1 < \infty$, $0 < x < 1$, $x = \frac{x_1}{d}$ –

прямоугольные координаты, $\chi^2 = \frac{h^2}{12(1-\mu^2)d^2}$, $T = \frac{qd}{Eh}$ и $k = \frac{p_0 d}{Eh}$,

d – ширина пластины-полосы, h – её толщина, E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона, $q < 0 (q > 0)$ – сжимающее (растягивающее) усилие, M – число Маха, p_0 – давление и κ – показатель политропы.

Линеаризованное уравнение для описанной краевой задачи аэроупругости

$$\chi^2 w_{x^4}^{(4)} - T w_{x^2}^{(2)} + \sigma w'_x = 0 \quad (2)$$

и граничные условия А) и С) являются двухпараметрическими спектральными задачами, параметр T характеризует сжимающее $T < 0$ (растягивающее $T > 0$) усилие, параметр $\sigma = 1(2)k\chi M$ выражается через число Маха. Множитель 1 (соответственно 2) в параметре σ отвечает одностороннему (двустороннему) обтеканию пластины потоком газа. Граничные условия А) и С) являются симметричными.

При исследовании данных двухточечных граничных задач возникают следующие возможности: 1) $4T^3 - 27\sigma^2\chi^2 > 0$, 2) $4T^3 - 27\sigma^2\chi^2 = 0$, 3) $4T^3 - 27\sigma^2\chi^2 < 0$, где $\sigma \geq 0, T < 0$ – сжимающее усилие, $T > 0$ – растягивающее усилие, $T = 0$ отвечает только обтеканию.

В первом случае необходимо $T > 0$. Тогда характеристическое уравнение

$$f_0(\lambda) = \chi^2 \lambda^4 - T \lambda^2 + \sigma \lambda = 0 \quad (3)$$

имеет один отрицательный корень $-\alpha$ и два положительных корня $\beta_2 > \beta_1 > 0$ ($\alpha = \beta_1 + \beta_2$). Для $4T^3 - 27\sigma^2\chi^2 = 0$ T опять положительно, а (3) имеет два равных корня $\beta_2 = \beta_1 = \beta > 0$ и один отрицательный $-\alpha$. Между данными корнями $\beta_2 > \beta_1$ и параметрами σ и T существует следующая взаимосвязь, которая вытекает из формул Виета

$$\frac{\sigma}{T} < \beta_1, \beta_2 < \frac{3\sigma}{2T}, \beta_2 = \beta_1 + \frac{1}{2\chi\beta_1^{1/2}} \left[\sqrt{T\beta_1 + 3T} - 3\chi\beta_1^{3/2} \right].$$

В третьем случае возможно как растяжение ($T > 0$), так и сжатие ($T < 0$) пластины; корнями (2) являются $\gamma \pm \delta i (\gamma, \delta > 0)$ и $-\alpha < 0 (\alpha = 2\gamma)$. Здесь для удобства вычислений введены следующие обозначения $\delta = \mu$,

$$u = \sqrt{3 - \frac{T}{\gamma^2 \chi^2}}, \sigma = 2\gamma \chi^2 (\gamma^2 + \delta^2) = 2\gamma^3 \chi^2 (1 + u^2).$$

Целью работы является построение функций Грина для уравнения (2) с граничными условиями А) и С) методами монографии [3]. Используются результаты и обозначения работ [4] и [5], где вычислена асимптотика

разветвляющихся решений нелинейного уравнения (1) в окрестностях точек бифуркации методами теории ветвления решений нелинейных уравнений [6] для некоторых случаев закрепления краев.

2. Построение функции Грина. При $4T^3 - 27\sigma^2\chi^2 > 0$ определитель граничных условий имеет вид:

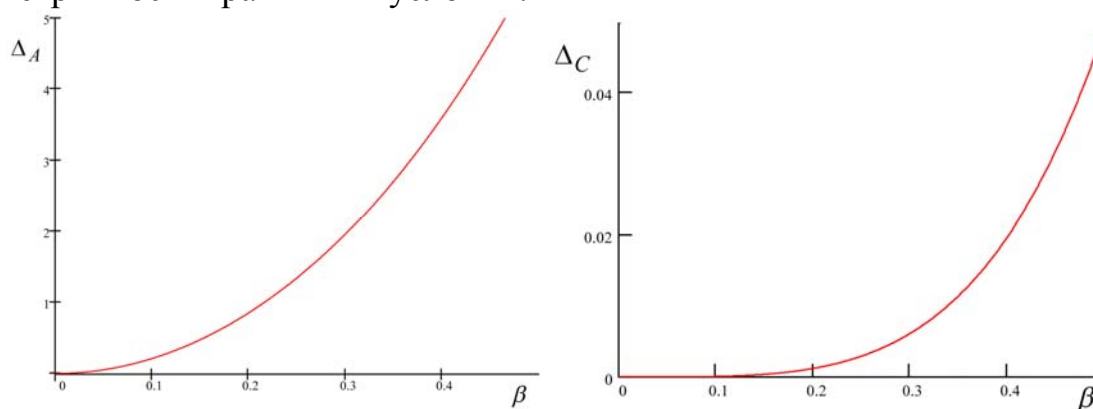
$$\Delta_A = \beta_2^3(2\beta_1 + \beta_2)\cosh(\beta_2) - \beta_1^3(\beta_1 + 2\beta_2)\cosh(\beta_1) - (\beta_2 - \beta_1)(\beta_1 + \beta_2)^3 \cosh(\beta_1 + \beta_2),$$

$$\Delta_C = \beta_1(\beta_1 + 2\beta_2)\cosh(\beta_1) - \beta_2(2\beta_1 + \beta_2)\cosh(\beta_2) + (\beta_2^2 - \beta_1^2)\cosh(\beta_1 + \beta_2).$$

Аналитически доказано, что для случаев 1) и 2) обоих граничных условий дополнительное условие $T = 0$ не приводит к изгибу пластины.

Более просто проверяется случай $4T^3 - 27\sigma^2\chi^2 = 0$, когда $\Delta_A = 16\cosh(2\beta) - 16\cosh(\beta) - 3\beta\sinh(\beta)$ и $\Delta_C = 2\cosh(2\beta) - 2\cosh(\beta) - 3\beta\sinh(\beta)$ (см. Рис.1).

Отсутствие дивергенции для случая, когда $4T^3 - 27\sigma^2\chi^2 > 0$ доказывается разложением в ряды соответствующих определителей систем граничных условий. Это подтверждает обоснование из механики: симметричность граничных условий.



а) График решений $\Delta_A = 0$

б) График решений $\Delta_C = 0$

Рис. 1. $4T^3 - 27\sigma^2\chi^2 = 0$.

Рассмотрим случай, когда $4T^3 - 27\sigma^2\chi^2 < 0$. Отметим, что значения $0 < u < \sqrt{3}$ отвечает растяжению, а значение $u > \sqrt{3}$ – сжатию пластины. Из соображений механики, дивергенция отсутствует при $0 < u < \sqrt{3}$. Случай $u > \sqrt{3}$ будет рассмотрен далее. Бифуркационные кривые определяются равенствами:

$$\Delta_A = (3 - 6u^2 - u^4)\sinh(\gamma)\sin(\gamma u) - 8u(\cosh(2\gamma) - \cosh(\gamma)\cos(\gamma u)) = 0,$$

$$\Delta_C = 2u\cosh(2\gamma) - 2u\cosh(\gamma)\cos(\gamma u) - (u^2 - 3)\sinh(\gamma)\sin(\gamma u) = 0 \text{ (см. Рис. 2 и 3).}$$

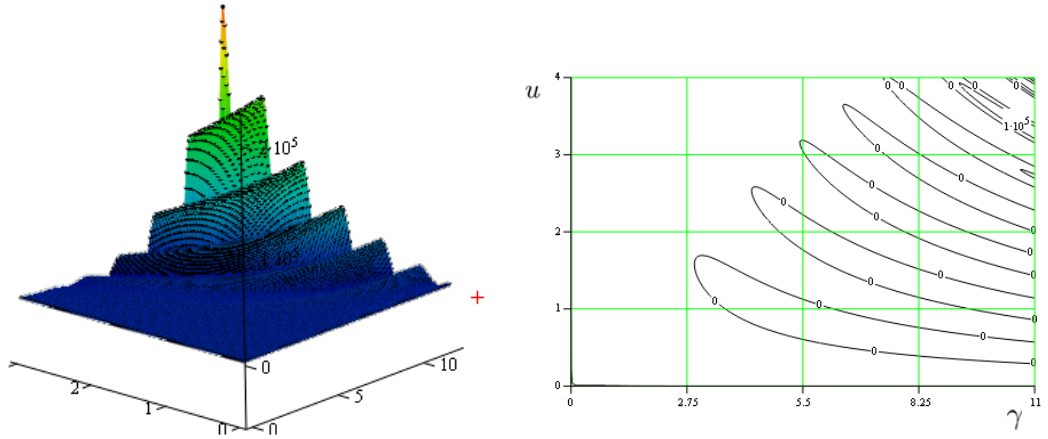


Рис. 2. $4T^3 - 27\sigma^2 \chi^2 < 0$ (а) Рельеф Δ_A (б)График решений $\Delta_A = 0$

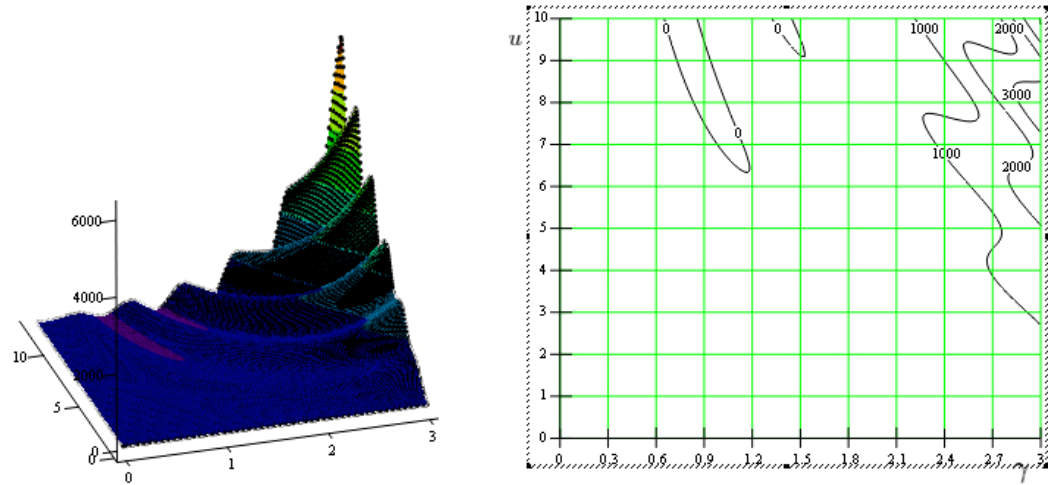


Рис. 3. $4T^3 - 27\sigma^2 \chi^2 < 0$ (а) Рельеф Δ_c (б)График решений $\Delta_c = 0$

Опуская промежуточные вычисления по схеме монографии [3] выпишем функции Грина для случая $4T^3 - 27\sigma^2 \chi^2 < 0$. Функция Грина при граничных условиях А имеет вид:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} c_1 e^{-\alpha x} + c_2 e^{\gamma x} \cos \delta x + c_3 e^{\gamma x} \sin \delta x + c_4, & 0 \leq x < \xi \\ d_1 e^{-\alpha x} + d_2 e^{\gamma x} \cos \delta x + d_3 e^{\gamma x} \sin \delta x + d_4, & \xi < x \leq 1 \end{cases}, \quad (4)$$

где

$$c_1 = \frac{\gamma^4 (1 + u^2)}{2\gamma^3 \chi^2 u (1 + u^2) (9 + u^2) \Delta_A} [4ue^{2\gamma - \gamma\xi} ((3 + u^2) \sin(\delta\xi) - 2u \cos(\delta\xi)) - u(1 + u^2) (9 + u^2) \sin(\delta) e^\gamma - 8ue^{-2\gamma(1-\xi)} + 4ue^{\gamma(1-\xi)} (2u \cos \delta (1 - \xi) + (3 + u^2) \sin \delta (1 - \xi)) + ue^{-\gamma + 2\gamma\xi} ((u^4 + 6u^2 - 3) \sin \delta + 8u \cos \delta)],$$

$$c_2 = \frac{4\gamma^4 u}{2\gamma^3 \chi^2 u (1 + u^2) (9 + u^2) \Delta_A} [(1 + u^2) ((3 + u^2) \sin \delta - 2u \cos \delta) e^{-2\gamma(1-\xi) + \gamma} - 4((3 - u^2) \sin(\delta\xi) + 4u \cos(\delta\xi)) e^{\gamma(1-\xi) + \gamma} + (9 + u^2) (-2ue^{-2\gamma} +$$

$$\begin{aligned}
& + e^\gamma ((1-u^2) \sin \delta + 2u \cos \delta)) + (1+u^2)(2ue^{-2\gamma(1-\zeta)} - e^{\gamma(1-\zeta)} (2u \cos \delta(1-\zeta) + \\
& + (3+u^2) \sin \delta(1-\zeta))) + (9+u^2)(2u \cos \delta(1-\zeta) - (1-u^2) \sin \delta(1-\zeta))e^{\gamma(1-\zeta)-2\gamma}], \\
c_3 = & \frac{2\gamma^4}{2\gamma^3 \chi^2 u(1+u^2)(9+u^2)\Delta_A} [-(1-u^2)(9+u^2)(2u \cos \delta(1-\zeta) + (1+u^2) \sin \delta(1-\zeta)) - \\
& - 2u(1+u^2)((3+u^2) \cos \delta + 2u \sin \delta)e^{-2\gamma(1-\zeta)+\gamma} + 8u((3-u^2) \cos(\delta\zeta) - \\
& - 4u \sin(\delta\zeta))e^{\gamma(1-\zeta)+\gamma} - 2u(9+u^2)(e^\gamma ((1-u^2) \cos \delta - 2u \sin \delta) - (1-u^2)e^{-2\gamma}) + \\
& + (1+u^2)(3+u^2)(2ue^{-2\gamma(1-\zeta)} - e^{\gamma(1-\zeta)} (2u \cos \delta(1-\zeta) + (3+u^2) \sin \delta(1-\zeta)))], \\
c_4 = & \frac{\gamma^4 u(9+u^2)}{2\gamma^3 \chi^2 u(1+u^2)(9+u^2)\Delta_A} [e^\gamma ((u^4 + 6u^2 - 3) \sin \delta - 8u \cos \delta) + 8ue^{-2\gamma} - \\
& - (1+u^2)^2 \sin \delta \cdot e^{-2\gamma(1-\zeta)+\gamma} + 4((1-u^2) \sin \delta(1-\zeta) - 2u \cos \delta(1-\zeta))e^{\gamma(1-\zeta)-2\gamma} +, \\
& + 4(2u \cos \delta\zeta) + (1+u^2) \sin \delta\zeta)e^{\gamma(1-\zeta)+\gamma}].
\end{aligned}$$

СООТВЕТСТВЕННО

$$\begin{aligned}
d_1 = & \frac{\gamma^4 (1+u^2)}{2\gamma^3 \chi^2 u(1+u^2)(9+u^2)\Delta_A} [4ue^{2\gamma-\gamma\zeta} ((3+u^2) \sin(\delta\zeta) - 2u \cos(\delta\zeta)) - \\
& - u(1+u^2)(9+u^2) \sin(\delta)e^\gamma - 8ue^{-2\gamma(1-\zeta)} + 4ue^{\gamma(1-\zeta)} (2u \cos \delta(1-\zeta) + \\
& + (3+u^2) \sin \delta(1-\zeta)) + ue^{-\gamma+2\gamma\zeta} ((u^4 + 6u^2 - 3) \sin \delta + 8u \cos \delta) - \\
& - \frac{\Delta_A}{(1+u^2)\gamma^4} u(1+u^2)e^{2\gamma\zeta}], \\
d_2 = & \frac{4\gamma^4 u}{2\gamma^3 \chi^2 u(1+u^2)(9+u^2)\Delta_A} [(1+u^2)((3+u^2) \sin \delta - 2u \cos \delta)e^{-2\gamma(1-\zeta)+\gamma} - \\
& - 4((3-u^2) \sin(\delta\zeta) + 4u \cos(\delta\zeta))e^{\gamma(1-\zeta)+\gamma} + (9+u^2)(-2ue^{-2\gamma} + \\
& + e^\gamma ((1-u^2) \sin \delta + 2u \cos \delta)) + (1+u^2)(2ue^{-2\gamma(1-\zeta)} - e^{\gamma(1-\zeta)} (2u \cos \delta(1-\zeta) + \\
& + (3+u^2) \sin \delta(1-\zeta))) + (9+u^2)(2u \cos \delta(1-\zeta) - (1-u^2) \sin \delta(1-\zeta))e^{\gamma(1-\zeta)-2\gamma} - \\
& - \frac{2\Delta_A}{\gamma^4 u} e^{-\gamma\zeta} ((3-u^2) \sin(\delta\zeta) + 4u \cos(\delta\zeta))], \\
d_3 = & \frac{2\gamma^4}{2\gamma^3 \chi^2 u(1+u^2)(9+u^2)\Delta_A} [-(1-u^2)(9+u^2)(2u \cos \delta(1-\zeta) + (1+u^2) \sin \delta(1-\zeta)) - \\
& - 2u(1+u^2)((3+u^2) \cos \delta + 2u \sin \delta)e^{-2\gamma(1-\zeta)+\gamma} + 8u((3-u^2) \cos(\delta\zeta) - \\
& - 4u \sin(\delta\zeta))e^{\gamma(1-\zeta)+\gamma} - 2u(9+u^2)(e^\gamma ((1-u^2) \cos \delta - 2u \sin \delta) - (1-u^2)e^{-2\gamma}) + \\
& + (1+u^2)(3+u^2)(2ue^{-2\gamma(1-\zeta)} - e^{\gamma(1-\zeta)} (2u \cos \delta(1-\zeta) + (3+u^2) \sin \delta(1-\zeta))) - \\
& - \frac{2\Delta_A}{\gamma^4} e^{-\gamma\zeta} (4u \sin(\delta\zeta) - (3-u^2) \cos(\delta\zeta))],
\end{aligned}$$

$$d_4 = \frac{\gamma^4 u(9+u^2)}{2\gamma^3 \chi^2 u(1+u^2)(9+u^2)\Delta_A} [e^\gamma ((u^4 + 6u^2 - 3)\sin\delta - 8u\cos\delta) + 8ue^{-2\gamma} - (1+u^2)^2 \sin\delta \cdot e^{-2\gamma(1-\zeta)+\gamma} + 4((1-u^2)\sin\delta(1-\zeta) - 2u\cos\delta(1-\zeta))e^{\gamma(1-\zeta)-2\gamma} + 4(2u\cos(\delta\zeta) + (1+u^2)\sin(\delta\zeta))e^{\gamma(1-\zeta)+\gamma} + \frac{\Delta_A}{\gamma^4}].$$

