

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Научно-методический совет по математике МОН РФ

Российская академия естественных наук

Средневолжское математическое общество

# **ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Сборник научных трудов

Ульяновск  
УлГУ  
2011

УДК 51 (04)  
ББК 22 я43  
П75

**Рецензенты:**

Д-р. физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой «Прикладная математика»  
Ульяновского государственного университета А. А. Бутов

Д-р техн. наук, профессор кафедры «Информационные технологии»  
Ульяновского государственного университета И. В. Семушин

**Редакционная коллегия:**

А. С. Андреев (г. Ульяновск), А. В. Анкилов (г. Ульяновск, отв. секретарь),  
В. И. Астафьев (г. Самара), И. В. Бойков (г. Пенза), К. К. Васильев (г. Ульяновск),  
П. А. Вельмисов (г. Ульяновск, отв. редактор), П. К. Волков (г. Ханты-Мансийск),  
Ю. Н. Горелов (г. Самара), Ю. П. Гупало (г. Москва), Ю. Н. Дерюгин (г. Саратов),  
А. Г. Егоров (г. Казань), А. Н. Зарубин (г. Орел), В. А. Иванов (г. Казань),  
Л. И. Каранджулов (г. София, Болгария), А. В. Карапетян (г. Москва),  
Л. Ю. Коссович (г. Саратов), П. С. Красильников (г. Москва), В. Р. Крашенинников  
(г. Ульяновск), В. Л. Леонтьев (г. Ульяновск), Б. В. Логинов (г. Ульяновск),  
В. К. Манжосов (г. Ульяновск), С. И. Мартынов (г. Ханты-Мансийск),  
Л. И. Могилевич (г. Саратов), В. П. Радченко (г. Самара), Ю. Н. Санкин  
(г. Ульяновск), Ю. Э. Сеницкий (г. Самара), А. П. Солдатов (г. Белгород),  
Л. А. Сухарев (г. Саранск), В. Ф. Тишкин (г. Москва), М. Д. Тодоров (г. София,  
Болгария), В. В. Учайкин (г. Ульяновск), О. П. Филатов (г. Самара), Д. Я. Хусаинов  
(г. Киев), Б. И. Чешанков (г. София, Болгария), П. А. Шаманаев (г. Саранск),  
Г. П. Шиндяпин (г. Саратов), А. Г. Ягола (г. Москва).

УДК 51(04)

**Прикладная** математика и механика : сборник научных трудов. – Ульяновск :  
УлГТУ, 2011. – 505 с.

В сборнике (выпуск 9) представлены статьи, посвященные аналитическим и численным методам решения задач механики сплошных сред (механики твердого деформируемого тела, газовой динамики, аэрогидроупругости). Часть работ посвящена проблемам устойчивости, оптимальному управлению, методам оптимизации, математической физике, теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

Для специалистов в области прикладной математики и механики.

Выпуск сборника посвящен 55-летию Ульяновского государственного технического университета и 50-летию кафедры «Высшая математика» УлГТУ.

Статьи печатаются в авторской редакции.

ISBN 978-5-9795-0904-4

© Колл. авторов

© Оформление. УлГТУ, 2011

## **К 50-ЛЕТИЮ КАФЕДРЫ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» УЛЬЯНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

Кафедра «Высшая математика» в структуре вуза начала свою деятельность в 1957 г. в составе кафедры «Высшая математика и теоретическая механика». Как самостоятельное структурное подразделение кафедра «Высшая математика» начала функционировать 19.06.1962 г.

### ***Заведующие кафедрой:***

Чернова М. Л. (1962 – 1964), Водогрецкая В. Б. (1964 – 1965), Гурьянов И. Н. (1965 – 1968), Воробьев Е. А. (1968 – 1970), Чумакин М. Е. (1970 – 1971), Крашенинников В. Р. (1971 – 1974, 1975 – 1976), Семенов А. С. (1974 – 1975), Лукомский С.Ф. (1976 – 1978), Савинов Н. В. (1978 – 1979), Вельмисов П. А. (с 1980 г. по настоящее время).

### ***СОСТАВ КАФЕДРЫ В НАСТОЯЩЕЕ ВРЕМЯ:***

***Сотрудники:*** Анкилов А. В., к.ф.-м.н., доцент; Васильева А. А., ассистент; Веденеева М. В., лаборант; Вельмисов П. А., д.ф.-м.н., профессор – зав. кафедрой; Захарова А. Б., уч. мастер; Киреев С. В., к.ф.-м.н., доцент; Коноплева И. В., к.ф.-м.н., доцент; Крашенинников В. Р., д.т.н., профессор; Крашенинникова Л. А., ст. преподаватель; Леонтьев В. Л., д.ф.-м.н., профессор; Логинов Б. В., д.ф.-м.н., профессор; Маценко П. К., к.ф.-м.н., доцент; Молгачев А. А., к.ф.-м.н., доцент; Покладова Ю. В., к.ф.-м.н., доцент; Распутько Т. Б., к.ф.-м.н., доцент; Савинов Н. В., к.ф.-м.н., доцент; Сагдеева Ю. К., ассистент; Селиванов В. В., к.т.н., доцент; Семенов А. С., к.ф.-м.н., профессор; Серебрянникова Е. С., ассистент; Сибирева А. Р., к.ф.-м.н., доцент; Суетина Н. Л., ст. преподаватель; Тимошин М. И., к.ф.-м.н., доцент.

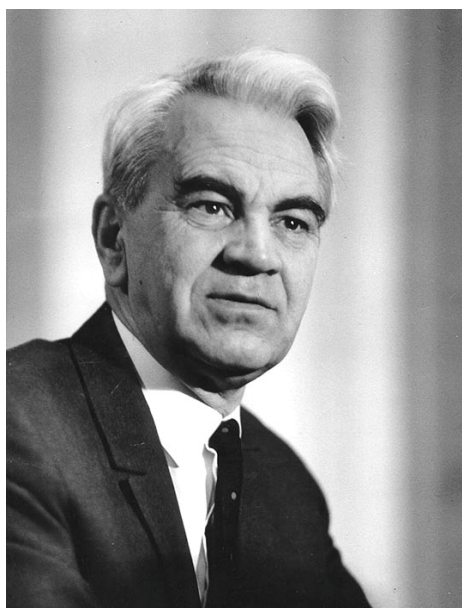
***Аспиранты:*** Буздалова Н. В., Васильева А. А., Захарова А. Б., Казакова Ю. А., Кувшинова А. Н., Родина Л. Е., Сагдеева Ю. К., Шарова С. В.

Область научных интересов сотрудников кафедры: дифференциальные уравнения, математическая физика, функциональный анализ, математическое моделирование, механика сплошных сред, устойчивость, асимптотические методы, приложения в технике и естествознании.

На кафедре функционирует аспирантура по трем специальностям: «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (05.13.18), «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» (01.01.02), «Механика жидкости, газа и плазмы» (01.02.05), издаются сборники научных трудов «Прикладная математика и механика», «Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании». Сотрудники кафедры являются членами нескольких докторских диссертационных советов, действительными членами и членами-корреспондентами нескольких общественных академий, членами

математических обществ (GAMM – Германия, AMS – США, СВМО – Россия), входят в состав Научно-методического совета по математике Министерства образования и науки РФ и его регионального отделения по Ульяновской области. В период с 1985 г. по настоящее время девять сотрудников кафедры защитили докторские диссертации (**Васильев К. К., Лукомский С. Ф., Летавин М. И., Крашенинников В. Р., Вельмисов П. А., Игошин В. И., Ишмухаметов Ш. Т., Чубурин Ю. П., Галеев Р. С.**).

**К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ  
МСТИСЛАВА ВСЕВОЛОДОВИЧА КЕЛДЫША  
(1911-1978)**



КЕЛДЫШ, МСТИСЛАВ ВСЕВОЛОДОВИЧ (1911-1978). Советский ученый в области математики, механики, космической науки и техники, государственный деятель, организатор науки.

Родился 29 января (10 февраля) 1911 в Риге в семье адъюнкт-профессора Рижского политехнического института, крупного инженера-строителя (впоследствии академика архитектуры) Всеволода Михайловича Келдыша. Мать — Мария Александровна (урожденная Скворцова) — домохозяйка. В 1915 семья Келдышей переехала из прифронтовой Риги в Москву. В 1919-1923 Келдыш жил в Иваново, где отец преподавал в политехническом институте, организованном по инициативе М.В.Фрунзе. В Иваново начал обучение в средней школе, получив необходимую начальную подготовку в домашних условиях у Марии Александровны. По возвращении в Москву (1923) учился в школе со строительным уклоном, летом ездил с отцом на стройки, работал разнорабочим. Склонность к математике у Келдыша проявилась еще в 7-8-м классах, учителя уже тогда отличали его незаурядные способности к точным наукам.

В 1927 окончил школу и хотел получить нравившуюся ему отцовскую профессию инженера-строителя, однако в строительный институт, где преподавал отец, его не приняли по молодости лет (всего 16). По совету старшей сестры Людмилы, закончившей физико-математический факультет Московского государственного университета, занимавшейся математикой под научным руководством Н.Н.Лузина, он поступает на тот же факультет МГУ. Во время учебы в университете Келдыш завязал научные контакты

с М.А.Лаврентьевым, переросшие потом в многолетнее научное сотрудничество и дружбу. С весны 1930 он одновременно с учебой начал работать ассистентом в Электромашиностроительном институте, затем еще и в Станко инструментальном институте (СТАНКИН).

По окончании МГУ в 1931 по рекомендации академика А.И.Некрасова Келдыш был направлен в Центральный аэрогидродинамический институт имени Н.Е.Жуковского (ЦАГИ). Научную жизнь ЦАГИ в это время возглавлял С.А.Чаплыгин, под его руководством регулярно проводился семинар. Участниками семинара были также М.А.Лаврентьев, Н.Е.Кочин, Л.С.Лейбензон, А.И.Некрасов, Г.И.Петров, Л.И.Седов, Л.Н.Сретенский, Ф.И.Франкль, С.А.Христианович; многие из них впоследствии стали известными учеными-механиками. Келдыш проработал в ЦАГИ до декабря 1946 сначала инженером, затем — старшим инженером, начальником группы, а с 1941 — начальником отдела динамической прочности.

Начальный период работы Келдыша в ЦАГИ связан с исследованиями нелинейных задач обтекания. В работах этого цикла *Внешняя задача Неймана для нелинейных эллиптических уравнений с приложением к теории крыла в сжимаемой газе* (1934) и *Строгое обоснование теории винта Жуковского* (1935) (выполненных в соавторстве с Ф.И.Франклем), *К теории колеблющегося крыла* (1935, совместно с М.А.Лаврентьевым) впервые было строго рассмотрено влияние сжимаемости среды на аэродинамические характеристики обтекаемых тел и обобщена известная теорема Жуковского о подъемной силе; впервые установлено, что при определенных режимах колебаний крыла возникает тяга. Он занимался теорией удара тела о жидкость и движением тел под поверхностью жидкости (поплавков гидросамолета, подводное крыло).

Продолжая работать в ЦАГИ, Келдыш поступил осенью 1934 в аспирантуру (дополненную затем двухлетней докторантурой) Математического института имени В.А.Стеклова АН СССР к Лаврентьеву, где занимался вопросами теории приближений функций, тесно связанными с прикладной тематикой его работы (гидро-, аэродинамика). В 1935 ему без защиты присвоена ученая степень кандидата физико-математических наук, в 1937 — степень кандидата технических наук и звание профессора по специальности "аэродинамика". 26 января 1938 им была защищена докторская диссертация на тему *О представлении рядами полиномов функций комплексного переменного и гармонических функций*.

Репрессии 1930-х не обошли стороной семью Келдышей. В 1935 несколько дней в заключении провела Мария Александровна, в стране проходила компания по изъятию у населения золота. В 1936 был арестован брат Михаил, в то время аспирант исторического факультета университета, изучавший средневековую Германию. Он получил 10 лет без права переписки (как установлено впоследствии, был расстрелян весной 1937). В

1938 по обвинению в шпионаже был арестован брат Александр, затем обвинение было изменено на антисемитизм. В суде, тем не менее, обвинения были сняты, и он вышел на свободу.

Цикл работ Келдыша и его сотрудников предвоенных и военных лет посвящен колебаниям и автоколебаниям авиационных конструкций. Его исследования заложили основы методов численного расчета и моделирования в аэродинамических трубах явления флаттера (сильные колебания крыльев самолета, возникавшие при определенных скоростях движения самолета и приводившие к его разрушению). Результаты Келдыша не только привели к разработке простых и надежных мер предотвращения флаттера, но и стали основой нового раздела науки о прочности авиационных конструкций. Известно, что в германской авиации в период 1935-1943 зафиксировано 146 аварий из-за флаттера. В процессе работы группе Келдыша пришлось выдержать напряженную полемику, оппоненты обращались в высокие инстанции (вплоть до ЦК ВКП (б)).

Результаты работы Келдыша сыграли большую роль в создании скоростной авиации в нашей стране.

В октябре 1941 Келдыш с женой Станиславой Валериановной и тремя детьми в числе других сотрудников ЦАГИ был эвакуирован в Казань, где продолжил работу. В апреле 1942 ему была присуждена Сталинская премия II степени за научные работы по предупреждению разрушения самолетов. В годы войны наряду с научно-экспериментальными исследованиями в ЦАГИ занимался внедрением разработанных рекомендаций в самолетные КБ и на авиационные заводы. Эта его деятельность была отмечена орденами Трудового Красного Знамени (1943) и Ленина (1945). В 1944 Келдыш был награжден медалью "За оборону Москвы".

К исследованиям авиационных колебаний и флаттера тесно примыкают его исследования устойчивости переднего колеса трехколесного шасси, позволившие предложить целесообразные и простые конструктивные мероприятия для устранения шиммирования (самовозбуждающихся поворотов и смещений) колеса самолета при взлете или посадке, которое приводило к разрушению переднего шасси самолета. По имеющимся данным, в немецкой авиации было более 150 аварий, связанных с "шимми", в отечественной — ни одной. В 1946 за исследования в этой области ему вторично присуждена Сталинская премия II степени.

Успех прикладных работ Келдыша обусловлен не только его глубокой интуицией инженера-механика и экспериментатора, но и выдающимся талантом математика, тонкого теоретика и творца вычислительных алгоритмов и методов. И наоборот, многие его фундаментальные математические исследования имеют своим истоком проблемы, возникшие из его работ по механике. Как математик Келдыш внес свой вклад в теорию функций, теорию потенциала, дифференциальные уравнения,

функциональный анализ. Большое значение имеют результаты Келдыша в механике, охватывающие гидродинамику, аэродинамику, газовую динамику, механику самолетных конструкций. Многому научился Келдыш в общении с конструкторами самолетов, в первую очередь, С.А.Лавочкиным и А.Н.Туполевым.

В сентябре 1943 Келдыш избран членом-корреспондентом АН СССР по Отделению физико-математических наук. В июне 1944 стал заведующим незадолго перед тем созданным отделом механики в Математическом институте АН СССР и оставался в этой должности до 1953. При отделе работал научный семинар, объединивший специалистов по аэромеханике. Одновременно возобновил преподавательскую деятельность в МГУ, начавшуюся в 1932, он читал лекции на механико-математическом и физико-техническом факультетах, заведовал кафедрой термодинамики, руководил научно-исследовательским семинаром по теории функций комплексного переменного. С 1942 по 1953 Келдыш — профессор МГУ. Многие из его учеников того времени стали видными учеными, среди них академики А.А.Гончар, Д.Е.Охоцимский, Т.М.Энеев.

В конце 1946 Келдыш избран действительным членом АН СССР по Отделению технических наук. Начался новый период его деятельности, связанный с именами "трех К": И.В.Курчатова, С.П.Королева и М.В.Келдыша. Сразу после избрания академиком он назначен начальником (с августа 1950-научным руководителем) головного научно-исследовательского института (НИИ-1 Министерства авиационной промышленности, ныне Центр имени М.В.Келдыша), занимавшегося прикладными задачами ракетостроения. С этого времени основное направление деятельности Келдыша связано с ракетной техникой. Первая в мире межконтинентальная ракета была запущена в СССР уже 21 августа 1957.

В 1949 Келдыш стал членом Коммунистической партии, в последствии избирался членом ЦК КПСС (с 1961), делегатом съездов КПСС (XXII, 1961; XXIII, 1966; XXIV, 1971; XXV, 1977).

В послевоенные годы. Келдыш занимался решением проблем атомной энергетики и вычислительной математики. Потребовались новые методы исследования, прежде всего эффективные методы и средства математического расчета. Необходимость их создания вызвала в области вычислительной математике революцию, коренным образом изменившую ее общенаучное значение. Келдыш одним из первых сумел предугадать роль вычислительной математики в повышении эффективности научно-технического поиска. Познакомившись с создателями первой отечественной ЭВМ М.А.Лесечко и Ю.Я.Базилевским, он стал специалистом в этой области. В 1953 он стал основателем Института (до 1966 — Отделения) прикладной математики АН СССР и его бессменным директором. С деятельностью этого института,



носящего ныне его имя, во многом связано становление современной вычислительной математики в нашей стране.

В работах по созданию ракетно-ядерного щита Келдыш принимал участие и как руководитель больших коллективов и как автор многих научно-технических идей и вычислительных методов. В это время им опубликованы работы по оценке последствий ядерного взрыва: *Об оценке действия взрыва на больших высотах* (1950, совместно с Л.И.Седовым) и *Точечный взрыв в атмосфере* (1955, совместно с Д.Е.Охоцимским и др.)

В 1956 ему присвоено звание Героя Социалистического Труда, а в 1957 его научные достижения отмечены Ленинской премией.

Он внес выдающийся вклад в развитие советской космической науки и техники. Начав работать по космической тематике в 1946 в творческом сотрудничестве с С.П.Королевым, он явился одним из инициаторов широкого развертывания работ по изучению и освоению космоса. С начала 1956 возглавил один из ведущих участков в их проведении. Велик его вклад в становление и успешное развитие таких научных направлений, как механика космического полета и космическая навигация. С 1953 в Математическом институте АН СССР велись работы по решению задач выведения на орбиту Земли искусственного спутника, увенчавшиеся 4 октября 1957 его успешным запуском и выводом на орбиту. Решающую роль Келдыш сыграл в создании относительно дешевой ракеты -носителя для выведения на орбиту спутников по научным программам (спутники семейства "Космос").Руководил "Лунной" программой, включая полеты автоматических станций семейства "Луна", направлялась Келдышем. Привлекал к участию в программе научные коллективы, руководил совещаниями и семинарами по обсуждению результатов исследований и принятию дальнейших планов. Первый аппарат к Луне был отправлен 2 января 1959. 4 октября 1959 были получены снимки обратной стороны Луны (с аппарата "Луна-3"). В 1966 совершена мягкая посадка на поверхность Луны, а на ее орбиту выведен искусственный спутник ("Луна-10"). В октябре 1970 стартовала "Луна-16", доставившая образцы лунного грунта на Землю, затем старт автоматической станции "Луна-17" с самоходным аппаратом "Луноход-1"; всего к 1976 запущены 34 аппарата серии "Луна". Первые три запуска космических аппаратов к Луне закончились катастрофами: ракеты Р-7, успешно выведшие на орбиту Земли искусственные спутники, взрывались в полете. Келдыш смог понять причину катастроф — развитие колебаний в топливной системе ракеты. Не менее эффективно участие Келдыша в программе исследования Венеры, связанной с автоматическими станциями семейства "Венера" (начиная с "Венеры-4", 1967), аппарат "Венера-7" (1970) показал, что давление на поверхности Венеры составляет 100 земных атмосфер, температура 400° С. Велика роль Келдыша при исследованиях Марса. В 1960 при подготовке запуска первой автоматической станции к Марсу Келдыш предложил испытывать приборы,

предназначенные к изучению Марса, в земных условиях. Это позволило выявить неэффективную аппаратуру и дало экономию в десятки килограммов веса автоматической станции. Выезжал на полигоны и космодромы при подготовке и запуске космических аппаратов, входил в различные комиссии по космическим проблемам, был председателем экспертных комиссий, комиссий по разбору причин аварий, в частности, был председателем аварийной комиссии по выяснению причин гибели экипажа космического аппарата "Союз-11" (космонавты Г. Т. Добровольский, В. Н. Волков и В. И. Пацаев (1971).

Выявление новых научных и технических задач, развитие космической техники, формирование комплексных научно-технических программ, вопросы управления полетами — далеко не полный перечень проблем, входивших в круг деятельности Келдыша. В 1961 за особые заслуги в развитии ракетной техники, создании и успешном запуске 12 апреля 1961 первого в мире космического корабля "Восток" с человеком на борту он был второй раз удостоен звания Героя Социалистического Труда.

18 марта 1965 впервые был осуществлен выход человека в открытый космос (космонавт Алексей Леонов). Огромный вклад внес Келдыш в осуществление совместного советско-американского космического полета "Союз-Апполон" (1975) и развитие полетов по программе "Интеркосмос".

Был одним из инициаторов создания в 1951 Московского физико-технического института (в г.Долгопрудном Московской области) и некоторое время читал лекции, долгое время был заведующим кафедрой.

Большой период жизни Келдыша связан с его деятельностью в Президиуме Академии наук СССР, начавшейся в октябре 1953 и продолжавшейся до конца его жизни. С 1953 он академик-секретарь Отделения математики Академии наук. В 1960 избран вице-президентом, а в мае 1961 — президентом Академии наук СССР.

Возглавляя Академию наук СССР с 1961 по 1975, оказывал всемерную поддержку развитию в нашей стране не только математики и механики, но и новых направлений современной науки, таких, как кибернетика, квантовая электроника, молекулярная биология и генетика. В 1962 Президиум Академии наук СССР принял решение о строительстве комплекса биологических институтов в г. Пущино. При Келдыше состоялась комплексная проверка деятельности Т.Д.Лысенко, позволившая разоблачить псевдонаучные концепции "лысенковщины", отрицавшей генетику. В списках действительных членов Академии был посмертно восстановлен Н.И.Вавилов, получили подтверждение его заслуги в биологии и сельскохозяйственных науках.

Годы, когда пост президента Академии наук СССР занимал Келдыш, были периодом наиболее быстрого роста Академии, превращения ее в крупнейший центр фундаментальной науки. В 1971 за исключительные

заслуги перед государством в развитии советской науки и техники, большую научную и общественную деятельность и в связи с 60-летием Келдыш стал трижды Героем Социалистического Труда (одиннадцатым по счету трижды Героем за все время присуждения этого звания).

Всемерно развивал международное научное сотрудничество и координацию научных исследований. С научными визитами посетил Германию и Англию (1965), Чехословакию (1963, 1970), Японию (1964), Польшу (1964, 1973), Францию (1965, 1967), Румынию (1966), Болгарию (1966, 1969), Венгрию (1967), Канаду (1967), Италию (1969), Швецию (1969), Испанию (1970), США (первый официальный визит отечественной Академии наук за все время ее существования, 1972). Келдыш свободно говорил на немецком и французском языках, читал также на итальянском, уже в зрелом возрасте (после 50) стал изучать английский. Его заслуги получили международное признание, среди его званий: академик Германской академии естествоиспытателей "Леопольдина" (ГДР, 1961), академик Академии наук Монголии (1961), академик Академии наук Польши (1962), академик Академии наук Чехословакии (1962), почетный член Академии наук Румынии (1965), почетный иностранный член Академии наук Болгарии (1966), почетный иностранный член Американской Академии наук и искусств в Бостоне (1966), член-корреспондент Германской Академии наук в Берлине (1966), почетный член Королевского общества в Эдинбурге (1968), почетный член Академии наук Венгрии (1970), почетный член Академии Финляндии (1974); почетный доктор Делийского университета (1967), почетный доктор Будапештского университета (1967), почетный доктор Лагосского университета (Нигерия, 1968), почетный доктор Карлова университета в Праге (Чехословакия, 1974), почетный доктор Индийского статистического института (1974).

Большую работу вел Келдыш в Комитете по Ленинским и Государственным премиям СССР в области науки и техники, возглавляя его с 1961 до своей кончины. Его рецензии на представленные работы имеют самостоятельный научный интерес. Всемерно поддерживал переход на массовое машинное производство, облегчающее труд. Высоко оценивал внедрение хлопкоуборочных и чаеуборочных машин. В последние годы жизни Келдыш интересовался проблемой создания солнечных электростанций на космической орбите.

10 января 1973 Келдыш перенес операцию на кровеносных сосудах, выполненную американским профессором М. Де Бекки (отказавшимся от гонорара за операцию и выразившим благодарность за честь оперировать Келдыша).

Награжден орденами Ленина (1945, дважды 1954, 1956, 1961, 1967, 1975), Трудового Красного Знамени (1943, 1945, 1953), медалями "За доблестный труд в Великой Отечественной войне" (1945), "800 лет Москвы" (1947),

"20 лет Победы" (1965), "За доблестный труд в ознаменование 100-летия со дня рождения В.И.Ленина" (1970), "30 лет Победы" (1975). Кавалер ордена "Почетного Легиона (Командор)" (1971), высших орденов ряда других стран.

Золотая медаль имени М.В.Ломоносова АН СССР (1976).

Умер 24 июня 1978. Урна с прахом Келдыша захоронена в Кремлевской стене у Красной площади в Москве.

На доме в Москве, где он жил (Воробьевское шоссе, 8), на зданиях МГУ имени М.В.Ломоносова установлены мемориальные доски. Бюсты установлены на Аллее Космонавтов (у проспекта Мира в Москве) и у Института прикладной математики Российской Академии наук (ныне имени М.В.Келдыша). Бюст установлен также на родине Келдыша в Риге, на доме, где он родился -мемориальная доска. Именем Келдыша назван кратер на обратной стороне Луны, одна из малых планет.

#### Литература:

1. *Краткий биографический очерк [Мстислав Всеволодович Келдыш]*. — В книге Келдыш М. В. Избранные труды. Математика. — М.: Наука, 1985.

**К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ  
САВЕЛИЯ ВЛАДИМИРОВИЧА ФАЛЬКОВИЧА  
(1911–1982)**



2 июня 2011 г. исполнилось 100 лет со дня рождения профессора Савелия Владимировича Фальковича, долгое время возглавлявшего кафедру теоретической механики и аэрогидромеханики Саратовского университета, основателя и первого редактора сборников «Аэродинамика».

С. В. Фалькович родился в Саратове в 1911 г. После окончания средней школы он как «классово чуждый элемент» (сын врача) не смог поступить в вуз, но получил разрешение преподавать математику и физику на курсах по подготовке в вузы и техникумы. Также Савелий Владимирович вёл занятия на рабфаке Саратовского автодорожного института.

В 1931 г. С. В. Фалькович поступил на физико-математический факультет Саратовского университета. После его окончания, в 1936 г., Савелий Владимирович был оставлен на кафедре теоретической механики ассистентом.

В то время основным направлением научных исследований кафедры, возглавляемой Б.К. Ризенкампом, была теория движения грунтовых вод. С. В. Фалькович начал упорно и плодотворно работать над сложными задачами по фильтрации жидкости, представляющими интерес для гидротехники. Молодому учёному удалось получить точное решение задач о высачивании грунтовой воды на откосе; фильтрации в двухслойном грунте при произвольно расположенной линии раздела слоев; дренаже при помощи системы труб и др. Для их решения он применял различные функционально-теоретические методы: аналитическую теорию дифференциальных уравнений, преобразование Меллина и теорию автоморфных функций. Итогом данных исследований стала кандидатская диссертация на тему «Некоторые задачи установившегося движения грунтовых вод», защищенная 18 июня 1941 г. Важные результаты, полученные в ней, стали классическими, вошли в учебники по фильтрации, а статья «Теория фильтрации жидкости в пористых средах», написанная совместно с П. Я. Кочиной (впоследствии ставшей академиком), была переведена и издана в США. С этого времени имя С. В. Фальковича получило международную известность, вошло в классические учебники, а сам учёный-теоретик навсегда связал свою жизнь с

прикладными проблемами, востребованными в различных отраслях промышленности и экономики.

С началом Великой Отечественной войны Савелий Владимирович читал практически все общие и специальные курсы для студентов-механиков Саратовского университета, заменив коллег, ушедших на фронт.

В июне 1944 г., когда возникла острая необходимость в высококлассных специалистах, способных участвовать в разработке реактивных двигателей и нового поколения авиации, академик Н. Е. Кочин пригласил С. В. Фальковича на работу в Институт механики АН СССР в качестве докторанта, а затем, с декабря 1947 г., старшего научного сотрудника.

Бурное развитие авиации в нашей стране определило становление и развитие науки о движении газов — аэродинамики, теоретические основы которой были заложены двумя великими русскими советскими учёными: Н. Е. Жуковским и С.А. Чаплыгиным. С. В. Фалькович стал непосредственным продолжателем их славного дела. В этот период основным предметом исследований Савелия Владимировича становится динамика околосвуковых течений газа.

В цикле работ, опубликованных в 1945–1947 гг. и ставших частью докторской диссертации 36-летнего учёного, теоретически исследовался очень трудный с точки зрения математики вопрос: трансзвуковой режим полёта самолета.

Эти работы совместно с изысканиями другого замечательного советского учёного Ф.И. Франкля заложили основы нового научного направления — трансзвуковой аэродинамики. Эта область знаний и сейчас продолжает интенсивно развиваться. Труды С. В. Фальковича «Об одном классе сопел Лаваля» и «К теории сопла Лаваля» принесли ему широкую известность как крупнейшему специалисту по околосвуковой газовой динамике. Эти работы были опубликованы в США в виде отдельных выпусков «Докладов Национального Комитета по аэронавтике».

Обобщением оригинальных исследований в указанном направлении стала монография С. В. Фальковича «Линейная теория крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке», опубликованная в 1950 г., как одна из первых в мировой литературе по данному вопросу. «Околосвуковой закон подобия Кармана – Фальковича», «переменные Фальковича» — эти понятия знакомы всем специалистам по газовой динамике.

В 1949 г. Савелий Владимирович возвратился в Саратовский университет, где до последних дней жизни заведовал кафедрой теоретической механики и аэрогидродинамики, а также был основателем научной школы газодинамики и аэродинамики околосвуковых и сверхзвуковых скоростей.

Деятельность С.В.Фальковича всегда отличалась широтой научных интересов. Он вел плодотворные исследования в разных областях механики — аэродинамики, теории сыпучих сред, теории упругости — и получал важные теоретические результаты.

По заказу различных предприятий и институтов коллективом кафедры под его руководством выполнены исследования:

- по движению газа в газопроводе,
- устойчивости земляных откосов,
- газовому каротажу скважин,
- аэродинамической теории металлизации изделий,
- аэродинамике газовых горелок,
- мелиорации,
- течению двухфазной жидкости,
- конструированию профиля крыла самолета и др.

Некоторые работы проводились в контакте с ведущим аэродинамическим институтом нашей страны (ЦАГИ).

Высокий научный потенциал и богатая эрудиция учёного являлись основой его лекторского мастерства. Савелий Владимирович обладал способностью ясно и просто излагать самые сложные вопросы своей науки, его лекции всегда пользовались большой популярностью.

Воспитанники С. В. Фальковича в настоящее время плодотворно трудятся во многих крупнейших научно-исследовательских институтах нашей страны: Институте проблем механики РАН (Москва), ЦАГИ (Жуковский), Институте гидродинамики Сибирского отделения РАН (Новосибирск) и др. Савелий Владимирович подготовил более 20 кандидатов наук и 9 докторов наук. Он являлся научным консультантом по кандидатской диссертации Л.В. Овсянникова, которая была посвящена околозвуковым течениям в соплах Лаваля. Впоследствии Лев Васильевич получил выдающиеся математические результаты, разработав метод группового анализа дифференциальных уравнений с частными производными, стал академиком РАН.

С. В. Фалькович всегда охотно работал с молодёжью, требовательно и доброжелательно относился к начинающим учёным.

За успехи в деле подготовки специалистов он был награждён орденом «Знак почёта» и медалью «За доблестный труд».

В течение многих лет Савелий Владимирович состоял членом Национального Комитета по теоретической и прикладной механике, специализированного совета по присуждению учёных степеней, учёного совета Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского.

С. В. Фалькович обладал широтой научных интересов: он глубоко знал историю, литературу, искусство. Не случайно В.А. Артисевич, легендарная директриса Зональной научной библиотеки СГУ, постоянно включала Савелия Владимировича в Библиотечный совет, консультировалась с ним по вопросу приобретения зарубежных научных изданий.

С. В. Фалькович был непревзойденным знатоком живописи, блестящим рассказчиком.

Жизнь Савелия Владимировича пришлась на непростые периоды советской истории, но он всегда демонстрировал высокое достоинство и порядочность, был подлинным интеллигентом. Многочисленные коллеги и ученики С. В. Фальковича отзываются о нём как о светлом человеке.

*Г.П. Шиндяпин, И.А. Чернов*

**А. С. Андреев** (г. Ульяновск)

## **О МЕТОДАХ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ, СТАБИЛИЗАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

*В обзоре представлен анализ и систематизация основных, по мнению автора, работ, опубликованных за последние 15 лет по теории устойчивости, стабилизации и управления в ее части, имеющей непосредственное применение к задачам степени свободы, по методам, алгоритмам и программам конструирования управляемых механических систем.*

**Постановка задачи управления.** Основой математических моделей управляемых механических систем с конечным числом степеней свободы является система дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = Y(t, y, v), \quad (1)$$

где  $t \in R$  – время,  $y \in R^n$  – вектор фазовых переменных,  $v \in R^p$  – вектор управления,  $Y : R^+ \times G \rightarrow R^n$  – вектор-функция. При этом будем считать, что в  $R^n$  и  $R^p$  введены некоторые нормы  $\|y\|$  и  $\|v\|$ , пусть  $G \subseteq R^n \times R^p$  – некоторая область.

Будем полагать, что управление  $v \in F_v$ ,  $F_v$  – функциональное множество, определяемое имеющимися ресурсами по управлению движением объекта.

Пусть  $y = y^*(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  ( $t_0 < t_1 \leq +\infty$ ) есть какое-либо программное движение системы из некоторого множества  $F_y$  желательных движений с начальным положением  $y^*(t_0) = y_0^*$ , и  $v = v^*(t) \in F_v$  ( $(y^*(t), v^*(t)) \in G$  при  $t \in [t_0, t_1]$ ) – программное управление, реализующее это движение согласно вытекающему из (1) тождеству

$$\dot{y}^*(t) \equiv Y(t, y^*(t), v^*(t)). \quad (2)$$

Совокупность  $\{y^*(t), v^*(t), t \in [t_0, t_1]\}$  может быть названа программным управляемым процессом. Этот процесс может быть задан в явном виде, причем вначале частично, исходя из постановки, а затем доопределен в соответствии с ее условиями. Он может быть задан в неявном виде, например, как решение экстремальной задачи. Как правило, решение такой задачи находится приближенно, и это приближение принимается за программное управляемое движение.

По отношению к управляемым механическим системам основополагающей является следующая задача, называемая обычно задачей регулирования [1].



**Определение 1.** Пусть  $\{y^*(t), v^*(t), t \in [t_0, t_1]\}$  — программный управляемый процесс,  $y_\tau$  — некоторое состояние объекта, зафиксированное в момент  $t = \tau$ ,  $t_0 \leq \tau < t_1$ , при этом  $y_\tau \neq y^*(\tau)$ . Задача регулирования программного управляемого процесса состоит в нахождении совокупности управлений  $F_v^0 = \{v_\tau(t), t \in [\tau, t_1]\} \subset F_v$ , таких что для каждого  $(\tau, y_\tau) \in [t_0, t_1) \times \{y : \|y - y^*(\tau)\| < \Delta > 0\}$  найдется  $v \in F_v^0$ , при котором соответствующее движение  $y(t)$ ,  $y(\tau) = y_\tau$ , сходится к  $y^*(t)$ , а именно:

- а) либо  $y(t_2) = y^*(t_2)$  при некотором  $t_2 \in [\tau, t_1)$  (сходимость за конечное время);
- б) либо для  $t_1 = \infty$  движение  $y(t) \rightarrow y^*(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$  (т. е.  $\|y(t) - y^*(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ ).

Введенная задача является математическим оформлением практического опыта по регулированию технических систем и процессов. Воздействие на объект (называемое в теории управления входом) с целью его заданного функционирования вначале осуществлялось посредством конструирования некоторой технической подсистемы, которая в зависимости от состояния объекта или некоторых его выходных параметров (выход) обеспечила бы это функционирование.