Для граничных условий С функция Грина записывается аналогично в виде (4) с соответствующими коэффициентами:

$$c_1 = \frac{\gamma^2(1+u^2)}{2\gamma^3 \chi^2 u(1+u^2)(9+u^2)\Delta_C} [ue^{-\gamma+2\gamma\zeta} ((3+u^2)\sin\delta - 2u\cos\delta) + 2u^2e^{-2\gamma(1-\zeta)} + 2u(3\sin(\delta\zeta) + u\cos(\delta\zeta))e^{2\gamma-\gamma\zeta} - u(9+u^2)\sin\delta e^\gamma - 2ue^{\gamma(1-\zeta)}(u\cos\delta(1-\zeta) - 2\sin\delta(1-\zeta))],$$

$$c_2 = \frac{2\gamma^2 u}{2\gamma^3 \chi^2 u(1+u^2)(9+u^2)\Delta_C} [(1+u^2)(2\sin\delta + u\cos\delta)e^{-\gamma+2\gamma\zeta} + 2((3-u^2)\sin(\delta\zeta) + 4u\cos(\delta\zeta))e^{2\gamma-\gamma\zeta} - (9+u^2)(\sin\delta + u\cos\delta)e^\gamma + (9+u^2)(\sin\delta(1-\zeta) - u\cos\delta(1-\zeta))e^{-\lambda(1-\zeta)} - u(1+u^2)e^{-2\gamma(1-\zeta)} + (1+u^2)(u\cos\delta(1-\zeta) - 3\sin\delta(1-\zeta))e^{\gamma(1-\zeta)} + u(9+u^2)e^{-2\gamma}],$$

$$c_3 = \frac{2\gamma^2}{2\gamma^3 \chi^2 u(1+u^2)(9+u^2)\Delta_C} [u(1+u^2)(u\sin\delta - 2\cos\delta)e^{-\gamma+2\gamma\zeta} + (9+u^2)(u\cos\delta(1-\zeta) - \sin\delta(1-\zeta))e^{-\gamma-\gamma\zeta} + u(9+u^2)(\cos\delta - u\sin\delta)e^\gamma + 2u(4u\sin(\delta\zeta) + (3+u^2)\cos(\delta\zeta))e^{2\gamma-\gamma\zeta} - u(9+u^2)e^{-2\gamma} + 3u(1+u^2)e^{-2\gamma(1-\zeta)} - 3(1+u^2)(u\cos\delta(1-\zeta) - 2\sin\delta(1-\zeta))e^{\gamma(1-\zeta)}],$$

$$c_4 = \frac{\gamma^2}{2\gamma^3 \chi^2 u(1+u^2)(9+u^2)\Delta_C} [2(9+u^2)(u\cos\delta(1-\zeta) - \sin\delta(1-\zeta))e^{-\gamma-\gamma\zeta} - (1+u^2)(9+u^2)\sin\delta e^{-\gamma+2\gamma\zeta} - 2(9+u^2)(\sin(\delta\zeta) + u\cos(\delta\zeta))e^{2\gamma-\gamma\zeta} - 2u(9+u^2)e^{-2\gamma} + (9+u^2)(2u\cos\delta + (3+u^2)\sin\delta)e^\gamma],$$

$$d_1 = \frac{\gamma^2(1+u^2)}{2\gamma^3 \chi^2 u(1+u^2)(9+u^2)\Delta_C} [ue^{-\gamma+2\gamma\zeta} ((3+u^2)\sin\delta - 2u\cos\delta) + 2u^2e^{-2\gamma(1-\zeta)} + 2u(3\sin(\delta\zeta) + u\cos(\delta\zeta))e^{2\gamma-\gamma\zeta} - u(9+u^2)\sin\delta e^\gamma - e^{\gamma(1-\zeta)}(u\cos\delta(1-\zeta) - 2\sin\delta(1-\zeta)) - \frac{2u\Delta_C}{\gamma^2}ue^{2\gamma\zeta}],$$

$$d_2 = \frac{2\gamma^2 u}{2\gamma^3 \chi^2 u(1+u^2)(9+u^2)\Delta_C} [(1+u^2)(2\sin\delta + u\cos\delta)e^{-\gamma+2\gamma\zeta} + 2((3-u^2)\sin(\delta\zeta) + 4u\cos(\delta\zeta))e^{2\gamma-\gamma\zeta} - (9+u^2)(\sin\delta + u\cos\delta)e^\gamma + (9+u^2)(\sin\delta(1-\zeta) - u\cos\delta(1-\zeta))e^{-\lambda(1-\zeta)} - u(1+u^2)e^{-2\gamma(1-\zeta)} +$$

$$+ (1 + u^2)(u \cos \delta(1 - \zeta) - 3 \sin \delta(1 - \zeta))e^{\gamma(1-\zeta)} + u(9 + u^2)e^{-2\gamma} - \\ - \frac{\Delta_C}{u\gamma^2} ((3 - u^2) \sin(\delta\zeta) + 4u \cos(\delta\zeta))e^{-\gamma\zeta}],$$

$$d_3 = \frac{2\gamma^2}{2\gamma^3 \chi^2 u(1 + u^2)(9 + u^2)\Delta_C} [u(1 + u^2)(u \sin \delta - 2 \cos \delta)e^{-\gamma+2\gamma\zeta} + \\ + (9 + u^2)(u \cos \delta(1 - \zeta) - \sin \delta(1 - \zeta))e^{-\gamma-\gamma\zeta} + u(9 + u^2)(\cos \delta - u \sin \delta)e^\gamma + \\ + 2u(4u \sin(\delta\zeta) + (3 + u^2) \cos(\delta\zeta))e^{2\gamma-\gamma\zeta} - u(9 + u^2)e^{-2\gamma} + 3u(1 + u^2)e^{-2\gamma(1-\zeta)} - \\ - 3(1 + u^2)(u \cos \delta(1 - \zeta) - 2 \sin \delta(1 - \zeta))e^{\gamma(1-\zeta)} - \frac{\Delta_C}{\gamma^2} (4u \sin(\delta\zeta) - (3 - u^2) \cos(\delta\zeta))e^{-\gamma\zeta}],$$

$$d_4 = \frac{\gamma^2}{2\gamma^3 \chi^2 u(1 + u^2)(9 + u^2)\Delta_C} [2(9 + u^2)(u \cos \delta(1 - \zeta) - \sin \delta(1 - \zeta))e^{-\gamma-\gamma\zeta} - \\ - (1 + u^2)(9 + u^2) \sin \delta e^{-\gamma+2\gamma\zeta} - 2(9 + u^2)(\sin(\delta\zeta) + u \cos(\delta\zeta))e^{2\gamma-\gamma\zeta} - \\ - 2u(9 + u^2)e^{-2\gamma} + (9 + u^2)(2u \cos \delta + (3 + u^2) \sin \delta)e^\gamma + \Delta_C u(9 + u^2)].$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Melnikov Yu. A. Influence Functions and Matrices, Ser. Text and Reference Books Mech. Engng 119: M.Dekker, 1999. – 469 p.
2. Badokina T. E., Loginov B. V., Makeeva O. V. Green functions construction for divergence problems in aeroelasticity // ROMAI Journal, 2008.– 4. №2. – P. 33-44.
3. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
4. Loginov B. V., Tsyganov A. V., Kozhevnikova O. V. Strip-plate divergence as bifurcation problem with two spectral parameters. Trends in Applications of Mathematics to Mechanics. Proc. Intern. Symp. STAMM-2004. Wang Y., Hutter-eds. Scehein-Darmstads, Germany – August 22-28, 2004: Shaker Verlag, Aachen:berichte aus der Mathematik – 2005.–235-246.
5. Petrov K. M., Tsyganov A. V., Loginov B. V. On the divergence stability loss of elongated plate in supersonic gas flow subjected to compressing or extending stresses // Известия Иркутского гос. университета, том 1(2007), №1. – С. 212 – 235.
6. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 524 с. Wolters Noordort: Leyden, 1975.

П. А. Вельмисов, Ю. А. Казакова, Ю. К. Сагдеева (г. Ульяновск)

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ

Построены однопараметрические решения полиномиального вида для уравнений аэрогидромеханики и проведена их классификация.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК №П1122, а также поддержана грантом РФФИ № 09-01-97005-р_поволжье_a.

Система уравнений аэрогидромеханики для идеального газа в случае адиабатического процесса имеет вид:

$$\begin{cases} \rho(u_t + uu_x + vv_y + ww_z) = -p_x, \\ \rho(v_t + uv_x + vv_y + ww_z) = -p_y, \\ \rho(w_t + uw_x + vw_y + ww_z) = -p_z, \\ \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0, \\ \left(\frac{p}{\rho^\chi}\right)_t + u\left(\frac{p}{\rho^\chi}\right)_x + v\left(\frac{p}{\rho^\chi}\right)_y + w\left(\frac{p}{\rho^\chi}\right)_z = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $u(t, x, y, z)$, $v(t, x, y, z)$, $w(t, x, y, z)$ – проекции вектора скорости, $\rho(t, x, y, z)$

– плотность, $p(t, x, y, z)$ – давление, $\chi = \frac{c_p}{c_v} = \text{const}$, c_v, c_p – коэффициенты

теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении. Первые три уравнения системы (1) – уравнения движения Эйлера, четвертое уравнение – уравнение неразрывности, пятое – уравнение энергии.

а) Для плоских $\left(\frac{\partial}{\partial z} = 0, w = 0\right)$ нестационарных течений систему (1)

можно преобразовать к виду:

$$\begin{cases} \rho(u_t + uu_x + vv_y) = -p_x, \\ \rho(v_t + uv_x + vv_y) = -p_y, \\ \rho_t + \rho_x u + \rho_y v + \rho(u_x + v_y) = 0, \\ \rho(p_t + up_x + vp_y) - \chi p(\rho_t + u\rho_x + v\rho_y) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Для построения точных решений системы (2) и их классификации применяется однопараметрический метод [1]. После перехода к переменным ξ, y, t система (2) примет вид:

$$\begin{cases} \rho(u_t x_\xi - u_\xi x_t + uu_\xi + v(x_\xi u_y - x_y u_\xi)) = -p_\xi, \\ \rho(v_t x_\xi - v_\xi x_t + uv_\xi + v(x_\xi v_y - x_y v_\xi)) = p_\xi x_y - p_y x_\xi, \\ \rho_t x_\xi - \rho_\xi x_t + u\rho_\xi + v(x_\xi \rho_y - x_y \rho_\xi) + \rho(u_\xi + x_\xi v_y - x_y v_\xi) = 0, \\ \rho(p_t x_\xi - p_\xi x_t + up_\xi + v(x_\xi p_y - x_y p_\xi)) - \\ - \chi p(\rho_t x_\xi - \rho_\xi x_t + u\rho_\xi + v(x_\xi \rho_y - x_y \rho_\xi)) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Для пяти функций u, v, p, ρ, x , являющихся функциями переменных ξ, y, t , имеем четыре уравнения.

Решение системы (3) ищется в виде многочленов по степеням y :

$$\begin{aligned} x(t, \xi, y) &= \sum_{k=0}^{\gamma} x_k(t, \xi) y^k, \quad u(t, \xi, y) = \sum_{k=0}^{\alpha} u_k(t, \xi) y^k, \quad v(t, \xi, y) = \sum_{k=0}^{\beta} v_k(t, \xi) y^k, \\ p(t, \xi, y) &= \sum_{k=0}^{\theta} p_k(t, \xi) y^k, \quad \rho(t, \xi, y) = \sum_{k=0}^{\lambda} \rho_k(t, \xi) y^k, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha, \beta, \theta, \gamma, \lambda$ – натуральные числа. При подстановке выражений (4) в систему (3) получим следующие максимальные степени переменной y :

$$\begin{cases} J_1 = \gamma + \alpha + \lambda, \quad J_2 = 2\alpha + \lambda, \quad J_3 = \gamma + \alpha + \beta + \lambda - 1, \quad J_4 = \theta, \\ J_5 = \gamma + \beta + \lambda, \quad J_6 = \alpha + \beta + \lambda, \quad J_7 = \gamma + 2\beta + \lambda - 1, \quad J_8 = \gamma + \theta - 1, \\ J_9 = \gamma + \lambda, \quad J_{10} = \alpha + \lambda, \quad J_{11} = \gamma + \beta + \lambda - 1, \\ J_{12} = \gamma + \theta + \lambda, \quad J_{13} = \alpha + \theta + \lambda, \quad J_{14} = \gamma + \beta + \theta + \lambda - 1. \end{cases}$$

Параметры J_1, J_2, J_3, J_4 соответствуют первому уравнению системы (3), J_5, J_6, J_7, J_8 – второму уравнению, J_9, J_{10}, J_{11} – третьему уравнению, J_{12}, J_{13}, J_{14} – четвертому уравнению. Число коэффициентов в (4) равно $r = \alpha + \beta + \theta + \lambda + \gamma + 5$, а число уравнений в системе (3) определяется соотношением: $s = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + 4$, где $I_1 = \max(J_1, J_2, J_3, J_4)$, $I_2 = \max(J_5, J_6, J_7, J_8)$, $I_3 = \max(J_9, J_{10}, J_{11})$, $I_4 = \max(J_{12}, J_{13}, J_{14})$. Максимальные значения I_1, I_2, I_3, I_4 можно выбрать 144 способами. Условие совместности системы уравнений для функций, зависящих от ξ, t , имеет вид: $r = s + j$, где j – натуральное число.

После применения программы, описанной в [1], значения параметров $\alpha, \beta, \theta, \lambda, \gamma \in \mathbb{N}$ были получены только для $j < 0$, т.е. в этом случае система уравнений для коэффициентов в (4), зависящих от ξ, t , переопределена.

б) Для стационарных $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ течений система (2) принимает вид:

$$\begin{cases} \rho(uu_x + vu_y) = -p_x, \\ \rho(uv_x + vv_y) = -p_y, \\ \rho_x u + \rho_y v + \rho(u_x + v_y) = 0, \\ \rho(up_x + vp_y) - \chi p(u\rho_x + v\rho_y) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

После перехода к переменным ξ, y система (5) примет вид:

$$\begin{cases} \rho(uu_\xi + v(x_\xi u_y - x_y u_\xi)) = -p_\xi, \\ \rho(uv_\xi + v(x_\xi v_y - x_y v_\xi)) = p_\xi x_y - p_y x_\xi, \\ u\rho_\xi + v(x_\xi \rho_y - x_y \rho_\xi) + \rho(u_\xi + x_\xi v_y - x_y v_\xi) = 0, \\ \rho(up_\xi + v(x_\xi p_y - x_y p_\xi)) - \chi p(u\rho_\xi + v(x_\xi \rho_y - x_y \rho_\xi)) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Решение системы (6) ищется в виде многочленов по степеням y :

$$\begin{aligned} x(\xi, y) &= \sum_{k=0}^{\gamma} x_k(\xi) y^k, & u(\xi, y) &= \sum_{k=0}^{\alpha} u_k(\xi) y^k, & v(\xi, y) &= \sum_{k=0}^{\beta} v_k(\xi) y^k, \\ p(\xi, y) &= \sum_{k=0}^{\theta} p_k(\xi) y^k, & \rho(\xi, y) &= \sum_{k=0}^{\lambda} \rho_k(\xi) y^k. \end{aligned} \quad (7)$$

где $\alpha, \beta, \theta, \gamma, \lambda$ – натуральные числа. При подстановке выражений (7) в систему (6) получим следующие максимальные степени переменной y :

$$\begin{cases} J_1 = 2\alpha + \lambda, & J_2 = \gamma + \alpha + \beta + \lambda - 1, & J_3 = \theta, \\ J_4 = \alpha + \beta + \lambda, & J_5 = \gamma + 2\beta + \lambda - 1, & J_6 = \gamma + \theta - 1, \\ J_7 = \alpha + \lambda, & J_8 = \gamma + \beta + \lambda - 1, \\ J_9 = \alpha + \theta + \lambda, & J_{10} = \gamma + \beta + \theta + \lambda - 1. \end{cases}$$

После применения программы, описанной в [1], получены возможные значения параметров $\alpha, \beta, \theta, \lambda, \gamma \in \mathbb{N}$, для которых система уравнений для коэффициентов в (7), зависящих от ξ , будет определенной или недоопределенной. Результаты классификации представлены в таблице 1:

Таблица 1

Допустимые значения параметров.						
№	γ	α	β	θ	λ	j
1	1	0	0	0	0	2
2	1	0	0	1	0	0

Рассмотрим первый случай $\alpha = \beta = \theta = \lambda = 0$, $\gamma = 1$ (степень недоопределенности $j = 2$). Тогда формулы (7) примут вид:

$$\begin{cases} x = x_0(\xi) + x_1(\xi)y, & u = u_0(\xi), \\ v = v_0(\xi), & p = p_0(\xi), \quad \rho = \rho_0(\xi). \end{cases} \quad (8)$$

После подстановки выражений (8) в уравнения (6) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \rho_0 u'_0 (u_0 - v_0 x_1) = -p'_0, \\ \rho_0 v'_0 (u_0 - v_0 x_1) = p'_0 x_1, \\ \rho'_0 (u_0 - v_0 x_1) + \rho_0 (u'_0 - x_1 v'_0) = 0, \\ (\rho_0 p'_0 - \chi p_0 \rho'_0)(u_0 - v_0 x_1) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Из (9), в частности, следует:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{v'}{u'}, & p_0 = C \rho_0^\chi, \\ u_0 u'_0 + v_0 v'_0 = -C \chi \rho_0^{\chi-2} \rho'_0, \\ \rho'_0 (u_0 u'_0 + v_0 v'_0) + \rho_0 ((u'_0)^2 + v_0 v'_0) = 0. \end{cases}$$

Это система четырех обыкновенных дифференциальных уравнений для пяти функций, одну из которых можно задать произвольно. Произвольной является также функция $x_0(\xi)$. Таким образом, доказано существование параметрического решения системы (1), зависящего от произвольных функций.