Дальнейшее развитие техники, и особенно вычислительных средств, приводит к следующему обобщенному представлению задачи регулирования.

Допустим, что фактическое состояние объекта в момент  $t = \tau$ ,  $t_0 \leq \tau < t_1$ , не совпадает с заданным  $y(\tau) \neq y^*(\tau)$ . Поскольку это отклонение может быть любым, требуется наличие измерительных устройств, позволяющих получить первичную информацию о реальном движении. После ее обработки можно получить информацию об отклонении  $x(t) = y(t) - y^*(t)$ ,  $t \geq \tau$ , а затем сформировать управляющие сигналы.

Информационный процесс от обработки первичной информации до воздействия управляющих сигналов на исполнительные механизмы вместе с устройствами, реализующими этот процесс, называют системой управления движением. Всю совокупность, состоящую из движущегося объекта, системы управления движением этого объекта и терминальных элементов (измерительных устройств и исполнительных механизмов), определяют как управляемую динамическую систему [1, 2].

Осуществляемую согласно этой схеме связь между движением объекта и управляющими силами и моментами называют обратной связью.

Для приведения объекта к заданному программному движению требуется осуществить при возмущении, в общем случае, воздействие  $v$ , отличное от программного управления  $v^*(t)$ . Для механики управляемого движения

наиболее распространенной является задача позиционного управления, в которой принимается линейная стратегия управления

$$v = v^*(t) + u(t, x), \quad x = y - y^*(t), \quad (3)$$

где  $u(t, x)$  — дополнительное (позиционное) управляющее воздействие на объект, создаваемое исполнительными механизмами согласно обратной связи. Линейность управления (3) в определенной степени соответствует известному в механике представлению движения как суммы двух движений — переносного и относительного. При этом полагается, что реализация управления  $v^*(t)$  такова, что имеется возможность дополнительного определения  $u = u(t, x)$ ,  $u \in F_u$ , которое в дальнейшем будем называть управляющим воздействием.

**Определение 2.** Пусть  $\{y^*(t), v^*(t), t \in [t_0, t_1]\}$  — управляемый программный процесс. Задача синтеза позиционного управления состоит в построении управления в виде (3) таким образом, что для каждого  $\tau \in [t_0, t_1]$  и каждого  $y_\tau \in \{y : \|y - y^*(\tau)\| < \Delta\}$ , где число  $\Delta$  ( $0 < \Delta \leq +\infty$ ) выбирается согласно постановке конкретной задачи, движение  $y(t)$ ,  $y(\tau) = y_\tau$ , соответствующее управлению  $v = v^*(t) + u(t, x)$ , сходилось к движению  $y^*(t)$ .

Введем переменные  $x = y - y^*(t)$ , характеризующие отклонения управляемого движения объекта от его заданного программного движения  $y = y^*(t)$ . В соответствии с (1)–(3) уравнения движения объекта в отклонениях будут описываться системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = X(t, x, u), \quad (4)$$

где  $X(t, x, u) = Y(t, x + y^*(t), u + v^*(t)) - Y(t, y^*(t), v^*(t))$ .

Естественно предположить, что при  $v = v^*(t)$ ,  $u(t, x) \equiv 0$ , соответствующее движение объекта совпадает с программным  $y = y^*(t)$ , и соответственно ему отвечает движение  $x = 0$  системы в отклонениях (4). Для этого составляющие, входящие в систему (4), должны удовлетворять соотношениям

$$u(t, 0) \equiv 0, \quad X(t, 0, 0) \equiv 0, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (5)$$

Однако из-за инструментальной погрешности измерительных устройств и наличия возмущающих сил и моментов, действующих на объект, возникают соотношения вида

$$u(t, 0) = \mu(t), \quad X(t, 0, 0) = \nu(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (6)$$

Учет этих соотношений обычно проводится как влияние возмущений. Тем самым, решение задачи синтеза позиционного управления, прежде всего, проводится по отношению к программному движению, отождествляемому с нулевым решением  $x = 0$  системы (4), при наличии возмущений (6).

Задачу позиционного синтеза управления при  $t_1 = +\infty$  называют также задачей стабилизации [1, 3], а в некоторых источниках [4] — задачей синтеза

асимптотически устойчивых систем. На конечном отрезке времени в такой задаче возмущенное движение попадает в  $\varepsilon$ -окрестность программного движения, но не совпадает с ним.

Более актуальной задачей в связи с возросшими требованиями к точности процесса в настоящее время является задача приведения возмущенного движения к программному за конечное время, в момент  $T$ ,  $t_0 < T < t_1$ .

В дальнейшем разделим задачу позиционного синтеза управления на задачу о стабилизации ( $t_1 = +\infty$ ) и задачу синтеза управления на конечном отрезке времени ( $t_1 = \text{const}$ ).

Строгая постановка задачи о стабилизации опирается на определения устойчивости по Ляпунову [5–8].

Пусть  $u = u(t, x)$ ,  $u \in F_u$ , есть выбранное управляющее воздействие, при котором возмущенное движение объекта описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X_0(t, x), \quad X_0(t, x) = X(t, x, u(t, x)), \quad (7)$$

где  $X : R^+ \times D \rightarrow R^n$ ,  $D = \{\|x\| < H, 0 < H \leq +\infty\}$ , есть непрерывная вектор-функция, такая что для каждой начальной точки  $(t_0, x_0) \in R^+ \times D$  существует единственное решение  $x = x(t, t_0, x_0)$ .

**Определение 3.** Невозмущенное движение  $x = 0$  системы (7) называется устойчивым, если  $(\forall \varepsilon > 0) (\forall t_0 \geq 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0) (\forall x_0 : \|x_0\| < \delta) (\forall t_0 \geq t_0) \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ . При  $\delta$  не зависящим от  $t_0$ ,  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , устойчивость называется равномерной.

**Определение 4.** Невозмущенное движение  $x = 0$  системы (7) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво, и  $(\forall t_0 \geq 0) (\exists \Delta = \Delta(t_0) > 0) (\forall x_0 : \|x_0\| < \Delta) x(t, t_0, x_0) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Асимптотическая устойчивость равномерна, если  $x = 0$  равномерно устойчиво,  $\Delta = \text{const} > 0$ , и свойство  $x(t, t_0, x_0) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  имеет место равномерно по  $(t_0, x_0) \in R^+ \times \{\|x\| < \Delta\}$ .

Соответственным образом вводят также понятия эквиасимптотической устойчивости и неустойчивости [6, 8].

Для постановки задачи о стабилизации будем полагать, что правая часть системы (4), вектор-функция  $X(t, x, u)$ , определяется для всех  $(t, x, u) \in R^+ \times D \times R^m$  и задача о стабилизации решается в классе  $F_u$  управляющих воздействий  $u = u(t, x)$ , удовлетворяющих условиям (5), таких, что для начальных значений  $(t_0, x_0) \in R^+ \times G$  система с  $u = u(t, x)$  имеет единственное решение.

**Определение 5.** [3, 9] Задача о стабилизации состоит в нахождении управляющего воздействия  $u$  в виде вектор-функции  $u = u(t, x)$  такой, чтобы

невозмущенное движение  $x=0$  уравнения (7) было бы асимптотически устойчивым.

Важным свойством асимптотической устойчивости является ее равномерность с оценкой области притяжения. При этом достигается устойчивость при постоянно действующих возмущениях [6–8], и значит решение задачи о стабилизации при условиях (6), а также имеет место оценка допустимых начальных отклонений.

Функционирование многих современных механических систем, таких, например, как роботы-манипуляторы, различные транспортные средства и т.д., происходит, как правило, в условиях наличия различных неопределенностей, вызываемых параметрическими возмущениями в системе, внешними возмущениями, немоделируемой динамикой и т.д.

Нередко математическая модель системы управления имеет неполное описание, которое учитывает лишь допустимые области изменения параметров управляемой системы и характеристик ее отдельных элементов без конкретизации самих этих параметров и характеристик. Указанные области могут определяться, например, интервальными ограничениями, соответствующими заданным техническим допускам на систему. В связи с этим возникает задача построения управления не для одной конкретной, точно заданной системы, а целого семейства систем, параметры и характеристики элементов которых принадлежат заранее известным множествам. В современной литературе по теории управления соответствующая проблема получила название задачи робастного управления. Соответственно предыдущим задачам может быть сформулирована следующая задача. Пусть правая часть системы (4) имеет вид

$$\dot{X} = X(t, x, a, u), \quad (8)$$

где  $a \in R^l$  – совокупность параметров.

**Определение 6.** Задача построения управляющего воздействия  $u = u(t, x)$ , решающего задачу синтеза позиционного управления для системы (4) с (8) в соответствии с определениями 1 и 2 при всех значениях  $a \in F_a \subset R^l$ , где  $F_a$  – допустимая область, относится к задаче робастного управления.

В поставленных задачах управление  $u$  выражалось в виде общей зависимости  $u = u(t, x)$ . При решении конкретных задач измерительные устройства далеко не всегда позволяют определить все текущие координаты объекта, а только часть из них, или определенную информацию о некоторой совокупности координат в виде некоторых функциональных зависимостей. Это существенным образом влияет на процесс и соответственно методику построения регуляторов.

Поскольку построение обратной связи по выходу не всегда решает задачу 2, в конструировании систем управления широко применяется задача слежения [10].

Пусть модель управляемой системы описывается совокупностью уравнений

$$\dot{x} = X(t, x, u, a), \quad z_1 = g_1(t, x, a), \quad z_2 = g_2(t, x, a),$$

где  $x \in R^n$  – вектор состояния,  $u \in R^m$  – вектор управления,  $z_1 \in R^k$  – управляемый выход,  $z_2 \in R^p$  – измеряемый выход,  $a \in R^l$  – вектор неизвестных параметров и возмущений.

**Определение 7.** Задача слежения состоит в построении управления  $u = u(t, z_2, a)$ , при котором  $\|z_1(t) - b(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , где  $b(t)$  – известный командный сигнал.

При  $z_2 = x$  управление  $u = u(t, x, a)$  есть управление с обратной связью по входу, при  $z_1 = z_2$  – соответственно с обратной связью по выходу.

В исследованиях по управлению системами с полной информацией возникли различные определения управляемых систем, способных функционировать в различных условиях, накапливая опыт об эффективности своих действий, приспосабливаясь к этим условиям и достигать цели управления. Это самонастраивающиеся системы, адаптивные системы, системы с самоорганизацией, системы с оптимизацией и т.п. Эти названия часто скорее указывают на метод реализации решений математического конструирования нестационарных систем управления с неполной информацией, чем на принцип конструирования. В наиболее общем виде адаптивную управляемую систему можно определить как систему, у которой происходит изменение параметров, структуры и управляющих воздействий на основе текущей информации с целью достижения заданного состояния (программного движения) при начальных неопределенных возмущениях и изменяющихся условиях работы. Соответственно определениям 1 и 3 могут быть введены определения адаптивной стабилизации и адаптивного синтеза управления.

В реальных управляемых системах синтез управления не может быть мгновенным, он формируется с запаздыванием, определяясь в структуре обратной связи. Моделирование таких систем проводится на основе функционально-дифференциальных уравнений. Заметим, что к исследованию таких систем приводятся задачи управления эредитарными механическими системами, управляемые системы с ПИД-регуляторами и т.д.

Для полноты постановки задачи о стабилизации и анализа управляемых систем с конечным запаздыванием введем следующие определения.

Пусть  $R^n$  — линейное действительное пространство векторов  $x$  с нормой  $|x|$ ,  $R$  — действительная ось,  $h > 0$  — заданное действительное число,  $C$  — банахово пространство непрерывных функций  $\varphi: [-h, 0] \rightarrow R^n$  с нормой  $\|\varphi\| = \max(|\varphi(s)|, -h \leq s \leq 0)$ . Для непрерывной функции

$x: [\alpha - h, \beta) \rightarrow R^n$  ( $\alpha, \beta \in R, \alpha < \beta$ ) и каждого  $t \in [\alpha, \beta[$  функцию  $x_t \in C$  определим равенством  $x_t(s) = x(t + s)$  ( $-h \leq s \leq 0$ ), под  $\dot{x}(t)$  будем понимать правостороннюю производную. Пусть  $G_0 \subset C$  — открытое множество,  $G = R \times G_0$ ,  $X: G \rightarrow R^n$  есть некоторое непрерывное отображение. Равенство

$$\dot{x}(t) = X(t, x_t) \quad (9)$$

представляет собой функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа (с конечным запаздыванием) [6, 11–13].

Для ФДУ с бесконечным запаздыванием выбор подходящего фазового пространства имеет еще большее значение по сравнению с конечным запаздыванием. Удобным в приложениях является аксиоматический подход, разработанный в [14].

Пусть  $B$  есть линейное пространство функций  $\varphi: (-\infty, 0] \rightarrow R^p$  с полунормой  $\|\varphi\|_B$ , являющееся допустимым в соответствии со следующим предположением.

Пространство  $B$  называется допустимым, если существуют постоянные  $N_1 > 0$  и  $N_2 > 0$  и функция  $M: R^+ \rightarrow R^+$ , непрерывная в нуле, такие, что для любой непрерывной функции  $x: (-\infty, \beta] \rightarrow R^p$  выполняются условия:

- 1)  $x_t \in B (x_t = x(t + s), -\infty < s \leq 0)$ ,  $x_t$  непрерывно по  $t$  относительно  $\|\cdot\|_B$ ;
- 2)  $\|x_t\|_B \leq N_1 \sup(|x(s)|, \alpha \leq s \leq t) + M(t - \alpha) \|x_\alpha\|_B$ ;
- 3)  $|x(t)| \leq N_2 \|x_t\|_B$ ;

и пространство классов эквивалентности  $B \setminus |\cdot|_B$  является сепарабельным банаховым пространством.

Простым примером такого пространства является пространство  $B_\gamma$ ,  $\gamma > 0$ , непрерывных функций  $\varphi: R^- \rightarrow R^p$  таких, что функция  $e^{\gamma s} \varphi(s)$  является ограниченной и равномерно непрерывной на  $R^-$  с нормой  $\|\varphi\|_\gamma = \sup(e^{\gamma s} |\varphi(s)|, s \leq 0)$  [15].

Уравнением запаздывающего типа с бесконечным запаздыванием называется уравнение вида (9), где  $f: R \times B_H \rightarrow R^p$  есть непрерывное отображение.

Рассмотрим управляемую систему, описываемую векторным функционально-дифференциальным уравнением запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = X(t, x_t, u), \quad X(t, 0, 0) \equiv 0, \quad (10)$$

где  $x \in R^n$  — вектор фазовых координат,  $u \in R^m$  — вектор управляющих воздействий,  $X: R \times C \times R^m \rightarrow R^n$  — вектор-функция, полагаемая для определенности непрерывной для  $u \in F_u$ ,  $C$  — банахово пространство непрерывных функций  $\varphi: [-h, 0] \rightarrow R^n$  в случае конечного запаздывания,

допустимое банахово пространство функций  $\varphi: (-\infty, 0] \rightarrow R^n$  в случае бесконечного запаздывания.

Пусть  $u: R \times C \rightarrow R^m$  есть управление в виде непрерывной функции,  $u(t, 0) \equiv 0$ .

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X^0(t, x_t), \quad X^0(t, \varphi) = X(t, \varphi, u(t, \varphi)). \quad (11)$$

**Определение 8.** Решение  $x=0$  уравнения (11) называется устойчивым, если для любого начального момента  $\alpha \in R^+$  и любого малого числа  $\varepsilon > 0$  существует число  $\delta = \delta(\alpha, \varepsilon) > 0$  такое, что для всех  $\|\varphi\| < \delta$  и всех  $t \geq \alpha$  выполняется неравенство

$$|x(t, \alpha, \varphi)| < \varepsilon.$$

Решение  $x=0$  равномерно устойчиво, если число  $\delta$  не зависит от начального момента  $\alpha$ , т. е.  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ .

**Определение 9.** Точка  $x=0$  называется притягивающей для уравнения (11), если для любого  $\alpha \in R^+$  существует число  $\eta = \eta(\alpha) > 0$ , для любого малого  $\varepsilon > 0$  и каждого  $\|\varphi\| < \eta$  найдется значение  $\sigma = \sigma(\varepsilon, \alpha, \varphi) > 0$  такое, что для всех  $t \geq \alpha + \sigma$   $|x(t, \alpha, \varphi)| < \varepsilon$ .

Точка  $x=0$  называется равномерно притягивающей (равномерно по  $(\alpha, \varphi)$ ), если существует  $\eta > 0$  и для любого  $\varepsilon > 0$  найдется значение  $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$  такое, что для всех  $\|\varphi\| < \eta$  и всех  $t \geq \alpha + \sigma$  выполняется неравенство  $|x(t, \alpha, \varphi)| < \varepsilon$ .

**Определение 10.** Решение  $x=0$  уравнения (11) называется: асимптотически устойчивым, если оно устойчивое и притягивающее; равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчивое и равномерно притягивающее.

**Определение 11.** Управляющее воздействие  $u = u(t, x_t)$ , называется стабилизирующим для системы (10), если оно обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого решения уравнения (11).

Заметим, что в зависимости от объектов управления исследуются также задачи, в которых достижимой целью является не конкретное движение, а некоторое множество, имеются различные ограничения на область движений, совместные ограничения на управление и область движения и т.д. Моделирование многих объектов и конструирование систем управления ими нередко связано с дискретизацией. Поэтому большое внимание в теории управления уделяется системам, моделируемым разностными уравнениями вида

$$y(n+1) = Y(n, y(n), u(n)).$$

По отношению к таким системам вводятся понятия устойчивости, стабилизации, конечного синтеза управления и т.д., подобные определениям 2–5. Соответствующие определения представлены в монографиях [4, 16].

Большое применение в задачах механики получили исследования устойчивости и стабилизации не по всем, а по части переменных, когда цели задач достигаются по отношению к части координат, называемых контролируемыми, независимо от предельного поведения объектов по остальным (не контролируемым) координатам. Пусть для системы (4) переменные  $x$  разделяются,  $x' = (y', z')$ ,  $y \in R^p$ ,  $z \in R^{n-p}$ , при этом область  $G$  для определенности имеет вид

$$G = \{\|y\| < H, 0 < H \leq +\infty, \|z\| < +\infty\}.$$

Определение 8 может быть развито в задаче об  $y$ -стабилизации, которая состоит в определении  $u = u(t, x)$ ,  $u(t, 0) \equiv 0$ , обеспечивающего асимптотическую устойчивость положения  $x = 0$  по переменным  $y$ . Соответственным образом могут быть сформулированы задачи об оптимальной  $y$ -стабилизации, синтеза управления, робастного управления по части переменных, в том числе для систем, моделируемых уравнениями (4) и (8) [17, 18].

**Общие методы исследования задач о стабилизации и управлении движением.** Основной исследуемой задачей при изучении работы простых регуляторов в XIX веке являлось определение устойчивого их функционирования, как правило, стационарного действия. Для этого рассматривалось линейное приближение дифференциальных уравнений его модели и определялись условия устойчивости, исходя из этого приближения. А.М. Ляпуновым была дана строгая математическая постановка задачи об устойчивости и обоснована методика ее исследования на основе линейного приближения. При этом были разработаны основные методы исследования задачи, получившие определения: первой и второй (прямой) методы Ляпунова [5]. Эти методы являются основополагающими в теории стабилизации и в настоящее время.

Основной сложностью прямого метода Ляпунова является отсутствие универсального алгоритма построения функции Ляпунова, которая удовлетворяет условиям соответствующих теорем. Но, для решения одних теоретических и прикладных задач важным является их обратимость, других — отыскание алгоритмов построения, третьих — развитие метода функций Ляпунова посредством модификации и обобщения теорем Ляпунова, четвертых — развитие понятий устойчивости, например, устойчивости относительно части переменных, пятых — обобщение указанных теорем для систем, моделируемых функционально-дифференциальными, стохастическими, разностными и другими уравнениями, и т. д.



Поэтому теория устойчивости, основанная А.М. Ляпуновым, начиная с середины XX века, является предметом многочисленных исследований.

Широкое применение на практике получили теорема Барбашина-Красовского [6] и метод векторных функций Ляпунова [19]. Дальнейшее развитие этих теорем на основе скалярных и векторных знакоопределенных и знакопостоянных функций Ляпунова проведено в работах [20–22].

Первый метод Ляпунова исследования устойчивости на основе линейного приближения являлся и является одним из эффективных и часто применяемых методов решения прикладных задач математической теории управления. Изложению соответствующих материалов посвящены и посвящаются классические и новейшие учебники по теории автоматического управления [10, 23, 24].

Пусть возмущенное движение описывается системой дифференциальных уравнений (7), при этом правая часть  $X_0(t, x)$  является непрерывно дифференцируемой дважды по  $x$ , и соответственно система (7) может быть представлена в виде

$$\dot{x} = A(t)x + X_2(t, x), \quad (12)$$

где  $A(t) \in R^n$ , функция  $X_2(t, x)$  содержит нелинейные члены относительно  $x$ . В этом случае линейная система

$$\dot{x} = A(t)x \quad (13)$$

называется линейным приближением для (12). При  $A(t) = A_0 = \text{const}$  система (13) является стационарной и ее устойчивость может быть определена на основе собственных значений матрицы  $A_0$  или корней характеристического уравнения  $\det(A_0 - \lambda E) = 0$ .

Ляпуновым доказано следующее фундаментальное утверждение.

Если система (13) с  $A = A_0$  асимптотически устойчива,  $\text{Re } \lambda_k < 0$ , и выполнено неравенство  $\|X_2(t, x)\| \leq \beta_0 \|x\|^2$  ( $\leq \beta_0 \|x\|^{1+\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ ), тогда невозмущенное движение  $x = 0$  системы (12) равномерно асимптотически устойчиво. Если же  $\text{Re } \lambda_j > 0$  хотя бы для одного  $\lambda_j$ , тогда  $x = 0$  неустойчиво.

Это утверждение наиболее используется в исследованиях по стабилизации для стационарных неуправляемых и управляемых систем. Современное состояние линейной теории управления стационарными системами и ее многочисленные приложения с программами на MATLAB прекрасно изложено в монографии [25].

Случаи  $\text{Re } \lambda_k < 0$  для всех  $\lambda_k$  и  $\text{Re } \lambda_j > 0$  хотя бы для одного  $\lambda_j$  называются некритическими, в отличие от случаев, когда матрица  $A_0$  имеет собственные значения на мнимой оси, т. е.  $\text{Re } \lambda_j = 0$ , которые называются критическими, так как в этих случаях устойчивость или неустойчивость

системы (12) зависит от нелинейных членов  $X_2 = X_2(x)$ . Исследование критических случаев весьма сложно, но является распространенным, особенно для механики неуправляемого движения. Поэтому критические случаи являются объектом многочисленных исследований от работ А. М. Ляпунова до настоящего времени. Однако в последнее десятилетие существенное развитие в этом направлении отсутствует.

В случае зависимости от времени матрицы  $A = A(t)$  устойчивость системы (13) может быть найдена: для периодической системы,  $A(t+T) = A(t)$  для некоторого  $T > 0$  и всех  $t \in R$ , на основе мультипликаторов Флоке [26] или для правильной системы с ограниченной матрицей  $A(t)$ ,  $\|A(t)\| \leq \beta_0$ , на основе характеристических чисел. При этом равномерная асимптотическая устойчивость (13) гарантирует равномерную асимптотическую устойчивость  $x = 0$  системы (12) при условии  $\|X_2(t, x)\| \leq \beta_0 \|x\|^2$ .

Однако отсутствуют эффективные критерии асимптотической устойчивости (13), кроме некоторых частных случаев, в том числе, приведения (13) к стационарной системе линейной заменой. Поэтому линеаризация в общем случае зависимости  $A(t)$  является малоэффективной по сравнению с  $A = A_0$ , и как показывает последующий анализ, в исследованиях для механических систем практически отсутствует.

Модельной линейной стационарной управляемой системой является система вида

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad z = Hx, \quad (14)$$

где  $x \in R^n$  – вектор состояния,  $u \in R^m$  – вектор управляющих воздействий,  $z \in R^k$  – вектор выхода,  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$ ,  $H \in R^{k \times n}$  – постоянные матрицы.

Стабилизируемость такой системы удобно представлена в [1, 2].

Решение задачи о стабилизации системы (14) и теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости позволяют решить задачу о локальной стабилизации нелинейной системы (4).

Пусть правая часть (4)  $X(t, x, u)$  дважды непрерывно дифференцируема по  $(x, u)$ . Так же как в случае (12), система (4) может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u + X_2(t, x, u) \\ A(t) &= \frac{\partial X(t, 0, 0)}{\partial x}, \quad B(t) = \frac{\partial X(t, 0, 0)}{\partial u} \end{aligned} \quad (15)$$

При  $A(t) = A_0 = \text{const}$ ,  $B(t) = B_0 = \text{const}$  и при условии, что для  $X_2(t, x, u)$  имеет место оценка

$$\|X_2(t, x, u)\| \leq \beta_0 (\|x\|^2 + \|u\|^2)$$

вопрос о стабилизации  $x = 0$  системы (15) может быть решен управление  $u = Kx$ .

Изложенный подход к решению задачи о стабилизации невозмущенного движения  $x=0$  нелинейной системы (15) является классическим и представлен во многих учебниках по управляемым системам.

Новые способы решения задачи о стабилизации стационарных систем посредством построения интегрального управления [27, 28], настройки обратной связью [29], замены обратной связи по состоянию и замены переменных по состоянию [29, 30] позволяют значительно расширить применение метода линеаризации [10].

Метод скользящих режимов [10] позволяет обеспечить выход системы на заданное многообразие за конечное время и последующее движение вдоль этого многообразия в скользящем режиме. Управление выбирается в классе релейных вида

$$u = -\beta(x)\text{sign}(s),$$

где многообразие  $s(x) = 0$  характеризует цель управления. Следует отметить, что релейные законы управления, несмотря на очевидные преимущества их использования, связанные с простотой их реализации и оптимальными переходными процессами, обладают рядом существенных недостатков. Это, во-первых, значительные энергетические затраты, связанные с использованием максимально допустимых значений управления, а, во-вторых, возможность возникновения высокочастотных колебаний фазовых координат в скользящем режиме, что может привести к нежелательным вибрациям элементов систем управления. Такие колебания или иначе биения (чаттер) возникают вследствие несовершенств устройств переключения и реле и наличия запаздывания в структуре управления. В настоящее время существуют различные подходы, позволяющие уменьшить влияние чаттера или полностью его исключить. Один из таких подходов заключается в замене функции знака в управлении на функцию насыщения с большим углом наклона линии переключения

$$u = -\beta(x)\text{sat}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0$$

где функция насыщения определяется равенством

$$\text{sat}(y) = \begin{cases} y, & \text{при } |y| \leq 1, \\ \text{sign}(y), & \text{при } |y| > 1. \end{cases}$$

Второй подход заключается в разделении управления на две составляющие – непрерывную и разрывную, с уменьшением амплитуды разрывной части.

Другие современные подходы к устранению чаттера состоят в использовании наблюдателей [31] или добавлении интеграторов в динамическую модель системы [32].

Наиболее исследованным классом нелинейных систем является класс систем, описываемых векторно-матричным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A_0 x + B_0 u, \quad u = \Phi(t, \sigma), \quad \sigma = C'_0 x, \quad (16)$$

где  $A_0 \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$ ,  $C \in R^{n \times k}$ ,  $\Phi(t, \sigma) = (\varphi_1(t, \sigma), \dots, \varphi_m(t, \sigma))$  – нелинейная вектор-функция, компоненты которой нелинейные, в общем случае нестационарные и гистерезисные функции.

Для таких систем, следуя постановке задачи М.А. Айзерманом [23], вводится понятие абсолютной устойчивости, состоящее в наличии асимптотической устойчивости в целом для некоторого класса нелинейностей  $\varphi_j(t, \sigma)$ . Лемма Калмана-Якобовича-Попова, позволившая обосновать принципы построения функции Ляпунова для системы (16), и теорема 1 положили начало этому большому направлению в теории устойчивости и стабилизации систем с нелинейным управлением [33]. Статьи, представленные в монографии [34], достаточно подробно освещают исследования по этому направлению в последние годы. При этом отметим, что применению теории абсолютной устойчивости к задачам механики в последние годы посвящено незначительное число работ.

Новые принципы построения нелинейной обратной связи разработаны в работах акад. С.В. Емельянова и его учеников. Соответствующие результаты представлены в монографии [35]. Представленные методы имеют применение при решении задач промышленной автоматики и при создании систем управления сложными объектами, например, в авиации и космонавтике.

Как указывалось, основные методы решения задач о стабилизации движений общих нелинейных управляемых систем основаны на применении прямого метода Ляпунова. Методика исследования состоит либо непосредственно в применении общих теорем об устойчивости, либо в их модификации, развитии и обобщении с последующим решением поставленных задач о стабилизации движения. Такая методика широко применяется в решении задач управления движением механических систем. В последние 10 лет в этом плане выделяются работы по применению знакопостоянных функций Ляпунова. [36–49].

Как было указано ранее, моделирование в задачах стабилизации движений управляемых систем с учетом запаздывания в структуре обратной связи сводится к исследованию устойчивости функционально-дифференциальных уравнений (9), проблеме значительно более сложной по сравнению с обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Эти сложности, прежде всего, связаны с некомпактностью шара  $\{\|\varphi\| \leq 1\}$  в пространстве  $C$ , особыми свойствами решений, невозможностью практически представить решение функционально-дифференциального уравнения в явном виде, даже для линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Результаты исследований по устойчивости и других свойств решений

функционально-дифференциальных уравнений представлены в многочисленных публикациях, в том числе, монографиях [11–13], обзоре [50].

Одной из основных теорем, используемых в явном виде или через обращение, является теорема типа теоремы Ляпунова 1, наиболее полно представленная Н. Н. Красовским в [6].

Обращение этой теоремы, как и в случае ОДУ, позволяет исследовать задачи устойчивости и стабилизации на основе линейного приближения.

Критерий устойчивости на основе линейного приближения для периодической по  $t$  системы также выведен в монографии [6]. Однако применение этих критериев является весьма сложным в силу трансцендентности характеристического уравнения.

В последние годы ряд исследований устойчивости функционально-дифференциальных уравнений был посвящен ослаблению условий известных теорем посредством более точной оценки функционала  $V = V(t, \varphi)$  и его производной  $\dot{V}(t, \varphi)$  [51–62]. Эти исследования имеют в основном теоретический характер. Значительно большее применение в задачах о стабилизации нашли результаты, связанные с ослаблением условия относительно  $\dot{V}(t, \varphi)$  в виде  $\dot{V}(t, \varphi) \leq 0$ , в том числе для функционально-дифференциальных уравнений с бесконечным запаздыванием [63–80]. Подробный анализ указанных работ проведен в обзоре [50]. Новые, достаточные условия стабилизации, оптимальной стабилизации, стабилизации с гарантированной оценкой качества управления систем, моделируемых нелинейными ФДУ с конечным и бесконечным запаздыванием, подробно представлены в монографии [81].

Наряду с методом функционалов Ляпунова в задачах устойчивости функционально-дифференциальных уравнений применяется метод функций Ляпунова, обоснованный в работах [82, 83]. Получаемые этим методом условия устойчивости и стабилизации не зависят, как правило, от запаздывания и поэтому являются эффективными. В последние годы развитию метода функций Ляпунова в теории устойчивости и стабилизации и его применению посвящены многочисленные работы, в том числе [84–93].

Развитие исследований по задаче об оптимальной стабилизации движения управляемого объекта, описываемого линейными ФДУ с постоянными и периодическими коэффициентами и соответствующим квадратичным функционалом (линейно-квадратичная задача) представлено в монографии [94].

В работе [95] рассмотрена линейная задача оптимального управления системами, входные сигналы которых содержат запаздывание по времени. Предложен метод реализации оптимального управления типа обратной связи. В основу метода положена специальная процедура коррекции текущих оптимальных программных управлений, которую осуществляет оптимальный

регулятор, используя двойственный метод линейного программирования. Результаты применяются для построения двух типов стабилизаторов систем с запаздыванием в управлении.

Наиболее изученными задачами синтеза управления на конечном отрезке времени являются задачи об управлении движениями систем, моделируемых линейными уравнениями

$$\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u \quad (17)$$

$$x \in R^n, u \in R^m, A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times m}$$

Для стационарной системы  $A(t) = A_0 = const$ ,  $B(t) = B_0 = const$  и неограниченных управляющих воздействий  $u$ , классический критерий управляемости о переводе системы из любой точки  $x_0 \in R^n$  в любую точку  $x_1 \in R^n$  за конечный промежуток времени, состоит в свойстве управляемости пары матриц  $(A_0, B_0)$ . Этот критерий широко применяется в решении задач механики.

В нестационарном случае для управляемости системы (17) достаточно, чтобы выполнялось следующее условие. Определим матрицы  $K_i(t)$  следующими соотношениями

$$K_i(t) = B(t), K_i(t) = A(t)K_{i-1}(t) - \frac{dK_{i-1}(t)}{dt}, i = 2, \dots, n.$$

Если существует такая точка  $\tau \in [t_0, t_1]$ , в которой ранг матрицы  $K = (K_1, \dots, K_n)$  равен  $n$ , то система (17) управляема на интервале времени  $[t_0, t_1]$ .

Анализ этого условия через параметры системы имеет достаточные сложности и поэтому оно имеет больше теоретическое значение.

Исследование задач об управляемости системы (4) при ограниченном управлении и, тем более, для нелинейных систем имеет значительные математические сложности и является предметом многочисленных работ в последние 60 лет.

В работах [96–98] для решения задач синтеза на конечном промежутке времени был предложен так называемый метод управляемости, основанный на применении функций Ляпунова. Это направление получило развитие для инерционных управлений, которые определяются тем, что имеют ограничения также на свои производные определенного порядка, для нелинейных систем сведением их к линейным и т. д. [99, 100]. Основные сложности применения этого метода к задачам механики, а также к другим прикладным задачам состоят: в предположениях гладкости функций  $u = u(t, x)$  (как правило); в условиях определенной положительности  $V(t, x)$ ; в отсутствии удобного алгоритма построения для нестационарной управляемой системы. Различные аспекты этого подхода подробно представлены в монографии [101].

Эффективным в этом направлении представляется предложенное в работах [47, 48] применение знакопостоянной функции Ляпунова со следующими определениями.

**Определение 12.** Задача синтеза управления на конечном отрезке времени состоит в нахождении управления  $u = u(t, x)$ ,  $u \in U$ , такого, чтобы движение  $x = x[t]$  системы (7), начинающееся в произвольной точке  $x_0$  из некоторой окрестности  $x = 0$  в любой начальный момент времени  $t_0 \geq 0$ , попадало бы в конечный момент времени  $t_0 + T$ , где  $T = T(t_0, x_0) > 0$ , в заданную точку  $x = 0$ .

При этом синтез будем называть устойчивым, если при  $u = u(t, x)$ , решающем поставленную задачу, для любого  $t_0 \in R^+$  и для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такое, что  $\|x[t]\| < \varepsilon$ , если  $\|x_0\| < \delta$  и  $t \in [t_0, t_0 + T]$ ,  $T = T(t_0, x_0)$ .

Задача равномерного синтеза состоит в нахождении управления  $u = u(t, x)$ ,  $u \in U$ , такого, что существуют число  $H_0 > 0$ ,  $H_0 < H$ , и число  $T > 0$ , такие, что любое движение  $x = x[t]$ , начинающееся в произвольной точке  $x_0 \in \Gamma_0$ ,  $\Gamma_0 = \{x \in R^n : \|x\| \leq H_0\}$ , в любой начальный момент времени  $t_0 \in R^+$ , попадает в заданную точку  $x = 0$  при некотором  $T^* \in [t_0, t_0 + T]$ .

Методы и методика применения функций и функционалов Ляпунова в задачах стабилизации, в определенном плане могут быть развиты и в решении поставленной задачи.

**Управление движением механической системы.** Движение управляемых механических систем с голономными связями достаточно адекватно описываются уравнениями Лагранжа второго рода [102].