Во втором случае $j = 0$ из системы уравнений для $x_0, x_1, u_0, v_0, \rho_0, p_0, p_1$ получаем $x_1 = c_1 = const$, $p_1 = c_2 = const$. Тогда решение может быть приведено к виду $u = u_0(\xi)$, $v = v_0(\xi)$, $\rho = \rho_0(\xi)$, $p = p_0(\xi) + c_2 y$, где $\xi = x - c_1 y$. Четыре функции u_0, v_0, ρ_0, p_0 определяются из системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений.

в) Для плоских течений $\left(\frac{\partial}{\partial z} = 0, w = 0 \right)$ несжимаемой среды ($\rho = const$)

будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y + \frac{1}{\rho} p_x = 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + \frac{1}{\rho} p_y = 0, \\ u_x + v_y = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Для построения точных решений системы (10) применяется однопараметрический метод, описанный в [1]. После перехода к переменным t, ξ, y система (10) примет вид:

$$\begin{cases} u_t x_\xi - u_\xi x_t + uu_\xi + v(u_y x_\xi - u_\xi x_y) + \frac{1}{\rho} p_\xi = 0, \\ v_t x_\xi - v_\xi x_t + uv_\xi + v(v_y x_\xi - v_\xi x_y) + \frac{1}{\rho} (p_y x_\xi - p_\xi x_y) = 0, \\ u_\xi + v_y x_\xi - v_\xi x_y = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Решение системы (11) ищется в виде:

$$u = \sum_{k=0}^{\alpha} u_k(\xi, t) y^k, \quad v = \sum_{k=0}^{\beta} v_k(\xi, t) y^k, \quad p = \sum_{k=0}^{\theta} p_k(\xi, t) y^k, \quad x = \sum_{k=0}^{\gamma} x_k(\xi, t) y^k \quad (12)$$

Здесь $\alpha, \beta, \theta, \gamma$ – натуральные числа. При подстановке данных выражений в систему (11) получим следующие максимальные степени переменной y :

$$\begin{cases} J_1 = \alpha + \gamma, \quad J_2 = 2\alpha, \quad J_3 = \beta + \alpha + \gamma - 1, \quad J_4 = \theta, \\ J_5 = \beta + \gamma, \quad J_6 = \alpha + \beta, \quad J_7 = 2\beta + \gamma - 1, \quad J_8 = \theta + \gamma - 1, \\ J_9 = \alpha, \quad J_{10} = \beta + \gamma - 1. \end{cases}$$

Параметры J_1, J_2, J_3, J_4 соответствуют первому уравнению системы (11), J_5, J_6, J_7, J_8 – второму уравнению, J_9, J_{10} – третьему уравнению. Число коэффициентов в (12) равно $r = \alpha + \beta + \theta + \gamma + 4$, а число уравнений в системе (11) определяется соотношением: $s = I_1 + I_2 + I_3 + 3$, где

$$I_1 = \max(J_1, J_2, J_3, J_4), \quad I_2 = \max(J_5, J_6, J_7, J_8), \quad I_3 = \max(J_9, J_{10}).$$

Максимальные значения I_1, I_2, I_3 можно выбрать 32 способами. Условие совместности системы дифференциальных уравнений для коэффициентов, зависящих от ξ, t , имеет вид: $r = s + j$, где j – натуральное число.

После применения программы, описанной в [1], получены возможные значения параметров $\alpha, \beta, \theta, \gamma \in \mathbb{N}$, для которых система уравнений будет определенной или недоопределенной. Результаты классификации представлены в таблице 2:

Таблица2

Допустимые значения параметров.

№	α	β	θ	γ	j
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	1	1
3	1	0	1	1	0
4	1	1	1	1	0
5	1	1	2	1	1
6	0	1	1	1	0
7	1	0	2	1	0
8	2	2	4	1	0
9	0	1	2	1	0
10	0	0	2	1	0

г) Аналогичным образом проведена классификация однопараметрических решений полиномиального вида для системы уравнений (10) в стационарном случае:

$$\begin{cases} uu_x + vu_y + \frac{1}{\rho} p_x = 0, \\ uv_x + vv_y + \frac{1}{\rho} p_y = 0, \\ u_x + v_y = 0. \end{cases} \quad (13)$$

После перехода к переменным ξ, y система (13) примет вид:

$$\begin{cases} uu_\xi + v(u_y x_\xi - u_\xi x_y) + \frac{1}{\rho} p_\xi = 0, \\ uv_\xi + v(v_y x_\xi - v_\xi x_y) + \frac{1}{\rho} (p_y x_\xi - p_\xi x_y) = 0, \\ u_\xi + v_y x_\xi - v_\xi x_y = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Решение системы (14) ищется в виде:

$$u = \sum_{k=0}^{\alpha} u_k(\xi) y^k, \quad v = \sum_{k=0}^{\beta} v_k(\xi) y^k, \quad p = \sum_{k=0}^{\theta} p_k(\xi) y^k, \quad x = \sum_{k=0}^{\gamma} x_k(\xi) y^k,$$

где $\alpha, \beta, \theta, \gamma$ – натуральные числа. При подстановке данных выражений в систему (14) получим следующие максимальные степени переменной y :

$$\begin{cases} J_1 = 2\alpha, \quad J_2 = \beta + \alpha + \gamma - 1, \quad J_3 = \theta, \\ J_4 = \alpha + \beta, \quad J_5 = 2\beta + \gamma - 1, \quad J_6 = \theta + \gamma - 1, \\ J_7 = \alpha, \quad J_8 = \beta + \gamma - 1. \end{cases}$$

После применения программы, описанной в [1], получены возможные значения параметров $\alpha, \beta, \theta, \gamma \in \mathbb{N}$, для которых система уравнений для функций, зависящих от ξ , будет определенной или недоопределенной:

Таблица 3

Допустимые значения параметров.					
№	α	β	θ	γ	j
1	0	0	0	1	2
2	1	0	0	2	0
3	1	0	1	1	0
4	1	1	1	1	0
5	1	1	2	1	1
6	2	2	4	1	0
7	1	0	1	2	0
8	1	0	2	1	0
9	1	0	2	2	0
10	0	0	0	2	0
11	0	1	1	1	0
12	0	0	1	2	0
13	0	1	2	1	0
14	0	0	1	1	1
15	0	0	2	1	0
16	1	1	3	1	0

Рассмотрим один из вариантов полученной классификации: $\alpha = \beta = \theta = 0$, $\gamma = 1$ (степень недоопределенности $j = 2$):

$$\begin{cases} x = x_0(\xi) + x_1(\xi)y, \\ u = u_0(\xi), \quad v = v_0(\xi), \quad p = p_0(\xi). \end{cases}$$

После подстановки этих выражений в систему (14), получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений для пяти функций:

$$\begin{cases} u_0 u'_0 - v_0 u'_0 x_1 + \frac{1}{\rho} p'_0 = 0, \\ u_0 v'_0 - v_0 v'_0 x_1 - \frac{1}{\rho} p'_0 x_1 = 0, \\ u'_0 - v'_0 x_1 = 0. \end{cases}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Vel'misov, P. A. Some classes of the solutions of aerohydrodynamic equations // P. A. Vel'misov, M. D. Todorov, J. A. Kazakova. – Applications of Mathematics in Engineering and Economics. – Soft trade, Sofia, Bulgaria, 2008. – p.427-441.

Т. В. Емельянова (г. Тюмень)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ВОДОНАСЫЩЕННОГО ОСНОВАНИЯ

При проектировании и эксплуатации инженерных объектов, возводимых на слабых водонасыщенных основаниях, необходимо исследование во времени деформированного состояния грунтов.

Водонасыщенные грунты необходимо рассматривать как двухфазную систему (скелет грунта+поровая вода). По классическим моделям механики грунтов поровое давление обращается в ноль по окончании процесса фильтрационной консолидации, после чего грунт рассчитывают как однофазную систему. Однако многочисленные лабораторные и натурные эксперименты свидетельствуют о том, что на удалении от дневной поверхности в сжимаемой толще основания поровая вода в течение длительного времени воспринимает значительную часть напряжений, которые оказывают существенное влияние на деформации грунта. В связи с этим представляется целесообразным учитывать поровые давления при анализе деформированного состояния водонасыщенных грунтов и при определении их механических характеристик как функций времени.

Изменение механических характеристик во времени описывается на основе линейной наследственной теории вязкоупругости [1,2], согласно которой решение задачи по их определению разбивается на два этапа. На первом этапе выполняется расчет образца как упругой системы (без учета времени), затем путем переобозначений записывается решение в изображениях по Лапласу-Карсону. На втором этапе для фиксированных в пространстве точек осуществляется приближенный переход от известного изображения к оригиналу в виде специальной ломаной линии (сплайн порядка I дефекта I) по методу ломаных Мальцева Л.Е. [3]. Метод сводится к составлению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), в результате решения которой определяются искомые параметры ломаной линии.

Для определения механических вязкоупругих характеристик водонасыщенного грунта обрабатывался натурный эксперимент [4] по вязкоупругому варианту кинематической модели [5]. Натурный эксперимент проводился на опытной площадке в п. Ольгино г. Ленинграда, на которой была сделана песчаная насыпь высотой около 3 метров, что соответствовало нагрузке на подошве насыпи $q = 0,054 \text{ МПа}$; размеры насыпи в основании $18 \times 18 \text{ м}$, в верхней части – $10 \times 10 \text{ м}$. Продолжительность испытания составила 240сут. Схема расположения датчиков определения перемещений

© Т. В. Емельянова, 2009

частиц скелета грунта приведена на рис.1а, экспериментальные кривые изменения перемещений во времени – на рис.1б.

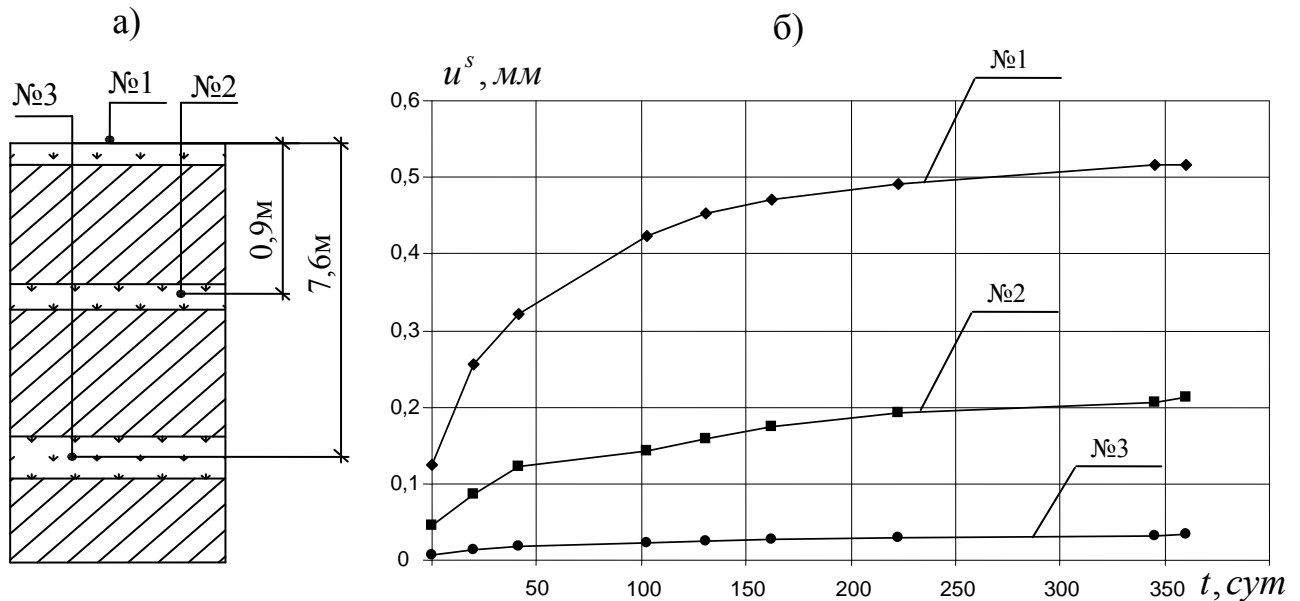


Рис.1. а) схема расположения датчиков в экспериментальной площадке;
б) экспериментальные графики изменения во времени перемещений

Данному эксперименту соответствует задача о нагружении упругого двухфазного полупространства равномерно распределенной нагрузкой.

На основании известного фундаментального решения задачи Фламана для двухфазного упругого полупространства [5] получена следующая аналитическая зависимость изменения во времени вертикальных перемещений частиц скелета грунта [6]:

$$u_{\theta}^s = \frac{2 \cdot F \cdot \sin \theta}{\pi} \cdot \frac{1}{E^s} \cdot \left[\nu \cdot (1 + \nu) + (1 - \nu \cdot (1 + \nu)) \cdot a^2 \cdot r \right] \cdot e^{-a^2 \cdot r} \cdot \left[\ln \frac{R}{r} - \left(a^2 \cdot r + \frac{(a^2 \cdot r)^2}{2 \cdot 2!} + \dots + \frac{(a^2 \cdot r)^4}{4 \cdot 4!} \right) \right] \quad (1)$$

Здесь $r = \sqrt{\eta^2 + z^2}$; ν – коэффициент Пуассона, R – радиус окружности, в точках которой радиальные перемещения обращаются в ноль; $1/E^s$ – механическая характеристика, количественно описывающая свойство частиц скелета грунта накапливать деформацию при постоянной нагрузке, a^2 – универсальный параметр кинематической модели. Вторая степень означает, что этот параметр всегда является положительным числом.

По показаниям датчика №1, расположенного на дневной поверхности определим механические характеристики $a^2(t)$ и $1/E^s(t)$. Графики полученных функций приведены на рис.2.

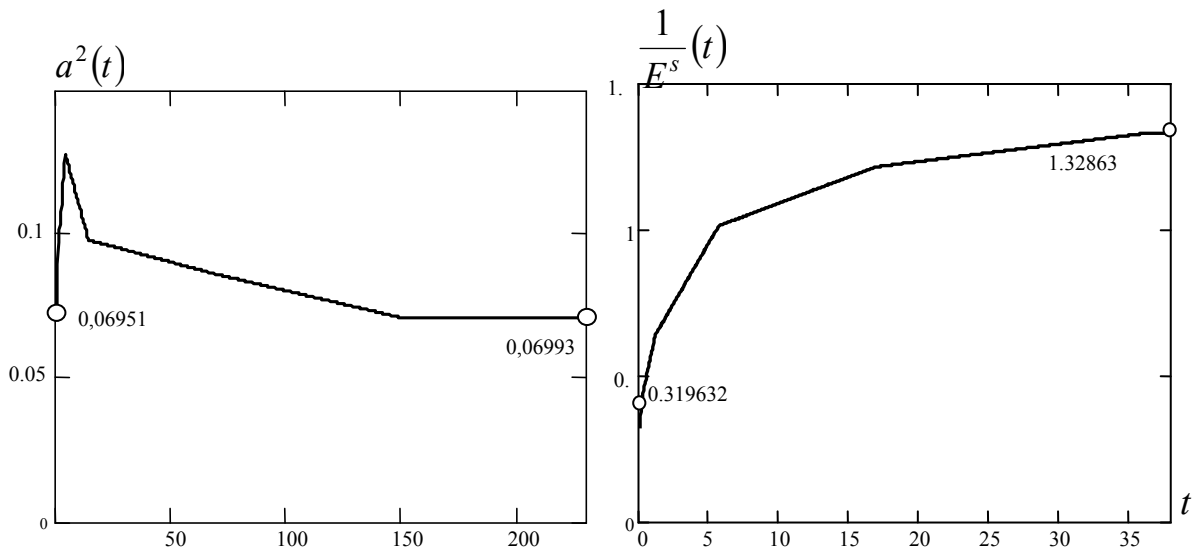


Рис.2. Графики: а) функции $a^2(t)$; б) функции $1/E^s(t)$.