Пусть положение такой системы определяется  $n$  обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_n$ ,  $q' = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  — соответствующий вектор (здесь и далее  $(\cdot)'$  — операция транспонирования) и соответственно кинетическая энергия системы представима в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

$$T_2(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}' A(t, q) \dot{q}, \quad T_1(t, q, \dot{q}) = B'(t, q) \dot{q}, \quad T_0(t, q) = C(t, q),$$

где  $A(t, q) \in R^{n \times n}$  — матрица размерности  $n \times n$  является в общем случае положительно определенной,  $B(t, q) \in R^n$  — матрица-столбец или вектор,  $C(t, q)$  — скалярная функция. Будем полагать для определенности, что матрицы  $A(t, q)$ ,  $B(t, q)$  и функция  $C(t, q)$  является непрерывно-дифференцируемыми,  $A, B, C \in C^1$ .

Составим уравнения управляемого движения механической системы в виде уравнений Лагранжа второго рода [102]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + U, \quad (18)$$

где  $U = (U_1, U_2, \dots, U_n)'$  – совокупность управляющих сил, подлежащих определению,  $U \in F_u$ ,  $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)'$ ,  $Q = Q(t, q, \dot{q})$ , – совокупность обобщенных сил, включающих в себя все остальные внешние и внутренние силы, в том числе, неконтролируемые возмущения.

В дальнейшем будем рассматривать модели, для которых  $U_1, U_2, \dots, U_n$  есть непосредственно управляющие силы и моменты, они определяются в виде зависимостей  $U = U(t, w)$ , где  $w = (w_1, \dots, w_r)$  есть совокупность управляющих сигналов, подающихся на исполнительные механизмы. Второй случай возникает, когда необходимо учесть функционирование исполнительных механизмов, процессы в структуре управления и работу измерительных устройств.

Ограничимся для удобства изложения первым случаем, считая, что  $U_1, U_2, \dots, U_n$  есть непосредственно управляющие силы и моменты.

Пусть  $(q^0(t), \dot{q}^0(t))$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $t_0 < t_1 \leq +\infty$ , есть какое-либо программное движение системы из некоторого множества  $F_q$  желательных движений, и  $U = U^0(t) \in F_u$  — программное управление, реализующее это движение в силу тождества

$$\left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} \right) \Big|_{q=q_0(t), \dot{q}=\dot{q}_0(t)} \equiv Q|_{q=q_0(t), \dot{q}=\dot{q}_0(t)} + U^0(t) \quad (19)$$

Совокупность  $((q^0(t), \dot{q}^0(t)), U^0(t), [t_0, t_1])$  может быть определена как программный управляемый процесс.

Задача регулирования для системы (18), стабилизации программного движения или синтеза управления (см. определение 1) будет состоять в построении управления

$$U = U_0 + U_1, \quad U_1 = U_1(t, q(t), \dot{q}(t)),$$

при котором движение  $(q^0(t), \dot{q}^0(t))$  асимптотически устойчиво, или для каждого движения (18)  $(q(t), \dot{q}(t))$ ,  $(q(\tau) = q_1^0, \dot{q}(\tau) = \dot{q}_1^0, t_0 \leq \tau < t_1, \|q_1^0 - q^0(\tau)\| < \Delta_1 > 0, \|\dot{q}_1^0 - \dot{q}^0(\tau)\| < \Delta)$  существует момент  $t_2$ ,  $\tau \leq t_2 < t_1$ , в которой  $q^*(t_2) = q^0(t_2)$ ,  $\dot{q}(t_2) = \dot{q}^0(t_2)$ .

Введем возмущения  $x = q - q^0(t)$ . Тогда согласно принятым определениям задача регулирования состоит в построении закона обратной связи в виде  $U_1 = U_1(t, x, \dot{x})$ . В переменных  $x$  программному движению  $(q^0(t), \dot{q}^0(t))$  будет



соответствовать  $\dot{x} = x = 0$ . Для уравнений движения в переменных  $x$  будет иметь место такая же структура уравнений, что и (18), с той разницей, что эти уравнения будут иметь решение  $\dot{x} = x = 0$ .

Без ограничения общности примем за уравнения возмущенного движения уравнения (18) при предположении существования невозмущенного движения  $\dot{q} = q = 0$ .

Подставляя выражение для  $T$  в (18), приведем эти уравнения к виду

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T_2}{\partial q} = Q + U + G\dot{q} + \frac{\partial T_0}{\partial q} - \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (20)$$

где для матрицы

$$G = \frac{\partial B}{\partial q'} - \frac{\partial B'}{\partial q}$$

имеем  $G' = -G_0(t, q)$ . Заметим, что это соотношение имеет определенный физический смысл. Так проявляется действие инерциальных сил, носящее гироскопический характер [102–104].

Находим, что для существования движения  $\dot{q}^0(t) = q^0(t) = 0$  соответствующее программному движению  $U^0(t)$  должны выполняться следующие равенства, соответствующие равенствам (19)

$$U^0(t) = -Q(t, 0, 0) - \frac{\partial T_0(t, 0)}{\partial q} + \frac{\partial B(t, 0)}{\partial t}$$

и соответственно искомые управления – строиться в виде

$$U(t, q, \dot{q}) = U - U^0(t).$$

Если считать зависимости  $Q, T_0, B$  достаточно гладкими,  $Q \in C^1$ ,  $T_0, B \in C^2$ , тогда уравнения движения (20) в линейном приближении приводятся к форме

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T_2}{\partial q} = -D\dot{q} + G\dot{q} - Pq + Kq + U + Q^{(2)}, \quad (21)$$

$$D' = D, G'_1 = -G_1, P' = P, K' = -K, G = G_0 + G_1.$$

При  $U = 0$  уравнения (21) можно трактовать как уравнения движения под действием структуры сил — совокупности диссипативно-ускоряющих, гироскопических, потенциальных и неконсервативных сил [102–104].

Имеено в такой постановке наиболее часто рассматривается задача о стабилизации положения равновесия  $\dot{q} = q = 0$  системы (21), сводящаяся к соответствующей задаче об устойчивости.

Считая  $U = 0$ , рассмотрим задачу об устойчивости положения равновесия  $\dot{q} = q = 0$  системы (21). Наиболее исследованным является случай установившегося движения под действием сил, не зависящих явно от времени.

В этом случае уравнения (21) представляются с выделением линейного приближения в следующей форме

$$M_0 \frac{d^2 q}{dt^2} + (D_0 - G_0) \dot{q} + (P_0 - K_0) q = Q^{(2)}(q, \dot{q}) \quad (22)$$

$M_0, D_0, G_0, P_0, K_0$  – постоянные,  $Q^{(2)}(q, \dot{q})$  содержит составляющие второго и более высокого порядка малости.

Исследование уравнений (22) в период 1998-2009 гг. проведено в работах [105–123].

В работах [105-108] исследовалась задача о влиянии гироскопических сил на стабилизацию положения равновесия потенциальной системы (в системе (22)  $M_0 = E$ ,  $D_0 = K_0 = 0$ ). В [105] установлены простые достаточные условия устойчивости и неустойчивости. Результаты получены построением функции Ляпунова из первых интегралов системы. В [106] таким подходом получен критерий устойчивости равновесия заряженной частицы в электромагнитном поле. В [107, 108] уточнены условия устойчивости из [106] посредством применения линейного преобразования, соответственно при  $M_0 = E$  и  $M_0 \neq E$ .

В случае неидеальных связей матрица  $M_0$  может быть несимметричной, так как в этой матрице учитывается также закон трения. В [109] исследована задача робастной устойчивости, состоящая в определении необходимых и достаточных условий относительно матрицы  $M_0$ , при которых достигается асимптотическая устойчивость системы (22) для любых положительно-определенных матриц  $D_0$  и  $P_0$  ( $G_0 = 0, K_0 = 0, Q^{(2)} = 0$ ). Показано применение этих условий в динамике механических систем со связями.

В работах [110-114] исследование уравнений (22) проводится на основе специального линейного преобразования  $x = L(t)y$ . При определенных условиях для преобразованной системы могут быть использованы классические результаты Томсона-Тета-Четаева об устойчивости под действием потенциальных, гироскопических и диссипативных сил. Исследуются условия существования такого преобразования и применения полученных критериев в задачах об устойчивом функционировании четырехгироскопной гировертикали и четырехгироскопного гиругоризонта.

В работах [115-117] обсуждались семь теорем Метелицына [118-119] об условиях устойчивости системы (22). Показано, что основное неравенство Метелицына является достаточным условием асимптотической устойчивости, но его теоремы 1-4, 5-7 неверны. Даны условия, при которых применение указанного неравенства становится конструктивным. В [117] этот конструктивизм применен для исследования устойчивости роторных систем.

В работе [120] асимптотическая устойчивость системы (22) ( $M_0 = E$ ) исследуется при специальных, трудно анализируемых условиях относительно входящих в (22) матриц. Исследование проводится как на основе корней характеристического уравнения, так и построением функции Ляпунова.

В работе [121] исследована задача о стабилизации неустойчивого положения равновесия системы с четырьмя степенями свободы посредством гироскопических сил. Показано качественное изменение условий стабилизации по сравнению с системой с двумя степенями свободы. Это отличие исследовано на примере устойчивости волчка Лагранжа построением функции Ляпунова в виде связки интегралов Четаева.

В работе [122] обсуждена проблема бифуркации положений равновесия консервативных систем, потенциальная энергия которых не зависит от знаков входящих в него переменных. Предлагается методика последовательного определения положений равновесия таких систем, начиная с тривиальных, в порядке возрастания их сложности.

Важный класс управляемых систем составляют механические системы с позиционными координатами. Такие системы могут иметь стационарные движения.

Задачи устойчивости и стабилизации стационарных движений таких систем исследовались в [123]. В ней рассмотрены механические системы с циклическими координатами, на которые действуют диссипативные силы с полной диссипацией и постоянные силы, приложенные только к циклическим переменным. Обсуждаются вопросы существования стационарных движений таких систем и условия их устойчивости. Показано, в частности, что в случае, когда функция Релея пропорциональна кинетической энергии, условия устойчивости стационарных движений изучаемой системы совпадают или (при некоторых дополнительных условиях) близки к условиям устойчивости стационарных движений соответствующей консервативной системы. На примере физического маятника показано, что в общем случае аналогичные выводы не имеют места: влияние диссипативных и постоянных сил может приводить к дестабилизации устойчивых движений системы.

В работе [124] рассмотрена задача позиционирования лагранжевой системы с упругими связями между свободными и управляемыми степенями свободы. Уравнения движения такой системы описывают, в частности, динамику робота-манипулятора с упругими сочленениями. Предлагаемые законы управления позволяют учесть ограничения на величину управляющего воздействия. Рассматривается, в частности, ситуация, когда скорости не доступны измерению. Анализ предложенных законов управления основывается на прямом методе Ляпунова, на теореме Барбашина-Красовского [6].

Эта методика была продолжена в работе [125], где предложен способ асимптотической стабилизации натуральной механической системы, не

требующий измерения скоростей системы, но при этом в процессе управления необходимо решать линейные дифференциальные уравнения. Основное достоинство предлагаемых схем стабилизации – простота в практическом воплощении по сравнению с ранее предложенными методами стабилизации программного движения роботов-манипуляторов и управляемых спутников.

В работе [126] рассмотрена линейная колебательная система со многими степенями свободы с периодическими коэффициентами.

Исследование положений равновесия и стационарных движений систем, приводимых к (22), представляет интерес для задач о стабилизации установившихся движений управляемых механических систем, но они непригодны в случае нестационарных программных движений. Результаты по разработке методов исследования задач о стабилизации нестационарных программных движений управляемых механических систем за последние 15 лет представлены в монографии [19] и в работах [127–143]. Одним из основных методов решения этой задачи является метод функций Ляпунова. Проведем краткий обзор результатов работ [19, 127–143].

В. М. Матросовым [19] с помощью двух функций Ляпунова получены условия асимптотической устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения нестационарной нелинейной механической системы при действии потенциальных, гироскопических сил и нелинейных сил сопротивления с полной диссипацией.

А. С. Андреевым [127] рассматривалась задача об устойчивости положения равновесия неавтономной механической системы со стационарными связями, находящейся под действием квазипотенциальных, гироскопических и диссипативно-ускоряющих сил. С помощью функции Ляпунова со знакопостоянной производной были получены условия асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого положения равновесия механической системы. В работе А. С. Андреева и Т. А. Бойковой [128] с помощью скалярной функции Ляпунова получены достаточные условия устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости положения относительного равновесия голономной механической системы с нестационарными связями.

В работах А. С. Андреева и Р. Б. Зайнетдинова [129] рассматривалась задача о влиянии структуры сил на устойчивость обобщенного стационарного движения механической системы с нестационарными связями. Был доказан ряд утверждений об устойчивости по всем и по части переменных для таких систем. В работе А. С. Андреева и Р. Б. Зайнетдинова [130] решена задача об устойчивости обобщенного стационарного движения механической системы с переменными массами.

В работе А. А. Косова [131] рассмотрена задача о стабилизации положения равновесия неавтономной системы с заданными потенциальными силами за счет присоединения диссипативных, гироскопических и

неконсервативных позиционных сил. В работе [132] на основе функции Ляпунова квадратичного вида получен ряд теорем об экспоненциальной устойчивости и стабилизации движений неавтономных механических систем с неконсервативными силами за счет наложения сил иной структуры.

В работе А. Ю. Александрова и А. А. Косова [133] показано, что наличие в системе ведущего параметра, в качестве которого может выступать, например, малый параметр при старшей производной, или большой параметр, определяющий доминирующие силы в системе, позволяет провести декомпозицию исходной системы размерности  $2n$  к двум изолированным подсистемам размерности  $n$ .

Условия устойчивости движений механических систем при эволюции диссипативных сил были получены в работах Л. Хатвани [134] и А. Ю. Александрова, А. А. Косова и А. В. Платонова [135]. Найдены условия асимптотической устойчивости и неустойчивости при неограниченном росте или исчезновении диссипативных сил со временем.

Метод векторных функций Ляпунова в сочетании с методом предельных уравнений был применен в работах О. А. Перегудовой [136, 137] для получения условий стабилизации потенциальных, гироскопических систем за счет наложения сил другой структуры. На основе новой методики исследования задач о стабилизации неавтономных механических систем было получено условие стабилизации вращательного движения спутника на эллиптической орбите, решена задача об устойчивом функционировании гировертикали с радиальной коррекцией с учетом параметрических возмущений.

Методика исследования на основе преобразования нелинейной управляемой системы в линейную предложена автором в работах Ю. К. Зотова [138, 139] для решения общих задач о синтезе стабилизирующего линейного управления, в том числе, при наличии параметрических возмущений. Заметим, что применяемая в [138, 139] методика является малопродуктивной, предлагаемые преобразования недостаточно математически обоснованы, кроме того, в работах [138, 139] проводится изложение целого ряда понятий и широко известных результатов из теории устойчивости.

Подход, основанный на сведении нестационарной системы к стационарной, был применен в работах [140–143] для специального класса уравнений движения голономных механических систем, линеаризованных в окрестности программного движения.

Большой цикл исследований проведен по задачам стабилизации движений неголономных механических систем [144–152]. Неголономные системы служат моделями многих технических объектов, не только механических, но и электромеханических. В связи с развитием робототехники все более актуальным становятся задачи исследования динамики,

устойчивости и стабилизации неголономных механических систем, которые представляют собой базовые модели разнообразных колесных роботов.

Важное значение в исследовании неголономных систем имеет выбор уравнений движения. Наиболее распространенными являются уравнения в форме Чаплыгина (в специальном случае связей, наложенных на систему), Воронца, Аппеля, Больцмана-Гамеля [153–158].

При исследовании задач устойчивости и стабилизации программных движений нелинейных механических систем (голономных и неголономных) особый интерес представляют установившиеся движения (положения равновесия и стационарные движения), так как эти движения являются рабочими режимами многих технических объектов. Поэтому прежде всего необходимо установить, являются ли рассматриваемые установившиеся движения устойчивыми и каков характер этой устойчивости. Однако во многих случаях указанные движения либо не обладают необходимыми свойствами, либо (в случае устойчивости) характер переходных процессов не удовлетворяет заданным техническим требованиям. Таким образом, естественно возникает необходимость решения задачи стабилизации — обеспечения устойчивости (асимптотической устойчивости) установившегося движения путем приложения определенных управляющих воздействий.

При изучении стационарных движений неголономных систем обычно используются два подхода. Один из них основан на модифицированной теории Рауса-Сальвадори и методах Пуанкаре, Четаева, Марсдена и Смейла [159–161]. Этот подход требует знания линейных интегралов, соответствующих симметриям системы. Широко используются уравнения в форме Воронца и Чаплыгина, определение стационарного движения, при котором позиционные координаты и циклические скорости постоянны [160–165].

Задача стабилизации стационарных движений состоит в том, чтобы надлежащим выбором управляющих воздействий, приложенных как по циклическим, так и по позиционным координатам (или по части этих координат), сделать его асимптотически устойчивым (или просто устойчивым) по отношению к позиционным координатам, позиционным и циклическим скоростям.

Для решения задачи стабилизации в [147, 152] проводится линеаризация уравнений движения, вводится выходной сигнал в виде линейной комбинации отклонения возмущенного движения от невозмущенного в позиционных координатах и циклических скоростях.

Решение задачи о стабилизации в [146–152] проводится методами Ляпунова, а также на основе критериев управляемости из [166, 167]. При этом проводится анализ наблюдаемости системы.

В [152] подчеркнуто, что стабилизируемость может быть достигнута и в случаях, когда система не является полностью управляемой и наблюдаемой. В

этих случаях предполагается построение регулятора с динамической обратной связью.

Теоретические исследования из [144–148, 150–152, 156, 159, 161, 165] были успешно применены для исследования динамики, устойчивости и стабилизации как в классических задачах о движении твердого тела и гиростата по абсолютной шероховатой поверхности, так и при анализе движения сложных механических объектов, моделями которых служат неголономные механические системы.

В работах [144, 161, 164, 168] методами [159–161] исследовалось движение одного твердого тела или тела с ротором (гиростата) по поверхности с гиростатом. Методами [147, 149–152] в работах [149, 169–175] найдены условия устойчивости стационарных движений для различных моделей моноцикла, в работах [150, 151, 176] – для моделей трехколесных экипажей.

В работе [177] рассмотрена нелинейная математическая модель движения транспортного робота (ТР) с гусеничным шасси и с приводами на базе двигателей постоянного тока, являющегося неголономной электромеханической системой. Построены нелинейные канонические преобразования координат пространства состояний и управлений, приводящие исходные уравнения движения ТР к более простой канонической форме, удобной для анализа и синтеза систем управления ТР. Найдены условия управляемости ТР как объекта управления. Даны алгоритмы построения программных движений (ПД) ТР. Синтезированы стабилизирующие законы управления, обеспечивающие асимптотическую устойчивость ПД ТР и заданный характер переходных процессов.

В работе [178] рассмотрена нелинейная математическая модель движения транспортного робота (ТР) типа автомобиля с абсолютно твердыми колёсами, с рулевым устройством и с приводами на базе двигателей постоянного тока. Такая модель движения ТР является неголономной электромеханической системой без учёта динамики приводов и рулевого устройства (сил упругости и демпфирования в её элементах) соответствует математической модели движения автомобиля, разработанной П. М. Линейкиным. Построены нелинейные канонические преобразования координат пространства состояний и управлений, приводящие исходные уравнения движения ТР к более простой канонической форме, удобной для анализа и синтеза систем управления ТР. С использованием этих преобразований найдены условия управляемости ТР, как объекта управления. Даны алгоритмы построения программных управлений и программных движений ТР. Синтезированы стабилизирующие законы управления, обеспечивающие асимптотическую устойчивость программных движений ТР и заданный характер переходов процессов.

Разработанные управления не имеют достаточно явной структуры, и в работах по существу утверждается о возможности управления рассмотренными механическими объектами.

В работе [179] выведены и исследованы уравнения движения трёхколёсных роботов с двумя ведущими и пассивными роляльными колёсами. Управление продольным движением и поворотами такого робота осуществлено формированием соответствующих управлений независимыми двигателями ведущих колёс. Исследование проведено в предположениях, что робот движется по горизонтальной плоскости, и что его колёса не проскальзывают.

В работе [180] изучено продольное движение моноцикла, механическая модель которого представляет собой цилиндр с шарнирно закрепленным на нем перевернутым маятником. Вращение маятника относительно цилиндра осуществляется электроприводом. При помощи того же привода моноцикл может перемещаться (катиться) по поверхности. Управляющий параметр — ограниченное по абсолютной величине напряжение. Построен линейный по фазовым координатам закон управления (с насыщением), при котором маятник стабилизируется в верхнем неустойчивом положении равновесия, а моноцикл удерживается на месте или перемещается. Учитывается запаздывание в контуре управления, возникающее при наличии индуктивности в цепи ротора двигателя.

В работах [181, 182] изучены неголономные системы с качением, или колёсные системы. Исследование ограничено кинематическими моделями, учитывается динамика привода системы. Построен закон управления, который стабилизирует движение колёсной системы вдоль заданной траектории (плоской гладкой кривой).

В работе [182] исследована задача синтеза закона управления плоским движением колёсного робота. Задние колёса ведущие, а передние отвечают за поворот платформ. Цель управления — выведение целевой точки на предписанную траекторию и стабилизация движения по ней.

Значительные исследования в последнее десятилетие выполнены по задаче синтеза управления механической системой на конечном отрезке времени [183–187].

В работе [183] рассмотрена задача оптимального по быстродействию управления движением материальной точки посредством ограниченной по модулю силы. Требуется перевести ее из произвольного состояния движения в начало координат с нулевой скоростью.

В работе [184] рассмотрена задача оптимального управления  $m$ -звенным манипулятором, состоящая в приведении его в заданное конечное положение. При этом оценка качества процесса определяется минимумом интеграла от квадрата отклонения основного звена. Заметим, что задача имеет больше теоретическое значение, чем прикладное.

В работе [188] исследуется задача о приведении в положение равновесия механической системы, моделируемой системой дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, при ограничении



на управление. Задача решается путем преобразования уравнений движения по каждой координате в отдельности и построением соответствующего управления.

В работе [189] рассмотрены натуральные лагранжевы системы, моделируемые механизмами с кинематической структурой дерева. Приводятся достаточные условия глобальной управляемости, т.е. возможности допустимым воздействием перевести систему за конечное время из любого исходного фазового состояния в любое заданное.

В работе [190] рассмотрены натуральные лагранжевы системы, моделируемые механизмами с кинематической структурой дерева и имеющие несколько устойчивых состояний покоя. Приводятся достаточные условия глобальной управляемости.

В работе [191] исследована задача синтеза непрерывного управления для лагранжевой склерономной механической системы в предположении, что на систему действуют неконтролируемые ограниченные возмущения и вектор управляющих сил ограничен по норме. Предполагается закон управления по обратной связи, позволяющий приводить систему в заданное состояние покоя за конечное время. Применяемый подход основан на методах теории устойчивости движения. Для построения закона управления и его обоснования используется функция Ляпунова, заданная неявно.

В более полной форме результаты работ [190, 191] представлены в монографии [192], где предложено решить задачу управляемости для лагранжевой механической системы посредством стабилизируемости системы к состоянию равновесия (прежде всего, применением функции Лагранжа), с последующим применением условия локальной управляемости.

В работах [193, 194] дается развитие этого подхода для систем с идеальными односторонними связями.

Математические модели многих современных механических систем представляют собой нелинейные системы дифференциальных уравнений высокой размерности. Основной подход к анализу моделей таких систем связан с идеей декомпозиции. Декомпозиция позволяет свести исследование модели сложной системы к исследованию моделей подсистем меньшей размерности или более простой структуры.

Известный подход к идее декомпозиции для решения задач управления механическими системами широко представлен работами учёных научных школ Ф. Л. Черноусько [195–200] и Е. С. Пятницкого [201–207]. Полагается, что для управляемых механических систем специальный выбор управления может за конечное время привести систему в движение при режиме полной компенсации динамического взаимовлияния между подсистемами, т.е. при режиме декомпозиции.

В работах Е. С. Пятницкого [201–203] было предложено решать задачи синтеза универсальных управлений механическими системами вида на основе

принципа декомпозиции, который, во-первых, позволяет полностью устранить перекрёстные связи между подсистемами, а, во-вторых, обеспечивает движение системы в соответствии с заданной целью управления. Решение этой задачи было достигнуто при помощи релейных управлений

$$U_i = -h_i \text{sign}(\dot{q}_i - v_i(t)), i = 1, 2, \dots, n$$

и использования функции Ляпунова энергетического типа

$$V(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(t, q)(\dot{q}_i - v_i(t))(\dot{q}_k - v_k(t))$$

где функции  $v_i(t), i = 1, 2, \dots, n$  определяют движение отдельных подсистем в режиме декомпозиции.

Функционирование декомпозированной системы происходит в скользящем режиме [204], который характеризуется тем, что движение системы происходит вдоль поверхности переключения управления и сопровождается частыми переключениями управления. Таким образом, движение системы состоит из двух фаз:

- 1) фаза достижения (система движется к заданному многообразию и достигает его за конечное время);
- 2) фаза скольжения (система движется вдоль многообразия).

В дальнейшем подход Е.С. Пятницкого для задач стабилизации программных движений был развит в работах В. И. Матюхина [205–207] и др. В работах [205, 206] получены условия существования и устойчивости движений манипуляционных роботов в режиме декомпозиции при учете динамики исполнительных органов. Построено множество движений манипулятора, которые могут быть реализованы в режиме компенсации взаимовлияния между его звеньями.

На основе принципа декомпозиции решена задача [195–198] о переводе управляемой лагранжевой системы из произвольного начального состояния в заданное терминальное состояние за конечное время. Достижение этой цели сводится к двум этапам. В ходе первого этапа с использованием релейных управлений проводится понижение фазовой скорости до малых значений, допускающих декомпозицию системы. Иными словами, в фазовом пространстве системы при малых скоростях исходная система сводится к совокупности  $n$  управляемых подсистем второго порядка. На следующем этапе методами теории дифференциальных игр для каждой подсистемы строится управление, которое приводит данную подсистему в требуемое состояние.

Релейные законы управления обладают рядом преимуществ, таких, как простота реализации, возможность достижения цели управления за конечное время и т.д. Но на практике эти законы обнаруживают ряд существенных недостатков, к которым относятся значительные энергетические потери, обусловленные использованием максимальных по модулю значений

управляющих воздействий, а также высокочастотные колебания компонент вектора состояния системы, которые приводят к нежелательным вибрациям механических элементов систем управления. Это обусловлено тем, что вследствие несовершенства устройств переключения управления и наличия запаздывания в структуре обратной связи при движении системы в скользящем режиме возникают биения (чаттер), сопровождающиеся быстрыми переключениями управления, что и приводит к возникновению высокочастотной немоделируемой динамики в системе. Поэтому важным является построение классов разрывных управлений, свободных от недостатков релейных законов.

Было предложено [200] использовать управления с кусочно-постоянными коэффициентами, что позволило решить задачу о приведении системы в терминальное состояние за конечное время. В этих работах для обоснования алгоритма изменения коэффициентов обратной связи использовалась скалярная функция Ляпунова энергетического типа. Так, в частности, разработан метод управления на основе кусочно-линейной обратной связи, когда вектор управляющих сил имеет вид

$$U = -\beta(q - q^*) - \alpha\dot{q},$$

где  $\alpha, \beta$  – кусочно-постоянные функции времени, которые увеличиваются через определённые промежутки времени по мере приближения системы к терминальному состоянию  $(q^*, 0)$ . При этом, несмотря на неограниченное увеличение коэффициентов  $\alpha, \beta$ , управляющие силы остаются ограниченными. Такой метод управления обеспечивает перевод системы в заданное состояние за конечное время и эффективен не только при наличии неконтролируемых возмущающих сил, но и при неопределённости матрицы кинетической энергии. Этот подход широко представлен в монографии [200], где на основе различных вариантов декомпозиции было предложено решение задач синтеза управлений движением нелинейных механических систем. С помощью этого подхода были решены некоторые задачи об управлении движением двухзвенников.

В монографии [93] была исследована проблема синтеза разрывных управлений движениями механических систем общего вида в условиях изменяющихся параметров системы, неполной информации о геометрических и массо-инерционных характеристиках систем, наличия некоторого неопределённого запаздывания в структуре обратной связи, действия неконтролируемых возмущений. В частности, была решена задача о стабилизации программного движения механической системы, описываемой уравнением вида

$$H(t, q)\ddot{q} + f(t, q, \dot{q}) = U$$

путем построения релейного управления

$$U(t) = K \text{sign}(q(t) - q_0(t) + C^{-1}(\dot{q}(t) - \dot{q}_0(t)))$$

Этот закон управления позволил за конечное время вывести систему из начальной области в режим декомпозиции, обеспечивающий экспоненциальную стабилизацию программного движения. Условия стабилизации в [93] записаны в виде ограничений на векторные и матричные нормы матриц и векторов, описывающих правую часть системы в отклонениях. Основное отличие этого результата от известных результатов Е. С. Пятницкого, В. И. Матюхина [200], полученных на основе скалярной функции Ляпунова энергетического типа, состоит в нахождении явной оценки области начальных возмущений и отсутствии ограничений на производные матрицы кинетической энергии.

В [209] была решена также задача о стабилизации программного движения системы при помощи кусочно-непрерывного управления вида

$$U(t) = \alpha K(q(t) - q_0(t) + C^{-1}(\dot{q}(t) - \dot{q}_0(t)))$$

Построен алгоритм изменения кусочно-постоянной функции  $\alpha(t)$ , который позволил за конечное время вывести систему в режим декомпозиции, обеспечивающий экспоненциальную устойчивость. Эффективность полученных результатов продемонстрирована в решении задачи о стабилизации программного движения пространственного трехзвенного манипулятора.

На основе принципа декомпозиции в [93] решена задача о стабилизации программного движения механической системы с неизвестной матрицей инерции. В работе [210] исследована задача о стабилизации программного движения механических систем с учетом динамики исполнительных механизмов при помощи релейных управлений. Получены соответствующие ограничения на матричные и векторные нормы.

С помощью принципа декомпозиции может быть решена задача слежения для механических систем общего вида. Существуют различные подходы к постановке и решению задач об отслеживании траекторий механических систем. Так, например, известна следующая постановка задачи [199, 200], рассматриваемая в работах И. М. Ананьевского, С. А. Решмина. Рассматривается механическая система, динамика которой подчиняется уравнениям Лагранжа второго рода, с действующими обобщёнными силами, которые разделяются на заданные силы, реализующие программное (номинальное) движение, управляющие силы и возмущения, подчинённые ограничениям. Требуется построить такой закон изменения управляющих сил и указать такую область допустимых начальных отклонений, что любая траектория возмущённой управляемой системы с начальной точкой из этой области через конечное время выйдет на номинальную траекторию и будет двигаться вдоль неё, каковы бы ни были возмущения, удовлетворяющие заданным ограничениям. Поставленная задача слежения решена на основе принципа декомпозиции и построении релейных управлений в работах И. М. Ананьевского и С. А. Решмина [199, 200].

В реальных управляемых системах в структуре обратной связи естественным образом возникает запаздывание. Как показано в монографиях [211, 212] на простых примерах для управления с нелинейной обратной связью наличие запаздывания может оказать дестабилизирующее действие.

Задача управления с учетом запаздывания представляет собой математически более сложную задачу. Основным методом ее решения может являться метод функций и функционалов Ляпунова. В настоящее время вопросам управления с запаздыванием посвящено сравнительно небольшое количество работ.

Рассмотрим постановку задачи слежения для механических систем, описываемых нестационарными нелинейными уравнениями, при действии релейного управления с запаздыванием. Известен [213] метод решения этой задачи, основанный на теории "замороженных", коэффициентов, который заключается в предположении, что параметры системы и сама отслеживаемая траектория изменяются достаточно медленно, чтобы этим изменением можно было пренебречь. Такой подход, развитый в работах М. С. Ефремова, А. Е. Полякова и В. В. Стрыгина [214, 214], не позволяет решать задачи слежения для механических систем, параметры которых изменяются со временем, и отслеживать быстрые движения таких систем. Кроме того, этот подход накладывает жесткие ограничения на спектр матриц, описывающих механическую систему

В работе [215] задача слежения решена с помощью построения вектор-функции Ляпунова с компонентами вида прямоугольной векторной нормы.

Устанавливаются ограничения на максимально допустимое запаздывание в системе и величину начальных возмущений. Что позволяет решать задачи слежения для механических систем, описываемых нестационарными уравнениями (матрица  $A$  и вектор  $B$  в уравнении движения предполагаются зависящими явно от времени). При этом проверка условий теоремы сводится к довольно простым операциям вычисления логарифмических и операторных матричных норм, соответствующих прямоугольной векторной норме, и не требует вычисления и оценки собственных значений нестационарных матриц, что эффективно при проведении вычислительных расчетов. Рассмотрено решение задач слежения для конкретных механических систем. Показана эффективность предложенного подхода перед применявшимся ранее методом замороженных коэффициентов [213].

Отметим, что методика работы [215] может быть применена к исследованию механических систем, моделируемых нестационарными нелинейными уравнениями, без наложения жестких ограничений на скорость изменения параметров системы и отслеживаемой траектории.

Методика работы [213] использована в [216] для стабилизации углового положения космического аппарата с упругими динамическими элементами, обладающими диссипативными свойствами. Управление осуществляется в

условиях неопределенности. Точность управления демонстрируется на численном примере.

Эффективные способы построения управления в системе с запаздывающей обратной связью на основе функционалов Ляпунова предложены в работах [81, 217–221]. Они существенно развивают результаты из [222].

**О моделировании динамики робототехнических систем.** Для широкого класса современных машин и приборов, включая многие самодвижущиеся аппараты – летающие, плавающие, катящиеся и шагающие по поверхности, – механическая модель задается в виде твердого тела и системы связанных твердых тел, соединенных посредством связей и упругих приспособлений. Движение тела и системы тел, как и движение любой механической системы, удовлетворяет основным теоремам и принципам механики. Но так как они представляют частный вид общей механической системы, целесообразно получить вид их уравнений движения, удобный для теоретического анализа и численного моделирования на ЭВМ. Такое удобство может состоять как в описании движения в переменных, не имеющих особенностей (как, например, в случае углов Эйлера), так и в эффективном представлении уравнений движения для численного интегрирования. Многие ученые разных стран ведут исследования в этой области, как в направлении вывода удобных алгоритмов составления уравнений движения, так и в решении различных прикладных задач. Из многочисленных публикаций можно выделить монографии [223–228], обзоры [229–232], сборники [233–235] и другие.

Систематическое изложение методики составления искомых уравнений при помощи графов, что позволяет широко применять ЭВМ, дано в монографии [224].

Матричные уравнения Й. Виттенбурга и Л. К. Лилова [224, 225] составлены применительно к задаче программирования уравнений движения сложных механических систем. Развитию этих уравнений посвящены многочисленные работы, из которых отметим следующие — [236, 237]. В работе [236] излагаются алгоритмы автоматического формирования соотношений кинематики и уравнений движения при компьютерном моделировании динамики систем абсолютно твердых тел с большим числом степеней свободы. Подробно рассмотрен вывод уравнений связей для систем с замкнутыми кинематическими цепями. Приведены три эффективных метода синтеза уравнений движения и их модификации. В работе [237] рассмотрены аналитические выражения для элементов матриц Якоби уравнений движения систем тел в точной и приближенной постановках. С целью снижения числа операций при численном моделировании динамики систем тел введены понятия локальных матриц Якоби силовых элементов и блочно-диагональных

локальных матриц Якоби, дано обоснование использования матриц последнего типа для широкого класса силовых взаимодействий тел.

Эффективные алгоритмы и программы управления робототехническими системами представлены в работах [238–240]. В работе [238] рассмотрена методология алгоритмического конструирования адаптивных систем управления электромеханическими объектами (ЭМО) с нестационарными и неконтролируемыми возмущениями. Предложены алгоритмы перенастройки структуры системы управления и параметров регулятора. Для определения законов и алгоритмов управления используется функция Гамильтона на траектории движения ЭМО, которая вычисляется в пространстве измеряемых и оцениваемых переменных состояния. В работе [240] рассмотрены математические модели промышленных транспортных роботов, получены уравнения кинематики и динамики с использованием аппарата квазискоростей. На основе линеаризованных уравнений динамики синтезированы алгоритмы управления, обеспечивающие стабилизацию движения транспортных роботов при движении по произвольной трассе.

Наибольшее применение получил эффективный комплекс «Универсальный механизм». Параметры и возможности этого комплекса представлены на сайте [www.umlabor.ru](http://www.umlabor.ru). Этот программный комплекс может быть активно использован для разработки управления системами связанных твердых тел, робототехническими системами.