Подставим в выражение для функции $u_\theta^s(1)$ вместо постоянных a^2 и $1/E^s$ функции времени, соответственно $a^2(t)$ и $\frac{1}{E^s}(t)$, и перепишем в изображениях по Лапласу-Карсону, используя принцип Вольтерра:

$$[u_\theta^s]^*(p, r) = \frac{2 \cdot F \cdot \sin \theta}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{E^s} \right]^*(p) \cdot \left[\nu \cdot (1 + \nu) + (1 - \nu) \cdot (1 + \nu) \cdot [a^2]^*(p) \cdot r \right] \cdot e^{-[a^2]^*(p) \cdot r} \cdot \left[\ln \frac{R}{r} - \left(\frac{[a^2]^*(p) \cdot r}{1 \cdot 1!} + \frac{([a^2]^*(p) \cdot r)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{([a^2]^*(p) \cdot r)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{([a^2]^*(p) \cdot r)^4}{4 \cdot 4!} \right) \right]$$

По методу ломаных от изображения $[u_\theta^s]^*(p)$ перейдем к оригиналу $u_\theta^s(t)$ для фиксированного значения $r = 0,001\text{м}$ и построим график полученной функции (рис.3).

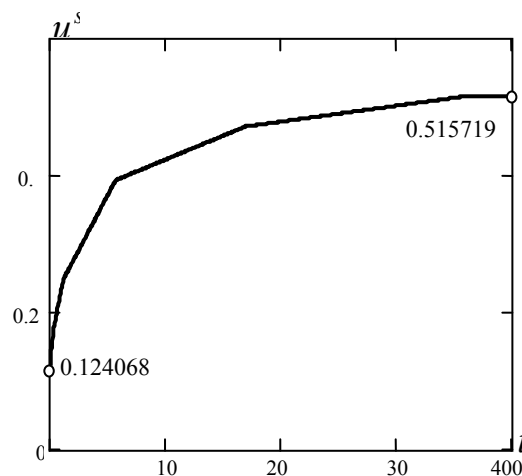


Рис. 3. График изменения во времени перемещений точек дневной поверхности.

На основе полученных механических характеристик $a^2(t)$ и $\frac{1}{E^s}(t)$ для датчика №1 выполним теоретический прогноз по перемещениям для датчиков № 2, №3. Численное сопоставление теоретического прогноза с экспериментальными данными по перемещениям приведено в таблице 1, графики – на рис.4.

Таблица 1.

t	$z = 0,9м$			$z = 7,6м$		
	$u^s(экспер)$	$u^s(теор)$	$\Delta, \%$	$u^s(экспер)$	$u^s(теор)$	$\Delta, \%$
0	0,0444427	0,04830424	-8,69	0,006607974	0,00819996	-24,09
41	0,121146	0,13364611	-10,32	0,018537	0,022364094	-20,65
72	0,1430911	0,15727680	-9,91	0,022422	0,02636894	-17,6
131	0,17428	0,17327922	0,57	0,026253	0,029076733	-10,76
192	0,205288	0,18561664	9,58	0,031265	0,031161294	0,33
253	0,2218	0,19111786	13,83	0,036943	0,032084097	13,15
345	0,23744	0,19941477	16,01	0,044059	0,033475866	24,02
360	0,23744	0,20076753	15,44	0,044059	0,033702784	23,51

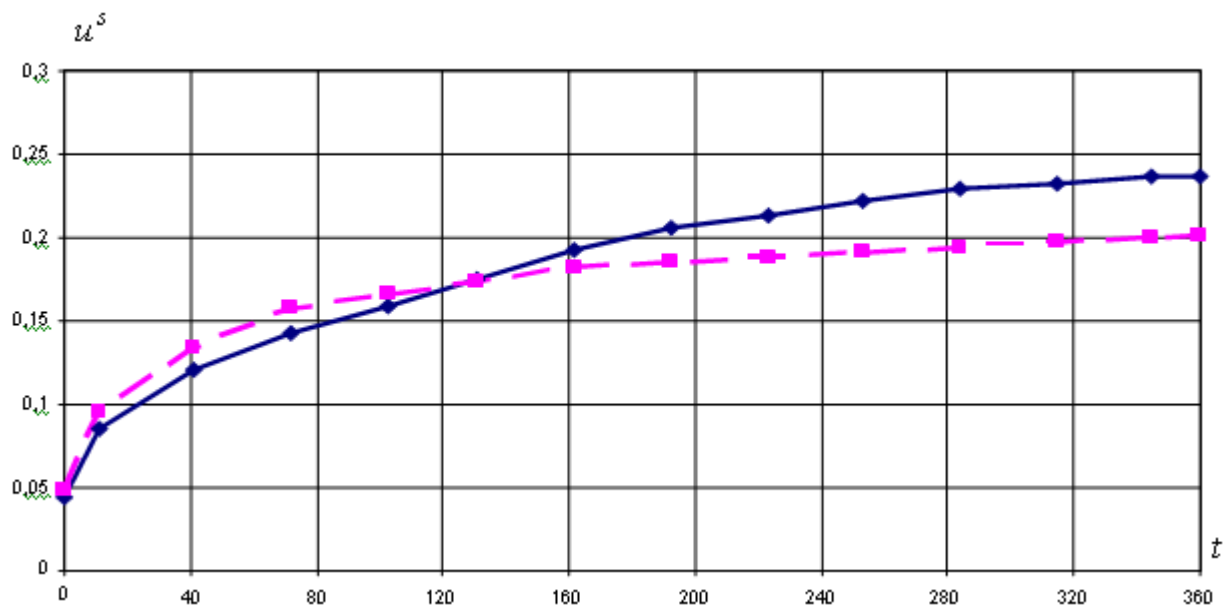


Рис. 4а. Сопоставление теоретических значений перемещений с экспериментальными данными при $z = 0,9м$, экспериментальные данные (—); теоретический прогноз (- - -).

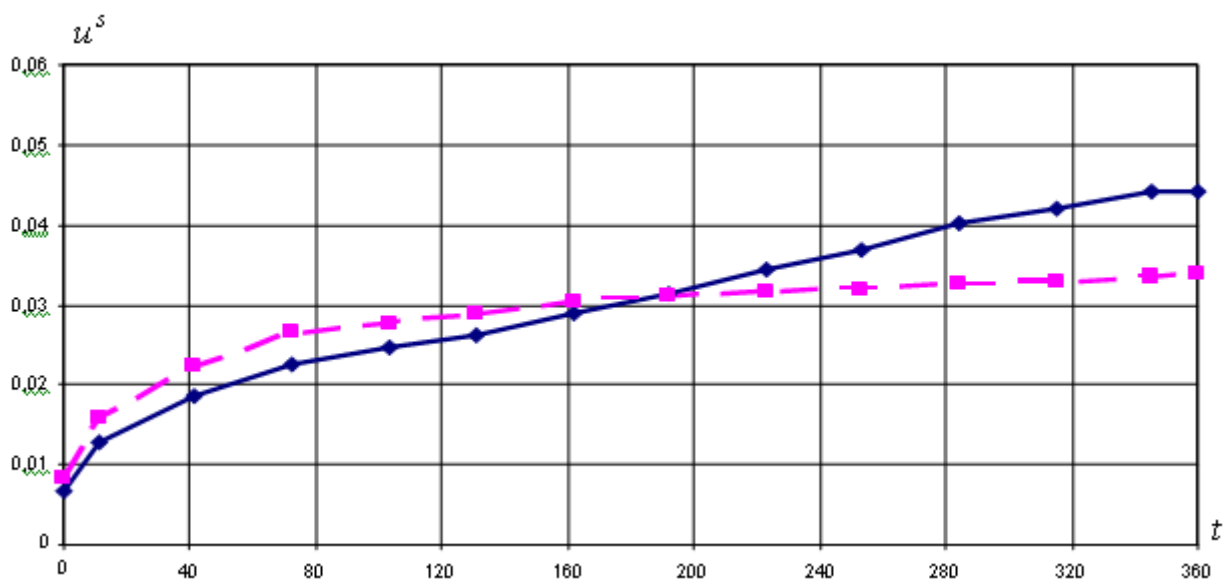


Рис. 4б. Сопоставление теоретических значений перемещений с экспериментальными данными при $z = 7,6\text{ м}$, экспериментальные данные (—); теоретический прогноз (- - -).

Из сопоставления следует, что для датчика, расположенного близко к дневной поверхности ($z = 0,9\text{ м}$), максимальное расхождение составляет 16%, а для датчика, удаленного от дневной поверхности на глубину $z = 7,6\text{ м}$ – 24%.

Таким образом, предложенная методика расчета деформированного состояния позволяет, с достаточной для практики точностью, рассчитывать осадку вязкоупругих водонасыщенных оснований.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Огибалов П. М., Ломакин В. А., Кишкин Б. П. Механика полимеров. – М. : ИМУ, 1975. – 528с.
2. Ильющин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М. : Наука, 1970. – 280с.
3. Мальцев Л. Е., Карпенко Ю. И. Теория вязкоупругости для инженеров – строителей. – Тюмень, Издательство «Вектор Бук», 1999. – 240с.
4. Зехниев С. С. Стабилизация оснований с плоскими дренами. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Москва, 1988.
5. Мальцев Л. Е., Бай В. Ф., Мальцева Т. В. Кинематическая модель грунта и биоматериалов. – СПб СИ, 2002. – 320с.
6. Трефилина Е. Р. Исследование напряженно – деформированного вязкоупругого двухфазного полупространства: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Тюмень, 2004.

А. А. Молгачев (г. Ульяновск)

ЭКРАННЫЙ ЭФФЕКТ ПРИ АЭРОДИНАМИЧЕСКОМ ОБТЕКАНИИ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ ВБЛИЗИ ДОРОЖНОГО ПОЛОТНА

В данной работе исследуется устойчивость по Ляпунову для линейных перемещений и нелинейных угловых перемещений подрессоренной массы автомашины, обтекаемой потоком среды (воздуха). Исследуется аэродинамическое обтекание тонкого профиля при взаимодействии с дорожным полотном (экранный эффект). Рассматривается смешанная задача аэродинамики и механической упругости.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК №П1122, а также поддержана грантом РФФИ № 09-01-97005-р_поволжье_a.

1. Аэродинамическая задача.

Рассмотрим обтекание двух кососимметричных профиля $g(z)$ отрезка $z \in [-a, b]$ ($a \geq 0$) сплошной среды со скоростью V_∞ с углами α и $-\alpha$ при действительной оси. Тогда комплексным потенциалом потока, обтекающим двусвязный кососимметричный профиль, заданным скоростью на бесконечности $\vec{V} = V_\infty$, будет, служить функция

$$\begin{aligned}
 w = & V_\infty \left(\frac{g(x)}{2 \cos \alpha} e^{i\alpha} - ih \right) + \frac{V_\infty R^2}{\frac{g(x)}{2 \cos \alpha} e^{i\alpha} - ih} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} \left(\frac{1}{2 \cos \alpha} \frac{g(x)}{e^{i\alpha} - ih} \right) + \\
 & + V_\infty \left(\frac{g(x)}{2 \cos \alpha} e^{-i\alpha} + ih \right) + \frac{V_\infty R^2}{\frac{g(x)}{2 \cos \alpha} e^{-i\alpha} + ih} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} \left(\frac{1}{2 \cos \alpha} \frac{g(x)}{e^{-i\alpha} + ih} \right) = \quad (1) \\
 = & V_\infty g(x) + \frac{V_\infty R^2}{\frac{g(x)}{2 \cos \alpha} e^{i\alpha} - ih} + \frac{V_\infty R^2}{\frac{g(x)}{2 \cos \alpha} e^{-i\alpha} + ih} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} \frac{\frac{1}{2 \cos \alpha} \frac{g(x)}{e^{i\alpha} - ih}}{\frac{1}{2 \cos \alpha} \frac{g(x)}{e^{-i\alpha} + ih}};
 \end{aligned}$$

где R – радиус циркуляции профиля $g(x)$, удовлетворяющего условиям нормировки: $g'(\infty) = 1, g(\infty) = \infty$.

Найдем поле скоростей

$$\frac{dw}{dt} = V_\infty (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) - V_\infty R^2 \left(\frac{e^{i\alpha}}{\left(\frac{g(x)}{2 \cos \alpha} e^{i\alpha} - ih \right)^2} + \frac{e^{-i\alpha}}{\left(\frac{g(x)}{2 \cos \alpha} e^{-i\alpha} + ih \right)^2} \right) +$$

$$+ \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\frac{e^{i\alpha}}{\frac{g(x)}{2 \cos \alpha} e^{i\alpha} - ih} - \frac{e^{-i\alpha}}{\frac{g(x)}{2 \cos \alpha} e^{i\alpha} - ih} \right] \frac{g'(x)}{2 \cos \alpha} = 0. \quad (2)$$

Выражая из (4) циркуляцию Γ , находим:

$$\Gamma = -2\pi V_{\infty} R \left[\left(\frac{R}{h} - 2 \sin \alpha + \frac{h}{R} \right) - \frac{4 \cos \alpha \left(\frac{R^2}{h^2} - 1 \right)}{\frac{R}{h} - 2 \sin \alpha + \frac{h}{R}} \right];$$

$$\Gamma \approx -2\pi V_{\infty} R \left[\left(\frac{R}{h} + \frac{h}{R} - \frac{4 \cos \alpha \left(\frac{R^2}{h^2} - 1 \right)}{\frac{R}{h} + \frac{h}{R}} \right) - 2 \sin \alpha \left(1 + \frac{4 \cos \alpha \left(\frac{R^2}{h^2} - 1 \right)}{\left(\frac{R}{h} + \frac{h}{R} \right)^2} \right) \right]. \quad (3)$$

Перепишем циркуляцию (3) для краткости в виде:

$$\Gamma = -2\pi V_{\infty} R (Y - 2X \sin \alpha), \text{ где}$$

$$Y = \left(\frac{R}{h} + \frac{h}{R} \right) - 4 \cos \alpha \left(\frac{R^2}{h^2} - 1 \right) / \left(\frac{R}{h} + \frac{h}{R} \right); \quad X = 1 + 4 \cos \alpha \left(\frac{R^2}{h^2} - 1 \right) / \left(\frac{h}{R} + \frac{R}{H} \right)^2. \quad (4)$$

По теореме Жуковского величина подъемной силы с учетом (3) равна

$$P = -i\rho V_{\infty} e^{i\alpha} \Gamma = -2\pi i \rho V_{\infty}^2 R (Y - 2X \sin \alpha) e^{i\alpha},$$

$$P_x = \frac{\rho V_{\infty}^2}{2} (a+b)(Y - 2X \sin \alpha) \sin \alpha - \text{величина лобового сопротивления,}$$

$$P_x = -\frac{\rho V_{\infty}^2}{2} (a+b)(Y - 2X \sin \alpha) \cos \alpha - \text{величина подъемной силы с учетом взаимодействия с дорожным полотном.}$$

2. Задача механической упругости и исследование устойчивости.

Кинетическая и потенциальная энергия рассматриваемой системы:

$$J = T + \Pi = \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{m(r\dot{\alpha})^2}{2} + \frac{C_1(z + a \sin \alpha + z_0)^2}{2} + \frac{C_2(z - b \sin \alpha + z_0)^2}{2} +$$

$$+ \frac{\rho V_{\infty}^2}{2} (Y - 2X \sin \alpha) a (z + a \sin \alpha + z_0) \cos \alpha +$$

$$+ \frac{\rho V_{\infty}^2}{2} (Y - 2X \sin \alpha) b (z - b \sin \alpha + z_0) \cos \alpha +$$

$$+ \frac{\rho V_{\infty}^2}{2} (Y - 2X \sin \alpha) a (a - a \cos \alpha) \sin \alpha +$$

$$+ \frac{\rho V_{\infty}^2}{2} (Y - 2X \sin \alpha) b (b \cos \alpha - b) \sin \alpha + mgz - mgz_0. \quad (5)$$

Рассмотрим совместные продольные и угловые колебания автомобиля с учётом аэродинамического воздействия, описываемые системой уравнений.

Сгруппируем функционал J (5):

$$J = \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{m(r\dot{\alpha})^2}{2} + \frac{z^2}{2}(C_1 + C_2) + z \sin \alpha \left(C_1 a - C_2 b - 2 \frac{\rho V_\infty^2}{2} (a+b) X \cos \alpha \right) + \frac{\sin^2 \alpha}{2} \left(C_1 a^2 + C_2 b^2 - \frac{\rho V_\infty^2}{2} (a^2 - b^2) X \right) + (C_1 a - C_2 b) \sin \alpha z_0 - 2 \frac{\rho V_\infty^2}{2} (a+b) X \sin \alpha z_0 \cos \alpha. \quad (6)$$

Для нахождения начального линейного перемещения z_0 решим уравнение, пренебрегая линейными перемещениями:

$$(C_1 + C_2) \frac{z_0^2}{2} + \left(\frac{\rho V_\infty^2}{2} (a+b) Y \cos \alpha - mg \right) z_0 + \left(\frac{\rho V_\infty^2}{2} (a^2 - b^2) Y \sin \alpha \right) = 0,$$

$$z_0 = \frac{1}{C_1 + C_2} \left(\pm \sqrt{\left(mg - \frac{\rho V_\infty^2}{2} (a+b) Y \cos \alpha \right)^2 - 2(C_1 + C_2) \frac{\rho V_\infty^2}{2} (a^2 - b^2) Y \sin \alpha + mg - \frac{\rho V_\infty^2}{2} (a+b) Y \cos \alpha} \right), \quad z_0 \approx \frac{\frac{\rho V_\infty^2}{2} (a^2 - b^2) Y \sin \alpha}{mg - \frac{\rho V_\infty^2}{2} (a+b) Y \cos \alpha}. \quad (7)$$

Подставляя начальное линейное отклонение (7) в функционал (6), получим:

$$J = \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{m(r\dot{\alpha})^2}{2} + \frac{z^2}{2}(C_1 + C_2) + z \sin \alpha \times \left(C_1 a - C_2 b - 2 \frac{\rho V_\infty^2}{2} (a+b) X \cos \alpha \right) + \frac{\sin^2 \alpha}{2} \left(C_1 a^2 + C_2 b^2 - 4 \frac{\rho V_\infty^2}{2} (a^2 - b^2) X + \frac{2(C_1 a - C_2 b) \frac{\rho V_\infty^2}{2} (a^2 - b^2) Y}{mg - \frac{\rho V_\infty^2}{2} (a+b) Y \cos \alpha} - \frac{4 \left(\frac{\rho V_\infty^2}{2} \right)^2 (a+b)(a^2 - b^2) X Y \cos \alpha}{mg - \frac{\rho V_\infty^2}{2} (a+b) Y \cos \alpha} \right). \quad (8)$$

Для исследования устойчивости колебаний автомобиля по Ляпунову, необходимо: положительная определенность функционала J и неотрицательность его производной

$$\dot{J} = -2N_z \dot{z}^2 - 2N_\varphi \dot{\varphi}^2 \leq 0. \quad (9)$$

Для этого необходимо выполнение следующих условий:

$$N_z \geq 0, \quad N_\varphi \geq 0,$$

$$\left(C_1 a - C_2 b - 2 \frac{\rho V_\infty^2}{2} \frac{a+b}{4} X \cos \alpha \right)^2 - (C_1 + C_2) \left(C_1 a^2 + C_2 b^2 - \frac{\rho V_\infty^2}{2} (a^2 - b^2) X + \frac{2(C_1 a - C_2 b) \frac{\rho V_\infty^2}{2} (a^2 - b^2) Y}{mg - \frac{\rho V_\infty^2}{2} (a+b) Y \cos \alpha} - \frac{4 \left(\frac{\rho V_\infty^2}{2} \right)^2 (a+b)(a^2 - b^2) X Y \cos \alpha}{mg - \frac{\rho V_\infty^2}{2} (a+b) Y \cos \alpha} \right) < 0$$

или

$$- A \left(\frac{\rho V_\infty^2}{2} \right)^3 + B \left(\frac{\rho V_\infty^2}{2} \right)^2 + C \frac{\rho V_\infty^2}{2} - D < 0, \quad (10)$$

где A, B, C, D известные коэффициенты.

Приведем безразмерные величины:

$$\bar{V}^2 = \frac{\rho V_\infty^2}{2\sqrt{C_1 C_2}}, \quad \bar{a} = \frac{a}{a+b}, \quad \bar{m} = \frac{mg}{\sqrt{C_1 C_2} (a+b)}, \quad k = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}, \quad \bar{h} = \frac{h}{R}; \quad (11)$$

$$\bar{A} = 4X^2 Y \cos^3 \alpha, \quad \bar{B} = 4\bar{m} X^2 \cos^2 \alpha + 4(k\bar{a} - (1-\bar{a})/k) X Y \cos^2 \alpha,$$

$$\bar{C} = Y \cos \alpha - 4\bar{m}(k\bar{a} - (1-\bar{a})/k) X \cos \alpha + 4\bar{m}(k+1/k)(\bar{a}^2 - (1-a^2)^2) X -$$

$$- 2(k+1/k)(k\bar{a} - (1-\bar{a})/k)(\bar{a}^2 - (1-a^2)^2) Y, \quad D = \bar{m}.$$

$$- \bar{A} \bar{V}^6 + \bar{B} \bar{V}^4 + \bar{C} \bar{V}^2 - \bar{D} = 0. \quad (12)$$

Решаем уравнение (12) методом перебора от 0 до 1 с мелким шагом, получим ограничения, налагаемые на скорость набегающего потока $\bar{V}_{кр}$.

3. Численные результаты.

Для учета сжимаемости среды достаточно вместо обозначения скорости

$$(11) \text{ рассмотреть } \bar{V}^2 = \frac{\rho V_\infty^2}{2\sqrt{C_1 C_2} \sqrt{1-M_\infty^2}} = \frac{\rho V_\infty^2}{2\sqrt{C_1 C_2} \sqrt{1-V_\infty^2/a_\infty^2}}, \text{ где } M_\infty - \text{ число}$$

Маха, a_∞ – скорость звука в среде [2] (Рис. 2).

На Рис.1 и 2 проиллюстрирован экраный эффект при взаимодействии набегающего потока на профиль $g(z)$ вблизи земли, т. е. на высоте центра тяжести $h_{кр} \approx 0.68R$ наблюдается наивысшее допустимое значение критической скорости, если же профиль поднимается с этой высоты до $h \approx R$, то значение критической скорости резко понижается. При выборе профиля $g(z)$ в качестве тонкой пластинки длиной 4 метра – $h_{кр} \approx 0.68$ метра. Из Рис. 3 следует, что допустимый интервал для положения центра тяжести $\bar{a} = 0.5 \div 0.75$. На Рис.4 изображена нелинейность скорости относительно угловых перемещений, такой вид характерен в силу принятого упрощения (3).

Данные [СИ]:

$$C_1 = 5,7 \cdot 10^4, C_2 = 3,3 \cdot 10^4, a + b = 4, \rho = 1.225, m = 1000.$$

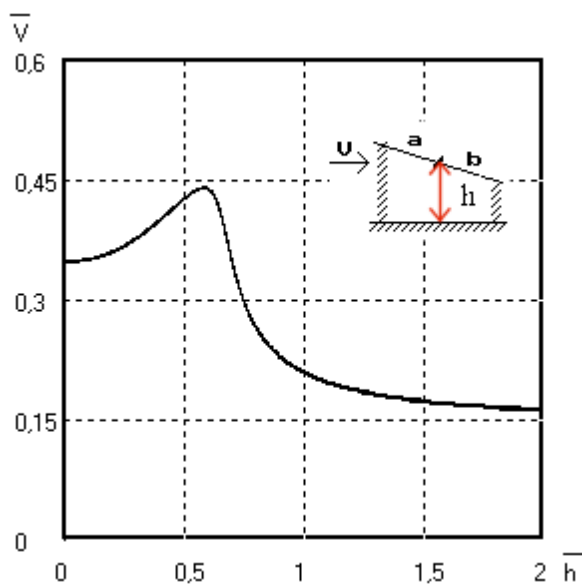


Рис. 1. Экранный эффект ($\bar{a}=0.58$)

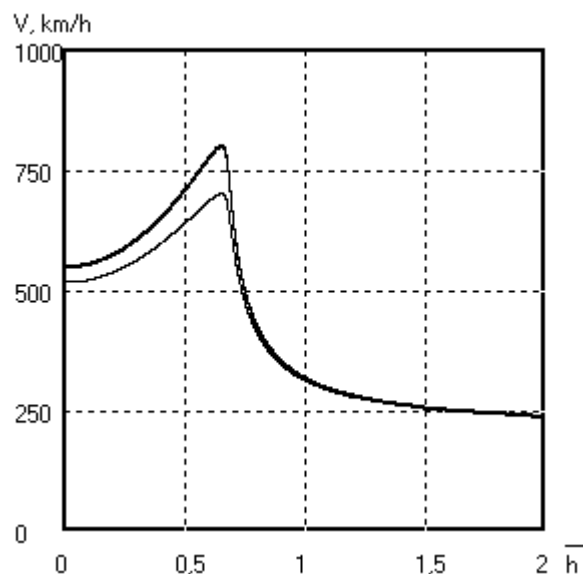


Рис. 2. Экранный эффект для $\bar{a}=0.5$
(тонкая линия – с учетом сжимаемости среды)

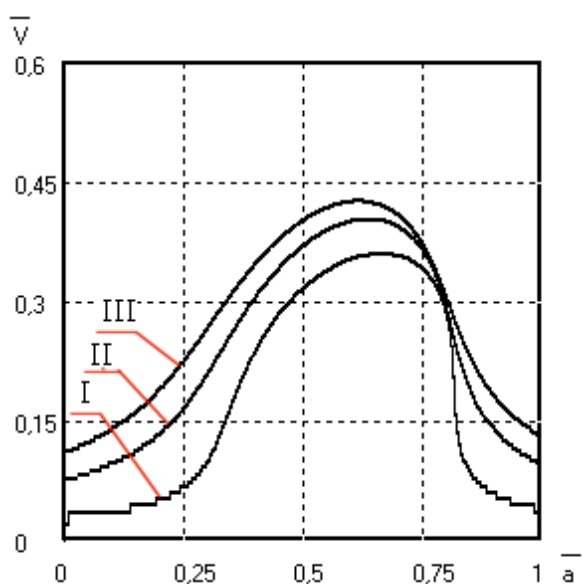


Рис. 3. Зависимость скорости от
положения центра масс
(I – $\bar{h}=0.1$; II – $\bar{h}=0.4$; III – $\bar{h}=0.5$)

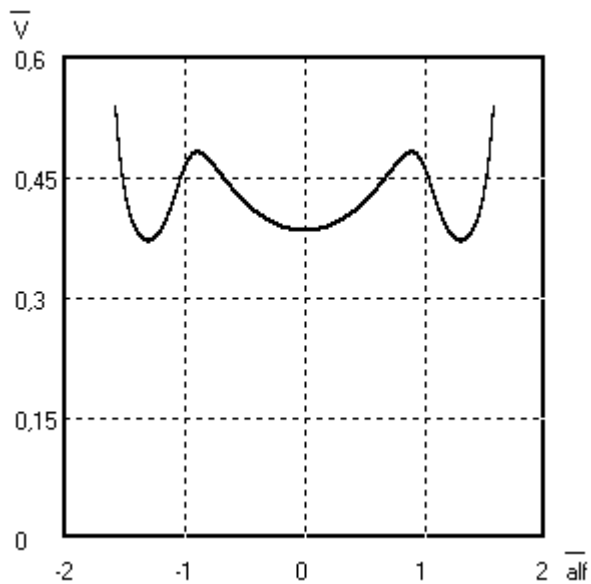


Рис. 4. Зависимость критической
скорости от угла ($\bar{h}=0.5$; $\bar{a}=0.58$)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кузнецов В. А., Дьяков И. Ф. Конструирование и расчет автомобиля. Подвеска автомобиля // Учебное пособие. – Ульяновск, УлГТУ. 2003. – 58с.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Издание 6. – М. 2002. – 688с.

П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова (г. Ульяновск)

О НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ «ТРУБОПРОВОД – ДАТЧИК ДАВЛЕНИЯ»

Рассматриваются математические модели механической системы, включающей в себя трубопровод с рабочей средой и датчик. Датчик закреплен на торцевой стенке трубопровода и предназначен для измерения давления рабочей среды (например, на выходе из камеры сгорания двигателя), которое считается заданным. Под рабочей средой понимается идеальная несжимаемая жидкость.

Задачи решаются в линейной постановке, соответствующей малым прогибам упругого элемента (пластины) и малым возмущениям потенциала скорости среды. Представлены также модели, в которых динамика упругих элементов описывается нелинейными уравнениями.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК №П1183, а также поддержана грантом РФФИ № 09-01-97005-р_поволжье_a.

Рассматриваются плоские модели (Рис.1,2) для бесконечно длинного трубопровода и трубопровода конечной длины, и осесимметричная модель (Рис.3) для трубопровода конечной длины.

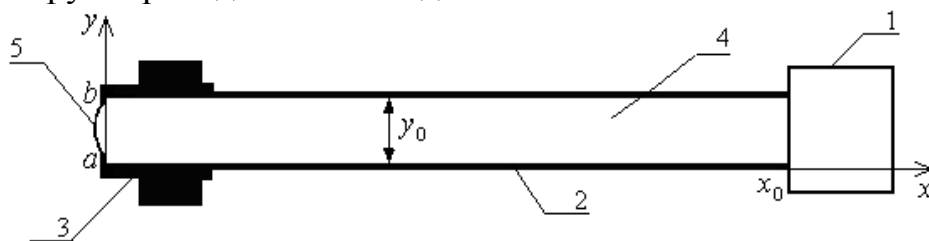


Рис. 1.

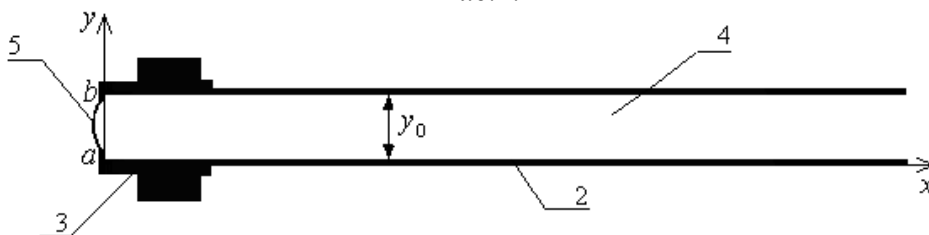


Рис. 2.

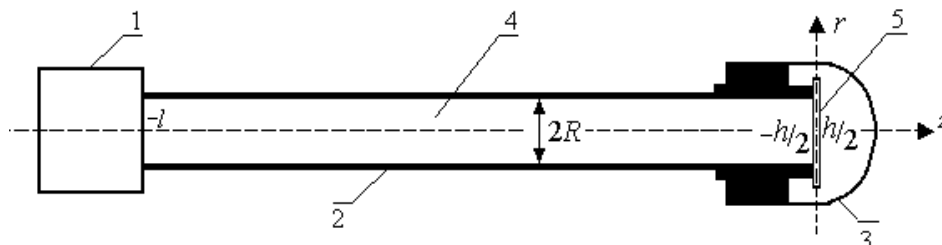


Рис. 3.

На рис. 1-3: 1 – двигатель, 2 – трубопровод, 3 – датчик, 4 – рабочая среда, 5 – пластина (упругий элемент).

а) Линейные модели. 1) Рассмотрим задачу о динамике упругого элемента датчика давления рабочей среды, расположенного на торцевой стенке трубопровода конечной длины (рис.1).

Предлагаемая математическая модель определяется следующими уравнениями и граничными условиями:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G = \{(x, y) : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}, \quad (1.1)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = \varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad (1.2)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = \dot{\omega}(y, t), \quad y \in (a, b), \quad 0 < a < b < y_0, \quad (1.3)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = 0, \quad y \in (0, a) \cup (b, y_0), \quad (1.4)$$

$$\tilde{P} - \rho\varphi_t(x_0, y, t) = P_*(y, t), \quad y \in (0, y_0), \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} L(\omega) \equiv M\ddot{\omega} + D\omega_{yyyy} + N\omega_{yy} + \alpha\dot{\omega}_{yyy} + \beta\dot{\omega} + \gamma\omega = \\ = P_0(y, t) - \tilde{P} + \rho\varphi_t(0, y, t), \quad y \in (a, b). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь (1.1) – уравнение Лапласа, описывающее движение рабочей среды в трубопроводе; (1.2)-(1.4) – условия непротекания; условие (1.5) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; (1.6) – уравнение динамики пластины; $\varphi(x, y, t)$ – потенциал скорости среды; $\omega(y, t)$ – прогиб упругого элемента; $P_*(y, t)$ – закон распределения давления среды в сечении $x = x_0$ (на выходе из двигателя).

На основе метода Фурье задача сведена к исследованию уравнения для функции деформации упругого элемента. Уравнение, связывает закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод и функцию прогиба упругого элемента датчика

$$\begin{aligned} L(\omega) = P_0(y, t) - \frac{\rho x_0}{y_0} \int_a^b \ddot{\omega}(y, t) dy - \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} P_*(y, t) dy - \\ \text{давления:} \\ - \frac{2\rho}{y_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_n y)}{\text{ch}(\lambda_n x_0)} \left[\int_0^{y_0} \frac{P_*(y, t)}{\rho} \cos(\lambda_n y) dy + \frac{\text{sh}(\lambda_n x_0)}{\lambda_n} \int_a^b \ddot{\omega}(y, t) \cos(\lambda_n y) dy \right], \end{aligned} \quad (1.7)$$

где оператор $L(\omega)$ определяется, согласно (1.6), выражением

$$L(\omega) \equiv M\ddot{\omega} + D\omega_{yyyy} + N\omega_{yy} + \alpha\dot{\omega}_{yyy} + \beta\dot{\omega} + \gamma\omega.$$

Согласно методу Галеркина, решение $\omega(y, t)$ уравнения (1.7) ищется в виде $\omega(y, t) = \sum_{k=1}^m \omega_k(t) g_k(y)$, где $\{g_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ – полная на $[a, b]$ система базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям, соответствующим условиям закрепления пластины.

Из условия ортогональности невязки уравнения (1.7) к системе базисных функций $\{g_k(y)\}_{k=1}^m$ получим систему из m обыкновенных дифференциальных уравнений ($i = 1, \dots, m$):

для жесткого закрепления концов упругого элемента

$$\sum_{k=1}^m A_{ik} \ddot{\omega}_k(t) + B_i \dot{\omega}_i(t) + \sum_{k=1}^m C_{ik} \omega_k(t) + F_i(t) = 0,$$

где A_{ik} , B_i , C_{ik} – некоторые числовые коэффициенты, выражающиеся через параметры задачи.

С помощью математической системы Mathematica 6.0 решается система дифференциальных уравнений для $\omega_k(t)$ и проводится исследование динамики упругого элемента – построение графиков $\omega(y, t)$ для фиксированного $y_0 \in [a, b]$ как функции времени t и построение графиков $\omega(y, t)$ в определенный момент времени t_0 как функции $y \in [a, b]$.