В работах [241–246] выполнены исследования по разработке мобильных роботов в виде многозвенных механизмов, имитирующих движение змей и червей. Проведен подробный математический анализ представленных моделей с непосредственными решениями необходимых оптимизационных задач. В работе [246] предложены супервизорные алгоритмы управления, при которых пользователь (оператор) контролирует скорость и направление движения, а изменение конфигурации механизма, реализующее желаемое движение, осуществляется автоматически. Выполнено компьютерное моделирование управляемых движений рассматриваемых механизмов на основе их динамических моделей. Проведено сравнение движений, имитирующих перемещение змей и червей. Механизмы такого типа могут использоваться как мобильные роботы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (11-01-00541-а).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Калман Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб – М.: Мир, 1971. – 400 с.
2. Александров В. В. Оптимизация динамики управляемых систем / В. В. Александров, В. Г. Болтянский, С. С. Лемак, А. Парусников, В. М. Тихомиров – М.: МГУ, 2000. – 303 с.

3. Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений / Н. Н. Красовский // Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Доп.4 – М.: Наука, 1966. – С. 475-514.
4. Кунцевич В. М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова / В. М. Кунцевич, М. М. Лычак – М.: Наука, 1977. – 400 с.
5. Ляпунов А. М. Избранные труды. Работы по теории устойчивости / А. М. Ляпунов – М.: Наука, 2007. – 574 с.
6. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения / Н. Н. Красовский – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
7. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин – М.: Наука, 1966. – 530 с.
8. Руш Н. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости / Н. Руш, П. Абетс, М. Лалуа – М.: Мир, 1980. – 300 с.
9. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов / А. М. Летов // Автоматика и телемеханика. – 1960, № 4. – С. 436-441; – № 5. – С. 561-568; – № 6. – С. 661-665. – 1961, № 4. – С. 425-435; – 1962, № 11. – С. 1405-1413.
10. Халил Х. К. Нелинейные системы / Х. К. Халил – М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2009. – 832 с.
11. Ким А. В. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости систем с последействием / А. В. Ким – Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 1992.
12. Колмановский В. Б. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием / В. Б. Колмановский, В. Р. Носов – М.: Наука, 1981. – 448 с.
13. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл – М.: Мир, 1984. – 422 с.
14. Hale J. K. Phase space for retarded equations with infinite delay / J. K. Hale, J. Kato // Funkcial. Ekvac. – 1978. – V. 21. – P. 11-41.
15. Burton T. A. Stability theorems for nonautonomous functional differential equations by Liapunov functionals / T. A. Burton, L. Hatvani // Tohoku Math. J. – 1989. – V. 41. – P. 65-104.
16. Фурасов В. Д. Устойчивость и стабилизация дискретных процессов / В. Д. Фурасов – М.: Наука, 1982. – 191 с.
17. Румянцев В. В. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных / В. В. Румянцев, А. С. Озиранер – М.: Наука, 1987. – 253 с.
18. Воротников В. И. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения / В. И. Воротников, В. В. Румянцев – М.: Научный мир, 2001. – 320 с.



19. Матросов В. М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем / В. М. Матросов – М.: Физматлит, 2001. – 380 с.
20. Андреев А. С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем / А. С. Андреев // ПММ. – 1979. – Т. 49, Вып.5. – С. 796-805.
21. Андреев А. С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы / А. С. Андреев // ПММ. – 1984. – Т. 48, Вып. 2. – С. 225-232.
22. Андреев А. С. К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости / А. С. Андреев, О. А. Перегудова // Доклады Академии наук. – 2005. – Т. 400, № 5. – С. 621-624.
23. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление / Я. Н. Ройтенберг – М.: Наука, 1971. – 395 с.
24. Афанасьев В. Н. Математическая теория конструирования систем управления: Учеб. для вузов / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов – 3-е изд., испр. и доп. М.: Высш. шк., 2003. – 614 с.
25. Дорф Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп; Пер. с англ. Б. И. Копылова. – М.: Лаборатория Базовых знаний, 2004. – 832 с.
26. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович – М.: Физматгиз, 1967. – 472 с.
27. Huang J. On a nonlinear multivariable servomechanism problem / J. Huang and W.J. Rugh // Automatica, 1990, – V. 26. – P. 963-972.
28. Isidori A. Output regulation of nonlinear systems / A. Isidori and C.I.Byrnes // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1990. – V. 35. – P. 131-140.
29. Lawrence D. A. Gain scheduling dynamic linear controllers for a nonlinear plant / D. A. Lawrence and W. J. Rugh // Automatica. – 1995. – V. 31. – P. 381-390.
30. Rugh W. J. Research on gain scheduling / W. J. Rugh and J. S. Shamma // Automatica. – 2000. – V. 36. – P. 1401-1425.
31. Utkin V. Sliding Mode Control in Electromechanical Systems / V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi – Taylor&Francis, London, 1999.
32. Sira-Ramirez H. A dynamical variable structure control strategy in asymptotic output tracking problem / H. Sira-Ramirez // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1993. – V. 38. – P. 615-620.
33. Леонов Г. А. системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике / Г. А. Леонов, С.М. Селеджи – СПб.: «Невский Диалект», 2002. – 112 с.
34. Нелинейные системы. Частотные и матричные неравенства / ред. А. Х. Гелиг, Г. А. Леонов, А. Л. Фрадков – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
35. Емельянов С. В. Избранные труды по теории управления / С. В. Емельянов. – М.: Наука, 2006. – 450 с.

36. Косов А. А. О глобальной устойчивости неавтономных систем. I / А. А. Косов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1997. – № 7(422). – С. 28-35.
37. Косов А. А. О глобальной устойчивости неавтономных систем. II / А. А. Косов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1997. – № 8(423). – С. 33-42.
38. Андреев А. С. О развитии прямого метода Ляпунова в задачах устойчивости / А. С. Андреев // «Компьютерные технологии, наука и образование в XXI веке». Материалы V Международной открытой сессии «Modus Academicus». – Ульяновск, 30 ноября 2001 г.
39. Андреев А. С. Об исследовании устойчивости неустановившегося движения на основе знакопостоянных функций Ляпунова / А. С. Андреев, Т. А. Бойкова // Уч. зап. Ульян. гос. ун-та. Сер. «Фундаментальные проблемы математики и механики». – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2002. – Вып. 1(11). – С. 8-15.
40. Андреев А. С. Знакопостоянные функции Ляпунова в задачах об устойчивости / А. С. Андреев, Т. А. Бойкова // Механика твёрдого тела. Донецк: Ин-т прикл. мат. и мех. – 2002. – Вып. 32. – С. 109-116.
41. Iggidr A. On the stability of nonautonomous systems / A. Iggidr, G. Sallet // Automatica 39. – 2003. – P. 167-171.
42. Андреев А. С. О глобальной стабилизируемости и управляемости нелинейной системы / А. С. Андреев, Е. Б. Ким // Обзорные прикладной и промышленной математики. – 2004. – Т. 11, Вып. 3. – С. 613-614.
43. Платонов А. В. Об устойчивости нелинейных сложных систем / А. В. Платонов // Известия Академии наук. Теория и системы управления. – 2004. – № 4. – С. 41-46.
44. Андреев А. С. К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости / А. С. Андреев, О. А. Перегудова // ПММ. – 2006. – Т. 70, Вып. 6. – С. 965-976.
45. Бойков И. В. О критерии устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений / И. В. Бойков // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 1. – С. 3-10.
46. Перегудова О. А. Функции Ляпунова вида векторных норм в задачах устойчивости / О. А. Перегудова // Уч. зап. Ульян. гос. ун-та. Сер. «Фундаментальные проблемы математики и механики». – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2006. – Вып. 1(16). – С. 43-51.
47. Андреев А. С. О стабилизации движения нестационарной управляемой системы / А. С. Андреев, В. В. Румянцев // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 8. – С. 18-31.
48. Румянцев В. В. О стабилизации движения нестационарной управляемой системы / В. В. Румянцев, А. С. Андреев // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 416, № 5. – С. 627-629.

49. Перегудова О. А. Логарифмические матричные нормы в задачах устойчивости движения / О. А. Перегудова // ПММ. – 2008. – Т. 72, Вып. 3. – С. 410-420.
50. Андреев А. С. Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений / А. С. Андреев // Автоматика и телемеханика. – 2009, № 9. – С. 4-55.
51. Hatvani L. On the asymptotic stability of the solutions of functional differential equations / L. Hatvani // Qualitative theory of differ. equations. Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. V. 53. North Holland, Amsterdam. – 1990. – P. 227-238.
52. Гайшун И. В. Теоремы устойчивости уравнений с запаздыванием, использующие немонотонные функционалы Ляпунова / И. В. Гайшун, Л. Б. Княжище // Докл. АН Беларуси. – 1994. – Т. 38, № 3. – С. 5-8.
53. Гайшун И. В. Немонотонные функционалы Ляпунова. Условия устойчивости уравнений с запаздыванием / И. В. Гайшун, Л. Б. Княжище // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 8. – С. 1291-1298.
54. Княжище Л. Б. Локализация предельных множеств и асимптотическая устойчивость уравнений с запаздыванием / Л. Б. Княжище // Докл. АН Беларуси. – 1997. – Т. 41, № 1. – С. 26-29.
55. Hatvani L. On the asymptotic stability by Lyapunov functionals with semidefinite derivatives / L. Hatvani // Nonlinear Analysis, TMA. – 1997. – V. 30, No. 8. – P. 4713-4721.
56. Hatvani L. Annulus arguments in the stability theory for functional differential equations / L. Hatvani // Different. Integral Equat. – 1997. – V. 10, No. 5. – P. 975-1002.
57. Княжище Л. Б. Локализация предельных множеств и асимптотическая устойчивость неавтономных уравнений с запаздыванием. I / Л. Б. Княжище // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 2. – С. 189-196.
58. Княжище Л. Б. Локализация предельных множеств и асимптотическая устойчивость неавтономных уравнений с запаздыванием. II / Л. Б. Княжище // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 8. – С. 1056-1065.
59. Burton T. A. Marachkov stability results for functional differential equations / T. A. Burton, G. Makay // EJQTDE. – 1998. – №. 1. – P. 1-17.
60. Hatvani L. On Lyapunov's direct method for nonautonomous fde's / L. Hatvani // Functional Differ. Equat. – 1998. – V. 5, №. 3-4. – P. 315-323.
61. Княжище Л. Б. Функционалы Ляпунова и условия равномерной асимптотической устойчивости уравнений с запаздыванием / Л. Б. Княжище // Докл. НАН Беларуси. – 2000. – Т. 44, № 5. – С. 40-43.
62. Hatvani L. On the asymptotic stability for functional differential equations by Lyapunov functionals / L. Hatvani // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. – 2001. – V. 47, №. 7. – P. 4333-4343. – P. 315-323.

63. Андреев А. С. Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений / А. С. Андреев – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2005.

64. Andreev A. On the stability of nonautonomous functional differential equations / A. Andreev // Nonlinear Anal. TMA. – 1997. – V. 30, Part 5. – P. 2847-2854.

65. Андреев А. С. К методу функционалов Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости и неустойчивости / А. С. Андреев, Д. Х. Хусанов // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 7. – С. 876-885.

66. Андреев А. С. Исследование устойчивости функционально-дифференциальных уравнений на основе знакопостоянных функционалов Ляпунова / А. С. Андреев, С. В. Павликов // Тр. Средневолж. математ. общества. – 1999. – Т. 2(1). – С. 74-75.

67. Athanassov Z. Families of Liapunov-Krasovskii Functionals and stability for functional differential equations / Z. Athanassov // Ann. Mat. Pure Appl. (IV). – 1999. – V. 176. – P. 145-165.

68. Ignatyev A. O. On the asymptotic stability in functional differential equations / A.O. Ignatyev // Proc. Amer. Math. Soc. – 1999. – V. 127, №. 6. – P. 1753-1760.

69. Алексеенко Н. В. Устойчивость решений нелинейных почти периодических систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа / Н. В. Алексеенко // Изв. вузов. Сер. Математика. – 2000. – № 2. – С. 3-6.

70. Алексеенко Н. В. Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем с почти периодическими коэффициентами / Н. В. Алексеенко, Р. К. Романовский // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, № 2. – С. 147-153.

71. Andreev A. On asymptotic stability and nonstability functional-differential equations with periodic right side / A. Andreev, D. Khusanov // Nonlinear oscillat. – 2001. – V. 4, No. 3. – P. 290-298.

72. Павликов С. В. Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием / С. В. Павликов // Уч. зап. Ульян. гос. ун-та. Сер. «Фундаментальные проблемы математики и механики». – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2002. – Вып. 2(12). – С. 30-39.

73. Андреев А. С. Некоторые задачи об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным и неограниченным запаздыванием / А.С. Андреев // Уч. зап. Ульян. гос. ун-та. Сер. «Фундаментальные проблемы математики и механики». – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2003. – Вып. 1(13). – С. 3-11.

74. Андреев А. С. К методу К.П. Персидского в задачах о неустойчивости / А. С. Андреев // Математ. журн. Алматы. – 2004. – Т. 4, № 2(12). – С. 76-82.

75. Андреев А. С. Незнакоопределенные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием / А. С. Андреев, С. В. Павликов // Механика твёрдого тела. – Донецк: Ин-т прикл. мат. и мех. – 2004. – Вып. 34. – С. 112-120.

76. Павликов С. В. К задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с бесконечным запаздыванием / С. В. Павликов // Уч. зап. Ульян. гос. ун-та. Сер. «Фундаментальные проблемы математики и механики». – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2006. – Вып. 1(13). – С. 28-42.

77. Павликов С. В. Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения / С. В. Павликов // ПММ. – 2007. – Т. 71, Вып. 3. – С. 377-388.

78. Павликов С. В. О стабилизации по части переменных управляемой механической системы с запаздывающей обратной связью / С. В. Павликов // Вестн. СамГУ. Естественнонаучная сер. – 2007. – № 2(52). – С. 115-123.

79. Павликов С. В. Метод знакопостоянных функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений / С.В. Павликов // Вестн. ОГУ. – 2007. – № 3. – С. 158-162.

80. Павликов С. В. К задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с бесконечным запаздыванием / С. В. Павликов // Изв. вузов. Математика. – 2008. – № 7. – С. 29-38.

81. Павликов С. В. Метод функционалов Ляпунова в задачах устойчивости / С. В. Павликов – Набережные Челны: Ин-т управления, 2006.

82. Красовский Н. Н. Об асимптотической устойчивости систем с последействием / Н. Н. Красовский // ПММ. – 1956. – Т. 20, Вып. 4. – С. 513-518.

83. Разумихин Б. С. Об устойчивости систем с запаздыванием / Б. С. Разумихин // ПММ. – 1956. – Т. 20, Вып. 4. – С. 500-512.

84. Андреев А. С. Об устойчивости неавтономного функционально-дифференциального уравнения / А. С. Андреев // Доклады Российской Академии наук. – 1997. – Т. 356, № 2. – С. 151-153.

85. Седова Н. О. К методу Ляпунова-Разумихина для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра / Н. О. Седова // Уч. зап. Ульян. гос. ун-та. Сер. «Фундаментальные проблемы математики и механики». – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2000. – Вып. 1(8). – С. 117-125.

86. Седова Н. О. К методу Ляпунова-Разумихина для уравнений с бесконечным запаздыванием / Н. О. Седова // Диффер. уравнения. – 2002. – Т. 10. – С. 1338-1347.

87. Седова Н. О. Вырожденные функции в исследовании асимптотической устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений / Н. О. Седова // Матем. заметки. – 2005. – Т. 78, № 3. – С. 468-472.
88. Долгий Ю. Ф. К стабилизации линейных автономных систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием / Ю. Ф. Долгий // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 10. – С. 92-105.
89. Седова Н. О. Глобальная асимптотическая устойчивость и стабилизация в нелинейной каскадной системе с последействием / Н. О. Седова // Изв. вузов. Математика. – 2008. – № 11. – С. 208-223.
90. Седова Н. О. Контролирующие функционалы в задаче стабилизации систем с запаздыванием / Н. О. Седова // Проблемы управления. – 2008. – № 3. – С. 23-29.
91. Седова Н. О. Локальная и полуглобальная стабилизация в каскаде с запаздыванием / Н. О. Седова // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 6. – С. 70-81.
92. Перегудова О. А. Развитие метода функций Ляпунова в задаче устойчивости функционально-дифференциальных уравнений / О.А. Перегудова // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 12. – С. 1638-1647.
93. Перегудова О. А. Метод сравнения в задачах устойчивости и управления движениями механических систем / О. А. Перегудова – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2009. – 253 с.
94. Ким А. В.  $i$ -Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения / А. В. Ким – Екатеринбург: УрО РАН, 1996. – 233 с.
95. Балашевич Н. В. Синтез оптимальной обратной связи и стабилизация систем с запаздыванием по управлению / Н. В. Балашевич, Р. Габасов, Ф. М. Кириллова // ПММ. – 1998. – Т.62, Вып. 1. – С. 139-150.
96. Коробов В. И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости / В. И. Коробов // Матем. сборник. – 1979. – Т. 109(151), – № 4(8). – С. 582-606.
97. Коробов В. И. Решение задачи синтеза для управляемых процессов с возмущением с помощью функции управляемости / В. И. Коробов // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 2. – С. 236-244.
98. Коробов В. И. Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости / В. И. Коробов // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 248, № 5. – С. 1051-1055.
99. Коробов В. И. Позиционный синтез ограниченных инерционных управлений для систем с одномерным управлением / В. И. Коробов, В. А. Скорик // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 3. – С. 319-331.
100. Коробов В. И. Синтез инерционных управлений для нестационарных систем / В. И. Коробов, В. А. Скорик // ПММ. – 2003. – Т. 67, Вып. 5. – С. 739-751.

- 101.Коробов В. И. Метод функции управляемости / В. И. Коробов // М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. – 576 с.
- 102.Маркеев А. П. Теоретическая механика / А. П. Маркеев – М.: ЧеРо, 1999. – 569 с.
- 103.Меркин Д. Р. Гирскопические системы / Д. Р. Меркин – М.: Наука, 1974. – 344 с.
- 104.Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения / Д. Р. Меркин – 4-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2003. – 304 с.
- 105.Булатович Р. М. Об устойчивости линейных потенциальных гироскопических систем в случаях, когда потенциальная энергия имеет максимум / Р. М. Булатович // ПММ. – 1997. – Т.61, Вып. 3. – С. 385-389.
- 106.Козлов В. В. О стабилизации неустойчивых равновесий зарядов сильными магнитными полями / В. В. Козлов // ПММ. – 1997. – Т.61, Вып. 3. – С. 390-397.
- 107.Козлов В. В. Гироскопическая стабилизация и параметрический резонанс / В. В. Козлов // ПММ. – 2001. – Т.65, Вып. 5. – С. 739-745.
- 108.Сальникова Т. В. Об устойчивости линейных потенциальных гироскопических систем / Т. В. Сальникова // ПММ. – 2006. – Т.70, Вып. 1. – С. 35-39.
- 109.Иванов А. П. Об устойчивости систем с упругими элементами и колебаниями ползуна / А. П. Иванов // ПММ. – 2005. – Т. 69, Вып. 6. – С. 899-904.
- 110.Кошляков В. Н. К теории гироскопических систем с неконсервативными силами / В. Н. Кошляков, В. Л. Макаров // ПММ. – 2001. – Т.65, Вып. 4. – С. 698-704.
- 111.Кошляков В. Н. О переходе к уравнениям прецессионной теории в неконсервативных гироскопических системах / В. Н. Кошляков // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 4. – С. 43-51.
- 112.Кошляков В. Н. Влияние диссипации на устойчивость вращения твердого тела, подвешенного на стержне / В. Н. Кошляков, В. А. Стороженко // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 3. – С. 22-33.
- 113.Кошляков В. Н. К проблеме качественного исследования гироскопических систем неконсервативной структуры / В. Н. Кошляков // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2006. – № 4. – С. 10-18.
- 114.Кошляков В. Н. Об устойчивости неконсервативных систем с вырожденными матрицами диссипативных сил / В. Н. Кошляков, В. Л. Макаров // ПММ. – 2004. – Т. 68, Вып. 6. – С. 906-913.
- 115.Меркин Д. Р. О методе и теоремах Метелицына / Д. Р. Меркин // ПММ. – 2001. – Т. 65, Вып. 3. – С.536-540.
- 116.Жбанов Ю. К. К вопросу о теоремах И. И. Метелицына / Ю. К. Жбанов, В. Ф. Журавлев // ПММ. – 2001. – Т. 65, Вып. 3. – С. 541-543.

- 117.Клим В. Неравенство Метелицына и критерии устойчивости механических систем / В. Клим, А. П. Сейранян // ПММ. – 2004. – Т. 68, Вып. 2. – С.225-233.
- 118.Метелицын И. И. Задача гироскопической стабилизации / И. И. Метелицын // Докл. АН СССР. – 1952. – Т.86, № 1. – С.31-34.
- 119.Метелицын И. И. Избранные труды. Теория гироскопов. Теория устойчивости / И. И. Метелицын – М.: Наука, 1977. – 131 с.
- 120.Агафонов С. А. Устойчивость неконсервативных систем и оценка области притяжения / С. А. Агафонов // ПММ, 2003. – Т.67, Вып. 2. – С. 239-243.
- 121.Денисов Г. Г. К проблеме гироскопической стабилизации механических систем / Г. Г. Денисов, В. В. Новиков // Известия РАН. Механика твердого тела – 2006. – № 3. – С. 11-15.
- 122.Карапетян А. В. О бифуркации равновесий механических систем с симметричным потенциалом / А. В. Карапетян, И. И. Нараленкова // ПММ. – 1998. – Т.62, Вып. 1. – С. 12-21.
- 123.Карапетян А. В. О влиянии диссипативных и постоянных сил на вид и устойчивость стационарных движений механических систем с циклическими координатами / А. В. Карапетян, И. С. Лагутина // ПММ, 1998. – Т.62, Вып. 4. – С. 539-547.
- 124.Бурков И. В. Стабилизация положения лагранжевой системы с упругими элементами при ограничениях на управление с измерением и без измерения скорости / И. В. Бурков, Л. Б. Фрейдович // ПММ, 1997. – Т.61, Вып. 3. – С. 447-456.
- 125.Бурков И. В. Стабилизация натуральной механической системы без измерения её скоростей с приложением к управлению твёрдым телом / И. В. Бурков // ПММ, 1998. – Т.62, Вып. 6. – С. 923-933.
- 126.Майлыбаев А. А. Параметрический резонанс в системах с малой диссипацией / А. А. Майлыбаев, А. П. Сейранян // ПММ, 2001. – Т.65, Вып. 5. – С. 779-792.
- 127.Андреев А. С. О влиянии структуры сил на устойчивость положения равновесия неавтономной механической системы / А. С. Андреев // Проблемы механики: сборник статей к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. – М.: Физматлит, 2003. – С. 87-93.
- 128.Андреев А. С. Об устойчивости неустановившегося движения механической системы / А. С. Андреев, Т. А. Бойкова // ПММ, 2004. – Т. 68, Вып. 4. – С. 678-686.
- 129.Андреев А. С. Об устойчивости обобщенного стационарного движения механической системы в зависимости от действующих сил / А. С. Андреев, Р. Б. Зайнетдинов // Труды IX Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление



движением», посвященной 105-летию Н. Г. Четаева. – Иркутск: Сибирское отделение РАН. – 2007. – Т. 1. – С. 5-14.

130.Андреев А. С. О стабилизации движений механических систем с переменными массами / А. С. Андреев, Р. Б. Зайнетдинов // ПММ. – 2009. – Т. 73, Вып. 1. – С. 3-12.

131.Косов А. А. Стабилизация неавтономных потенциальных систем силами иной структуры / А. А. Косов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – Т. VIII, № 2(22). – С. 116-123.

132.Косов А. А. Об экспоненциальной устойчивости и стабилизации неавтономных механических систем с неконсервативными силами / А. А. Косов // ПММ. – 2007. – Т. 71, Вып. 3. – С. 411-426.

133.Александров А. Ю. Об асимптотической устойчивости положений равновесия механических систем с нестационарным ведущим параметром / А. Ю. Александров, А. А. Косов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2008. – № 3. – С. 8-22.

134.Хатвани Л. О действии демпфирования на свойства устойчивости равновесий неавтономных систем / Л. Хатвани // ПММ. – 2001. – Т. 65, Вып. 4. – С. 725-732.

135.Александров А. Ю. О сохранении динамических свойств механических систем при эволюции диссипативных сил / А. Ю. Александров, А. А. Косов, А. В. Платонов // Труды IX Международной Четаевской конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением", посвященной 105-летию Н.Г. Четаева. – Иркутск: Сибирское отделение РАН, 2007. – Т. 2. – С. 6-14.

136.Перегудова О. А. О стабилизации движений неавтономных механических систем / О. А. Перегудова // Обзорение прикладной и промышленной математики, 2008. – Т. 15. – Вып. 6. – С. 1117-1118.

137.Перегудова О. А. О стабилизации движений неавтономных механических систем / О. А. Перегудова // ПММ. – 2009. – Т. 73, Вып. 2. – С. 176-188.

138.Зотов Ю. К. О линейной стабилизации программных движений нелинейных управляемых динамических систем / Ю. К. Зотов // ПММ. – 2005. – Т. 69, Вып. 4. – С. 547-568.

139.Зотов Ю. К. Линейная стабилизация программных движений нелинейных управляемых динамических систем при наличии параметрических возмущений / Ю. К. Зотов // ПММ. – 2008. –Т.72, Вып. 4. – С. 556-579.

140.Морозов В. М. Об устойчивости нестационарных механических систем специального класса / В. И. Каленова, В. М. Морозов, П. М. Соболевский // Труды IX Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением»,

посвященной 105-летию Н.Г. Четаева. – Иркутск: Сибирское отделение РАН. – 2007. – Т. 2. – С. 101-107.

141. Морозов В. М. О некоторых линейных нестационарных системах в задачах общей механики / В. М. Морозов, В. И. Каленова // В сб. «Проблемы современной механики». – М.: Изд-во Моск. ун-та, Изд-во «Омега-Л», 2008. – С. 332-346.

142. Каленова В. И. Об устойчивости механических систем определенного класса / В. И. Каленова, В. М. Морозов, П. М. Соболевский // ПММ, 2008. – Т. 72, Вып. 2. – С. 251-259.

143. Каленова В. И. К вопросу об исследовании линейных нестационарных систем / В. И. Каленова, В. М. Морозов, П. М. Соболевский // Вестник МГУ, 2009. – № 1. – С. 51-57.

144. Zenkov D. V. The energy-momentum method for the stability of nonholonomic systems / D. V. Zenkov, A. M. Bloch, J. E. Marsden // Dynam. Stability Systems, 1998. – Vol. 13. – P. 123-166.

145. Zenkov D. V. Stabilization of the unicycle with rider / D. V. Zenkov, A. M. Bloch, J. E. Marsden // Proc. CDC, 1999. – Vol. 38. – P. 3470-3471.

146. Zenkov D. V. Matching and stabilization of the unicycle with rider / D. V. Zenkov, A. M. Bloch, N. E. Leonard, J. E. Marsden // Proc. IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control, 2000. – P. 187-188.

147. Каленова В. И. Управляемость и наблюдаемость в задаче стабилизации установившихся движений неголономных механических систем с циклическими координатами / В. И. Каленова, В. М. Морозов, Е. Н. Шевелева // ПММ, 2001. – Т. 65, Вып. 6. – С. 915-924.

148. Zenkov D. V. The Luapunov-Malkin theorem and stabilization of the unicycle with rider / D. V. Zenkov, A. M. Bloch, J. E. Marsden // Systems and Control Letters, 2002. – Vol. 45. – P. 293-302.

149. Каленова В. И. К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина / В. И. Каленова, В. М. Морозов // ПММ, 2002. – Т. 66, Вып. 2. – С. 192-199.

150. Каленова В. И. Об устойчивости установившихся движений неголономных механических систем с циклическими координатами / В. И. Каленова, В. М. Морозов // ПММ, 2004. – Т. 68, Вып. 2. – С. 195-205.

151. Каленова В. И. Устойчивость и стабилизация стационарных движений неголономных механических систем одного класса / В. И. Каленова, В. М. Морозов, М. А. Салмина // Мобильные роботы и мехатронные системы. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. – С. 119-134.

152. Каленова В. И. Неголономные механические системы и стабилизация движения / В. И. Каленова, А. В. Карапетян, В. М. Морозов, М. А. Салмина // Фундаментальная и прикладная математика, 2005. – Т. 11, № 7. – С. 117-158.

153. Чаплыгин С. А. Исследования по динамике неголономных систем / С. А. Чаплыгин – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 111 с.

154. Лурье А. И. Аналитическая механика / А. И. Лурье – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
155. Неймарк Ю. И. Динамика неголономных систем / Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев – М.: Наука, 1967. – 520 с.
156. Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью / А. П. Маркеев – М.: Наука, 1992. – 335 с.
157. Зегжда С. А. Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики / С. А. Зегжда, Ш. Х. Солтаханов, М. П. Юшков – СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2002.
158. Воронец П. В. Уравнения движения твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной поверхности / П. В. Воронец – Киев: Тип. ун-та Св. Владимира, 1903.
159. Smale S. Topology and mechanics / S. Smale // Invent. Math. – 1970. – Vol. 10. – P. 305-311.
160. Карапетян А. В. Устойчивость стационарных движений / А. В. Карапетян – М.: Эдиториал УРСС, 1998. – 168 с.
161. Зобова А. А. Построение диаграмм Пуанкаре-Четаева и Смейла в задаче о движении тела вращения на шероховатой плоскости / А. А. Зобова // Мобильные роботы и мехатронные системы. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. – С. 107-119.
162. Зобова А. А. Построение бифуркационных диаграмм Пуанкаре-Четаева и Смейла для консервативных неголономных систем с симметрией / А. А. Зобова, А. В. Карапетян // ПММ, 2005. – Т.69, Вып. 2. – С. 202-214.
163. Bloch A. M. Control and stabilization of nonholonomic Chaplygin dynamic systems / A. M. Bloch, N. H. McClamroch // Proc. IEEE Conf. Decision Control. 1991. – Brighton, UK. – P. 1127-1132.
164. Карапетян А. В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем / А. В. Карапетян, В. В. Румянцев – М.: ВИНТИ, 1983. – (Итоги науки и техники. Сер. Общая механика; Т.6 ).
165. Karapetyan A. V. Steady motions of nonholonomic systems / A. V. Karapetyan, A. S. Kuleshov // Regular Chaotic Dynamics. – 2002. – Vol. 7, № 1.
166. Hautis M. L. J. Controllability and observability conditions of linear autonomous systems / M. L. J. Hautis // Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. – 1969. – Vol. 72. – P. 443-448.
167. Laub A. J. Controllability and observability criteria for multivariable linear second-order models / A. J. Laub, W. F. Arnold // IEEE Trans. Automat. Control. – 1984. – Vol. 29, № 2. – P. 163-165.
168. Карапетян А. В. Методы исследования устойчивости и бифуркации стационарных движений консервативных неголономных систем / А. В. Карапетян, А. С. Кулешов // Проблемы механики. – М.: Физматлит, 2003. – С. 429-464.

169. Каленова В. И. Устойчивость и стабилизация движения одноколесного экипажа (моноцикла) / В. И. Каленова, В. М. Морозов, Е. Н. Шевелева // Мобильные роботы и мехатронные системы. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. – С. 28-31.
170. Каленова В. И. Устойчивость и стабилизация движения одноколесного велосипеда / В. И. Каленова, В. М. Морозов, Е. Н. Шевелева // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2001. – № 4. – С. 49-58.
171. Морозов В. М. Об одной механической модели одноколесного экипажа / В. М. Морозов, А. Ю. Назаренко // Мобильные роботы и мехатронные системы. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001.
172. Морозов В. М. Стационарные движения одноколесного экипажа и их устойчивость / В. М. Морозов, А. А. Кожанов // Мобильные роботы и мехатронные системы. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2002. – С. 132-141.
173. Балашов Д. А. Стационарные движения одноколесного робота и их устойчивость плоскости / Д. А. Балашов // Мобильные роботы и мехатронные системы. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. – С. 124-134.
174. Лебедев Д. А. О математическом моделировании движения одноколесного робота плоскости / Д. А. Лебедев // Мобильные роботы и мехатронные системы. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006. – С. 68-75.
175. Лебедев Д. А. Об устойчивости и стабилизации движения одноколесного робота / Д. А. Лебедев // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. – 2008. – № 3. – С. 67-70.
176. Буданов В. М. О неголономных моделях трехколесных роботов плоскости / В. М. Буданов, В. И. Каленова, А. В. Карапетян, В. М. Морозов, М. А. Салмина // Мобильные роботы и мехатронные системы. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006. – С. 54-60.
177. Золотов Ю. К. Управляемость и стабилизация программных движений транспортного робота / Ю. К. Золотов // ПММ. – 2000. – Т.64, Вып. 6. – С. 909-928.
178. Зотов Ю. К. Управляемость и стабилизация программных движений транспортного робота типа автомобиля / Ю. К. Зотов // ПММ, 2003. – Т.67, Вып. 3. – С. 339-365.
179. Буданов В. М. О движении колёсных роботов / В. М. Буданов, Е. А. Девянин // ПММ, 2003. – Т.67, Вып. 2. – С. 244-255.
180. Мартыненко Ю. Г. К теории управления моноциклом / Ю. Г. Мартыненко, А. М. Формальский // ПММ, 2005. – Т.69, Вып. 4. – С. 569-583.
181. Матюхин В. И. Управление механической колёсной системой / В. И. Матюхин // ПММ, 2007. – Т.71, Вып. 2. – С. 237-249.
182. Рапопорт Л. Б. Оценка области притяжения с заданным показателем экспоненциальной устойчивости в задаче управления колёсным роботом / Л. Б. Рапопорт // ПММ, 2007. – Т.71, Вып. 2. – С. 250-258.

183. Акуленко Л. Д. Синтез управления в задаче оптимального по быстродействию приведения материальной точки в заданное положение с нулевой скоростью / Л. Д. Акуленко, А. М. Шматков // ПММ, 1998. – Т.62, Вып. 1. – С. 129-138.
184. Манита Л. А. Оптимальные режимы с учащающимися переключениями в задачах управления манипуляторами / Л. А. Манита // ПММ, 2000. – Т.64, Вып. 1. – С. 19-28.
185. Акуленко Л. Д. Аналитический синтез управления оптимального быстродействия в системе третьего порядка / Л. Д. Акуленко, Г. В. Костин // ПММ, 2000. – Т.64, Вып. 4. – С. 532-544.
186. Ананьевский И. М. Управление линейной системой четвертого порядка при смешанных ограничениях / И. М. Ананьевский // ПММ, 2000. – Т.64, Вып. 6. – С. 901-908.
187. Формальский А. М. Перевернутый маятник на неподвижном и подвижном основании / А. М. Формальский // ПММ, 2006. – Т.70, Вып. 1. – С. 62-71.
188. Соколов Б. Н. Ограниченное позиционное управление механической системой вблизи положения равновесия / Б. Н. Соколов // Известия РАН. Механика твердого тела, 2006. – № 4. – С. 108-112.
189. Борецкий И. Ф. Глобально управляемые системы твердых тел / И. Ф. Борецкий, О. Р. Каюмов // ПММ, 1998. – Т.62, Вып. 3. – С. 405-412.
190. Желнин Ю. Н. Наискорейшее приведение нелинейного маневрирующего объекта в оптимальную позицию / Ю. Н. Желнин, А. А. Меликян, А. Е. Утемов, Ф. Л. Черноусько // ПММ, 2005. – Т.69, Вып. 2. – С. 179-190.
191. Алдошков Ю. В. Перестройка режима в однопараметрическом семействе задач оптимального управления / Ю. В. Алдошков, А. А. Меликян, Т. В. Наумов // ПММ, 2001. – Т. 65, Вып.3. – С. 400-407.
192. Каюмов О. Р. Глобально управляемые механические системы / О. Р. Каюмов – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 168 с.
193. Каюмов О. Р. О глобальной управляемости некоторых механических систем с абсолютно упругими ударами / О. Р. Каюмов // ПММ, 2007. – Т. 71, Вып. 6. – С. 927-944.
194. Каюмов О. Р. Связные функции Ляпунова и их применение / О. Р. Каюмов // Труды IX Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», посвященной 105-летию Н.Г. Четаева. – Иркутск: Сибирское отделение РАН, 2007. – Т. 2. – С. 108-116.
195. Черноусько Ф. Л. Декомпозиция и субоптимальное управление в динамических системах / Ф. Л. Черноусько // ПММ, 1990. – Т. 54, Вып. 6. – С. 883-893.

196.Черноусько Ф. Л. Синтез управления нелинейной динамической системой / Ф. Л. Черноусько // ПММ, 1992. – Т. 56, Вып. 2. – С. 179-191.

197.Ананьевский И. М. Метод декомпозиции в задаче управления механической системой / И. М. Ананьевский, И. С. Добрынина, Ф. Л. Черноусько // Известия РАН. Теория и системы управления, 1995. – № 2. – С. 3-14.

198.Решмин С. А. Синтез управления в нелинейной динамической системе на основе декомпозиции / С. А. Решмин, Ф. Л. Черноусько // ПММ, 1998. – Т. 62, Вып. 1. – С. 121-128.

199.Ананьевский И. М. Метод декомпозиции в задаче об отслеживании траекторий механических систем / И. М. Ананьевский, С. А. Решмин // Известия РАН. Теория и системы управления, 2002. – № 5. – С. 25-32.

200.Черноусько Ф. Л. Методы управления нелинейными механическими системами / Ф. Л. Черноусько, И. М. Ананьевский, С. А. Решмин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 328 с.

201.Пятницкий Е. С. Синтез управления манипуляционными роботами на принципе декомпозиции / Е. С. Пятницкий // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1987. – № 3. – С. 92-99.

202.Пятницкий Е. С. Принцип декомпозиции в управлении механическими системами / Е. С. Пятницкий // ДАН СССР, 1988. – Т. 300, № 2. – С. 300-303.

203.Пятницкий Е. С. Синтез иерархических систем управления механическими объектами на принципе декомпозиции. I и II / Е. С. Пятницкий // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 1. – С. 87-99; № 2. – С. 57-71.

204.Пятницкий Е. С. Синтез систем стабилизации программных движений нелинейных объектов управления / Е. С. Пятницкий // Автоматика и телемеханика, 1993. – № 7. – С. 19-37.

205.Матюхин В. И. Устойчивость движений манипуляционных роботов в режиме декомпозиции / В. И. Матюхин // Автоматика и телемеханика, 1989. – № 3. – С. 33-44.

206.Матюхин В. И. Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учете динамики приводов / В. И. Матюхин, Е. С. Пятницкий // Автоматика и телемеханика, 1989. – № 9. – С. 67-82.

207.Матюхин В. И. Универсальные законы управления механическими системами / В. И. Матюхин. – М: МАКС Пресс, 2001. – 252 с.

208.Уткин В. И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления / В. И. Уткин. – М.: Наука, 1981. – 368 с.

209.Перегудова О. А. К задаче построения кусочно линейного управления реономными механическими системами / О. А. Перегудова // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2008. – Т. 15, Вып. 4. – С. 673.

210.Перегудова О. А. К задаче стабилизации движений механических систем при учете динамики приводов / О. А. Перегудова, Д. Ю. Моторина // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2008. – Т. 15, Вып. 6. – С. 1118.

211.Емельянов С. В. Новые типы обратной связи. Управление при неопределенности / С. В. Емельянов, С. К. Коровин – М.: Наука, Физматлит, 1997. – 352 с.

212.Емельянов С. В. Избранные труды по теории управления / С. В. Емельянов. – М.: Наука, 2008. – 450 с.

213.Ефремов М. С. Новый алгоритм слежения для некоторых механических систем / М. С. Ефремов, А. Е. Поляков, В. В. Стрыгин // ПММ, 2005. – Т. 69, Вып. 1. – С. 30-41.

214.Стрыгин В. В. Локальная стабилизация релейных систем с запаздыванием / В. В. Стрыгин, Л. М. Фридман, А. Е. Поляков // Доклады Академии наук, 2001. – Т. 379, № 5. – С. 603-605.

215.Перегудова О. А. К задаче слежения для механических систем с запаздыванием в управлении / О. А. Перегудова // Автоматика и телемеханика, 2009. – № 5. – С. 95-105.

216.Ефремов М. С. Алгоритм активной стабилизации космического аппарата с вязкоупругими элементами в условиях неопределенности / М. С. Ефремов // ПММ, 2006. – Т.70, Вып. 5. – С. 801-812.

217.Павликов С. В. О стабилизации движения управляемой системы с запаздыванием / С. В. Павликов // Механика твёрдого тела. Донецк: Ин-т прикл. мат. и мех, 2005. – Вып. 35. – С. 212-216.

218.Павликов С. В. О стабилизации движений управляемых систем с запаздывающим регулятором / С. В. Павликов // Доклады Академии наук, 2007. – Т. 412, № 2. – С. 176-178.

219.Павликов С. В. К задаче о стабилизации управляемых механических систем / С. В. Павликов // Автоматика и телемеханика, 2007. – № 9. – С. 16-26.

220.Павликов С. В. Об устойчивости движений эредитарных систем с бесконечным запаздыванием / С. В. Павликов // Доклады Академии наук, 2007. – Т. 416, № 2. – С. 166-168.

221.Андреев А. С. Об устойчивости по части переменных неавтономного функционально-дифференциального уравнения / А. С. Андреев, С. В. Павликов // ПММ, 1999. – Т. 63, Вып. 1. – С. 3-12.

222.Ананьевский И. М. О стабилизации некоторых регулируемых систем с последействием / И. М. Ананьевский, В. Б. Колмановский // Автоматика и телемеханика, 1989. – № 9. – С. 34-42.

223.Алексеев К. Б. Экстенсивное управление ориентацией космического летательного аппарата / К. Б. Алексеев – М.: Машиностроение, 1977. – 122 с.

224.Виттенбург Й. Динамика системы связанных тел / Й. Виттенбург – М.: Наука, 1980. – 290 с.

225. Лилов Л. К. Моделирование систем связанных тел / Л. К. Лилов – М.: Наука, 1993. – 272 с.
226. Лурье А. И. Некоторые задачи динамики систем твердых тел / А. И. Лурье // Изв. Ленингр. политех. ин-та, 1960. – № 210.
227. Раушенбах В. В. Управление ориентацией космических аппаратов / В. В. Раушенбах, В. И. Токарь – М.: Наука, 1974. – 598 с.
228. Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела / П. В. Харламов – Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1965. – 221 с.
229. Литвин-Седой М. З. Механика систем связанных твердых тел / М. З. Литвин-Седой // Итоги науки и техники. Сер. «Общая механика». – М.: ВИНТИ, 1982. – Т. 5. – С. 3-61.
230. Морозов В. М. Устойчивость движения космических аппаратов / В. М. Морозов // Итоги науки и техники. Сер. «Общая механика». – М.: ВИНТИ, 1971. – С. 5-84.
231. Рубановский В. Н. Устойчивость установившихся движений сложных механических систем / В. Н. Рубановский // Итоги науки и техники. Сер. «Общая механика». – М.: ВИНТИ, 1982 – Т. 5. – С. 62-134.
232. Сарычев В. А. Вопросы ориентации искусственных спутников / В. А. Сарычев // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Сер. «Исследование космич. пространства». – 1978. – № 11.
233. Искусственные спутники Земли // Сборник. Вып. 16. – Изд-во АН СССР, 1963.
234. Боевкин В. И. Ориентация искусственных спутников в гравитационных и магнитных полях / В. И. Боевкин, Ю. Г. Гуревич, Ю. Н. Павлов, Г. Н. Толстоусов – М.: Наука, 1976. – 301 с.
235. Управление в космосе. Труды III Международного симпозиума ИФАК по автоматическому управлению в мирном использовании космического пространства. Франция, Тулуза, март 1970. – Т. 1. – Изд-во Наука, 1972.
236. Погорелов Д. Ю. Современные алгоритмы компьютерного синтеза уравнений движения систем тел / Д. Ю. Погорелов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2005. – № 4. – С. 5-15.
237. Погорелов Д. Ю. Матрицы Якоби уравнений движения систем тел / Д. Ю. Погорелов // Известия РАН. Теория и системы управления, 2007. – № 4. – С. 63-77.
238. Букреев В. Г. Адаптивное управление электромеханическими системами робототехнических комплексов / В. Г. Букреев // Известия высших учебных заведений. Электромеханика, 2003. – № 5. – С. 50-54.
239. Чистяков А. Ю. Структура, схемы и математические модели робототехнических систем с механизмами параллельной структуры / А. Ю. Чистяков // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование, 2006. – № 8. – С. 73-78.



240.Тягунов О. А. Математические модели и алгоритмы управления промышленных транспортных роботов / О. А. Тягунов // Информационно-измерительные и управляющие системы, 2007. – № 5. – С. 63-69.

241.Черноусько Ф. Л. Движение многозвенника по горизонтальной плоскости / Ф. Л. Черноусько // ПММ, 2000. – Т. 64, Вып. 1. – С. 1-18.

242.Иванов А. А. Математическая модель динамики пресмыкающихся / А. А. Иванов // Мехатроника, автоматизация, управление, 2004. – № 4. – С.15-19.

243.Черноусько Ф. Л. Волнообразные движения многозвенника по горизонтальной плоскости / Ф. Л. Черноусько // ПММ, 2000. – Т. 64, Вып. 4. – С. 518-531.

244.Черноусько Ф. Л. О движении трехзвенника по горизонтальной плоскости / Ф. Л. Черноусько // ПММ, 2001. – Т. 65, Вып. 1. – С. 15-20.

245.Черноусько Ф. Л. Управляемые движения двузвенника по горизонтальной плоскости / Ф. Л. Черноусько // ПММ, 2001. – Т. 65, Вып. 4. – С. 578-591.

246.Башкиров С. А. Алгоритмы управления движением и моделирование динамики многозвенных механизмов, передвигающихся по принципу бегущей волны / С. А. Башкиров // Известия РАН. Теория и системы управления, 2007. – № 1. – С. 168-172.

*А. С. Андреев, А. О. Артемова* (г. Ульяновск), *Д. М. Бодунов* (г. Москва)

## ОБ УПРАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫМИ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ МЕХАНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С НЕПОЛНЫМ ВЫХОДОМ И УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ В СТРУКТУРЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

*Исследуется задача о стабилизации движения не вполне наблюдаемой линейной неавтономной управляемой механической системы, в том числе, при наличии запаздывания в управлении.*

Рассмотрим управляемую линейную нестационарную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \\ y = H(t)x. \end{cases} \quad (1)$$

где  $x \in R^n$ ,  $u \in R^m$ ,  $y \in R^p$ ,  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$ ,  $H \in R^{p \times n}$ .

Исследуем возможность построения управляющего воздействия в виде  $u = \Psi(t, y)$ , которое обеспечивает стабилизацию состояния системы  $x = 0$  в предположении, что пара матриц  $(A, H)$  не является наблюдаемой, и таким образом, имеем линейную систему с неполным выходом.

Согласно данному предположению существует некоторое решение  $\tilde{x} = \tilde{x}(t, t_0, x_0)$  неуправляемой системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (2)$$

которое содержится во множестве  $\{H(t)x = 0\}$  при всех  $t \geq t_0$ , или из условия  $H(t)x_0 = 0$  следует  $H(t)\tilde{x}(t, t_0, x_0) \equiv 0$ .

Рассмотрим частный случай наблюдаемости пары  $(A, H)$ , когда все множество  $\{H(t)x = 0\}$  является полуинвариантным. Для бесконечно дифференцируемой матрицы  $H$ ,  $H \in C^\infty$ , это означает, что для вектора  $x \in \{H(t)x = 0\}$  при всех  $t \geq t_0$  выполняются тождества

$$H(t)x \equiv 0, \quad H_1(t)x \equiv (\dot{H}(t) + H(t)A(t))x \equiv 0, \quad \dots \quad (\dot{H}_k(t) + H_k(t)A(t))x \equiv 0, \dots (3)$$

Будем также полагать, что нулевое решение системы (2) является равномерно асимптотически устойчиво относительно множества  $\{H(t)x = 0\}$  в соответствии со следующими определениями.

**Определение 1.** *Невозмущенное движение  $x = 0$  системы (2) устойчиво относительно множества  $\{H(t)x = 0\}$  равномерно по  $t_0$ , если  $(\forall \varepsilon > 0)$   $(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)$   $(\forall$  решения  $\tilde{x}(t, t_0, x_0)$ ,  $x_0 \in \{\|x\| < \delta\} \cap \{H(t_0)x = 0\}$  системы (2))  $(t \geq t_0) \|\tilde{x}(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ .*

Невозмущенное движение  $x=0$  системы (2) асимптотически устойчиво относительно множества  $\{H(t)x=0\}$  равномерно по  $(t_0, x_0)$ , если оно устойчиво относительно множества  $\{H(t)x=0\}$  равномерно по  $t_0$ , а также  $(\exists \Delta > 0) \quad (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists T = T(\varepsilon) > 0) \quad (\forall \text{ решения } \tilde{x}(t, t_0, x_0), x_0 \in \{\|x\| < \Delta\} \cap \{H(t_0)x=0\} \text{ системы (2)}) \quad (t \geq T) \|\tilde{x}(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ .

Для подбора управляющего воздействия  $u = \Psi(t, y)$  в линейном виде

$$u = -F(t)y = -F(t)H(t)x \quad (4)$$

введем функцию Ляпунова в виде квадратичной формы

$$V = \frac{1}{2}y'C(t)y = \frac{1}{2}(H(t)x)'C(t)(H(t)x), \quad (5)$$

где  $C(t)$  – положительно определенная, ограниченная матрица.

Находим производную с учетом (3)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2}(H(t)x)'\dot{C}(t)(H(t)x) + (H(t)x)'C(t)(\dot{H}(t) + H(t)A(t) - H(t)B(t)F(t)H(t))x = \\ &= \frac{1}{2}x'(H'\dot{C}H - H'CHBFH - H'F'B'H'CH)x = \frac{1}{2}(Hx)'(\dot{C} - CHBF - F'B'H'C)(Hx). \end{aligned}$$

В соответствии с теоремой из [1] имеем следующий результат.

**Теорема 1.** Пусть существует пара  $(F, C)$ , являющаяся решением неравенства

$$\dot{C} - CHBF - F'B'H'C = -D_0, \quad (6)$$

где  $D_0$  – какая-нибудь постоянная положительно-определенная матрица.

Тогда управляющее воздействие (4) решает задачу о стабилизации системы (1).

Исследуемая задача имеет также следующее решение в случае кусочно-непрерывного управления.

Положим

$$u = -\frac{F(t)y}{\|y\|} = -\frac{F(t)H(t)x}{\|H(t)x\|}. \quad (7)$$

Для производной функции (5) в силу системы (1) в этом случае будем иметь оценку

$$\dot{V} = \frac{1}{2}(Hx)'\dot{C}(Hx) - \frac{1}{2\|Hx\|}(Hx)'(CHBF + F'B'H'C)(Hx) \leq -\mu_0 \|Hx\| \leq -\mu_1 V^{1/2} \leq 0, \quad (8)$$

если существует пара матриц  $(F, C)$ , такая, что имеет место соотношение

$$CHBF + F'B'H'C = D_0, \quad (9)$$

при этом матрица  $\dot{C}(t)$  является ограниченной. Этот результат сохраняется и в общем случае при нарушении тождеств (3). Но тогда при управляющем воздействии (4) возникает скользящий режим.

Из неравенств (7) в соответствии с теоремами из [2, 3] имеем следующий результат.

**Теорема 2.** Пусть найдется пара матриц  $(F, C)$ , удовлетворяющая условию (8). Тогда управляющее воздействие (6) решает задачу о стабилизации системы (1).

Рассмотрим задачу о стабилизации системы (1), когда управление  $u$  определяется с запаздыванием

$$u = -F(t)y(t - h(t)) = -F(t)H(t)x(t - h(t)), \quad (10)$$

где  $0 \leq h(t) \leq h_0$  – запаздывание в структуре обратной связи.

Рассмотрим простой случай, когда  $A(t) \equiv 0$ . Возьмем функционал Ляпунова в виде

$$V(t, x_t) = \frac{1}{2} (H(t)x)' C(t) (H(t)x) + \int_{-2h}^0 \int_s^0 (H(t+\tau)x(t+\tau))' D_1 (H(t+\tau)x(t+\tau)) d\tau ds,$$

где  $D_1$  – постоянная положительно определенная матрица.

Можно показать, что будет иметь место оценка

$$\dot{V} \leq -\nu_0 \|H(t)x\|^2, \quad \nu_0 = \text{const} > 0, \quad (11)$$

если выполняется неравенство

$$y'(D_0 - hD_1)y \geq 2\nu_0 \|y\|^2. \quad (12)$$

Согласно теореме имеем следующий результат

**Теорема 3.** Пусть найдется пара матриц  $(F, C)$ , удовлетворяющая условиям теоремы 1 и неравенству (12). Тогда управление (10) решает задачу о стабилизации системы (2).

Задача о стабилизации программного движения голономной механической системы сводится к задаче о стабилизации положения равновесия  $\dot{q} = q = 0$  механической системы с нестационарными связями, описываемой уравнениями:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + U,$$

$q' = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  — вектор обобщенных координат,  $T = T_2 + T_1 + T_0$  — кинетическая энергия,  $Q$  и  $U$  — обобщенные действующие и управляющие силы,

$$2T_2 = \dot{q}' A(t, q) \dot{q}, \quad T_1 = B_1'(t, q) \dot{q}, \quad T_0 = T_0(t, q),$$

$A \in R^n \times R^n$  — положительно-определенная матрица,  $B \in R^n$ ,  $()'$  — операция транспонирования. Эти уравнения, разрешенные относительно  $\ddot{q}$ , могут быть записаны в виде

$$\ddot{q} = A^{-1}(\tilde{Q} + U), \quad (13)$$

где  $\tilde{Q}$  — составляющие правой части, включающие в себя обобщенные силы, инерционные силы, вызванные нестационарностью связей.

Для существования движения  $\dot{q} = q = 0$  следует полагать

$$\mu(t) \equiv Q_0(t) + U_0(t) \equiv 0.$$

Задача о стабилизации  $\dot{q} = q = 0$  посредством синтеза управления состоит в определении управления  $U$  в виде

$$U = U_0(t) + U(t, q, \dot{q}),$$

при котором движение  $\dot{q} = q = 0$  системы (13) является асимптотически устойчивым.

Пусть в линейном приближении уравнения (13) приводятся к виду

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q}, \quad \frac{d\dot{q}}{dt} = R(t)\dot{q} + P(t)q + U_1 + \mu(t) \quad (14)$$

с уравнением наблюдения

$$z(t) = H(t)\dot{q}(t) + S(t)q(t).$$

Положим, что при  $\mu(t) \equiv 0$  множество  $\{H(t)\dot{q}(t) + S(t)q = 0\}$  является инвариантным по отношению к (14), при этом положение системы  $\dot{q} = q = 0$  равномерно асимптотически устойчиво.

Из теоремы 1 следует, что задача о стабилизации  $\dot{q} = q = 0$  решается управлением вида

$$u = -F(t)(H(t)\dot{q} + S(t)q). \quad (15)$$

Согласно теореме 2 релейное управление

$$u = -\frac{F(t)(H(t)\dot{q} + S(t)q)}{\|H(t)\dot{q} + S(t)q\|}$$

решает эту задачу при  $\mu(t) \neq 0$  и отсутствии инвариантности  $\{H(t)\dot{q}(t) + S(t)q = 0\}$ . В соответствии с теоремой 3 в управлении (15) допустимо некоторое запаздывание  $h > 0$ .

Исследуем задачу о стабилизации в нелинейной постановке.

Положим, что нелинейность  $\tilde{Q}(t, q, \dot{q})$  по  $q$  определяется некоторой вектор-функцией  $f = f(q)$ ,  $f \in C^1$ ,  $f(0) = 0$ ,  $\det \frac{\partial f}{\partial q} \neq 0$ , так что имеем

$$\tilde{Q} = Q_0(t) + Q_{11}(t, q)f(q) + Q_{12}(t, q)\dot{q} + Q_2(t, q, \dot{q}), \quad (16)$$

$$Q_{11}, Q_{12} \in R^{n \times n}, \quad \frac{Q_2}{\|\dot{q}\| + \|f\|} \rightarrow 0 \text{ при } \|\dot{q}\| + \|f\| \rightarrow 0.$$

Положим, что на основе обратной связи формируется управляющий сигнал вида

$$\beta = H\dot{q} + f, \quad H \in R^{n \times n}, \quad H = H(q), \quad \det H \neq 0.$$

Определим  $U(t, q, \dot{q})$  посредством равенства

$$U(t, q, \dot{q}) = - \frac{B(t, q)\beta}{\|\beta' B(t, q)\beta\|}. \quad (17)$$

Исследуется задача о стабилизации программного движения механической системы с неизвестной матрицей инерции с учетом возможного действия неопределенных сил.

Определим ограниченные, положительно-определенные матрицы  $M, S \in R^{n \times n}$ ,  $M = M(t, q)$ ,  $S = S(q)$ , для которых при каждом  $x \in R^n$  имеют место соотношения

$$x' M H A^{-1} B x \geq 2a_0 \|x\|^2, \quad x' S \frac{\partial f}{\partial q} H^{-1} x \geq 2a_0 \|x\|^2, \quad a_0 = \text{const} > 0. \quad (18)$$

Введем вектор-функцию  $V = (V_1, V_2)$

$$V_1 = \frac{1}{2} \beta' M \beta, \quad V_2 = \frac{1}{2} f' S f.$$

Для производной этой функции в силу (13) с учетом (16), (17), (18) получим систему сравнения

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = a_{11} \sqrt{v_1} \sqrt{v_2} + a_{12} v_1 - a_0 \sqrt{v_1} + \mu(t) \sqrt{v_1}, \\ \dot{v}_2 = a_{21} \sqrt{v_1} \sqrt{v_2} - a_0 v_2, \quad (a_{kj} > 0). \end{cases}$$

При  $\mu(t) \equiv 0$  нулевое решение этой системы равномерно асимптотически устойчиво. Это свойство имеет место также, если

$$|\mu(t)| \leq a_0 - \delta, \quad \delta > 0. \quad (19)$$

В соответствии с теоремой сравнения [4] получаем, что управление (17) при условиях (18) решает задачу о стабилизации системы (13) – (16), в том числе, когда в результате действия неопределенных сил  $\mu(t) \equiv 0$ , но имеет место оценка (19).

Полученный результат дополняет результаты из [5, 6, 7] о стабилизации программного движения механической системы релейным управлением.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (11-01-00541-а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (госконтракт № 14.740.12.0837).

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андреев А. С. О стабилизации движения нестационарной управляемой системы / А. С. Андреев, В. В. Румянцев // Доклады Академии наук, 2007. – Т. 416, № 5. – С. 627-629.
2. Андреев А. С. Об устойчивости нулевого решения системы с разрывной правой частью / А. С. Андреев, О. Г. Дмитриева, Ю. В. Петровичева // Научно-технический вестник Поволжья, 2011. № 1. – С. 15-21.
3. Андреев А. С. Прямой метод Ляпунова в задачах устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью / А. С. Андреев, Р. Ф. Гимазетдинов, С. В. Павликов // Научно-технический вестник Поволжья, 2011. – Вып. 3. – С. 16-20.
4. Карапетян А. В. О трении скольжения, верчения и качения / А. В. Карапетян // Труды 19-ой всероссийской конференции «Экстремальная робототехника» – СПб: Изд-во Политехнического университета, 2008. – С. 112-115.
5. Афанасьев В. Н. Математическая теория конструирования систем управления: Учеб. для вузов / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. – 3-е изд., испр., и доп. – М.: Высшая школа, 2003. – 614 с.
6. Матюхин В. И. Универсальные законы управления механическими системами. – М.: МАКС Пресс. 2001. – 252 с.
7. Андреев А. С. Знакопостоянные функции Ляпунова в задачах об устойчивости / А. С. Андреев, Т. А. Бойкова // Механика твердого тела. Донецк: Ин-т прикл. мат. и мех., 2002. – Вып. 32. – С. 109-116.

А. С. Андреев, А. А. Молгачев (г. Ульяновск)

## О ПРИМЕНИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНЫ

*Исследуется возможность выявления предельного состояния пластины, как упругого элемента конструкции, при ее обтекании сверхзвуковым потоком газа.*

Поперечные колебания упругой пластины-полосы при ее обтекании сверхзвуковым потоком газа описывается уравнением [1]

$$L(w) \equiv M\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \alpha(\dot{w} + Vw') = 0, \quad x \in (0, l). \quad (1)$$

Здесь  $w(x, t)$  – прогиб пластины;  $x$  – продольная координата,  $t$  – время;  $M$ ,  $D$  – погонная масса и изгибная жесткость пластины;  $N$  – сжимающее ( $N > 0$ ) или растягивающее ( $N < 0$ ) продольное усилие;  $\alpha = \alpha_0 \rho_0 a_0 = \text{const} > 0$ , где  $\rho_0, a_0$  – плотность газа и скорость звука в однородном невозмущенном потоке ( $\alpha_0 = 1$  при одностороннем обтекании,  $\alpha_0 = 2$  при двустороннем обтекании);  $V$  – скорость набегающего однородного потока; штрих обозначает производную по координате  $x$ , точка – производную по времени  $t$ .

Положим, что пластина длиной  $l$  имеет любое из комбинаций «жесткое защемление» или «шарнирное закрепление» в новых концах с соответственными краевыми условиями [1] при  $x = 0$  и  $x = l$ .

Исследуем задачу об устойчивости нулевого состояния  $w = 0$ ,  $\dot{w} = 0$  ( $0 \leq x \leq l$ ) пластины посредством применения функционала Ляпунова вида

$$I = \frac{1}{2} \int_0^l \{ M\dot{w}^2 + 2M\theta w\dot{w} + \alpha\theta w^2 + Dw''^2 - Nw'^2 \} dx, \quad (2)$$

где  $\theta$  – некоторая постоянная.

Функционал (2) получается из соответствующего функционала работы [1] при  $\gamma = 0$ .

Производная  $\dot{I}$  в соответствии с заданными граничными условиями имеет значение

$$\dot{I} = - \int_0^l \{ (\alpha - M\theta)\dot{w}^2 + D\theta w''^2 + \alpha V\dot{w}w' - N\theta w'^2 \} dx.$$

Обозначим через  $\lambda_1$  и  $\eta_1$  – наименьшие собственные значения краевых задач  $\varphi'''' = -\lambda\varphi''$ ,  $\varphi'' = -\eta\varphi$  при указанных краевых условиях.

Допустим, что введенные параметры, характеризующие систему, таковы, что при некотором  $\theta = \text{const} > 0$  выполнены неравенства:



$$\lambda_1 D - N > 0, \quad \alpha - M\theta > 0, \quad (\alpha - M\theta)(\lambda_1 D - N)\theta - 4\alpha^2 V^2 > 0. \quad (3)$$

Тогда для выражений  $I$  и  $\dot{I}$ , используя неравенства Рэлея и Коши-Буняковского [1], имеем оценки:

$$I \geq \frac{1}{2} \int_0^l \{ M\dot{w}^2 + 2M\theta w\dot{w} + \alpha\theta w^2 + (\lambda_1 D - N)w'^2 \} dx \geq \beta_1 w^2(t, x) + \frac{1}{2} \int_0^l (\beta_2 \dot{w}^2 + \beta_3 w^2) dx,$$

при  $\beta_k > 0$ ;

$$\dot{I} \leq - \int_0^l \{ [\alpha - M\theta]\dot{w}^2 + (\lambda_1 D - N)\theta w'^2 + \alpha V \dot{w} w' \} dx \leq -\mu_1 w^2(t, x) - \int_0^l (\mu_2 \dot{w}^2 + \mu_3 w^2) dx,$$

при  $\mu_k > 0$ .

Отсюда, согласно [2,3], находим асимптотическую устойчивость нулевого состояния пластины.

Условия (3) оптимальным образом выполняются при  $\theta = \alpha/2M$  и сводятся к неравенствам:

$$\lambda_1 D - N > 0, \quad V^2 \leq \frac{\lambda_1 D - N}{M}. \quad (4)$$

Второе из неравенств (4) ограничивается скоростью набегающего потока. Эти условия являются более общими по сравнению с соответствующими результатами из [1], но, в отличие от [1], не гарантируют экспоненциальную устойчивость.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), (ГК №П1122, № 14.740.12.0837), а также при финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/11180) и РФФИ (11-01-00541).

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Исследование динамики и устойчивости упругого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании // Вестник Саратовского государственного технического университета. – Саратов, 2011. – №3(57), Вып. 1. – С. 59-67.
2. Шестаков А. А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1990. – 316 с.
3. Андреев А. С. Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2005. – 328 с.

*А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Ю. К. Сагдеева* (г. Ульяновск)

## УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОГО ЭЛЕМЕНТА ПРОТОЧНОГО КАНАЛА

*Исследуется динамическая устойчивость упругого элемента стенки канала при протекании в нем дозвукового потока идеальной несжимаемой жидкости. Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Получены достаточные условия устойчивости, налагающие ограничения на скорость потока жидкости, сжимающего (растягивающего) элемент усилия, изгибную жесткость упругого элемента и другие параметры механической системы.*

### Введение

При проектировании конструкций, обтекаемых потоком газа или жидкости, важное значение имеет исследование устойчивости деформируемых элементов, так как воздействие потока может приводить к увеличению амплитуды или частоты колебаний до значений, при которых нарушается надежность эксплуатации конструкций.

В то же время для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся к вибрационной технике, используемых для интенсификации технологических процессов, являются устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий и подачи смазочно-охлаждающей жидкости в зону обработки (см., например, [1]).

Таким образом, при проектировании конструкций и устройств, находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой, необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости упругих элементов, требуемой для их функционирования и надежности эксплуатации.

В работе исследуется динамическая устойчивость упругого элемента стенки канала при протекании в нем дозвукового потока идеальной несжимаемой жидкости (газа). Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Исследование устойчивости проводится в линейной постановке, соответствующей малым возмущениям однородного дозвукового потока и малым прогибам упругого элемента стенки канала. На основе построения функционала для связанной системы дифференциальных уравнений в частных производных для двух неизвестных функций – прогиба упругого элемента стенки канала и потенциала скорости жидкости (газа), получены условия устойчивости решений этой системы.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим плоское течение в прямолинейном канале  $J = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$ . Скорость невозмущенного однородного потока равна  $V$  и направлена вдоль оси  $Ox$ . Упругой является часть стенки  $y = y_0$  при  $x \in [b, c]$  (рис.1).

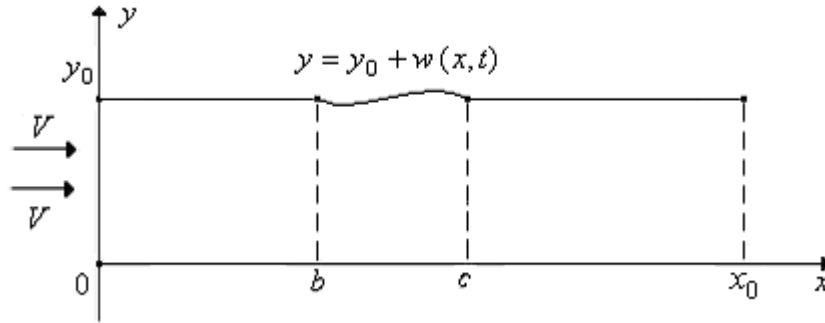


Рис.1. Канал, стенка которого содержит деформируемый элемент

Введем обозначения:  $w(x, t)$  – функция деформации упругого элемента стенки канала;  $\varphi(x, y, t)$  – потенциал скорости возмущенного потока.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in J, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, b] \cup [c, x_0), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$\varphi(0, y, t) = 0, \quad \varphi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$L(w) = -\rho(\varphi_t(x, y_0, t) + V\varphi_x(x, y_0, t)), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Дифференциальный оператор  $L(w)$  задается выражением

$$L(w) \equiv Dw''''(x, t) + \beta_2 \dot{w}''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + Nw''(x, t) + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_0 w(x, t). \quad (7)$$

Индексы  $x, y, t$  снизу обозначают частные производные по  $x, y, t$ ; штрих и точка – частные производные по  $x$  и  $t$  соответственно;  $\rho$  – плотность жидкости в однородном невозмущенном потоке;  $D, M$  – изгибная жесткость и погонная масса пластины;  $N$  – сжимающая (растягивающая) пластину сила;  $\beta_1, \beta_2$  – коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования;  $\beta_0$  – коэффициент жесткости основания.

Предположим, что концы упругого элемента закреплены либо жестко, либо шарнирно, тогда при  $x = b$  и  $x = c$  выполняется одно из условий

$$1) w = w' = 0, \quad 2) w = w'' = 0. \quad (8)$$

Таким образом, получили связанную задачу (1) – (8) для двух неизвестных функций – прогиба упругого элемента стенки канала  $w(x, t)$  и потенциала скорости жидкости (газа)  $\varphi(x, y, t)$ .

## 2. Исследование устойчивости

Исследуем устойчивость нулевого решения  $\varphi(x, y, t) \equiv 0$ ,  $w(x, t) \equiv 0$  системы (1) - (8) по Ляпунову. Введем «смешанный» функционал, включающий как  $\varphi(x, y, t)$ , так и  $w(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \iint_J (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy - 2V \int_b^c \varphi(x, y_0, t) w'(x, t) dx + \\ & + \frac{1}{\rho} \int_b^c (M \dot{w}^2 + D w''^2 - N w'^2 + \beta_0 w^2) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Найдем производную от  $\Phi$  по  $t$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = & 2 \iint_J (\varphi_x \varphi_{xt} + \varphi_y \varphi_{yt}) dx dy - 2V \int_b^c (\varphi_t(x, y_0, t) w'(x, t) + \\ & + \varphi(x, y_0, t) \dot{w}'(x, t)) dx + \frac{2}{\rho} \int_b^c (M \dot{w} \ddot{w} + D w'' \dot{w}'' - N w' \dot{w}' + \beta_0 w \dot{w}) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Произведем интегрирование с учетом условий (2)-(5)

$$\begin{aligned} \iint_J \varphi_x \varphi_{xt} dx dy &= \int_0^{y_0} dy \int_0^{x_0} \varphi_x \varphi_{xt} dx = \int_0^{y_0} \left( \varphi_t \varphi_x \Big|_{x=0}^{x_0} - \int_0^{x_0} \varphi_{xx} \varphi_t dx \right) dy = \\ &= - \iint_J \varphi_{xx} \varphi_t dx dy, \\ \iint_J \varphi_y \varphi_{yt} dx dy &= \int_0^{x_0} dx \int_0^{y_0} \varphi_y \varphi_{yt} dy = \int_0^{x_0} \left( \varphi_y \varphi_t \Big|_{y=0}^{y_0} - \int_0^{y_0} \varphi_{yy} \varphi_t dy \right) dx = \\ &= \int_0^{x_0} \varphi_t(x, y_0, t) \varphi_y(x, y_0, t) dx - \iint_J \varphi_{yy} \varphi_t dx dy = \\ &= \int_b^c \varphi_t(x, y_0, t) (\dot{w}(x, t) + V w'(x, t)) dx - \iint_J \varphi_{yy} \varphi_t dx dy. \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда равенство (10) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = & -2 \iint_J \varphi_t (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) dx dy + 2 \int_b^c \varphi_t(x, y_0, t) (\dot{w}(x, t) + V w'(x, t)) dx - 2V \int_b^c (\varphi_t(x, y_0, t) \cdot \\ & \cdot w'(x, t) + \varphi(x, y_0, t) \dot{w}'(x, t)) dx + \frac{2}{\rho} \int_b^c (M \dot{w} \ddot{w} + D w'' \dot{w}'' - N w' \dot{w}' + \beta_0 w \dot{w}) dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Для функций  $\varphi(x, y, t)$  и  $w(x, t)$ , удовлетворяющих уравнениям (1) и (6), (7), равенство (12) примет вид

$$\dot{\Phi}(t) = 2 \int_b^c (\varphi_t(x, y_0, t) \dot{w}(x, t) - V \varphi(x, y_0, t) \dot{w}'(x, t)) dx +$$

$$+ \frac{2}{\rho} \int_b^c (\dot{w} \{-\rho(\varphi_t(x, y_0, t) + V\varphi_x(x, y_0, t)) - Dw'''' - \beta_2 \dot{w}''' - Nw'' - \beta_1 \dot{w} - \beta_0 w\} + Dw''\dot{w}'' - Nw'\dot{w}' + \beta_0 w\dot{w}) dx. \quad (13)$$

Произведем интегрирование с учетом условий (2)-(5), (8)

$$\begin{aligned} \int_b^c \varphi(x, y_0, t) \dot{w}'(x, t) dx &= \varphi(x, y_0, t) \dot{w}(x, t) \Big|_{x=b}^c - \int_b^c \varphi_x(x, y_0, t) \dot{w}(x, t) dx, \\ \int_b^c \dot{w} w'''' dx &= \int_b^c \dot{w}'' w'' dx, \quad \int_b^c \dot{w} \dot{w}'''' dx = \int_b^c \dot{w}''^2 dx, \quad \int_b^c \dot{w} w'' dx = - \int_b^c \dot{w}' w' dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), получим

$$\dot{\Phi}(t) = - \frac{2}{\rho} \int_b^c (\beta_2 \dot{w}''^2 + \beta_1 \dot{w}^2) dx.$$

Пусть выполняются условия

$$\beta_2 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad (15)$$

тогда окончательно получим

$$\dot{\Phi}(t) \leq 0 \Rightarrow \Phi(t) \leq \Phi(0). \quad (16)$$

Проведем оценки для функционала с учетом граничных условий (8).