2) Рассмотрим модель механической системы «трубопровод – датчик давления» в случае бесконечно длинного трубопровода с прямолинейными стенками (Рис.2).

Математическая формулировка задачи принимает следующий вид:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, (x, y) \in G = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, 0 < y < y_0\}, \quad (2.1)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = \varphi_y(x, y_0, t) = 0, x \in (0, +\infty), \quad (2.2)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = \dot{\omega}(y, t), y \in (a, b), 0 < a < b < y_0, \quad (2.3)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = 0, y \in (0, a) \cup (b, y_0), \quad (2.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = 0, \quad (2.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\tilde{P} - \rho \varphi_t) = P_*(t), \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} L(\omega) &\equiv M \ddot{\omega} + D \omega_{yyyy} + N \omega_{yy} + \alpha \dot{\omega}_{yyy} + \beta \dot{\omega} + \gamma \omega = \\ &= P_0(y, t) - \tilde{P} + \rho \varphi_t(0, y, t), \quad y \in (a, b). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь (2.1) – уравнение Лапласа, описывающее движение рабочей среды в трубопроводе; (2.2)-(2.4) – условия непротекания среды через соответствующие границы; условия (2.5), (2.6) означают, что на входе в трубопровод среда покоится, а закон изменения давления определяется функцией $P_*(t)$; (2.7) – уравнение динамики пластины; остальные обозначения имеют тот же смысл, что и для первой модели.

Решение аэрогидродинамической задачи осуществляется методами теории функций комплексного переменного. В результате получим уравнение, связывающее закон изменения давления $P_*(t)$ на входе в трубопровод ($x_0 = +\infty$) и функцию прогиба (деформацию) $\omega(y, t)$ упругого элемента датчика, расположенного в сечении $x = 0$

$$L(\omega) = P_0(y, t) - P_*(t) + \frac{\rho}{\pi} \int_a^b \ddot{\omega}(s, t) \ln \left| \cos \frac{\pi s}{y_0} - \cos \frac{\pi y}{y_0} \right| ds.$$

3) Исследовалась динамика упругого элемента датчика давления рабочей среды, выполненного в виде круглой пластины (осесимметричный трубопровод (Рис.3)).

Функции $w(r, t)$, $\varphi(r, z, t)$ являются совместным решением следующей начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0, \quad z \in \left[-l, -\frac{h}{2} \right], \quad r \in [0, R], \quad t \geq 0, \\ \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w + D \delta_2 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^4 w) - N(t) \nabla^2 w + \delta_1 \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha w &= \\ = \tilde{P} - P_0 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left(r, -\frac{h}{2}, t \right), \quad r \in [0, R], \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} (R, z, t) &= 0, \\ \tilde{P} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} (r, -l, t) &= P_*(t), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(r, -\frac{h}{2}, t \right) &= \frac{\partial w}{\partial t} (r, t), \\ w(R, t) = \frac{\partial w}{\partial r} (R, t) &= 0, \\ w(r, 0) = f_1(r); \quad \frac{\partial w}{\partial t} (r, 0) &= f_2(r), \\ \varphi(r, z, 0) &= \psi(r, z), \end{aligned}$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ – оператор Лапласа, $w = w(r, t)$ – изгиб пластины в точках окружности радиуса r в момент времени t ($0 \leq r \leq R, t \geq 0$), $\varphi(r, z, t)$ – потенциал скорости жидкости внутри корпуса датчика и трубопровода. $N(t)$ – растягивающее (сжимающее) усилие, $P_*(t)$ – давление рабочей среды на входе в трубопровод, т. е. давление в двигателе ($z = -l$), \tilde{P} – давление в покоящейся среде, P_0 – давление сверху над пластиной ($z = \frac{h}{2}$).

С помощью метода Фурье задача сведена к исследованию уравнения для функции деформации упругого элемента. на основе метода Галеркина получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для определения коэффициентов $w_n(t)$ ($k = 0, 1, \dots, n_0$):

$$\sum_{n=0}^{n_0} w_n''(t) \left\{ \rho_0 h \langle U_k, U_n \rangle + 8\rho J_1(\lambda_n R) J_1(\lambda_k R) \left(l - \frac{h}{2} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{m_0} \frac{\pi\rho}{R} t h \mu_m \left(l - \frac{h}{2} \right) \cdot \langle J_0(\mu_m r), U_k \rangle \cdot \langle J_0(\mu_m r), U_n \rangle \right\} + \sum_{n=0}^{n_0} w_n'(t) (D\delta_2 \lambda_n^4 + \delta_1) \langle U_k, U_n \rangle + \\ + \sum_{n=0}^{n_0} w_n(t) \left\{ (D\lambda_n^4 + \alpha) \langle U_k, U_n \rangle + N(t) \lambda_n^2 \langle U_k, U_n^* \rangle \right\} = 2R(P_*(t) - P_0) J_1(\lambda_k R),$$

где

$$\langle U_k, U_n \rangle = \int_0^R r U_k(r) U_n(r) dr, \quad U_n^*(r) = \lambda_n \left[J_0(\lambda_n r) + \frac{J_0(\lambda_n R)}{I_0(\lambda_n R)} I_0(\lambda_n r) \right], \quad n = 0, 1, 2, 3..$$

Сравним графики деформаций для рассмотренных моделей. Рассмотрим жесткое закрепление концов упругого элемента.

Для значений параметров $x_0 = 5$, $y_0 = 0,05$, $a = 0$, $b = y_0$, $M = 2,7$, $D = 6,702$, $N = 10^3$, $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,3$, $\gamma = 0,2$, $N1 = 15$, $h = 10^{-3}$, $R = 0,025$, $\omega(y, 0) = 0$, $\dot{\omega}(y, 0) = 0$, $P_0(y, t) = 0$, $P_*(y, t) = 10^5(20 + \cos(10t))$ получены графики функции $\omega(y, t) = \sum_{k=1}^3 \omega_k(t) \psi_k(y)$ в точке $y_* = y_0/2$ (Рис.4-6):

Для первой модели:

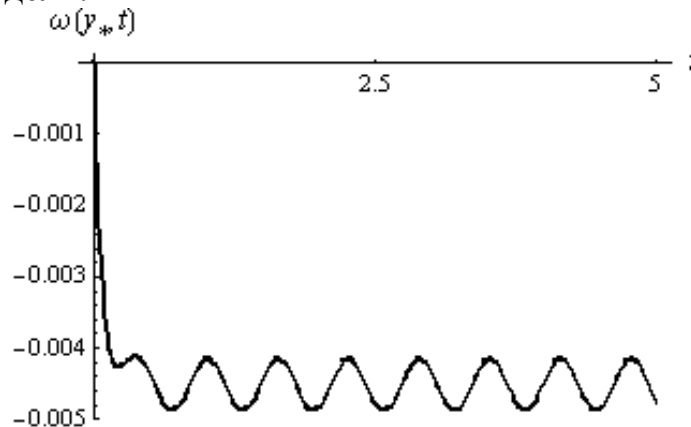


Рис.4.

Для второй модели:

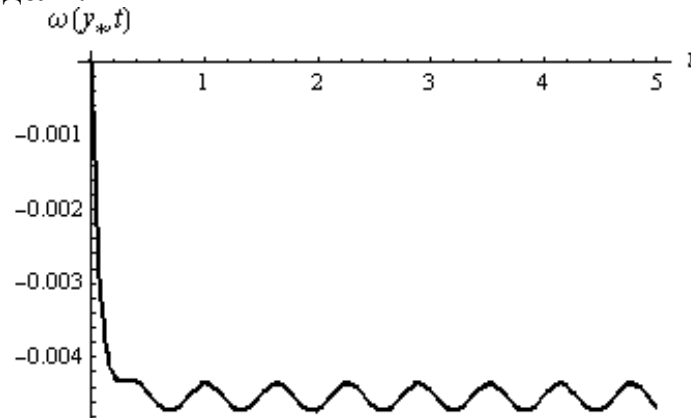


Рис.5.

Для третьей модели:

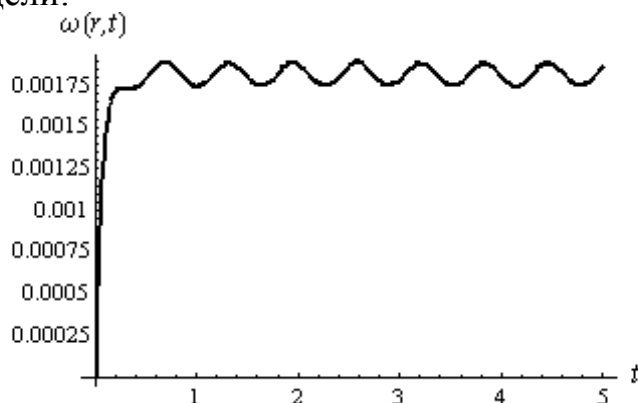


Рис.6.

Как видно из Рис. 4, 5 графики деформаций мало отличаются. Это связано с тем, что для первой модели продольный размер ($x_0 = 5$) трубопровода значительно превосходит его поперечный размер ($y_0 = 0,05$). Поэтому для расчетов систем с трубопроводами достаточной длины можно использовать модель с бесконечно длинным трубопроводом.

Для третьей модели, расположение графика функции $\omega(r,t)$ (рис.6) в верхней полуплоскости объясняется выбором системы координат. В осесимметричной модели деформация упругого элемента меньше, чем в плоских моделях, что соответствует физическим представлениям.

б) Нелинейные модели. Постановка задач (1.1) – (1.6), (2.1) – (2.7), соответствуют линейной теории аэрогидроупругости, когда движение жидкости (газа), а также динамика деформируемого тела описываются линейными уравнениями. Можно предложить также «смешанные» математические модели, в которых часть уравнений, описывающих динамику упругого элемента, являются нелинейными. Одна из таких моделей определяется приведенными выше уравнениями, при этом уравнения (1.6), (2.7) заменяются следующим

$$\left(\frac{Dw''}{[1 + (w')^2]^{3/2}} \right)'' + Nw'' - \theta w'' \left(\int_a^b \sqrt{1 + (w')^2} dx + a - b \right) + M\ddot{w} + \alpha \dot{w}'''' - \\ - \delta \dot{w}'' + f(y, t, w, \dot{w}) = P(\varphi), \quad y \in (a, b)$$

где $P(\varphi)$ – аэрогидродинамическое давление; $f(y, t, w, \dot{w})$ – заданная функция, характеризующая внешние воздействия, а также упругие и демпфирующие свойства основания («постели»); δ – коэффициент, учитывающий инерцию вращения сечений; штрих обозначает частную производную по x , точка – частную производную по t .

Вторая модель также предполагает использование уравнений линейной теории (1.1) – (1.6), (2.1) – (2.7), при этом уравнения (1.6), (2.7) заменяются системой двух уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} -EF \left[u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right]' + M\ddot{u} + \alpha_* \dot{u}'' + g(y, t, u, \dot{u}, w, \dot{w}) = 0 \\ -EF \left[w' \left(u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right) \right]' + \left(\frac{Dw''}{[1 + (w')^2]^{3/2}} \right)'' + M\ddot{u} + \alpha_0 \dot{w}'''' - \delta \ddot{w}'' + Nw'' - \\ - \theta w'' \left(\int_a^b \sqrt{1 + (w')^2} dx + a - b \right) + f(y, t, u, \dot{u}, w, \dot{w}) = P(\varphi), \quad y \in (a, b) \end{array} \right.$$

где $u(y, t)$, $w(y, t)$ – продольная и поперечная деформации упругого элемента; $P(\varphi)$ – аэрогидродинамическое давление; $g(y, t, u, \dot{u}, w, \dot{w})$, $f(y, t, u, \dot{u}, w, \dot{w})$ – заданные функции, характеризующие внешние воздействия, а также упругие и демпфирующие свойства подкрепляющих элементов; E – модуль упругости; F – площадь поперечного сечения; α_* , α_0 – коэффициенты продольного и поперечного внутреннего демпфирования.

Часть нелинейных математических моделей связана с заменой $[1 + (w')^2]^{-3/2}$ и $[1 + (w')^2]^{1/2}$ на $\left[1 - \frac{3}{2}(w')^2\right]$ и $\left[1 + \frac{1}{2}(w')^2\right]$ соответственно, а также с заменой этих выражений единицей.

Различные модификации моделей возникают также при выборе формы записи интеграла Лагранжа-Коши.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Vel'misov P. A. An investigation of mathematical models of a mechanical system "Pipeline-Pressure Sensor" / P. A. Vel'misov, Yu. V. Pokladova // Romai Journal. Pitești, Romania, 2005. – v.2, №1. – P.214-219.
2. Vel'misov P. A. Investigation of dynamics of an elastic element of a pressure sensor / P. A. Vel'misov, Yu. V. Pokladova // Applications of Mathematics in Engineering and Economics. – Soft trade, Sofia, Bulgaria, 2006. – P.51-57.
3. Анкилов А. В. Математические модели механической системы «трубопровод-датчик давления» / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2007. – №3. – С.7-14.
4. Анкилов А. В. Математическое моделирование механической системы «трубопровод-датчик давления» / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, В. Д. Горбоконенко, Ю. В. Покладова. Ульяновск: УлГТУ, 2008. – 188 с.
5. Покладова Ю. В. Математическое моделирование динамики упругого элемента датчика давления в трубопроводе конечной длины / Ю.В. Покладова, Ю. А. Решетников // Прикладная математика и механика: Сборник научных трудов. – Ульяновск: УлГТУ, 2004. – С.114-120.

Л. М. Магазинник, Н. Н. Ковальногов, М. А. Кузьмина (г. Ульяновск)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕПЛОТДАЧИ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ДИСПЕРСНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ

Впервые предложена методика расчета коэффициента восстановления температуры и теплоотдачи в высокоскоростных дисперсных потоках и проведен численный анализ влияния на них различных факторов. Обнаружена существенная зависимость коэффициента восстановления температуры и теплоотдачи от характера относительного движения фаз в дисперсном потоке (наличия или отсутствия направленного поперечного перемещения частиц в пограничном слое) и от коэффициентов скольжения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Движение высокоскоростного дисперсного потока (газа с распределенными в нем твердыми или жидкими частицами конденсированной фазы) имеет место в проточной части ракетных двигателей на твердом топливе, в парогазовых установках, в газотурбинных установках с полным или частичным использованием в качестве топлива измельченного каменного угля и т.п. Добавки в газовый поток конденсированных частиц могут быть использованы также с целью управления интенсивностью обменных процессов и процессов газодинамической температурной стратификации потоков [1].

Исследованию теплоотдачи дисперсного потока посвящено значительное число работ, но в большинстве из них рассматриваются потоки в прямых трубах и каналах постоянного сечения, в которых отсутствует направленное поперечное (инерционное) перемещение частиц в пограничном слое и которые движутся со сравнительно небольшой скоростью.

При движении дисперсного потока рабочего тела в каналах и около поверхностей сложной формы создаются условия для поперечного перемещения конденсированных частиц в пограничном слое и их инерционного выпадения на отдельные участки поверхности, что существенно интенсифицирует процессы теплообмена. Из литературных источников известно, что при движении дисперсного потока с соотношением расходов конденсированной и газовой фаз порядка 1 и менее присутствие частиц в потоке практически не отражается на интенсивности теплоотдачи с поверхностью прямых труб постоянного сечения. При такой же концентрации

частиц в условиях их инерционного выпадения на поверхность в опытах КАИ наблюдалась 2-х кратная интенсификация теплоотдачи в соплах, 4-х кратная – в криволинейных каналах, 6-и кратная – в трубах при наличии закрутки потока. В настоящее время известны единичные работы (см., например, [2], [3]), посвященные объяснению механизма столь существенной интенсификации теплоотдачи и созданию расчетных методик. Еще меньше работ, посвященно анализу влияния конденсированных частиц на коэффициент восстановления температуры высокоскоростных дисперсных потоков.

В этой связи в предлагаемой работе предложена методика расчета коэффициентов восстановления температуры и теплоотдачи в высокоскоростных дисперсных потоках и проведен численный анализ влияния на них различных факторов.

2. СОДЕРЖАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛИРОВКИ ЗАДАЧИ

Система уравнений, описывающих процесс движения и теплообмена дисперсного потока, представляется в форме уравнений пограничного слоя для несущей среды, содержащих внутренние источники теплоты и количества движения, отражающие влияние частиц:

– дифференциальное уравнение теплоотдачи

$$\alpha = -\frac{\lambda}{T_r - T_w} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}; \quad (1)$$

– дифференциальное уравнение энергии

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\lambda + \lambda_T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + (\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{dp}{dx} + q_v; \quad (2)$$

– дифференциальное уравнение движения

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{dp}{dx} + s_v; \quad (3)$$

– дифференциальное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0; \quad (4)$$

– уравнение состояния

$$\rho = p/(RT). \quad (5)$$

Здесь α , μ , ρ , c_p , R , λ , p – коэффициент теплоотдачи, динамический коэффициент вязкости, плотность, удельная изобарная теплоемкость, газовая

постоянная, коэффициент теплопроводности несущей среды, давление потока; u , v , T , T_r , T_w – продольная, поперечная составляющая скорости, термодинамическая температура потока, адиабатная температура стенки (температура восстановления), температура поверхности; x , y – продольная, поперечная координаты; λ_T , μ_T – коэффициент турбулентного переноса теплоты и количества движения соответственно.