Рассмотрим краевую задачу для уравнения  $\psi'''' = -\lambda \psi''$ ,  $x \in (b, c)$  с краевыми условиями (8). Эта задача является самосопряженной и полностью определенной. Действительно, для любых функций  $U, Q$ , удовлетворяющих краевым условиям (8), получим

$$\begin{aligned} \int_b^c U Q'''' dx &= U Q'''' \Big|_b^c - \int_b^c U' Q'''' dx = -U' Q'''' \Big|_b^c + \int_b^c U'' Q'' dx = \\ &= U'' Q' \Big|_b^c + \int_b^c U''' Q' dx = -U''' Q \Big|_b^c + \int_b^c U'''' Q dx = \int_b^c U'''' Q dx, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \int_b^c U Q'' dx &= U Q' \Big|_b^c - \int_b^c U' Q' dx = -U' Q \Big|_b^c + \int_b^c U'' Q dx = \int_b^c U'' Q dx, \\ \int_b^c U U'''' dx &= U U'''' \Big|_b^c - \int_b^c U' U'''' dx = -U' U'''' \Big|_b^c + \int_b^c U'' U'' dx = \int_b^c U''^2 dx > 0, \\ - \int_b^c U U'' dx &= -U U' \Big|_b^c + \int_b^c U' U' dx = \int_b^c U'^2 dx > 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Для функции  $w(x, t)$  запишем неравенство Рэлея [2]

$$\int_b^c w(x, t) w''''(x, t) dx \geq -\lambda_1 \int_b^c w(x, t) w''(x, t) dx,$$

где  $\lambda_1$  – наименьшее собственное значение рассматриваемой краевой задачи.

Интегрируя по частям, представим это неравенство в виде

$$\int_b^c w''^2(x, t) dx \geq \lambda_1 \int_b^c w'^2(x, t) dx. \quad (19)$$

Аналогично рассмотрим краевую задачу для уравнения  $\psi'''' = \mu\psi$   $x \in (b, c)$  с краевыми условиями (8). Эта задача является самосопряженной и полностью определенной. Действительно, для любых функций  $U, Q$ , удовлетворяющих краевым условиям (8), получим соотношения (17), (18).

Для функции  $w(x, t)$  запишем неравенство Рэлея

$$\int_b^c w(x, t) w''''(x, t) dx \geq \mu_1 \int_b^c w(x, t) w(x, t) dx,$$

где  $\mu_1$  – наименьшее собственное значение рассматриваемой краевой задачи.

Интегрируя по частям, представим это неравенство в виде

$$\int_b^c w''^2(x, t) dx \geq \mu_1 \int_b^c w^2(x, t) dx. \quad (20)$$

Далее, воспользовавшись неравенством Коши - Буняковского, получим

$$\left( \int_b^x w'(x, t) dx \right)^2 \leq \int_b^x 1^2 dx \int_b^x w'^2(x, t) dx \leq \int_b^c 1^2 dx \int_b^c w'^2(x, t) dx.$$

Следовательно,

$$w^2(x, t) \leq (c - b) \int_b^c w'^2(x, t) dx. \quad (21)$$

Оценим  $\Phi(0)$  сверху, используя неравенства (19), (20) и очевидное неравенство  $-2ab \leq a^2 + b^2$ :

$$\begin{aligned} \Phi(0) = & \iint_J (\varphi_{x_0}^2 + \varphi_{y_0}^2) dx dy - 2V \int_b^c \varphi(x, y_0, 0) w'(x, 0) dx + \\ & + \frac{1}{\rho} \int_b^c (M \dot{w}_0^2 + D w_0''^2 - N w_0'^2 + \beta_0 w_0^2) dx \leq \iint_J (\varphi_{x_0}^2 + \varphi_{y_0}^2) dx dy + \\ & + \int_b^c \varphi^2(x, y_0, 0) dx + V^2 \int_b^c w'^2(x, 0) dx + \frac{1}{\rho} \int_b^c (M \dot{w}_0^2 + D w_0''^2 - \\ & - N w_0'^2 + \beta_0 w_0^2) dx \leq \iint_J (\varphi_{x_0}^2 + \varphi_{y_0}^2) dx dy + \int_b^c \varphi^2(x, y_0, 0) dx + \\ & + \frac{1}{\rho} \int_b^c (M \dot{w}_0^2 + D w_0''^2 + (|N| + \rho V^2) w_0'^2 + \beta_0 w_0^2) dx \leq \iint_J (\varphi_{x_0}^2 + \varphi_{y_0}^2) dx dy + \\ & + \int_b^c \varphi^2(x, y_0, 0) dx + \frac{1}{\rho} \int_b^c (M \dot{w}_0^2 + \left( D + \frac{|N| + \rho V^2}{\lambda_1} + \frac{\beta_0}{\mu_1} \right) w_0''^2) dx, \end{aligned} \quad (22)$$

где введены обозначения  $\varphi_{x0} = \varphi_x(x, y, 0)$ ,  $\varphi_{y0} = \varphi_y(x, y, 0)$ ,  $\dot{w}_0 = \dot{w}(x, 0)$ ,  $w_0 = w(x, 0)$ ,  $w'_0 = w'(x, 0)$ ,  $w''_0 = w''(x, 0)$ .

Оценим  $\Phi(t)$  снизу:

$$\Phi(t) \geq \iint_J (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy - 2V \int_b^c \varphi(x, y_0, t) w'(x, t) dx + \frac{1}{\rho} \int_b^c (\lambda_1 D - N) w'^2 dx. \quad (23)$$

Рассмотрим краевую задачу

$$-\psi'' = \eta\psi, \quad x \in (0, x_0), \quad (24)$$

с краевыми условиями

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(x_0) = 0. \quad (25)$$

Задача (24), (25) является самосопряженной и полностью определенной. Действительно, для любых функций  $U, Q$ , удовлетворяющих краевым условиям  $U(0) = U(x_0) = Q(0) = Q(x_0) = 0$ , получим

$$\begin{aligned} - \int_0^{x_0} U U'' dx &= -U U' \Big|_0^{x_0} + \int_0^{x_0} U'^2 dx = \int_0^{x_0} U'^2 dx > 0, \\ \int_0^{x_0} U Q'' dx &= U Q' \Big|_0^{x_0} - \int_0^{x_0} U' Q' dx = -U' Q \Big|_0^{x_0} + \int_0^{x_0} U'' Q dx = \int_0^{x_0} U'' Q dx. \end{aligned}$$

Используя неравенство Рэлея для функции  $\varphi(x, y, t)$ , получим

$$- \int_0^{x_0} \varphi \varphi_{xx} dx \geq \eta_1 \int_0^{x_0} \varphi^2 dx, \quad (26)$$

где  $\eta_1$  – наименьшее собственное значение рассматриваемой краевой задачи.

Интегрируя по частям, получим

$$\int_0^{x_0} \varphi_x^2 dx \geq \eta_1 \int_0^{x_0} \varphi^2 dx. \quad (27)$$

Найдем  $\eta_1$ . Общее решение уравнения (24) имеет вид

$$\psi = A \cos \sqrt{\eta} x + B \sin \sqrt{\eta} x.$$

Подставим начальные условия

$$\begin{aligned} \psi(0) = 0 &\Rightarrow A = 0 \Rightarrow \psi = B \sin \sqrt{\eta} x, \\ \psi(x_0) = 0 &\Rightarrow B \sin \sqrt{\eta} x_0 = 0 \Rightarrow \sin \sqrt{\eta} x_0 = 0 \Rightarrow \sqrt{\eta_k} x_0 = \pi k, \quad k \in N \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{\eta_k} = \frac{\pi k}{x_0} \Rightarrow \eta_k = \frac{\pi^2 k^2}{x_0^2}. \end{aligned}$$

Получим  $\eta_1 = \frac{\pi^2}{x_0^2}$ . Из (27) следует

$$\int_0^{x_0} \varphi_x^2 dx \geq \frac{\pi^2}{x_0^2} \int_0^{x_0} \varphi^2 dx \Rightarrow \iint_J \varphi_x^2 dx dy \geq \frac{\pi^2}{x_0^2} \iint_J \varphi^2 dx dy. \quad (28)$$

Применяя неравенство Коши - Буняковского, получим неравенство

$$\left( \int_y^{y_0} \varphi_y dy \right)^2 \leq \int_y^{y_0} 1^2 dy \int_y^{y_0} \varphi_y^2 dy .$$

Следовательно,

$$(\varphi(x, y_0, t) - \varphi(x, y, t))^2 \leq (y_0 - y) \int_y^{y_0} \varphi_y^2 dy \leq (y_0 - y) \int_0^{y_0} \varphi_y^2 dy .$$

Интегрируя от 0 до  $y_0$  по переменной  $y$ , получим

$$\int_0^{y_0} (\varphi(x, y_0, t) - \varphi(x, y, t))^2 dy \leq \frac{y_0^2}{2} \int_0^{y_0} \varphi_y^2 dy .$$

Интегрируя от 0 до  $x_0$  по переменной  $x$ , окончательно получим

$$\iint_J \varphi_y^2 dx dy \geq \frac{2}{y_0^2} \iint_J (\varphi(x, y_0, t) - \varphi(x, y, t))^2 dx dy . \quad (29)$$

Применяя (28), (29) для (23), получим неравенство

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq & \iint_J \left( \frac{\pi^2}{x_0^2} \varphi^2 + \frac{2}{y_0^2} (\varphi(x, y_0, t) - \varphi(x, y, t))^2 \right) dx dy - \\ & - 2V \int_b^c \varphi(x, y_0, t) w'(x, t) dx + \frac{1}{\rho} \int_b^c (\lambda_1 D - N) w'^2 dx. \end{aligned} \quad (30)$$

Введем обозначение

$$f(x, t) = \begin{cases} 0, & x \in (0, b], \\ w'(x, t), & x \in (b, c), \\ 0, & x \in [c, x_0), \end{cases}$$

тогда из (30) получим неравенство

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq & \iint_J \left[ \frac{\pi^2}{x_0^2} \varphi^2(x, y, t) + \frac{2}{y_0^2} (\varphi^2(x, y_0, t) - 2\varphi(x, y_0, t)\varphi(x, y, t) + \right. \\ & \left. + \varphi^2(x, y, t)) \right] dx dy - 2V \int_0^{x_0} \varphi(x, y_0, t) f(x, t) dx + \frac{1}{\rho} \int_0^{x_0} (\lambda_1 D - N) f^2(x, t) dx = \\ & = \iint_J \left[ \left( \frac{\pi^2}{x_0^2} + \frac{2}{y_0^2} \right) \varphi^2(x, y, t) - \frac{4}{y_0^2} \varphi(x, y_0, t)\varphi(x, y, t) + \frac{2}{y_0^2} \varphi^2(x, y_0, t) - \right. \\ & \left. - \frac{2V}{y_0} \varphi(x, y_0, t) f(x, t) + \frac{(\lambda_1 D - N)}{\rho y_0} f^2(x, t) \right] dx dy \end{aligned} \quad (31)$$

Введем обозначения

$$d_{11} = \frac{\pi^2}{x_0^2} + \frac{2}{y_0^2}, \quad d_{22} = \frac{2}{y_0^2}, \quad d_{12} = -\frac{2}{y_0^2}, \quad d_{23} = -\frac{V}{y_0^2}, \quad d_{33} = \frac{\lambda_1 D - N}{\rho y_0}. \quad (32)$$



Рассмотрим квадратичную форму относительно  $\varphi(x, y, t)$ ,  $\varphi(x, y_0, t)$ ,  $f(x, t)$  в (31). Матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ 0 & d_{23} & d_{33} \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Сильвестра, получим условия положительно определенной квадратичной формы

$$\Delta_1 = d_{11} > 0, \quad \Delta_2 = d_{11}d_{22} - d_{12}^2 = \frac{2\pi^2}{x_0^2 y_0^2} > 0, \quad (33)$$

$$\Delta_3 = d_{33}\Delta_2 - d_{23}^2 d_{11} > 0. \quad (34)$$

Условия (33) выполняются. Рассмотрим неравенство (34):

$$\frac{(\lambda_1 D - N)}{\rho y_0} \frac{2\pi^2}{x_0^2 y_0^2} - \frac{V^2}{y_0^2} \left( \frac{\pi^2}{x_0^2} + \frac{2}{y_0^2} \right) > 0. \quad (35)$$

Необходимое условие выполнения (35) неравенства:

$$(\lambda_1 D - N) > 0. \quad (36)$$

Преобразуем неравенство (33) относительно  $V$

$$V^2 < \frac{2\pi^2 y_0 (\lambda_1 D - N)}{\rho (\pi^2 y_0^2 + 2x_0^2)}. \quad (37)$$

Используя метод Лагранжа, с учетом неравенства (34) оценим квадратичную форму в (31)

$$F(\varphi(x, y, t), \varphi(x, y_0, t), f(x, t)) \geq \frac{\Delta_3}{\Delta_2} f^2(x, t).$$

Из (31) получим

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\geq \iint_J \frac{\Delta_3}{\Delta_2} f^2(x, t) dx dy = \int_0^{x_0} \frac{\Delta_3 y_0}{\Delta_2} f^2(x, t) dx = \int_b^c \frac{\Delta_3 y_0}{\Delta_2} w'^2(x, t) dx \geq \\ &\geq \frac{\Delta_3 y_0}{\Delta_2 (c - b)} w^2(x, t). \end{aligned} \quad (38)$$

Таким образом, учитывая (16), (22), (38), получим неравенство

$$\begin{aligned} w^2(x, t) &\leq \frac{\Delta_2 (c - b)}{\Delta_3 y_0} \left[ \iint_J (\varphi_{x_0}^2 + \varphi_{y_0}^2) dx dy + \int_b^c \varphi^2(x, y_0, 0) dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} \int_b^c \left( M \dot{w}_0^2 + \left( D + \frac{|N|}{\lambda_1} + \frac{\rho V^2}{\mu_1} + \frac{\beta_0}{\mu_1} \right) w_0''^2 \right) dx \right], \end{aligned}$$

из которого следует теорема

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия (15), (36), (37). Тогда решение  $w(x, t)$  системы уравнений (1)-(8) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных  $\varphi_{x0}, \varphi_{y0}, \varphi(x, y_0, 0), \dot{w}_0, w_0''$ .

Аналогично оценивая квадратичную форму в (31), получим

$$F(\varphi(x, y, t), \varphi(x, y_0, t), f(x, t)) \geq \frac{\Delta_3}{d_{22}d_{33} - d_{23}^2} \varphi^2(x, y, t). \quad (39)$$

Учитывая (16), (22), (39), получим неравенство

$$\begin{aligned} \iint_J \varphi^2(x, y, t) dx dy &\leq \frac{d_{22}d_{33} - d_{23}^2}{\Delta_3} \left[ \iint_J (\varphi_{x0}^2 + \varphi_{y0}^2) dx dy + \right. \\ &\left. + \int_b^c \varphi^2(x, y_0, 0) dx + \frac{1}{\rho} \int_b^c \left( M \dot{w}_0^2 + \left( D + \frac{|N| + \rho V^2}{\lambda_1} + \frac{\beta_0}{\mu_1} \right) w_0''^2 \right) dx \right], \end{aligned}$$

из которого следует теорема

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия (15), (36), (37). Тогда решение  $\varphi(x, y, t)$  системы уравнений (1)-(8) устойчиво в среднем (в интегральном смысле) по отношению к возмущениям начальных данных  $\varphi_{x0}, \varphi_{y0}, \varphi(x, y_0, 0), \dot{w}_0, w_0''$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пат. 2062662 Российская Федерация, МПК6 В 06 В 1/18, 1/20. Гидродинамический излучатель / Вельмисов П. А., Горшков Г. М., Рябов Г. К.; заявитель и патентообладатель Ульяновский государственный технич. ун-т. – № 5038746/28; заявл. 20.07.92; опубл. 27.06.96, Бюл. №18.
2. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 503с.

*А. В. Анкилов, А. Б. Захарова* (г. Ульяновск)

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ В ПОТОКЕ ГАЗА

*На основе разработанных программных продуктов в двух системах компьютерной алгебры Mathcad и Mathematica проведены численные эксперименты и их сравнение по исследованию динамики упругой пластины, обтекаемой потоком идеальной несжимаемой жидкости (газа).*

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим плоскую задачу аэроупругости о малых колебаниях, возникающих при бесциркуляционном обтекании упругой пластины-полосы потоком идеального несжимаемого газа (жидкости).

Пусть на плоскости  $xOy$ , в которой происходят совместные колебания пластины и газа, пластине соответствует на оси  $Ox$  отрезок  $[0, l]$  (рис. 1). В бесконечно удаленной точке скорость газа равна  $V$  и имеет направление, совпадающее с направлением оси  $Ox$ . Будем предполагать, что деформации пластины и возмущение однородного потока малы, т. е.  $\bar{\varphi} = Vx + \varepsilon\varphi(x, y, t)$ ,  $\bar{w} = \varepsilon w(x, t)$ ,  $\varepsilon \ll 1$ . Здесь  $\bar{w}$  и  $\bar{\varphi}$  – соответственно поперечная составляющая деформации пластины и потенциал скорости возмущенного потока газа;  $x, y$  – декартовы координаты;  $t$  – время.

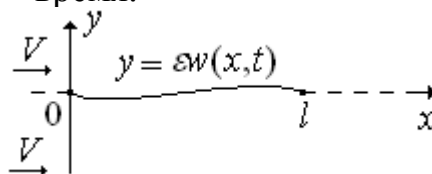


Рис. 1. Двустороннее безотрывное обтекание пластины

Потенциал  $\varphi$  возмущенного потока удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G = R^2 \setminus [0, l], \quad (1)$$

граничным условиям (условиям непротекания)

$$\varphi_y^{\pm} = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \varphi_y(x, y, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), \quad x \in (0, l), \quad (2)$$

и условию отсутствия возмущений в бесконечно удаленной точке

$$(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2)_{\infty} = 0. \quad (3)$$

Аэродинамическое воздействие на пластину, зависящее от поперечной составляющей ее деформации  $w(x, t)$  выражается через потенциал скорости  $\varphi(x, y, t)$  по формуле

$$P(x, t) = \rho(\varphi_t^+ - \varphi_t^-) + \rho V(\varphi_x^+ - \varphi_x^-), \quad x \in (0, l), y = 0. \quad (4)$$

Модельное уравнение малых колебаний упругой пластины с учетом силового воздействия потока  $P$  на нее имеет вид:

$$M\ddot{w}(x,t) + Dw''''(x,t) + Nw''(x,t) + \beta_0 w(x,t) + \beta_1 \dot{w}(x,t) + \beta_2 \dot{w}'''(x,t) = P(x,t). \quad (5)$$

Здесь и в дальнейшем индексы  $x, y, t$  снизу обозначают производные по  $x, y, t$ ; штрих обозначает производную по  $x$  и  $\tau$ , а точка – производную по  $t$ ;

$\rho$  – плотность газа;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – изгибная жесткость пластины;  $h$  –

толщина пластины;  $M = h\rho_n$  – погонная масса пластины;  $E, \rho_n$  – модуль упругости и линейная плотность пластины;  $N$  – сжимающая (растягивающая) пластину сила;  $\beta_2, \beta_1$  – коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования;  $\beta_0$  – коэффициент жесткости основания;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

С помощью методов теории функции комплексного переменного задача сведена к исследованию интегро-дифференциального уравнения в частных производных [1]

$$\begin{aligned} M\ddot{w}(x,t) + Dw''''(x,t) + Nw''(x,t) + \beta_0 w(x,t) + \beta_1 \dot{w}(x,t) + \beta_2 \dot{w}'''(x,t) = \\ = -\frac{\rho}{\pi} \int_0^l (\ddot{w}(\tau,t) + V\dot{w}'(\tau,t)) K(\tau,x) d\tau - \frac{V\rho}{\pi} \int_0^l (\dot{w}(\tau,t) + Vw'(\tau,t)) \frac{\partial K(\tau,x)}{\partial x} d\tau, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $x \in (0, l)$ , а ядро  $K(\tau, x) = 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x(l-\tau)} + \sqrt{\tau(l-x)}}{\sqrt{x(l-\tau)} - \sqrt{\tau(l-x)}} \right|$ .

Уравнение (6) получено при любых видах закрепления концов пластины. Зададим краевые условия, не исследованные в монографии [1], следующего вида:

$$1) \quad w(0,t) = w''(0,t) = w(l,t) = w'(l,t) = 0, \quad (7)$$

$$2) \quad w(0,t) = w'(0,t) = w(l,t) = w''(l,t) = 0. \quad (8)$$

Так, например, условия (7) означают шарнирное опирание левого и жесткое закрепление правого концов, условия (8) – жесткое закрепление левого конца и шарнирное опирание правого.

Зададим также начальные условия:

$$w(x,0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x,0) = f_2(x), \quad (9)$$

которые должны быть согласованы с краевыми условиями.

## 2. Метод Галеркина

Решение уравнения (6) будем искать методом Галеркина [2], подчинив искомую функцию  $w(x,t)$  краевым условиям (7), (8).

Согласно методу Галеркина решение уравнения (6) ищется в виде

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^n a_k(t) g_k(x), \quad (10)$$

где  $g_k(x)$  – базисные функции, подобранные так, чтобы выполнялись заданные краевые условия, а функции  $a_k(t)$  определяются из условия ортогональности невязки уравнения ко всем базисным функциям.

В качестве базисных возьмем функции

$$g_k(x) = A_k \cos \gamma_k x + B_k \sin \gamma_k x + C_k \operatorname{ch} \gamma_k x + D_k \operatorname{sh} \gamma_k x, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Коэффициенты  $A_k, B_k, C_k, D_k$  и параметр  $\gamma_k$  выберем так, чтобы на каждом из концов отрезка  $[0, l]$  выполнялось одно из следующих условий:

$$1) g_k(x) = g'_k(x) = 0; \quad 2) g_k(x) = g''_k(x) = 0; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Тогда функция  $w(x, t)$  в виде (10) будет удовлетворять условиям (7). Заметим, что  $\gamma_k$  и  $g_k(x)$  – собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$g^{IV}(x) = \gamma^4 g(x) \quad (13)$$

с граничными условиями (12). Задача (13), (12) – самосопряженная и полностью определенная, следовательно, система функций  $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  ортогональна на  $[0, l]$ . В этом случае согласно теореме о разложении любую функцию  $U(x)$ , четырехкратно непрерывно дифференцируемую в  $(0, l)$  и удовлетворяющую соответствующим краевым условиям, можно разложить в ряд  $U(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k(x)$ , абсолютно и равномерно сходящийся в  $(0, l)$ .

Условия ортогональности невязки уравнения (1.6) к базисным функциям  $\{g_m(x)\}_{m=1}^n$  позволяют записать систему уравнений для  $a_m(t)$ :

$$\begin{aligned} & \left[ D\gamma_m^4 a_m(t) + M a_m''(t) + \beta_2 \gamma_m^4 a'_m(t) + \beta_1 a'_m(t) + \beta_0 a_m(t) \right] \delta_m - \\ & - N \sum_{k=1}^n a_k(t) \int_0^l g'_k(x) g'_m(x) dx + \frac{\rho}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_0^l (a''_k(t) g_k(\tau) + V a'_k(t) g'_k(\tau)) K_{1m}(\tau) d\tau - \\ & - \frac{\rho V}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_0^l (a'_k(t) g_k(\tau) + V a_k(t) g'_k(\tau)) K_{2m}(\tau) d\tau = 0, \\ & \delta_m = \int_0^l g_m^2(x) dx, \quad K_{1m}(\tau) = \int_0^l g_m(x) K(\tau, x) dx, \quad K_{2m}(\tau) = \int_0^l g'_m(x) K(\tau, x) dx, \quad m = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (14)$$

Условия ортогональности невязки начальных условий (9) к базисным функциям позволяют найти начальные условия  $a_m(0)$ :

$$a_m(0) = \frac{1}{\delta_m} \int_0^l f_1(x) g_m(x) dx, \quad a'_m(0) = \frac{1}{\delta_m} \int_0^l f_2(x) g_m(x) dx. \quad (15)$$

Таким образом, получили задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (14) с начальными условиями (15).

### 3. Численный эксперимент

Рассмотрим пример механической системы. Рабочая среда – газ ( $\rho = 1$ ), пластина изготовлена из алюминия ( $E = 7 \cdot 10^{10}$ ,  $\rho_{nl} = 8480$ ). Другие параметры механической системы:  $l = 2$ ,  $h = 0,005$ ,  $M = \rho_{nl}h = 42,4$ ,  $\nu = 0,31$ ,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 806,7$ ,  $N = -2000$ ,  $V = 30$ ,  $\beta_0 = 4$ ,  $\beta_1 = 0,1$ ,  $\beta_2 = 0,2$  (все значения приведены в системе СИ).

С помощью математических систем Mathematica и Mathcad для данных значений параметров получим графики функции  $w(x,t) = \sum_{k=1}^4 a_k(t)g_k(x)$ , при  $x_* = 0,4$ ,  $t \geq 0$  при различных начальных условиях.

3.1. Жесткое закрепление левого конца и шарнирное закрепление правого конца пластины.

Для данного закрепления концов базисные функции имеют вид:  $g_k(x) = \cos \gamma_k x - \operatorname{ch} \gamma_k x - \frac{\cos \gamma_k l - \operatorname{ch} \gamma_k l}{\sin \gamma_k l - \operatorname{sh} \gamma_k l} (\sin \gamma_k x - \operatorname{sh} \gamma_k x)$ , где  $\gamma_k$  – корни уравнения  $\sin \gamma_k l \operatorname{ch} \gamma_k l - \cos \gamma_k l \operatorname{sh} \gamma_k l = 0$ , т. е.  $\gamma_k l = 3,9266; 7,0686; 10,2102; \dots$

1) При начальных условиях  $w(x,0) = 0,01 \cdot g_1(x)$ ,  $\dot{w}(x,0) = -0,005 \cdot g_1(x)$ , получены следующие графики:

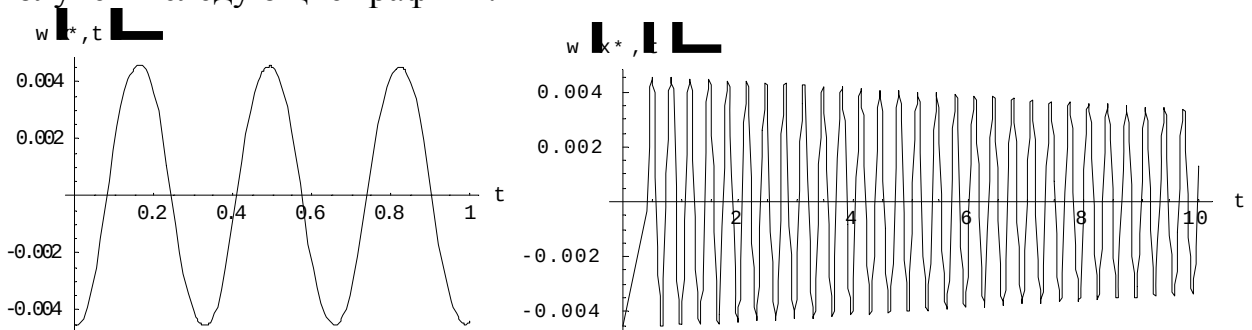


Рис. 2. Деформация пластины в точке  $x_* = 0,4$  (Mathematica)

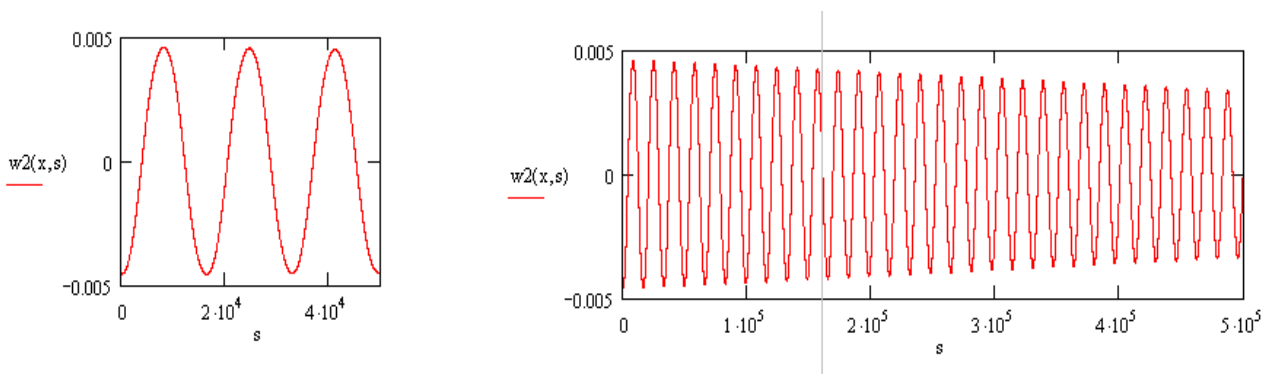


Рис. 3. Деформация пластины в точке  $x_* = 0,4$  (Mathcad)

На рис. 3 и следующих рисунках, полученных в системе Mathcad,  $s = 5 \cdot 10^5$  соответствует  $t = 10$ .

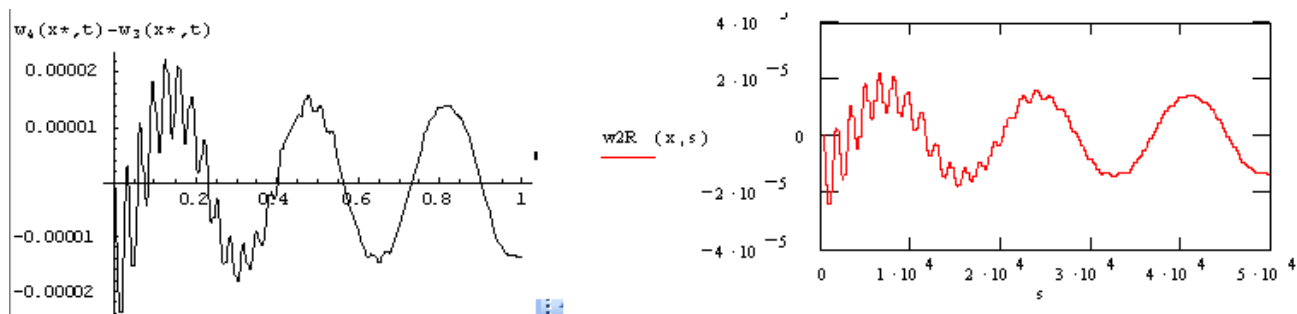


Рис. 4. Разница между четвертым и третьим приближениями (первый соответственно Mathematica, второй – Mathcad)

2) При начальных условиях  $w(x,0) = 0,01 \cdot x^3(l-x)^3$ ,  $\dot{w}(x,0) = -0,005 \cdot x^4(l-x)^4$ , получены следующие графики:

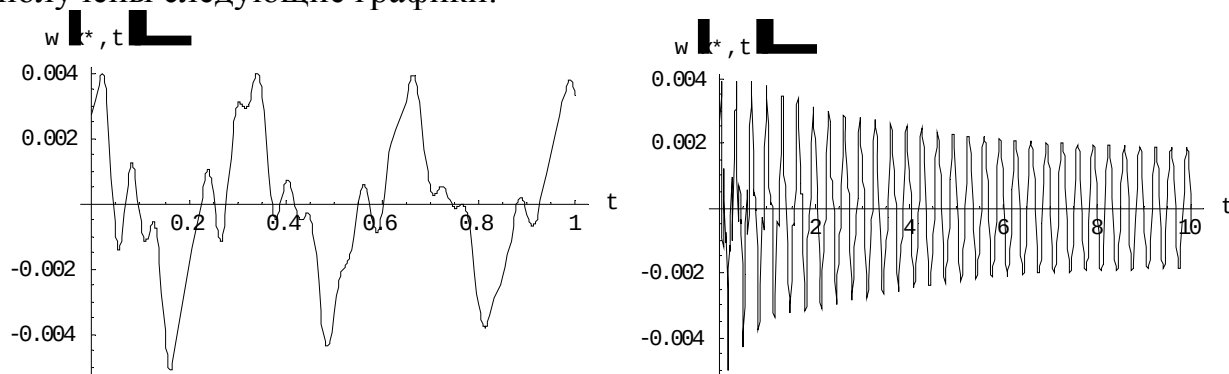


Рис. 5. Деформация пластины в точке  $x_* = 0,4$  (Mathematica)

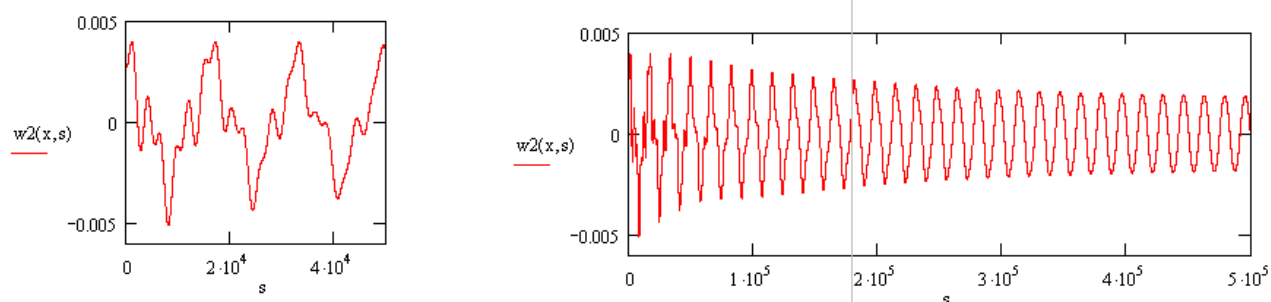


Рис. 6. Деформация пластины в точке  $x_* = 0,4$  (Mathcad)

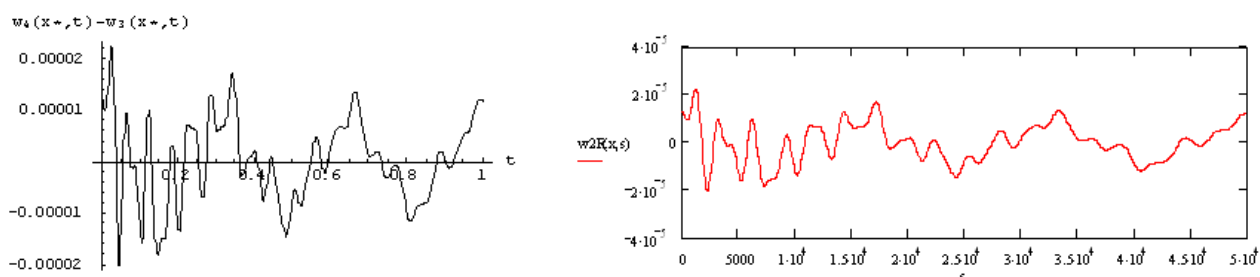


Рис. 7. Разница между четвертым и третьим приближениями (первый соответственно Mathematica, второй – Mathcad)

Как видно из графиков, полученных при помощи Mathematica и Mathcad, результаты исследований практически не отличаются.