Граничные условия на внешней границе пограничного слоя формулируются в виде

$$y = \infty: \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Граничные условия на обтекаемой поверхности при расчете адиабатной температуры стенки формулируются в виде

$$y = 0: u = 0; v = 0; \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

При расчете теплоотдачи граничные условия на поверхности задаются в виде

$$y = 0: u = 0; v = 0; T = T(x). \quad (8)$$

Граничные условия в исходном сечении пограничного слоя имеют вид

$$x = 0: y > 0; u = u_0; T = T_0. \quad (9)$$

Здесь T_0 , u_0 – значения термодинамической температуры и скорости потока в исходном сечении за пределами пограничного слоя.

Интенсивность внутренних источников теплоты q_v и количества движения s_v , входящих в уравнения энергии и движения пограничного слоя несущей среды дисперсного потока, определяется зависимостями, приведенными, например, в работе [4]

$$q_v = \frac{6}{\rho_B} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_{si} \rho_{si}}{d_{si}} (T_{si} - T); \quad (10)$$

$$s_v = \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_B} \sum_{i=1}^n \frac{\rho_{si} c_{fsi}}{d_{si}} |u_{si} - u| (u_{si} - u). \quad (11)$$

Для определения параметров ρ_s , u_s , T_s осуществляется расчет траекторий и параметров частиц нескольких (n) выделенных фракций в заданном поле несущей среды (методом последовательных приближений). В число этих фракций включается представительная фракция со среднемассовым размером частиц d_{sm} . Температура T_{sm} и скорость u_{sm} частиц представительной фракции используются для расчета комплексов A и B .

$$A = q_v / (T_{sm} - T); B = s_v / (u_{sm} - u). \quad (12)$$

Комплексы A и B изменяются (как по толщине пограничного слоя, так и в разных итерациях при уточнении поля течения несущей среды) значительно

слабее величин q_v и s_v . Поэтому найденные в предыдущем приближении значения комплексов A и B усредняются по анализируемому сечению пограничного слоя и эти усредненные значения используются для определения локальных параметров q_v и s_v по выражениям

$$q_v = a(T_{sm} - T); s_v = b(u_{sm} - u), \quad (13)$$

где a, b – усредненные по толщине пограничного слоя значения комплексов A и B .

Профили температуры T_{sm} и скорости u_{sm} частиц представительной фракции в сечениях пограничного слоя аппроксимируются зависимостями

$$u_{sm} = u_{sm\infty} \left[\varphi_u + (1 - \varphi_u) \frac{u}{u_\infty} \right]; \quad (14)$$

$$T_{sm} = T_{sm\infty} \left[\varphi_T + (1 - \varphi_T) \frac{T}{T_\infty} \right]. \quad (15)$$

Здесь φ_u, φ_T – коэффициенты, сохраняющие постоянные значения в анализируемом сечении пограничного слоя.

Коэффициенты φ_u и φ_T могут изменяться в диапазоне от 0 до 1 и зависят в основном от толщины пограничного слоя, размеров частиц и скорости их поперечного перемещения. Чем больше скорость поперечного перемещения частицы, ее диаметр и меньше толщина пограничного слоя, тем ближе к 1 значения этих коэффициентов. В тех областях, где скорость направленного поперечного перемещения частиц равна 0 (инерционное выпадение частиц на стенку отсутствует), коэффициенты φ_u и φ_T принимают значения, близкие к 0. Расчетное исследование в настоящей работе выполнено для условий $\varphi_u = \varphi_T = \varphi_s$, где параметр φ_s определяет характер относительного движения фаз (наличие или отсутствие инерционного выпадения конденсированных частиц на стенку).

После определения численных значений коэффициентов $a, b, \varphi_u, \varphi_T$ появляется возможность рассчитывать внутренние источники q_v и s_v в процессе интегрирования уравнений пограничного слоя с помощью выражений (4) – (6), а не автономно методом последовательных приближений. Значения этих коэффициентов зависят от структуры пограничного слоя значительно слабее величин q_v и s_v , поэтому использованием предлагаемого подхода для определения внутренних источников достигается высокая скорость сходимости результатов (малое, обычно не более 2-х, потребное число итераций).

Непосредственное влияние конденсированных частиц на коэффициенты турбулентного переноса в несущей среде в рамках предлагаемой методики не учитывалось. Коэффициенты турбулентного переноса количества движения

μ_T определяются на основе модифицированной модели пути смешения [3]. При этом коэффициент α в модели пути смешения определяется зависимостью

$$\alpha = \frac{0,4}{1 + 21,4 \frac{u_\infty \partial u_\infty / \partial x}{u_{0\infty} (\partial u / \partial y)_{y=0}}}. \quad (16)$$

Коэффициент турбулентного переноса теплоты λ_T связан с коэффициентом μ_T соотношением:

$$\lambda_T = \mu_T c_p / Pr_T. \quad (17)$$

В соответствии с работой П.Н. Романенко [5] турбулентное число Прандтля выражается зависимостью

$$Pr_T = \frac{\alpha (1 - \exp(-\eta / 26))}{0,44 \cdot (1 - \exp(-\eta / 34))}. \quad (18)$$

Здесь $\eta = \rho \nu_* y / \mu$ – безразмерная координата; $\nu_* = \sqrt{\tau_w / \rho_\infty}$ – динамическая скорость; τ_w – касательное напряжение трения на поверхности стенки.

Численное интегрирование системы уравнений, входящих в математическую формулировку задачи, осуществляется аналогично тому, как это сделано в работе [3].

3. ТЕСТОВЫЕ РАСЧЕТЫ

Тестирование методики и программных средств выполнено путем сопоставления расчетов коэффициента восстановления температуры и теплоотдачи на обтекаемой поверхности с опытными данными других авторов.

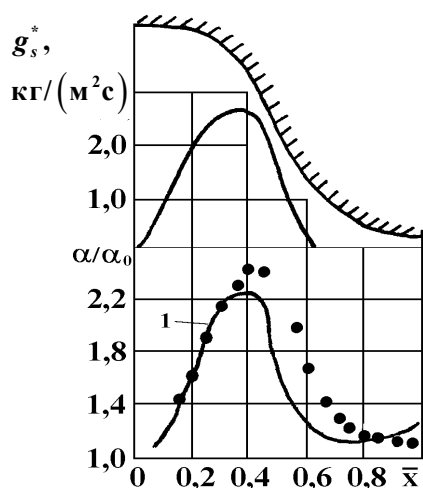


Рис. 1. Теплоотдача дисперсного потока в сопле: 1 – расчет по предлагаемой методике; ● – экспериментальные данные КАИ

Сопоставление расчета коэффициента теплоотдачи дисперсного потока в сопле с опытными данными КАИ приведено на рис. 1. Результаты сопоставления свидетельствуют о том, что расчет в целом адекватно отражает особенности обменных процессов в дисперсном пограничном слое.

Сопоставление расчета коэффициента восстановления температуры в сверхзвуковом однородном потоке с опытными данными П.Н. Романенко [5] представлено на рис. 2.

Согласно полученным данным имеет место удовлетворительное согласование

расчета коэффициента восстановления по предлагаемой модели с эмпирическими данными. Отличие составляет не более $\pm 5\%$.

На рис. 3 представлено сравнение расчета теплоотдачи по предлагаемой методике с эмпирическим уравнением подобию Л.В. Козлова [6].

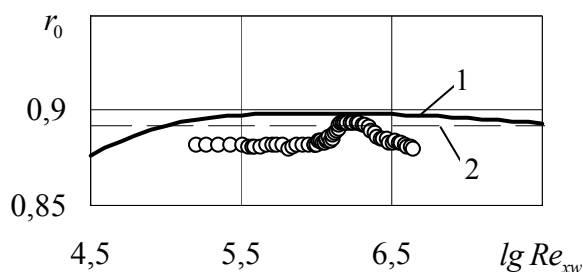


Рис. 2. Коэффициент восстановления температуры в сверхзвуковом однородном потоке: 1 – расчет по предлагаемой методике $M = 2,4$; 2 – расчет по выражению $r = \sqrt{Pr}$; \circ – экспериментальные данные Романенко П.Н. обтекания пластины воздухом с числом $M = 2,4$

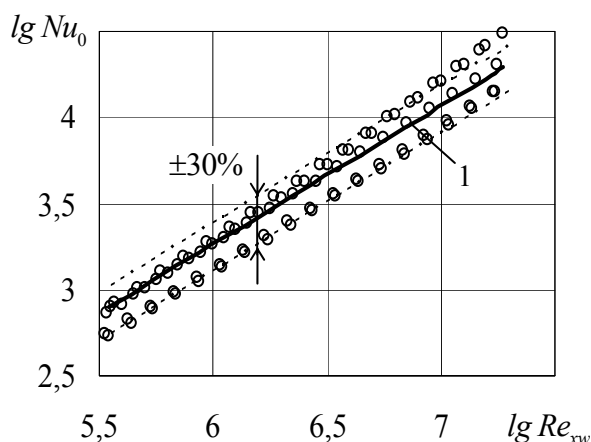


Рис. 3. Теплоотдача в сверхзвуковом однородном потоке: 1 – расчет по уравнению подобию Козлова; \circ – расчет по предлагаемой методике $M = 1,5 \div 3$, $T_w/T^* = 0,6 \div 0,9$

В результате проведенного тестирования (рис. 1, рис. 2, рис. 3) была установлена погрешность предлагаемой модели в сравнении с экспериментальными данными, которая составила $\pm 5\%$ по коэффициенту восстановления температуры и $\pm 30\%$ по теплоотдаче. Надо отметить, погрешность модели и численного метода существенно ниже (величина порядка $0,5\%$), а вышеприведенные величины обусловлены погрешностью самих эмпирических данных.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Численное исследование выполнено применительно к плоской поверхности, обтекаемой высокоскоростным дисперсным турбулентным потоком (несущая среда – воздух) с учетом зависимости теплофизических свойств несущей среды от температуры. Коэффициенты скольжения фаз в ядре потока по скорости $\varphi_{u\infty} = u_{sm\infty}/u_\infty$ и по температуре $\varphi_{T\infty} = T_{sm\infty}/T_\infty$ в расчетах полагались одинаковыми по всей поверхности. В первой серии расчетов моделировалась ситуация, сходная с восходящим движением дисперсного потока с перегретыми ($\varphi_{u\infty} = 0,95$, $\varphi_{T\infty} = 1,05$) и недогретыми ($\varphi_{u\infty} = 0,95$, $\varphi_{T\infty} = 0,95$) частицами без их инерционного выпадения на стенку ($\varphi_s = 0$). Во второй серии моделировалось движение дисперсного потока в условиях инерционного выпадения частиц дисперсной фазы на обтекаемую поверхность ($\varphi_s = 1$) при отсутствии скольжения фаз по продольной скорости

и температуре ($\varphi_{u_\infty} = \varphi_{T_\infty} = 1$) в ядре потока (на внешней границе пограничного слоя).

Анализ математической формулировки задачи методами теории подобия позволил выявить дополнительные обобщенные переменные (комплексы $Q = \frac{a\mu_0}{c_{p0}\rho_0^2 u_0^2}$ и $G = \frac{b\mu_0}{\rho_0^2 u_0^2}$), характеризующие тепловое и аэродинамическое воздействие частиц дисперсной фазы.

Во всех расчетах значения комплексов задавались постоянными по длине обтекаемой поверхности и равными друг другу ($Q = G$). Параметры заторможенного потока (давление и температура) в расчетах полагались постоянными ($p^* = 0,5 \text{ МПа}$; $T^* = 2000 \text{ К}$). Скорость потока в исходном сечении задавалась $u = 1500 \text{ м/с}$.

Результаты численного исследования влияния на коэффициент восстановления и теплоотдачу теплового и аэродинамического воздействия частиц дисперсной фазы представлены на рис. 4 – 7.

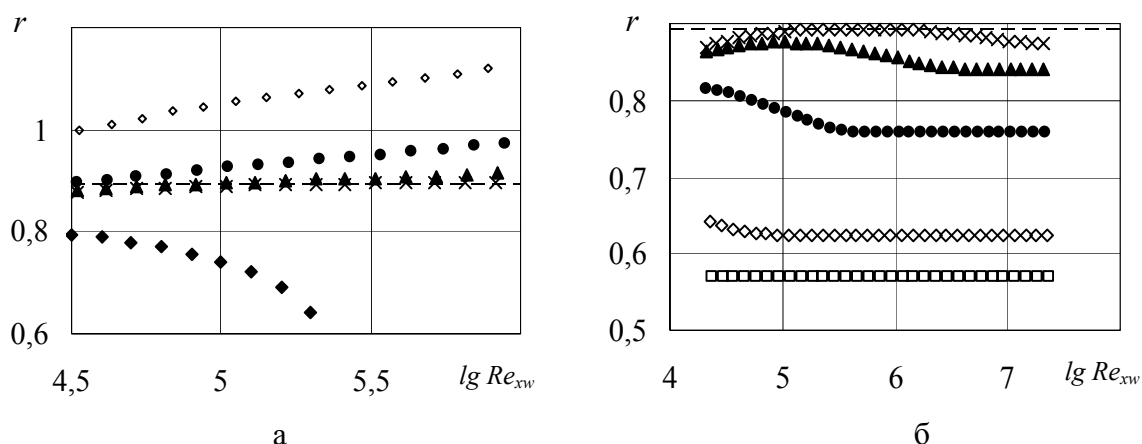


Рис. 4. Коэффициент восстановления температуры в высокоскоростном дисперсном потоке при отсутствии (а) и наличии (б) инерционного выпадения частиц на стенку: \times – численный расчет при $G = 0,5 \cdot 10^{-9}$, $\varphi_{u_\infty} = 0,95$, $\varphi_{T_\infty} = 1,05$; \blacktriangle – $0,5 \cdot 10^{-8}$; \bullet – $0,5 \cdot 10^{-7}$; \diamond – $0,5 \cdot 10^{-6}$; \square – $0,5 \cdot 10^{-5}$; \blacklozenge – $0,5 \cdot 10^{-6}$, $\varphi_{T_\infty} = 0,95$; пунктирная линия – расчет по выражению $r = \sqrt{Pr}$

Анализ результатов исследования позволяет отметить, что в дисперсном потоке коэффициенты восстановления существенно отличаются от тех, которые имеют место в однородном газовом потоке. При этом для течения без инерционного выпадения частиц (см. рис. 4, а) коэффициенты восстановления могут оказаться как больше, так и меньше своих значений в однородном потоке. Степень отличия определяется при этом интенсивностью внутренних источников теплоты и количества движения. В дисперсном потоке с инерционным выпадением частиц (см. рис. 4, б) коэффициенты восстановления оказываются ниже значений, соответствующих однородному газовому потоку.

Физическое объяснение явления снижения r в потоке с инерционным выпадением частиц можно дать следующее. Частицы перемещаются из области с меньшей температурой (высокоскоростного ядра потока) в пристенную область с повышенной (за счет тепловыделения при торможении газа в пограничном слое) температурой и способствуют ее охлаждению. Таким образом, снижается температура восстановления, а значит и величина r .

Зависимость коэффициента восстановления температуры в дисперсном потоке от параметра φ_s представлена на рис. 5.

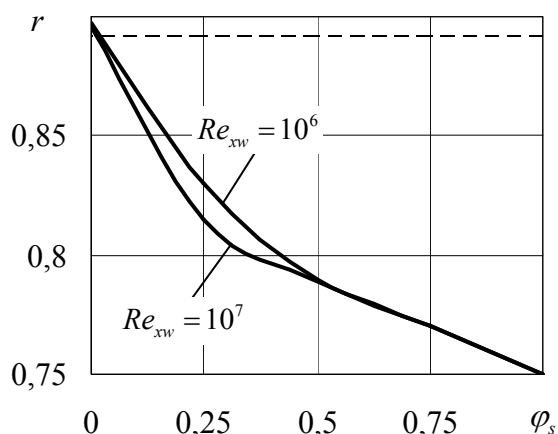


Рис. 5. Влияние параметра φ_s на коэффициент восстановления температуры ($G = 0,5 \cdot 10^{-7}$): пунктирная линия – расчет по выражению $r = \sqrt[3]{Pr}$ располагается в области погрешности исследования.

Согласно полученным данным, с увеличением коэффициента φ_s коэффициент восстановления температуры снижается. Максимальное снижение r может достигать 15%.

При этом при различных числах Re (в нашем случае на различном удалении от передней кромки поверхности) характер зависимости остается одинаковым, а значения r могут отличаться не более чем на 5%.

Из рис. 6, а видно что влияние на теплоотдачу различных величин теплового и аэродинамического воздействий частиц дисперсной фазы оказывается пренебрежимо мало и

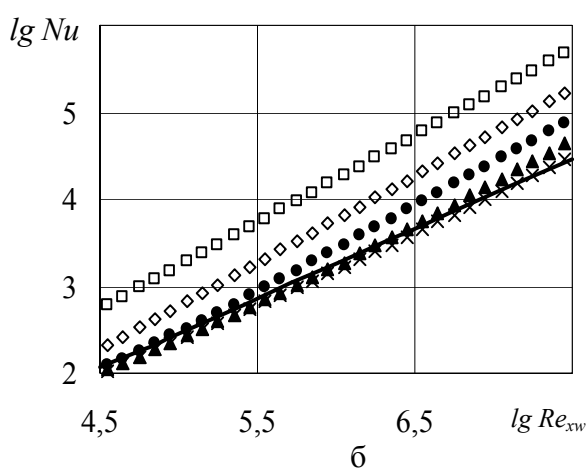
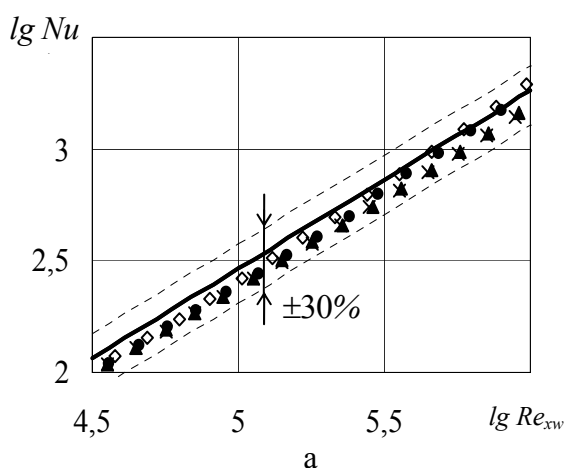


Рис. 6. Теплоотдача высокоскоростного дисперсного потока при отсутствии (а) и наличии (б) инерционного выпадения частиц: сплошная линия – расчет по уравнению Козлова; остальные обозначения такие же, как на рис. 4

Анализ представленных на рис. 6, б результатов позволяет отметить, что в условиях инерционного выпадения частиц достигается 9-кратная интен-

сификация теплоотдачи. При этом степень влияния числа Re_{xw} на число Nu при достаточно больших значениях комплексов Q и G возрастает с 0,8 до 1,0.

Результаты исследования влияния φ_s на теплоотдачу дисперсного высокоскоростного потока представлены на рис. 7.

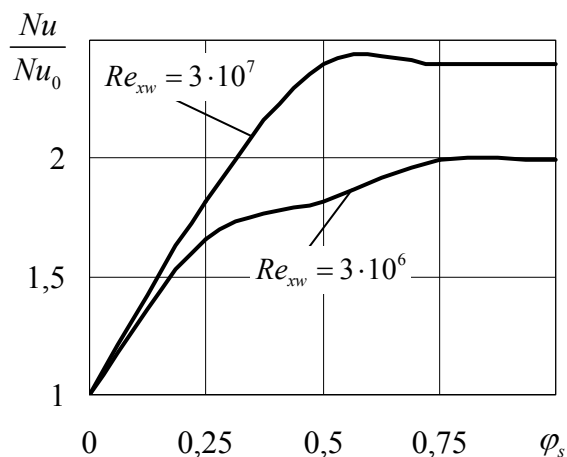


Рис. 7. Влияние параметра φ_s на теплоотдачу ($G = 0,5 \cdot 10^{-7}$)

Анализ полученных данных позволяет отметить, что имеет место интенсификация теплоотдачи с увеличением φ_s .

В исследованном диапазоне φ_s можно выделить три характерных участка. Первый участок $\varphi_s \leq 0,25$: интенсивность роста теплоотдачи практически не зависит от Re и самая высокая во всем исследованном диапазоне. Второй участок $\varphi_s = 0,25 \div 0,75$: ослабление роста. Проявляется зависимость от Re , рост теплоотдачи существенно выше при больших Re . Третий участок $\varphi_s \geq 0,75$: рост теплоотдачи отсутствует вовсе.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе предложенной методики проанализировано влияние конденсированных частиц на коэффициенты восстановления температуры и теплоотдачу высокоскоростного дисперсного потока. Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013 г.г.), ГК № П1122.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пат. №2334178 Российская Федерация: МПК F25B 9/02 (2006.01) Сверхзвуковая труба температурной стратификации / Ковальногов Н. Н., Магазинник Л. М., Федоров Р. В.; заявитель и патентообладатель Ульянов. гос. тех. ун-т. – № 2007108799/06; опубл. 20.09.2008, Бюл. № 26.
2. Щукин В. К., Ковальногов Н. Н., Филин В. А. Теплоотдача газозвеси в соплах // Изв. вузов. Авиационная техника. 1979. № 3. С. 61 – 66.
3. Ковальногов Н. Н. Пограничный слой в потоках с интенсивными воздействиями. Ульяновск: Изд-во УлГТУ. 1996. 246 с.
4. Ковальногов Н. Н., Магазинник Л. М. Численный анализ коэффициентов восстановления температуры и теплоотдачи в турбулентном дисперсном потоке // Изв. вузов. Авиационная техника. 2008. № 2. С. 32 – 36.
5. Романенко П. Н. Тепломассообмен и трение при градиентном течении жидкостей. М.: Энергия, 1971. 568 с.
6. Мухачев Г. А., Щукин В. К. Термодинамика и теплопередача. М.: Высш. школа. 1991. 480 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ф.И.О	Ученая степень, ученое звание, место работы
Анкилов А. В.	<i>Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета.</i>
Бадюкина Т. Е.	<i>Аспирантка кафедры «Прикладная математика» Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева.</i>
Барыкина Е. И.	<i>Аспирантка кафедры «Физика» Ульяновского государственного технического университета.</i>
Браже Р. А.	<i>Доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой «Физика» Ульяновского государственного технического университета; e-mail: brazhe@ulstu.ru.</i>
Vasilev N. B.	<i>Head of department of computer systems, technical university of Sofia, branch in Plovdiv.</i>
Вельмисов И. А.	<i>Канд. военных наук, профессор, полковник.</i>
Вельмисов П. А.	<i>Доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета.</i>
Голованов А. И.	<i>Доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической механики Казанского государственного университета.</i>
Гришина А. А.	<i>Ассистент кафедры «Физика» Ульяновского государственного технического университета; e-mail: a.elizarova@ulstu.ru.</i>
Гурьянов М. В.	<i>Канд. техн. наук, инженер-конструктор отдела шасси ОАО «УАЗ».</i>
Егоров Г. А.	<i>Магистрант кафедры «Теоретическая физика» Ульяновского государственного университета</i>
Емельянова Т. В.	<i>Старший преподаватель кафедры «Архитектура» Тюменского государственного архитектурно - строительного университета.</i>
Ефремов И. И.	<i>Доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: i.efremov@math.kubsu.ru.</i>
Журавлев В. М.	<i>Доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры «Теоретическая физика» Ульяновского государственного университета, e-mail: zhvictorm@mail.ru</i>
Журавлев А. В.	<i>Аспирант кафедры «Теоретическая физика» Ульяновского государственного университета, e-mail: zhvictorm@mail.ru.</i>
Зиннурова Э. Р.	<i>Студентка 5 курса Ульяновского государственного технического университета, специальность «Прикладная математика».</i>
Иванисова О. В.	<i>Преподаватель кафедры вычислительной математики и информатики факультета математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета, e-mail: zah-ivanisov@yandex.ru.</i>
Иванов Э. Г.	<i>Аспирант кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Чувашского государственного университета.</i>

Кавеев И. Н.	<i>Аспирант кафедры систем автоматизированного проектирования Ульяновского государственного технического университета.</i>
Казакова Ю. А.	<i>Аспирант кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета.</i>
Каранджулов Л. И.	<i>Доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры «Дифференциальные уравнения» Софийского технического университета, e-mail: likar@tu-sofia.bg.</i>
Ким-Тян Л. Р.	<i>Канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель кафедры «Высшая математика» национального исследовательского технологического университета «Московский государственный институт стали и сплавов»</i>
Ковальногов Н. Н.	<i>Доктор техн. наук, профессор, зав. кафедрой «Теплоэнергетика» Ульяновского государственного технического университета, e-mail: nnk@ulstu.ru.</i>
Корнилов Д. А.	<i>Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Физика» Димитровградского филиала Ульяновского государственного университета.</i>
Крашенинников В.Р.	<i>Доктор техн. наук, профессор, зав. кафедрой систем автоматизированного проектирования Ульяновского государственного технического университета, e-mail: kvr@ulstu.ru.</i>
Кузьмина М. А.	<i>Студентка 4 курса Ульяновского государственного технического университета, специальность «Теплоэнергетика».</i>
Лазарева О. А.	<i>Аспирантка кафедры систем автоматизированного проектирования Ульяновского государственного технического университета.</i>
Листрова К. С.	<i>Аспирантка кафедры «Теоретическая и прикладная механика» Ульяновского государственного технического университета.</i>
Логинов Б. В.	<i>Доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета.</i>
Лукащик Е. П.	<i>Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий Кубанского государственного университета, e-mail: ler@fpm.kubsu.ru.</i>
Магазинник Л. М.	<i>Аспирант кафедры «Теплоэнергетика» Ульяновского государственного технического университета, e-mail: lev_73_07@mail.ru</i>
Малинов В. Г.	<i>Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры ММиИТ Ульяновского государственного университета; e-mail: vgmalinov@mail.ru.</i>
Манжосов В. К.	<i>Доктор техн. наук, профессор, зав. кафедрой «Теоретическая и прикладная механика» Ульяновского государственного технического университета.</i>
Маценко П. К.	<i>Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета.</i>

Мефтахутдинов Р. М.	<i>Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Физика» Ульяновского государственного технического университета.</i>
Молгачев А. А.	<i>Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета.</i>
Никитин А. В.	<i>Аспирант кафедры «Теоретическая физика» Ульяновского государственного университета.</i>
Покладова Ю. В.	<i>Канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета.</i>
Решетников Ю. А.	<i>Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета.</i>
Русак Ю. Б.	<i>Канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Австралийского национального университета, г. Канберра, Австралия.</i>
Сагдатуллин М.К.	<i>Аспирант кафедры теоретической механики Казанского государственного университета.</i>
Сагдеева Ю. К.	<i>Студентка 4 курса Ульяновского государственного технического университета, специальность «Прикладная математика».</i>
Самойлов В. В.	<i>Канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель кафедры «Теоретическая физика» Ульяновского государственного университета.</i>
Санкин Ю. Н.	<i>Доктор техн. наук, профессор кафедры «Теоретическая и прикладная механика» Ульяновского государственного технического университета.</i>
Седова Н. О.	<i>Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационной безопасности и теории управления Ульяновского государственного университета.</i>
Семенов А. С.	<i>Канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета.</i>
Старостин Д. В.	<i>Студент 4-го курса физико-математического факультета Ульяновского государственного педагогического университета.</i>
Ташлинский А. Г.	<i>Доктор техн. наук, профессор кафедры систем автоматизированного проектирования Ульяновского государственного технического университета.</i>
Учайкин В. В.	<i>Доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой «Теоретическая физика» Ульяновского государственного университета.</i>
Фундаев С. В.	<i>Аспирант кафедры «Теоретическая физика» Ульяновского государственного университета.</i>
Хорева А. М.	<i>Студентка Ульяновского государственного технического университета, специальность «Прикладная математика».</i>
Шляпин В. А.	<i>Аспирант кафедры «Теоретическая физика» Ульяновского государственного университета.</i>

СОДЕРЖАНИЕ

А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов (г. Ульяновск) Численно-аналитическое исследование динамической устойчивости упругой пластины при аэрогидродинамическом воздействии	3
Е. И. Барыкина, Р. А. Браже, Р. М. Мефтахутдинов (г. Ульяновск) Распространение электромагнитных волн в двумерных нанокристаллах	23
Р. А. Браже, А. А. Гришина (г. Ульяновск) Явления переноса в двумерных нанокристаллах	29
Н. В. Vasilev (г. София, Болгария) Insignificant variables of boolean functions	38
И. А. Вельмисов (г. Санкт-Петербург) Некоторые подходы к определению функциональной надежности специалистов управления воздушным движением	45
А. И. Голованов, М. К. Сагдатуллин (г. Казань) Постановка задачи численного моделирования конечных гиперупругих деформаций МКЭ	55
И. И. Ефремов, Е. П. Лукащик (г. Краснодар) Об одностороннем распространении поверхностных волн, возбуждаемых колеблющейся пластиной	67
В. М. Журавлев, В. А. Шляпин (г. Ульяновск) Метод сопряженных функций в стохастической динамике одномерных нелинейных систем и принцип вторичного максимума энтропии	73
В. М. Журавлев, А. В. Журавлев, Д. А. Корнилов, А. В. Никитин, В. В. Самойлов (г. Ульяновск) Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа в теории нелинейных дискретных систем	89
В. М. Журавлев, А. В. Журавлев, С. В. Фондаев, Г. А. Егоров (г. Ульяновск) Оценивание погрешности авторегрессионных спектров	104
О. В. Иванисова (г. Краснодар) Кавитационное обтекание тонкого профиля под свободной поверхностью весомой жидкости	109
Э. Г. Иванов (г. Чебоксары) Решение третьей основной задачи теории упругости для клина с помощью степенных рядов	118

Л. И. Каранджулов (г. София, Болгария) Краевая задача для импульсных нелинейных сингулярно возмущенных систем	129
В. Р. Крашенинников (г. Ульяновск) Численное решение уравнений движения подводного буксировочного кабеля	150
К. С. Листрова, В. К. Манжосов (г. Ульяновск) Элементная модель при моделировании продольного удара стержня о жесткую преграду	160
Б. В. Логинов, Д. В. Старостин (г. Ульяновск) Бифуркационная задача об устойчивости колонны под действием её веса с учётом симметрии поперечного сечения	173
В. Г. Малинов (г. Ульяновск) Численное решение задачи об оптимальном развороте самолёта в плоскости горизонта	181
П. К. Маценко (г. Ульяновск) О дифференциальном операторе первого порядка с возмущением, зависящим от дифференциального оператора высшего порядка	191
Ю. А. Решетников (г. Ульяновск) Теорема площадей для одного класса квазиконформных отображений	201
Ю. Б. Русак (г. Канберра, Австралия), Б. В. Логинов (г. Ульяновск), Л. Р. Ким-Тян (г. Москва). Обобщенные жордановы цепочки специального вида линейной оператор-функции спектрального параметра	205
Ю. Н. Санкин, М. В. Гурьянов (г. Ульяновск) Определение коэффициента внутреннего рассеяния энергии в материале физического маятника при помощи анализа виброударного процесса, возникающего при его ударе о жёсткое препятствие	218
Н. О. Седова (г. Ульяновск) Пары Ляпунова-Разумихина в исследовании устойчивости решений уравнений с неограниченным запаздыванием	222
А. С. Семенов (г. Ульяновск) Аналитическое решение задачи о брахистохроне с ограничением как задачи оптимального управления с ограничением на фазовые координаты	238

<i>А. Г. Ташлинский, И. Н. Кавеев, А. М. Хорева</i> (г. Ульяновск) Оптимизация плана взятия отсчетов при оценивании межкадровых геометрических деформаций изображений	246
<i>А. Г. Ташлинский, О. А. Лазарева</i> (г. Ульяновск) Сходимость оценок параметров межкадровых деформаций изображений при псевдоградиентном оценивании	256
<i>В. В. Учайкин</i> (г. Ульяновск) Метод вариационного интерполирования в обобщенной теории переноса (I)	267
<i>Т. Е. Бадюкина</i> (г. Саранск), <i>Б. В. Логинов</i> (г. Ульяновск) О потере устойчивости пластины-полосы с жестко закрепленными и шарнирно закрепленными краями в сверхзвуковом потоке газа, сжимаемой или растягиваемой внешними краевыми усилиями	278
<i>П. А. Вельмисов, Ю. А. Казакова, Ю. К. Сагдеева</i> (г. Ульяновск) О некоторых классах решений уравнений аэрогидромеханики	285
<i>Т. В. Емельянова</i> (г. Тюмень) Математическое моделирование деформированного состояния вязкоупругого водонасыщенного основания	292
<i>А. А. Молгачев</i> (г. Ульяновск) Экранный эффект при аэродинамическом обтекании тонкого профиля вблизи дорожного полотна	297
<i>П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова</i> (г. Ульяновск) О некоторых математических моделях механической системы «трубопровод – датчик давления»	302
<i>Л. М. Магазинник, Н. Н. Ковальногов, М. А. Кузьмина</i> (г. Ульяновск) Математическая модель и некоторые результаты численного исследования теплоотдачи высокоскоростных дисперсных турбулентных потоков в энергетических установках	309
Сведения об авторах	318

Требования к оформлению
электронных текстов статей в сборник научных трудов
«Прикладная математика и механика»

1. Объем текста статьи – до 15 страниц.
 2. **Редактор – Microsoft Word 2000, 2003. Формат А4. Шрифт – Times New Roman (14).** Межстрочный интервал – одинарный (Word). **Поля –** левое, правое, верхнее – **25 мм**, нижнее – **30 мм**. Отступ (красная строка) – **10 мм**.
 3. **Установки редактора формул:** размеры: **14 – 11 – 9 – 16 - 11**, стиль переменных и функций – курсив. Текст статьи может содержать рисунки и графики в графическом формате с подрисуночными названиями. Номера формул указываются в скобках с правой стороны, формулы центрируются. Выравнивание по ширине.
 4. С первой строки УДК работы (от левого края), далее пустая строка, И. О. Фамилия авторов (строчными буквами, от левого края, полужирный шрифт), далее пустая строка, НАЗВАНИЕ (прописными буквами, от левого края, полужирный шрифт), далее пустая строка, затем **обязательно краткая аннотация работы** до 10 строк (строчными буквами, по ширине, курсив, шрифт Times New Roman 12), далее пустая строка, затем текст статьи, далее пустая строка, затем **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**.
 5. Дискету с файлами, содержащими текст статьи и сведения об авторах (научная степень, научное звание, должность, место работы, e-mail авторов) необходимо предоставить на кафедру «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета по адресу: г. Ульяновск, ул. Северный венец, 32, Вельмисову П. А. Файлы можно также выслать на электронный адрес velmisov@ulstu.ru
 6. *Тексты статей, оформленные с нарушениями данных требований, не включаются в сборник научных трудов.*
-

Научное издание
Прикладная математика и механика
Сборник научных трудов

Подписано в печать 22.12.2009. Формат 60x84/16.
Бумага писчая. Усл. печ. л. . Тираж 150 экз. Заказ .

Ульяновский государственный технический университет
432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.
Типография УлГТУ, 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.