### 3.2. Шарнирное закрепление левого конца и жесткое закрепление правого конца пластины.

Для данного закрепления концов базисные функции имеют вид:

$$g_k(x) = \sin \gamma_k x - \frac{\sin \gamma_k l}{\operatorname{sh} \gamma_k l} \operatorname{sh} \gamma_k x, \text{ где } \gamma_k - \text{корни уравнения}$$

$$\sin \gamma_k l \operatorname{ch} \gamma_k l - \cos \gamma_k l \operatorname{sh} \gamma_k l = 0,$$

т. е.  $\gamma_k l = 3,9266; 7,0686; 10,2102; 13,3518; \dots$

1) При начальных условиях  $w(x,0) = 0,01 \cdot g_1(x)$ ,  $\dot{w}(x,0) = -0,005 \cdot g_1(x)$ , получены следующие графики:

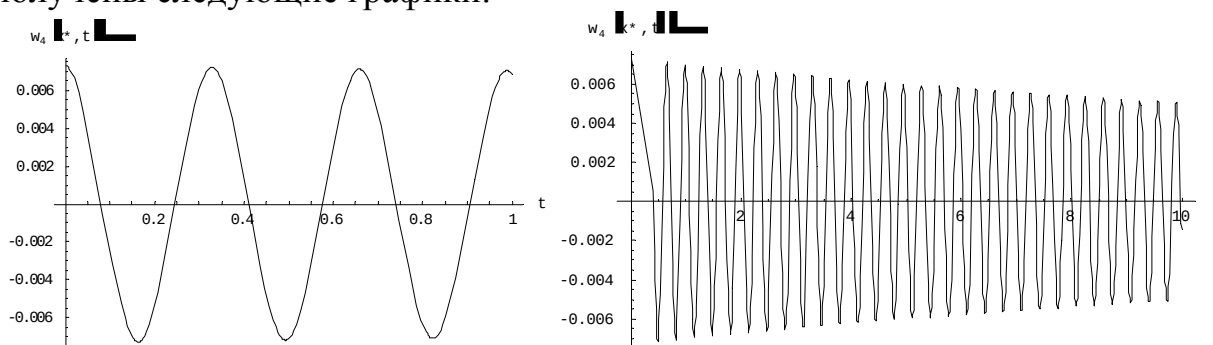


Рис. 8. Деформация пластины в точке  $x_* = 0,4$  (Mathematica)

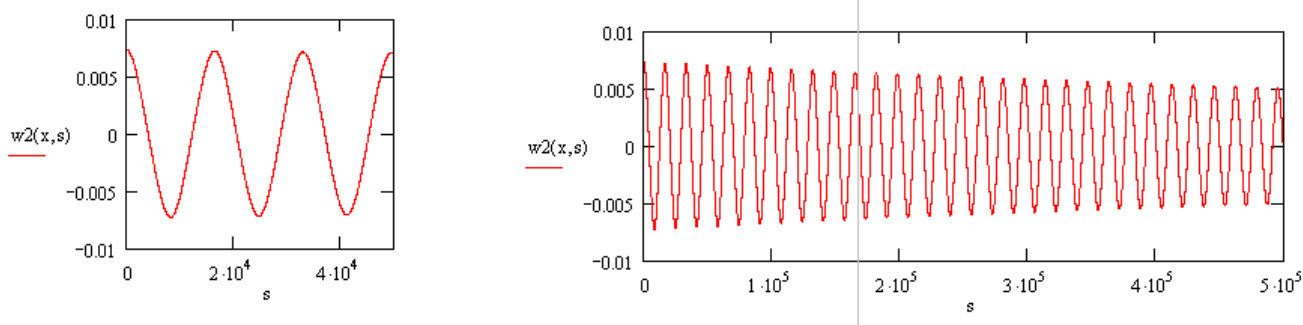


Рис. 9. Деформация пластины в точке  $x_* = 0,4$  (Mathcad)

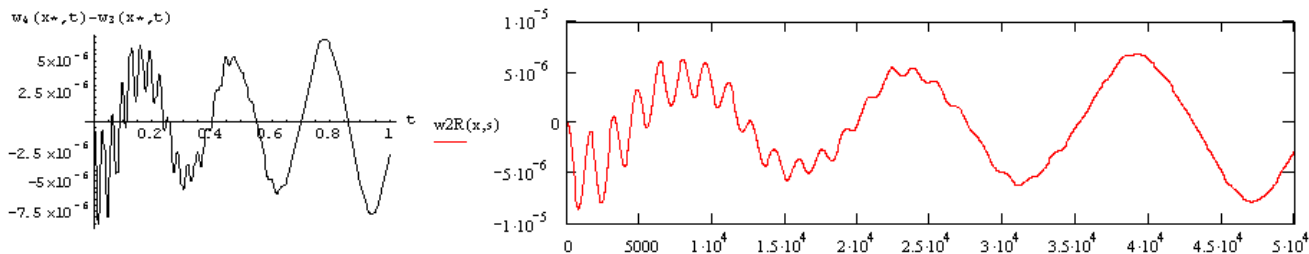


Рис. 10. Разница между четвертым и третьим приближениями (первый соответственно Mathematica, второй – Mathcad)

2) При начальных условиях  $w(x,0) = 0,01 \cdot x^3(l-x)^3$ ,  $\dot{w}(x,0) = -0,005 \cdot x^4(l-x)^4$ , получены следующие графики:



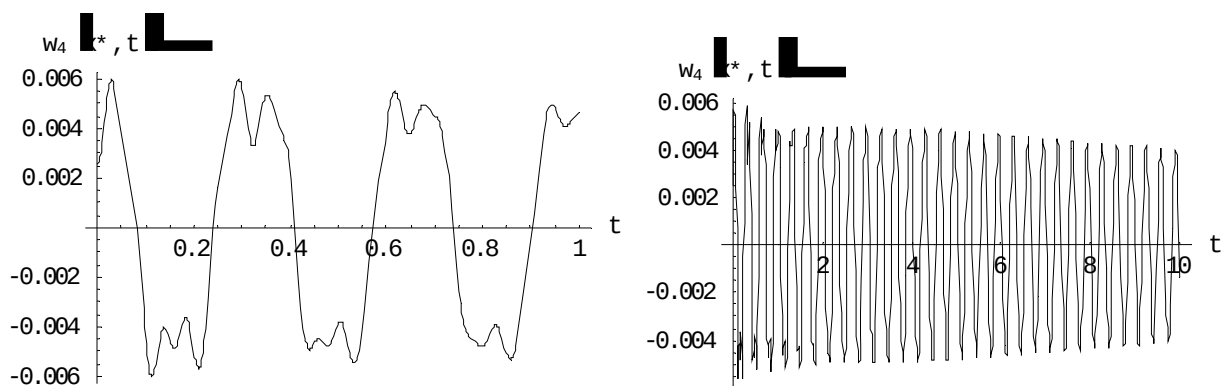


Рис. 11. Деформация пластины в точке  $x_* = 0,4$  (Mathematica)

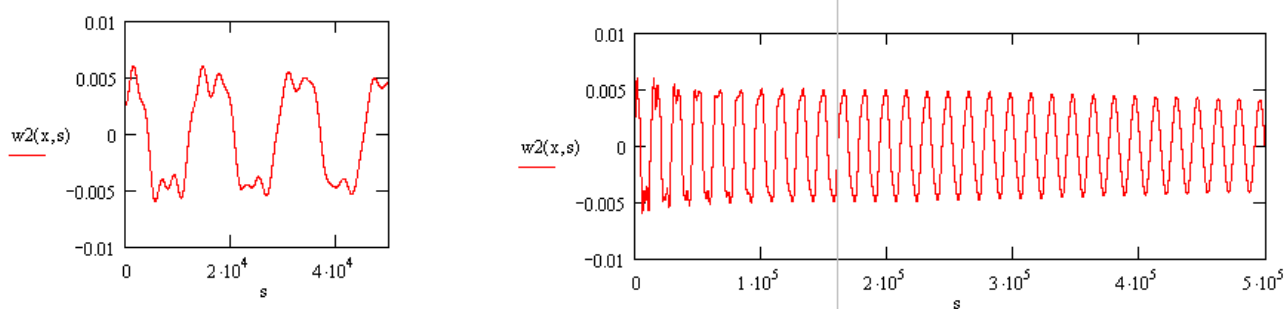


Рис. 12. Деформация пластины в точке  $x_* = 0,4$  (Mathcad)

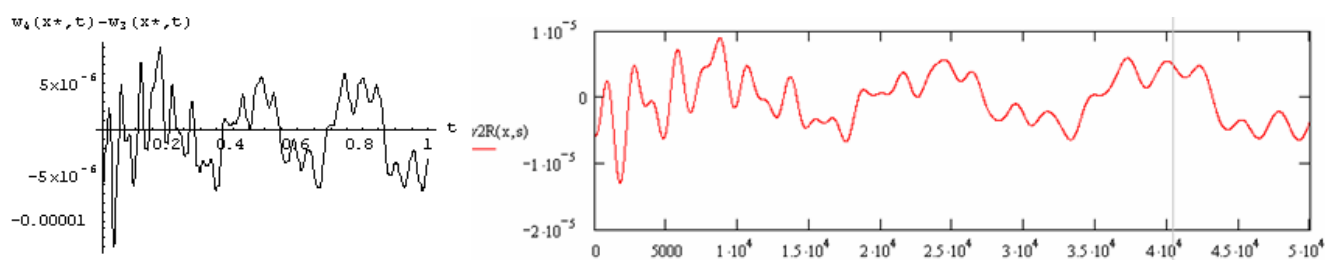


Рис. 13. Разница между четвертым и третьим приближениями (первый соответственно Mathematica, второй – Mathcad)

Как видно из графиков, полученных при помощи Mathematica и Mathcad, результаты исследований практически не отличаются.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – 220 с.
2. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. – М. : Мир, 1988. – 352 с.

*А. Е. Байков* (г. Москва)

## О ПРЕДЕЛЬНОМ ЦИКЛЕ В ОКРЕСТНОСТИ РАВНОВЕСИЯ НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ РЕЗОНАНСЕ 1:2

*В работе рассматриваются механические системы с двумя степенями свободы под действием неконсервативных позиционных сил и малых линейных сил вязкого трения с полной диссипацией. С помощью асимптотических методов построен предельный цикл, существующий при определенных условиях в окрестности изолированного равновесия системы, в случае резонанса 1:2. С точностью до соотношений типа равенства получен критерий асимптотической устойчивости этого цикла. Дана оценка области притяжения предельного цикла в укороченной системе. Проведено исследование колебаний двухзвенной стержневой системы на плоскости при резонансе 1:2.*

### 1. Постановка задачи.

Исследуется голономная механическая система со стационарными идеальными связями под действием неконсервативных позиционных сил и сил вязкого трения, линейно зависящих от скоростей. Уравнения Лагранжа для такой системы имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}, \quad \Phi = \frac{\varepsilon}{2} (\bar{B} \dot{q}, \dot{q}). \quad (1.1)$$

Здесь  $q = (q_1, q_2)^T$  – вектор обобщенных координат,  $T = \frac{1}{2} (A(q) \dot{q}, \dot{q})$  – кинетическая энергия,  $Q = (Q_1, Q_2)^T$  – вектор обобщенных сил, соответствующий неконсервативным позиционным силам в системе,  $\Phi$  – диссипативная функция Релея, квадратичная по скоростям,  $\varepsilon > 0$  – коэффициент вязкого трения, который считается малым параметром. Отображения  $A(q)$ ,  $\Pi(q)$ ,  $Q(q)$  предполагаются аналитическими в окрестности  $q = 0$ . Диссипация полная, поэтому матрица  $\bar{B}$  положительно определена.

Предположим, что система (1.1) обладает изолированным равновесием  $q = \dot{q} = 0$ . При определенных условиях силы трения, сколь угодно малые по величине, могут дестабилизировать равновесие, устойчивое в их отсутствие (так называемый эффект Циглера) [1,2]. Целью настоящей статьи является исследование траекторий в окрестности точки покоя системы (1.1), прежде всего, в условиях эффекта Циглера.

Запишем уравнения (1.1) в явной форме

$$\ddot{q}_j + \left( \Gamma^{(j)} q, \dot{q} \right) = \left( \alpha_j, -\Pi_q + Q - \varepsilon \bar{B} \dot{q} \right), \quad j=1,2. \quad (1.2)$$

Здесь  $\alpha_j$  –  $j$ -ый столбец матрицы  $A^{-1}$ , а элементы симметрической матрицы  $\Gamma^{(j)}$

$$\Gamma_{kl}^{(j)} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 \alpha_{sj} \left( \frac{\partial a_{ks}}{\partial q_l} + \frac{\partial a_{sl}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_s} \right)$$

представляют собой символы Кристоффеля второго рода матрицы  $A$  [3] ( $\alpha_{sj}, a_{ks}$  – элементы матриц  $A^{-1}$  и  $A$  соответственно). Разложим отображения  $A(q), Q(q)$  в окрестности нуля

$$\begin{aligned} A(q) &= \bar{A} + A^{(1)} q_1 + A^{(2)} q_2 + o(|q|), \\ -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q(q) &= \bar{C} q + Q^{(2)} + o(|q|^2), \end{aligned}$$

где вектор  $Q^{(2)}$  состоит из квадратичных относительно  $q$  форм. Перепишем уравнения (1.2), предварительно умножив на  $\bar{A}$ , в виде

$$\bar{A} \ddot{q} + \varepsilon \bar{B} \dot{q} + \bar{C} q + \bar{F}^{(2)} + \varepsilon \bar{G}^{(2)} + \dots = 0. \quad (1.3)$$

Наличие неконсервативных сил в системе приводит к несимметричности матрицы  $\bar{C}$ . Учитывая форму уравнений (1.2), приходим к выводу, что

$$\bar{F}^{(2)} = -Q^{(2)} + \left( A^{(1)} q_1 + A^{(2)} q_2 \right) \bar{A}^{-1} \bar{C} q + \tilde{F}^{(2)}, \quad \tilde{F}_j^{(2)} = \left( \tilde{R}^{(j)} \dot{q}, \dot{q} \right),$$

тогда как

$$\bar{G}^{(2)} = - \left( A^{(1)} q_1 + A^{(2)} q_2 \right) \bar{A}^{-1} \bar{B} \dot{q}.$$

Приведем явные выражения для симметрических матриц  $\tilde{R}^{(j)}$

$$\tilde{R}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{11}^{(2)} \\ a_{11}^{(2)} & 2a_{12}^{(1)} - a_{22}^{(2)} \end{vmatrix}, \quad \tilde{R}^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2a_{12}^{(1)} - a_{11}^{(2)} & a_{22}^{(1)} \\ a_{22}^{(1)} & a_{22}^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим масштабирующую замену  $q = \varepsilon q', \dot{q} = \varepsilon \dot{q}'$ , приводящую (1.3) к квазилинейной системе вида

$$\bar{A} \ddot{q}' + \varepsilon \bar{B} \dot{q}' + \bar{C} q' + \varepsilon \bar{F}^{(2)} + \dots = 0, \quad (1.4)$$

где через многоточие обозначены члены порядка  $\varepsilon^2$  и выше. Порождающая система

$$\bar{A} \ddot{q}' + \bar{C} q' = 0$$

обратима, поэтому устойчивость возможна только в критическом случае, когда характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни. Предположим, что уравнение частот

$$\det(-\omega^2 \bar{A} + \bar{C}) = 0 \quad (1.5)$$

имеет положительные простые корни  $\omega_j^2$ . Приведем систему (1.4) к главным координатам с помощью неособенного линейного преобразования  $q' = Sx$ , отбросим члены порядка выше  $\varepsilon$ , и перейдем к укороченной системе

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \varepsilon B \dot{x} + \varepsilon F^{(2)} = 0. \quad (1.6)$$

Здесь  $\Omega^2 = \text{diag}\{\omega_1^2, \omega_2^2\}$ ,  $B = S^{-1} \bar{B} S$ , функция  $F^{(2)}$  имеет структуру, аналогичную  $\bar{F}^{(2)}$

$$F^{(2)} = (F_1, F_2)^T, \quad F_j = \left( P^{(j)} x, x \right) + \left( R^{(j)} \dot{x}, \dot{x} \right), \quad j=1,2$$

С помощью ортогонального преобразования система (1.4) может быть приведена к такому виду, что  $\bar{A} = I$ ,  $\bar{C} = \text{diag}\{\bar{c}_1, \bar{c}_2\} + P$ , причем  $P$  – кососимметрическая матрица. В этой ситуации преобразующая матрица

$$S = \begin{Bmatrix} P & P \\ -\omega_1^2 + \bar{c}_2 & -\omega_2^2 + \bar{c}_1 \end{Bmatrix},$$

где  $P$  – ненулевой элемент матрицы  $P$ . Пусть  $\bar{P}^{(j)}$  – матрица квадратичной формы по  $x$ , входящей в функцию  $\bar{F}^{(2)}$ . Формулы для вычисления  $P^{(j)}$ :

$$P^{(1)} = \frac{S^T}{\det S} \left( s_{22} \bar{P}^{(1)} - s_{12} \bar{P}^{(2)} \right) S, \quad P^{(2)} = \frac{S^T}{\det S} \left( -s_{21} \bar{P}^{(1)} + s_{11} \bar{P}^{(2)} \right) S,$$

где  $s_{kl}$  – элементы матрицы  $S$ . Для  $R^{(j)}$  формулы аналогичные.

В данной работе рассматриваются системы, у которых матрица  $\bar{C}$  не симметрическая (т.е. неконсервативные силы проявляют себя уже в линейном приближении). В этом случае преобразование  $S$  не будет ортогональным и  $B^T \neq B$ . Симметрическая часть матрицы  $B$  может оказаться знакопеременной, что влечет неустойчивость равновесия системы (1.6). Выясним, когда это может произойти.

Диагональные элементы  $b_j$  матрицы  $B$  вычисляются по формуле

$$b_j = \frac{(-1)^j \text{tr } \bar{B} - (-1)^j h}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \quad h = \bar{c}_1 \bar{b}_2 + \bar{c}_2 \bar{b}_1, \quad j = 1, 2.$$

Без ограничения общности считаем  $\omega_2 > \omega_1$ . В работе [2] показано, что если  $h < \omega_1^2 \text{tr } \bar{B}$  или  $h > \omega_2^2 \text{tr } \bar{B}$  (иными словами,  $b_1 b_2 < 0$ ), то существует  $\varepsilon_0 > 0$ , такое, что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  точка покоя  $q = \dot{q} = 0$  системы (1.1) неустойчива. Этот случай соответствует зоне Циглера (области в пространстве параметров системы, где возникает эффект Циглера).

Наоборот, при  $\omega_1^2 \text{tr } \bar{B} < h < \omega_2^2 \text{tr } \bar{B}$  (т.е.  $b_1 > 0, b_2 > 0$ ) для любого  $\varepsilon > 0$  равновесие системы (1.1) асимптотически устойчиво.

С помощью замены переменных

$$\begin{aligned}x &= \rho_1 e_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 e_2 \cos \varphi_2, \\ \dot{x} &= -\omega_1 \rho_1 e_1 \sin \varphi_1 - \omega_2 \rho_2 e_2 \sin \varphi_2,\end{aligned}\tag{1.7}$$

где  $e_1 = (1, 0)^T$ ,  $e_2 = (0, 1)^T$ ,  $\rho_1 \geq 0$ ,  $\rho_2 \geq 0$  система (1.6) преобразуется к двухчастотной системе вида

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_j &= \frac{\varepsilon}{\omega_j} f_j \sin \varphi_j, \\ \dot{\varphi}_j &= \omega_j + \frac{\varepsilon}{\omega_j \rho_j} f_j \cos \varphi_j, \\ j &= 1, 2,\end{aligned}\tag{1.8}$$

где  $(f_1, f_2)^T = B\dot{x} + F^{(2)}$ . Усредним систему (1.8) по быстрым переменным  $\varphi_j$  в отсутствии резонанса и запишем уравнения для медленных переменных

$$\dot{\rho}_1 = -\frac{\varepsilon}{2} b_1 \rho_1, \quad \dot{\rho}_2 = -\frac{\varepsilon}{2} b_2 \rho_2.\tag{1.9}$$

Система (1.9) имеет единственное равновесие  $\rho_1 = \rho_2 = 0$ , асимптотически устойчивое, если  $b_1 > 0$ ,  $b_2 > 0$ , и неустойчивое в зоне Циглера, когда  $b_1 b_2 < 0$ .

Т.о. в нерезонансной ситуации система (1.8) не обнаруживает новых эффектов по сравнению с линейным приближением. Исследуем резонанс в системе (1.8).

## 2. Исследование резонанса 1:2.

Временное среднее системы (1.8) терпит разрыв, если  $\omega_1 = \omega_2$ ,  $2\omega_1 = \omega_2$  или  $\omega_1 = 2\omega_2$ . Следовательно, перечисленные резонансы и только они проявляют себя в первом приближении метода усреднения.

Исследуем резонанс  $2\omega_1 = \omega_2$  (анализ случая  $\omega_1 = 2\omega_2$  производится аналогично). Обозначим  $\omega_1 = \omega$  и сделаем линейную замену быстрых переменных в системе (1.8), положив  $\varphi = \varphi_1$ ,  $\theta = -2\varphi_1 + \varphi_2$ . В результате получается одночастотная система

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_1 &= \frac{\varepsilon}{\omega} f_1 \sin \varphi, \\ \dot{\rho}_2 &= \frac{\varepsilon}{2\omega} f_2 \sin(2\varphi + \theta), \\ \dot{\theta} &= -\frac{2\varepsilon}{\omega \rho_1} f_1 \cos \varphi + \frac{\varepsilon}{2\omega \rho_2} f_2 \cos(2\varphi + \theta), \\ \dot{\varphi} &= \omega + \frac{\varepsilon}{\omega \rho_1} f_1 \cos \varphi.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Усредним систему (2.1) по быстрой переменной  $\varphi$  и запишем усредненные уравнения для медленных переменных

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_1 &= -\frac{\varepsilon}{2}b_1\rho_1 - \frac{\varepsilon\sigma_1}{2\omega}\rho_1\rho_2\sin\theta, \\ \dot{\rho}_2 &= -\frac{\varepsilon}{2}b_2\rho_2 - \frac{\varepsilon\sigma_2}{8\omega}\rho_1^2\sin\theta, \\ \dot{\theta} &= -\frac{\varepsilon}{2\omega}\left(2\sigma_1\rho_2 + \frac{\sigma_2\rho_1^2}{4\rho_2}\right)\cos\theta,\end{aligned}\tag{2.2}$$

где  $\sigma_2 = \omega^2 r_{11}^{(2)} - p_{11}^{(2)}$ ,  $\sigma_1 = 2\omega^2 r_{12}^{(1)} + p_{12}^{(1)}$ , а  $r_{kl}^{(j)}$ ,  $p_{kl}^{(j)}$  – соответствующие элементы матриц  $R^{(j)}$  и  $P^{(j)}$ . Система (2.2) имеет единственную точку покоя в области, где  $\rho_1 \geq 0$ ,  $\rho_2 \geq 0$ , вычисляемую по формуле

$$\rho_1^* = \left(\frac{4\omega^2 b_1 b_2}{\sigma_1 \sigma_2}\right)^{1/2}, \quad \rho_2^* = \left|\frac{\omega b_1}{\sigma_1}\right|, \quad \theta^* = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{если } b_1 \sigma_1 > 0, \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{если } b_1 \sigma_1 < 0. \end{cases}\tag{2.3}$$

При  $2b_1 + b_2 = 0$  система (2.2) имеет особое многообразие. Последний случай оставляем без рассмотрения. Здесь и далее предполагается, что  $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_2 \neq 0$ .

Исследуем устойчивость равновесия (2.3). Характеристическое уравнение для системы линейного приближения уравнений возмущенного движения имеет вид

$$\left(\lambda^2 + \frac{\varepsilon b_2}{2}\lambda - \frac{1}{2}\varepsilon^2 b_1 b_2\right)\left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2}(2b_1 + b_2)\right) = 0.\tag{2.4}$$

Все корни уравнения (2.4) имеют, отрицательные вещественные части тогда и только тогда, когда  $b_1 < 0$ ,  $b_2 > 0$ ,  $b_1 + b_2/2 > 0$ . Если эти неравенства выполнены, точка (2.3) существует, если  $\sigma_1 \sigma_2 < 0$ . Т.о. необходимые и достаточные (с точностью до соотношений типа равенства) условия существования и асимптотической устойчивости равновесия системы (2.2) имеют вид

$$b_1 < 0, \quad b_2 > 0, \quad 2b_1 + b_2 > 0, \quad \sigma_1 \sigma_2 < 0.\tag{2.5}$$

В исходных параметрах первые три неравенства условий (2.5) дают

$$-2\omega^2 \operatorname{tr} \bar{B} < h < \omega^2 \operatorname{tr} \bar{B},\tag{2.6}$$

что отвечает одной компоненте связности зоны Циглера системы (1.4). Т.о. устойчивое равновесие системы (2.2) может появиться только в зоне Циглера.

*Теорема.* Пусть  $2\omega_1 = \omega_2$ , параметры  $b_j$ ,  $\sigma_j$  удовлетворяют условиям (2.5). Тогда при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  система (1.1) имеет асимптотически устойчивый предельный цикл в окрестности равновесия  $q = \dot{q} = 0$ .

*Доказательство.* Если условия (2.5) выполнены, то система (2.2) имеет асимптотическую устойчивую точку покоя (2.3). Если следовать принципу усреднения, этой точке соответствует периодическое решение системы (1.6)

$$x^*(t) = \rho_1^* e_1 \cos(\omega_1 t) + \rho_2^* e_2 \cos(2\omega_1 t + \theta^*). \quad (2.7)$$

Поскольку корни характеристического уравнения (2.4) имеют в рассматриваемой ситуации отрицательные действительные части, при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  существует предельный цикл системы (1.6), близкий к (2.7) в фазовом пространстве системы (причем расстояние между циклом и его усредненным приближением имеет порядок  $\varepsilon$ ). Более того, можно утверждать существование цикла и в полной системе (1.4) [4,5]. Система (1.4) образовалась после масштабирующей замены в системе (1.2) – явной форме системы (1.1), и, следовательно, система (1.1) имеет цикл в некоторой окрестности равновесия  $q = \dot{q} = 0$ . Теорема доказана.

Если выполнено одно из следующих условий

$$b_1 > 0, b_2 > 0, \sigma_1 \sigma_2 > 0,$$

$$b_1 > 0, b_2 < 0, 2b_1 + b_2 \neq 0, \sigma_1 \sigma_2 < 0,$$

$$b_1 < 0, b_2 > 0, 2b_1 + b_2 < 0, \sigma_1 \sigma_2 < 0,$$

то система (2.2) имеет неустойчивую особую точку. Но т. к. действительные части корней уравнения (2.4) отличны в этом случае от нуля, можно утверждать существования неустойчивого предельного цикла системы (1.5). Заметим, что неустойчивый цикл может быть и в консервативной системе.

Переходим к анализу асимптотической устойчивости точки (2.3) в целом. Условия (2.5) считаются выполненными. Если  $2b_1 + b_2 = 0$ , то система (2.2)

допускает интеграл  $U = \rho_1^2 \rho_2 \cos \theta$ . В общей ситуации  $\dot{U} = -\frac{\varepsilon}{2}(2b_1 + b_2)U$ ,

откуда следует неавтономный интеграл

$$\rho_1^2 \rho_2 \exp \left\{ \frac{\varepsilon}{2}(2b_1 + b_2)t \right\} \cos \theta = U_0 \quad (2.8)$$

системы (2.2). Т. к.  $2b_1 + b_2 > 0$ ,  $U$  монотонно убывает к нулю на каждой траектории при  $t \rightarrow +\infty$ .

Рассмотрим два параметра  $\alpha_j \in (0, \rho_j^*)$ ,  $j = 1, 2$  и область

$$D = \{\rho_1, \rho_2, \theta : \rho_1 > \alpha_1, \rho_2 > \alpha_2, 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

Область  $D$  содержит единственное равновесие системы (2.2) – точку  $u^* = (\rho_2^*, \rho_1^*, \theta^*)^T$ .

Множество  $\dot{U} = 0$  в пересечении с областью  $D$  есть многообразие  $\cos \theta = 0$ , интегральное для системы (2.2.) Функция  $U$  удовлетворяет условиям принципа инвариантности [6], согласно которому предельное множество траекторий из области  $D$  принадлежит многообразию  $\cos \theta = 0$ .

Это многообразие притягивает траектории системы (2.2) из области  $D$ .

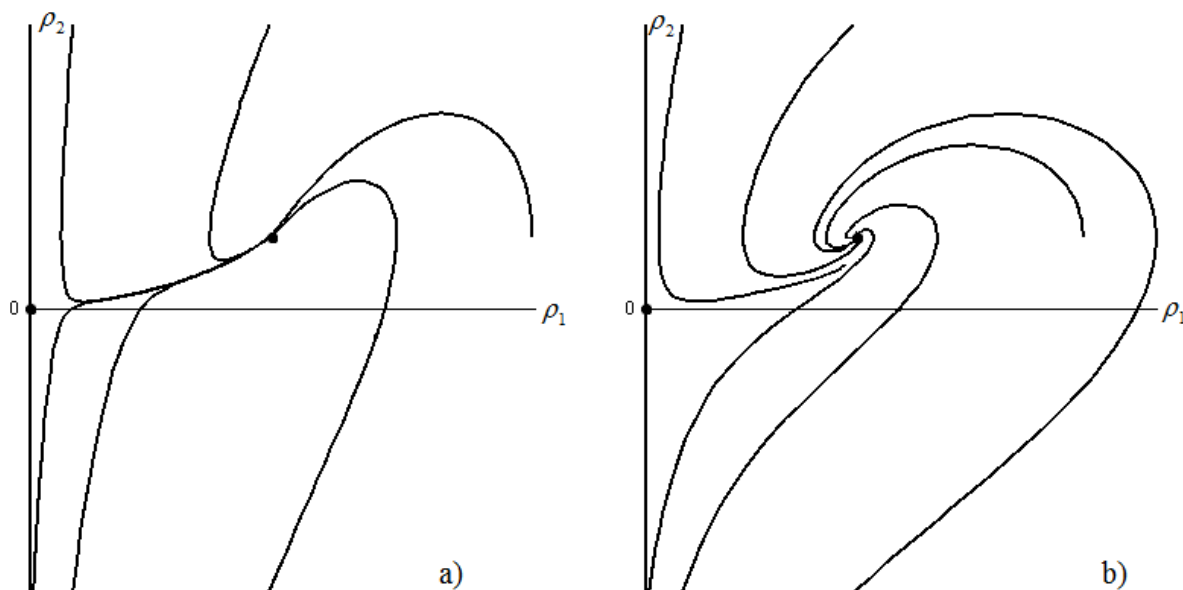


Рис. 1

Рассмотрим систему (2.2) на интегральном многообразии  $\theta = \frac{\pi}{2}$ :

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_1 &= -\frac{\varepsilon}{2}b_1\rho_1 - \frac{\varepsilon\sigma_1}{2\omega}\rho_1\rho_2, \\ \dot{\rho}_2 &= -\frac{\varepsilon}{2}b_2\rho_2 - \frac{\varepsilon\sigma_2}{8\omega}\rho_1^2.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Система (2.9) имеет три особые точки на плоскости: седло  $(0,0)$ , два фокуса  $(\rho_1^*, \rho_2^*)$ ,  $(-\rho_1^*, \rho_2^*)$  (если  $-2b_1 < b_2 < -8b_1$ ) или два узла (если  $b_2 > -8b_1$ ). На рис. 1 изображен фазовый портрет системы в полуплоскости  $\rho_1 \geq 0$  в двух случаях. Поскольку система выдерживает преобразование  $\rho_1 \mapsto -\rho_1$ ,  $\rho_2 \mapsto \rho_2$ , то картина в левой части плоскости симметрична. Видно, что областью притяжения точки  $(\rho_1^*, \rho_2^*)$  служит область  $\rho_1 > 0$ .

Этот результат можно получить аналитически. Т.к.  $b_1 < 0$ ,  $b_2 > 0$ ,  $\rho_2^* > 0$  параметры  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 < 0$ . Функция  $V = -\frac{\sigma_2}{4}(\rho_1 - \rho_1^*)^2 + \sigma_1(\rho_2 - \rho_2^*)^2$  положительно определена, а ее производная в силу уравнений (2.9) отрицательно определена в замкнутой области  $D'$  – проекции области  $D$  на плоскость  $(\rho_1, \rho_2)$ . По теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости равновесие  $\rho_1^*$ ,  $\rho_2^*$  системы (2.9) асимптотически устойчиво с областью притяжения  $D'$ .

Связка  $U(\rho_1, \rho_2, \theta)^2 + V(\rho_1, \rho_2)$ , удовлетворяет теореме Ляпунова об



асимптотической устойчивости точки  $u^*$ . Можно заключить, что траектории из  $D$  притягиваются этой точкой. Параметры  $\alpha_j$  ограничены снизу только нулем, поэтому область

$$D_0 = \{\rho_1, \rho_2, \theta : \rho_1 > 0, \rho_2 > 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

служит областью притяжения точки покоя  $u^*$ . Аналогичные утверждения получаем и для других точек из набора (2.3). Т.о. исследована асимптотическая устойчивость равновесий системы (2.2) в целом.

Область притяжения предельного цикла укороченной системы имеет порядок  $\varepsilon^{-1}$  [7].

### 3. Колебания двухзвенной стержневой системы.

Эффекты, изучаемые в данной статье, рассмотрим на примере двухзвенного механизма, находящегося в горизонтальной плоскости. Аналогичные механические системы рассматривались в работах [2,9-10].

Двухзвенная система, находящаяся в горизонтальной плоскости, состоит из весоных однородных стержней АВ, ВС, массы которых  $m$ . Стержни соединены спиральными пружинами А и В с коэффициентами упругости  $c_1$  и  $c_2$ , соответственно. Следящая сила  $F$  приложена к концу стержня ВС и составляет с ним постоянный угол  $\alpha$ . В шарнирах А, В есть вязкое трение с коэффициентом  $b$  (рис. 2).

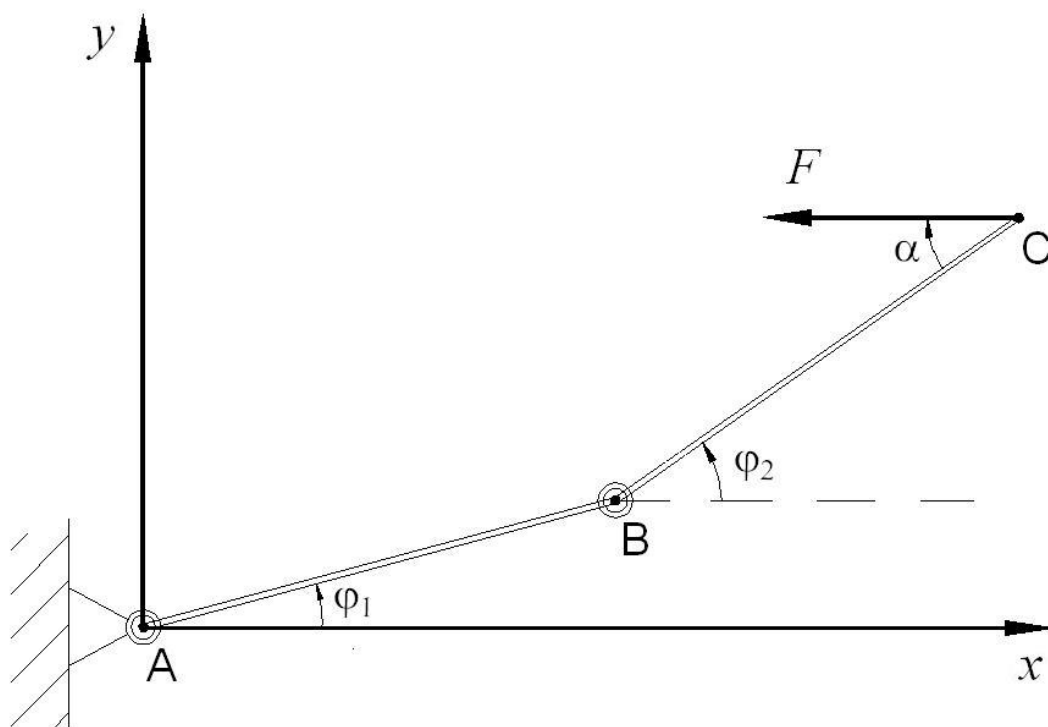


Рис. 2

Введем обобщенные координаты  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_j} + Q_j, \quad j=1,2, \quad (3.1)$$

где

$$T = \frac{m}{6} [4l^2 \dot{\varphi}_1^2 + 3l^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + l^2 \dot{\varphi}_2^2], \quad \Pi = \frac{c_1}{2} \varphi_1^2 + \frac{c_2}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2,$$

$$\Phi = \frac{b}{2} [\dot{\varphi}_1^2 + (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)^2], \quad Q_1 = -Fl \sin(\varphi_2 - \varphi_1 - \alpha), \quad Q_2 = Fl \sin \alpha.$$

Система (3.1) имеет единственное равновесие

$$\varphi_1^* = \frac{1}{\sigma} [\gamma \sin \alpha - \gamma \sin(\gamma \sin \alpha - \alpha)],$$

$$\varphi_2^* = \frac{1}{\sigma} [(\sigma + 1) \gamma \sin \alpha - \gamma \sin(\gamma \sin \alpha - \alpha)]$$

( $\gamma = \frac{Fl}{c_2}$ ,  $\sigma = \frac{c_1}{c_2}$  – безразмерные параметры). Введем возмущения

$$\varphi_1 = \varphi_1^* + \beta_1, \quad \varphi_2 = \varphi_2^* + \beta_2$$

и обезразмерим уравнения возмущенного движения, рассматривая в качестве единицы измерения угловых переменных один радиан, а в качестве единицы измерения времени – характерное значение  $T_* = \sqrt{ml^2 c_2^{-1}}$ . Кроме этого введем новые параметры  $u$  и  $v$  по формуле

$$u = \gamma \sin \alpha, \quad v = \gamma \cos \alpha.$$

Уравнения возмущенного движения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \ddot{\beta}_1 + \frac{1}{2} \cos(\beta_2 - \beta_1 + u) \ddot{\beta}_2 - \frac{1}{2} \sin(\beta_2 - \beta_1 + u) \dot{\beta}_2^2 = \\ = -(1 + \sigma) \beta_1 + \beta_2 + \varepsilon (\dot{\beta}_2 - 2\dot{\beta}_1) + [1 - \cos(\beta_2 - \beta_1)] \\ (v \sin u - u \cos u) - \sin(\beta_2 - \beta_1) (v \cos u + u \sin u) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cos(\beta_2 - \beta_1 + u) \ddot{\beta}_1 + \frac{1}{3} \ddot{\beta}_2 + \frac{1}{2} \sin(\beta_2 - \beta_1 + u) \dot{\beta}_1^2 = \\ = \beta_1 - \beta_2 + \varepsilon (\dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_2). \end{aligned}$$

Здесь  $\varepsilon = \frac{b}{l\sqrt{mc_2}}$ , точкой теперь обозначена производная по

безразмерному времени. Запишем систему линейного приближения для (3.2) в векторно-матричной форме

$$\bar{A} \ddot{\beta} + \varepsilon \bar{B} \dot{\beta} + \bar{C} \beta = 0, \quad (3.3)$$

где

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{2}\cos u \\ \frac{1}{2}\cos u & \frac{1}{3} \end{vmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\bar{C} = \begin{vmatrix} 1 + \sigma - v\cos u - u\sin u & -1 + v\cos u + u\sin u \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для (3.3) имеет вид

$$\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{4}\cos^2 u\right)\lambda^4 + \varepsilon(2 + \cos u)\lambda^3 + \kappa\lambda^2 + \varepsilon(\sigma + 1)\lambda + \sigma = 0,$$

$$\kappa = -(v\cos u + u\sin u)\left(\frac{1}{2}\cos u + \frac{1}{3}\right) + \cos u + \frac{5 + \sigma}{3} + \varepsilon^2.$$

Пусть уравнение частот

$$\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{4}\cos^2 u\right)\omega^4 - \kappa_0\omega^2 + \sigma = 0 \quad (3.4)$$

( $\kappa_0$  – значение  $\kappa$  при  $\varepsilon = 0$ ) имеет простые положительные корни  $\omega_j^2$ , причем  $\omega_2 = 2\omega_1$ . Соотношение  $\omega_2 = 2\omega_1$  выполнено только в том случае, если

$$\kappa_0 = \frac{5\sqrt{\sigma}}{2}\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{4}\cos^2 u\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

Условия устойчивости (3.3) при  $\varepsilon = 0$  имеют вид

$$\omega_*^2 = \frac{\kappa_0}{2\det \bar{A}} > 0, \quad \frac{\sigma}{\det \bar{A}} > 0, \quad \Delta_0(\omega_*^2) > 0,$$

что равносильно  $\kappa_0 > 2\sqrt{\sigma}\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{4}\cos^2 u\right)^{\frac{1}{2}}$ . Легко видеть, что (3.5)

удовлетворяет эту неравенству, и поэтому резонансная кривая лежит в области устойчивости.

Из характеристического уравнения следует, что  $h = \frac{\sigma + 1}{\det \bar{A}}$ . Условие (2.6) в рассматриваемой системе эквивалентно

$$\frac{h}{\text{tr } \bar{B}} < \omega_*^2, \quad \Delta_0\left(\frac{h}{\text{tr } \bar{B}}\right) > 0$$

или

$$\frac{\sigma + 1}{2 + \cos u} < \frac{\kappa_0}{2\det \bar{A}}, \quad \det \bar{A}\left(\frac{\sigma + 1}{2 + \cos u}\right)^2 - \kappa_0 \frac{\sigma + 1}{2 + \cos u} + \sigma > 0.$$

Наконец, с учетом (3.5), получаем двойное неравенство

$$2(\sigma+1)f(u) < 2.5\sqrt{\sigma} < (\sigma+1)f(u) + \frac{\sigma}{\sigma+1} \frac{1}{f(u)}, \quad (3.6)$$

$$f(u) = \frac{\sqrt{\det \bar{A}}}{2 + \cos u}.$$

Условие (3.5) также можно переписать в следующем виде

$$v = -u \operatorname{tgu} + \frac{6}{3\cos u + 2} + \frac{10 + 2\sigma - 15\sqrt{\sigma} \det \bar{A}}{\cos u(3\cos u + 2)}, \quad (3.7)$$

если  $\cos u \neq -\frac{2}{3}$ . На рис. 3 показана кривая (3.7) при  $\sigma = 1$  (для других значений  $\sigma > 0$  резонансные кривые не сильно отличаются от изображенной). На рис. 4 штрихом показана область – решение неравенства (3.6). Но т.к.  $f(u)$  –  $2\pi$ -периодическая функция, такие же области повторяются со сдвигом  $u \mapsto u + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

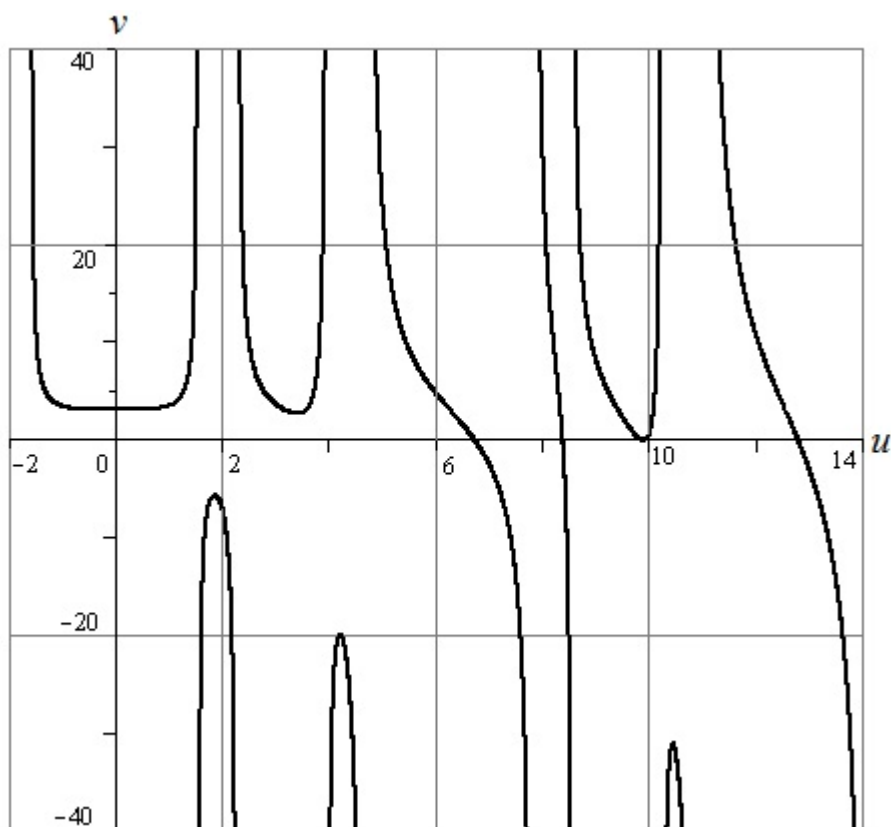


Рис. 3

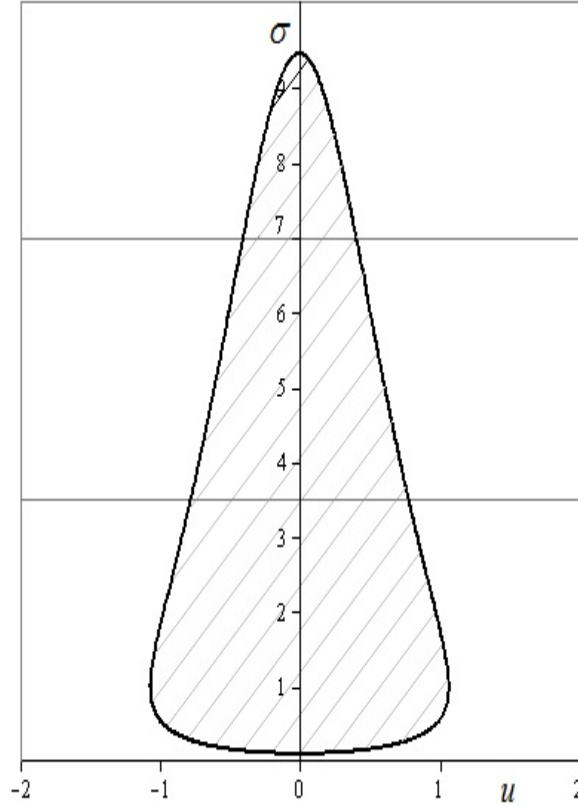


Рис. 4

Осталось проверить неравенство  $\sigma_1 \sigma_2 < 0$  из списка (2.5), чтобы утверждать существование и устойчивость предельного цикла в системе (3.2). Матрица  $S$ , осуществляющая переход к главным координатам в системе (3.3), имеет вид

$$S = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}\omega_1^2 + 1 & -\frac{1}{3}\omega_2^2 + 1 \\ \frac{1}{2}\cos u \cdot \omega_1^2 + 1 & \frac{1}{2}\cos u \cdot \omega_2^2 + 1 \end{vmatrix}.$$

Ее определитель  $\det S = \frac{1}{2} \left( \cos u + \frac{2}{3} \right) (\omega_1^2 - \omega_2^2) \neq 0$ , если  $\cos u \neq -\frac{2}{3}$ ,  $\omega_1 \neq \omega_2$ . Предположим, что последние условия выполнены. С учетом резонансного соотношения (3.5), частота  $\omega_1$  вычисляется по формуле

$$\omega_1^2 = \frac{\sqrt{\sigma}}{2\sqrt{\det \bar{A}}}.$$

Для системы (3.2)  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  имеют следующий вид:  $\sigma_j = \sigma f_j(\sqrt{\sigma}, u)$ ,  $j=1,2$ , причем  $f_j(\sqrt{\sigma}, u)$  – квадратичные относительно  $\sqrt{\sigma}$  функции, коэффициенты которых зависят от  $u$ . Мы не приводим выражения для этих коэффициентов из-за их громоздкости.

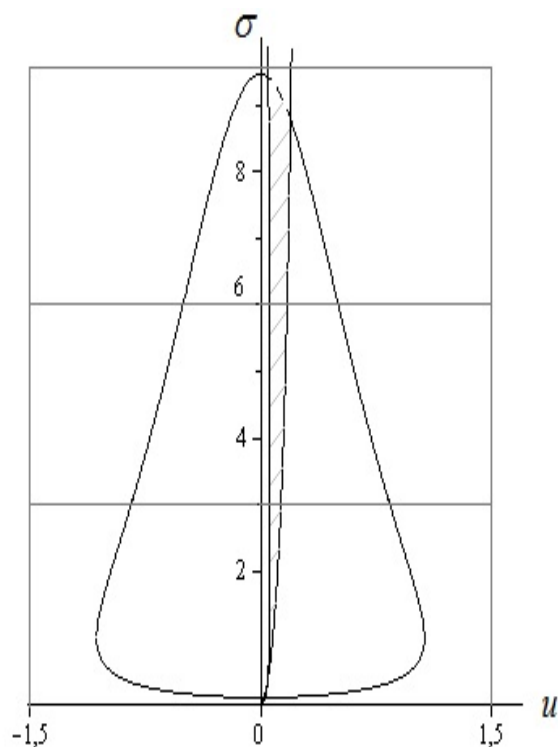


Рис. 5

Можно построить кривые  $f_j(\sqrt{\sigma}, u) = 0$  и отметить области, в которых  $f_1(\sqrt{\sigma}, u) \cdot f_2(\sqrt{\sigma}, u) < 0$ . Пересечение этих областей с решением неравенства (3.6) и дает области в плоскости параметров  $(u, \sigma)$ , где система (3.2) имеет устойчивый предельный цикл в окрестности равновесия  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ . На рис. 5 штрихом показана область, где условие  $f_1 \cdot f_2 < 0$  нарушено.

Построим предельный цикл для следующих значений параметров:  $u = 0$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\nu = 3$ ,  $\varepsilon = 0.05$  (следящая сила  $F$  направлена вдоль стержня ВС). Условия (2.5) существования и устойчивости предельного цикла выполнены. На фиг. 6 изображен результат интегрирования системы (3.2), преобразованной к главным координатам  $x$  с помощью матрицы  $S$ . Начальные условия выбраны произвольно; на фиг. 6 показан результат после  $t \sim 100$  в проекции на плоскость  $(x_1, x_2)$ .

Предельный цикл имеет вид «восьмерки», к которой асимптотически при  $t \rightarrow +\infty$  стремятся фазовые кривые. На начальном этапе движение фазовой точки иррегулярно и на фигуре не изображено. Расчеты показывают, что на больших временах фазовая кривая принадлежит малой окрестности многообразия, задаваемого многообразием  $\cos \theta = 0$  в фазовом пространстве усредненной системы.

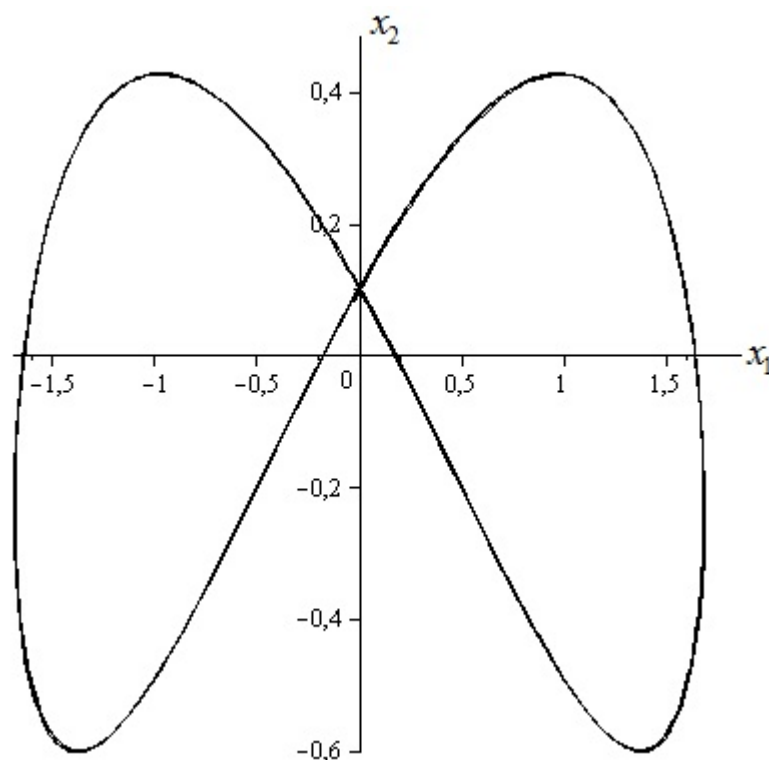


Рис. 6

Автор благодарит Красильникова П. С. за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ziegler H. Die Stabilitätskriterien der Alastomechanik //Ing. Arch. 1952. Bd. 20. – Н 1. –Р. 46-56.
2. Байков А. Е., Красильников П. С. Об эффекте Циглера в неконсервативной механической системе // ПММ, 2010. – Т. 74, Вып. 1. – С. 74-88.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 824 с.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974.
5. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». – Т. 3. – М.: ВИНТИ, 1985.
6. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 299 с.
7. Sanders J. A., Verhulst F. Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems. – Springer-Verlag New York Inc., 1985.
8. Пановко Я. Г. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1985. – 287 с.
9. Krasilnikov P. An a discrete model of the elastic rod // Intern. J. Nonlinear Sci. and Numer. Simulation, 2001. – № 2. – P. 295-298.

А. Ю. Блинкова, С. В. Иванов, И. А. Ковалева (г. Саратов)

## ОЦЕНКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С УПРУГИМИ СТЕНКАМИ ТРУБЫ КРУГОВОГО И КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 10-01-00177а

*В современном приборо- и машиностроении одними из распространенных элементов являются трубопроводы кругового и кольцевого сечения. Для абсолютно жесткой трубы с круговым сечением ламинарное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием гармонического по времени перепада исследовано в [1]. Для трубы - упругой цилиндрической оболочки - проведено аналогичное исследование в случае кругового сечения в [2]. Настоящее исследование посвящено анализу и оценке взаимодействия вязкой несжимаемой жидкости в случаях кругового и кольцевого сечения с упругими стенками, по которым распространяются волны деформации [11,12].*

1. Рассмотрим бесконечно длинную упругую цилиндрическую оболочку, внутри которой находится вязкая несжимаемая жидкость.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат  $r, \vartheta, x$  записываются в случае осесимметричного течения в виде [6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На границе с оболочкой выполняются условия прилипания жидкости

$$V_r = -\frac{\partial W}{\partial t}, \quad V_x = \frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{при } r = R_1 - W. \quad (2)$$

Здесь  $t$  – время;  $V_r, V_x$  – проекции вектора скорости на оси цилиндрической системы координат;  $p$  – давление;  $\rho$  – плотность;  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости;  $U$  – продольное упругое перемещение оболочки по оси  $x$ ;  $W$  – прогиб оболочки, положительный к центру кривизны;  $R_1$  – внутренний радиус оболочки.



Записывая уравнения движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Кирхгофа-Лява, считаем материал физически линейно-упругим

$$\sigma_1 = E e_1 \quad (3)$$

Здесь  $\sigma_1$  – интенсивность напряжений,  $E$  – модуль Юнга,  $e_1$  – интенсивность деформаций.

Уравнение динамики геометрически нелинейной оболочки с учетом (3) записываются в виде

$$\begin{aligned} & \frac{E h_0}{1 - \mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{h_0^2}{24} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 - \mu_0 \frac{W}{R} \right\} - \\ & - \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -q_x, \\ & \frac{E h_0}{1 - \mu_0^2} \left\langle \frac{h_0^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \left( 1 + \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] - \frac{\mu_0}{R} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{W}{R^2} \right\rangle + \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = q_n. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $q_x, q_n$  – напряжения со стороны жидкости, находящиеся внутри оболочки;  $\rho_0$  – плотность материала оболочки;  $\mu_0$  – коэффициент Пуассона;  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки;  $h_0$  – толщина оболочки ( $h_0 = 2(R - R_1)$ );  $\sqrt{E/[\rho_0(1 - \mu_0^2)]} = c_0$  – скорость звука в материале оболочки.

Поверхностные напряжения со стороны жидкости определяются формулами

$$\begin{aligned} q_x &= \left[ P_{rx} \cos \left( \overline{\hat{n}, \hat{n}_r} \right) + P_{xx} \cos \left( \overline{\hat{n}, \hat{n}_i} \right) \right] \Big|_{r=R_1-W}, \\ q_n &= \left[ P_{rr} \cos \left( \overline{\hat{n}, \hat{n}_r} \right) + P_{rx} \cos \left( \overline{\hat{n}, \hat{n}_i} \right) \right] \Big|_{r=R_1-W}, \\ P_{rr} &= -p + 2\rho v \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad P_{rx} = 2\rho v \left( \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right), \\ P_{xx} &= -p + 2\rho v \frac{\partial V_x}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5)$$

В подходе Эйлера здесь имеем

$$\cos \left( \overline{\hat{n}, \hat{n}_r} \right) = \frac{R_1 - W}{|\overline{N}|}, \quad \cos \left( \overline{\hat{n}, \hat{n}_i} \right) = -\frac{R_1 - W}{|\overline{N}|} \frac{\partial W}{\partial x}, \quad |\overline{N}| = (R_1 - W) \left( 1 + \frac{\partial W}{\partial x} \right).$$

При этом  $\bar{n}$  – нормаль к срединной поверхности оболочки  $\bar{n}_r$ ,  $\bar{n}_i$  – орты базиса  $(r, \vartheta, x)$  цилиндрической системы координат, центр которой расположен на оси оболочки.

Если снять напряжения на невозмущенную поверхность оболочки ( $W \ll R_1$ ), то можно считать  $\bar{n} = \bar{n}_r$  и  $\cos\left(\bar{n}, \bar{n}_r\right) = 1$ ,  $\cos\left(\bar{n}, \bar{n}_i\right) = 0$ .

2. Принимая за характерную длину  $l$  – длину волны, перейдем к безразмерным переменным для исследования уравнений (4)

$$W = w_m u_3, \quad U = u_m u_1, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1 - \mu_0^2)}} \quad (6)$$

Положим

$$\begin{aligned} \frac{w_m}{u_m} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right), \quad \frac{h_0}{l} = O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right), \quad \frac{w_m}{l} = O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right), \quad \frac{w_m}{R} = O(\varepsilon), \\ \frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1), \quad \frac{w_m l}{u_m R} = O(1), \quad \frac{R}{l} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right), \quad \frac{h_0}{R} = O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр в задаче (4).

Применим метод сращиваемых асимптотических разложений, вводя независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct, \quad \tau = \varepsilon t^*, \quad (8)$$

где  $c$  – безразмерная неизвестная скорость волны,  $\tau$  – внутренняя переменная, а зависимые переменные в виде разложения по малому параметру  $\varepsilon$

$$u_1 = u_{10} + \varepsilon u_{11} + \dots, \quad u_3 = u_{30} + \varepsilon u_{31} + \dots \quad (9)$$

Подставляя (6),(7),(9) в уравнения (4) с учетом оценок (7), получим в нулевом приближении по  $\varepsilon$  линейную систему уравнений

$$\begin{aligned} -\mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} + \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} \frac{\partial u_{30}}{\partial \xi} - c^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} = 0, \end{aligned}$$

из которой следует связь

$$\frac{w_m l}{u_m R} u_{30} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \quad (10)$$

и определяется безразмерная скорость волны

$$c^2 = 1 - \mu_0^2 \quad (11)$$

Из следующего приближения по  $\varepsilon$ , учитывая (10) и (11), находится уравнение для  $u_{10}$ , являющееся составным:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m}{l\varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} = \\ = \frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2} \left[ q_x - \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

В случае отсутствия жидкости правая часть уравнения (12) равна нулю и получается известное уравнение – модифицированное уравнение Кортевега-де Вриза-Бюргера для

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = \frac{1}{\mu_0} \frac{w_m l}{u_m R} u_{30}.$$

3. Для определения правой части уравнения (12) введем безразмерные переменные параметры

$$\begin{aligned} V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r, \quad V_x = w_m \frac{c_0}{R_1} v_x, \quad r^* = \frac{r}{R_1}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \\ p = \frac{\rho \nu c_0 l w_m}{R_1^3} P; \quad \psi = \frac{R_1}{l} = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right), \quad \lambda = \frac{w_m}{R_1} = O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя (13) в уравнение гидродинамики (1) и граничные условия (2), представим безразмерные скорости и давление в виде разложения по малому параметру  $\lambda$

$$v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots, \quad P = P^0 + \lambda P^1 + \dots \quad (14)$$

В нулевом приближении по  $\psi$  ( $\psi = 0$  – гидродинамическая теория смазки), считая  $\psi \frac{R_1 c_0}{\nu} \ll 1$  (предположение, используемое в ползущих течениях [9,10]), в нулевом приближении по  $\lambda$  получаем уравнения гидродинамики (классические уравнения гидродинамической теории смазки)

$$\frac{\partial p^0}{\partial r^*} = 0; \quad \frac{\partial p^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right); \quad \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \quad (15)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} r^* \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = 0, \quad r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 0 \text{ при } r^* = 0, \\ v_r^0 = -\frac{\partial u_3}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = -\frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial t^*} \text{ при } r^* = 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Из решения задачи (15), (16) следует, что

$$P^0 = 16 \int \left[ \frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial t^*} - \int \frac{\partial u_3}{\partial t^*} dx^* \right] dx^*,$$

$$\left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = \frac{r^*}{2} \cdot \left. \frac{\partial p^0}{\partial x^*} \right|_{r^*=1} = 8 \left[ \frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial t^*} - \int \frac{\partial u_3}{\partial t^*} dx^* \right] \quad (17)$$

Учитывая, что были введены переменные (8), (9), и имея соотношения (10), (11), из (17) получим

$$P^0 = 8 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m R_1}{w_m l} \left[ 2 \mu_0 \frac{R}{R_1} - 1 \right] u_{10},$$

$$\left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = 4 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m R_1}{w_m l} \left[ 2 \mu_0 \frac{R}{R_1} - 1 \right] \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \quad (18)$$

С принятой точностью по  $\varepsilon, \psi, \lambda$  из (5) найдем

$$q_x = \lambda \frac{\nu}{R_1 c_0} \rho c_0^2 \left. \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right|_{r^*=1}, \quad q_n = -\frac{\lambda}{\psi} \frac{\nu}{R_1 c_0} \rho c_0^2 P^0,$$

и, следовательно, выражение в правой части уравнения (12) принимает вид

$$q_x - \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} = -4 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\nu}{R_1 c_0} \rho c_0^2 \frac{u_m}{l} \left[ 1 - \left( 2 \mu_0 \frac{R}{R_1} \right)^2 \right] \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в уравнение (12) окончательно получим, считая с принятой точностью  $R_1 = R + O(\varepsilon)$

$$\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m}{l \varepsilon} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} -$$

$$- 2 \left[ 1 - (2 \mu_0)^2 \right] \frac{\rho l \nu}{\rho_0 h_0 \varepsilon R_1 c_0} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = 0. \quad (20)$$

Используя соотношение (10), уравнение (20) можно записать в виде

$$\frac{\partial u_{30}}{\partial \tau} + \frac{w_m}{R \varepsilon} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2 \mu_0} u_{30} \frac{\partial u_{30}}{\partial \xi} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^3 u_{30}}{\partial \xi^3} -$$

$$- 2 \left[ 1 - (2 \mu_0)^2 \right] \frac{\rho l \nu}{\rho_0 h_0 \varepsilon R_1 c_0} u_{30} = 0$$

Легко видеть, что замена

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = c \varphi, \quad \eta = c_1 \xi; \quad t = c_2 \tau \quad (21)$$

позволяет записать уравнение (20) в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 6 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} - \sigma \varphi = 0. \quad (22)$$

Здесь  $\sigma = +1$  (при  $\mu_0 < 1/2$  – неорганические материалы),  $\sigma = -1$  (при  $\mu_0 > 1/2$  – живые организмы). В случае  $\sigma = 0$  ( $\mu_0 = 1/2$  – резина), последнее слагаемое выпадает, так что жидкость не оказывает влияния на волну деформации.

Постоянные  $c, c_1, c_2$  определяются при подстановке (21) в (20) и имеют вид

$$c_2 = +2 \left[ 1 - (2\mu_0)^2 \right] \frac{\rho l v}{\rho_0 h_0 \varepsilon R_1 c_0} \text{ при } \mu_0 < \frac{1}{2},$$

$$c_2 = -2 \left[ 1 - (2\mu_0)^2 \right] \frac{\rho l v}{\rho_0 h_0 \varepsilon R_1 c_0} \text{ при } \mu_0 > \frac{1}{2},$$

$$c_1 = \left[ c_2 \varepsilon \left( \frac{l}{R} \right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad c = 6 \frac{R^2}{l u_m} \mu_0^2 c_1^2.$$

4. Обозначим через  $C_+, C_-$  постоянные значения, к которым асимптотически стремится искомая функция  $\phi$  при  $t = 0$  и  $\eta \rightarrow +\infty, \eta \rightarrow -\infty$  соответственно:

$$\phi \rightarrow C_{\pm}, \left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^3 \phi}{\partial \eta^3} \rightarrow 0 \right) \text{ при } \eta \rightarrow \pm\infty, t = 0. \quad (23)$$

Из уравнения (22) с начальными условиями (23) следуют нестационарные граничные условия на бесконечности

$$\phi \rightarrow C_{\pm} e^{\sigma t}, \left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^3 \phi}{\partial \eta^3} \rightarrow 0 \right) \text{ при } \eta \rightarrow \pm\infty, t \geq 0. \quad (24)$$

Умножим уравнение (22) на искомую функцию и приведем уравнение к дивергентной форме

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \phi^2 + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ 2\phi^3 + \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)^2 \right] - \sigma \phi^2 = 0. \quad (25)$$

Снесем граничные условия из бесконечности на концы отрезка  $[a, b]$  и введем норму искомой функции на временном слое

$$\|\phi\|^2 = \int_a^b \phi^2(\eta, t) d\eta. \quad (26)$$

Взяв интеграл от уравнения (25) в пределах  $a, b$ , и учитывая граничные условия (24), получим дифференциальное уравнение для квадрата нормы

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\phi\|^2 + 2(C_+^3 - C_-^3) e^{3\sigma t} - \sigma \|\phi\|^2 = 0. \quad (27)$$

Отсюда получается явная зависимость нормы искомой функции от времени:

$$\|\varphi\|^2 = e^{2\sigma t} \left[ C_0^2 + \frac{4}{\sigma} (C_+^3 - C_-^3) (1 - e^{\sigma t}) \right], \quad C_0^2 = \|\varphi\|_{t=0}^2. \quad (28)$$

Оценка (28) может быть использована для интегрального контроля точности численного решения рассматриваемой задачи.

**5.** Рассмотрим бесконечно длинные соосные упругие цилиндрические оболочки, между которыми находится вязкая несжимаемая жидкость.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнения неразрывности в цилиндрической системе координат  $r, \vartheta, x$  записываются в случае осесимметричного течения в виде (1).

На границах с оболочками выполняются условия прилипания жидкости ( $i=1,2$ )

$$v_r = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}, v_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} \quad \text{в } r = R_i - W^{(i)}. \quad (29)$$

Здесь  $t$  – время;  $v_r, v_x$  – проекции вектора скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат;  $U^{(i)}$  – продольное упругое перемещение оболочек по оси  $x$ ;  $W^{(i)}$  – прогиб, положительный к центру кривизны оболочки;  $R_1$  – внутренний радиус внешней оболочки;  $R_2$  – внешний радиус внутренней оболочки ( $R_1 = R_2 + \delta$ );  $\delta$  – толщина слоя жидкости в кольцевом сечении трубы; индекс  $i=1$  относится к внешней, а  $i=2$  – к внутренней оболочке.

Записывая уравнения движения элемента цилиндрических оболочек в перемещениях для модели Кирхгофа-Ляве, считаем материал физически линейно-упругим

$$\sigma_1 = E e_1 \quad (30)$$

Здесь  $\sigma_1$  – интенсивность напряжений,  $E$  – модуль Юнга,  $e_1$  – интенсивность деформаций.

Уравнения динамики геометрически нелинейных оболочек с учетом (30) записываются в виде

$$\begin{aligned} & \frac{E^{(i)} h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^{(i)2}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{h_0^{(i)2}}{24} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 - \right. \\ & \quad \left. - \mu_0^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right\} - \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} = -q_x^{(i)}, \\ & \frac{E^{(i)} h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^{(i)2}} \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \left( 1 + \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right) \right] - \frac{\mu_0^{(i)}}{R^{(i)}} \left\{ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} + \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right\rangle + \rho_0^{(i)} h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} = q_n (-1)^{i-1} \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь  $q_x^{(i)}, q_n$  – напряжения со стороны жидкости, находящейся внутри кольцевого сечения;  $\rho_0^{(i)}$  – плотности материала оболочек;  $\mu_0^{(i)}$  – коэффициенты Пуассона;  $R^{(i)}$  – радиусы срединных поверхностей оболочек;  $h_0^{(i)}$  – толщины оболочек  $(h_0^{(1)}/2 = R^{(1)} - R_1, h_0^{(2)}/2 = R_2 - R^{(2)})$ ;  $c_0^{(i)} = \sqrt{E^{(i)} / [\rho_0^{(i)}(1 - \mu_0^{(i)2})]}$  – скорости звука в материалах оболочек.

Поверхностные напряжения со стороны жидкости определяются формулами

$$\begin{aligned} q_x^{(i)} &= \left[ P_{rx} \cos \left( \hat{\bar{n}}^{(i)}, \bar{n}_r \right) + P_{xx} \cos \left( \hat{\bar{n}}^{(i)}, \bar{n}_i \right) \right]_{r=R_i - W^{(i)}}, \\ q_n &= \left[ P_{rr} \cos \left( \hat{\bar{n}}^{(i)}, \bar{n}_r \right) + P_{rx} \cos \left( \hat{\bar{n}}^{(i)}, \bar{n}_i \right) \right]_{r=R_i - W^{(i)}}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$P_{rr} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad P_{rx} = \rho\nu \left( \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right), \quad P_{xx} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial v_x}{\partial x}.$$

В подходе Эйлера здесь имеем

$$\begin{aligned} \cos \left( \hat{\bar{n}}^{(i)}, \bar{n}_r \right) &= \frac{R_i - W^{(i)}}{|\bar{N}|}, \quad \cos \left( \hat{\bar{n}}^{(i)}, \bar{n}_i \right) = -\frac{R_i - W^{(i)}}{|\bar{N}|} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}, \\ |\bar{N}| &= (R_i - W^{(i)}) \left( 1 + \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

При этом  $\bar{n}^{(i)}$  – нормаль к срединной поверхности оболочек;  $\bar{n}_r, \bar{n}_i$  – орты базиса  $(r, \vartheta, x)$  цилиндрической системы координат, центр которой расположен на оси оболочек.

Если снести напряжения на невозмущенную поверхность оболочек  $(W^{(i)} \ll R_i)$ , то можно считать

$$\bar{n}^{(i)} = \bar{n}_r, \quad \cos \left( \hat{\bar{n}}^{(i)}, \bar{n}_r \right) = 1, \quad \cos \left( \hat{\bar{n}}^{(i)}, \bar{n}_i \right) = 0.$$

**6.** Принимая за характерную длину – длину волны  $l$ , и считая, что соосные оболочки изготовлены из одного материала, то есть, опуская индекс  $i$  у  $E, \rho_0, \mu_0$ , перейдем к безразмерным переменным для исследования уравнений (32)

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1 - \mu_0^2)}}, \quad (33)$$

Положим

$$\begin{aligned} \frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1), \quad \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} = O(1), \quad \frac{R^{(i)}}{l} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = O(\varepsilon), \\ \frac{w_m}{u_m} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \frac{h_0^{(i)}}{l} = O(\varepsilon^{3/2}), \quad \frac{w_m}{l} = O(\varepsilon^{3/2}), \quad \frac{w_m}{R^{(i)}} = O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (34)$$

где  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр в задаче (32).

Применим метод сращиваемых асимптотических разложений, вводя независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \quad (35)$$

где  $c$  – безразмерная неизвестная скорость волны,  $\tau$  – внутренняя переменная, а зависимые переменные представлены в виде разложения по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots, \quad u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots \quad (36)$$

Подставляя (33), (34), (36) в уравнения (31) с учетом оценок (34), получим в нулевом приближении по  $\varepsilon$  линейную систему уравнений, из которой следует связь

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \quad (37)$$

и определяется безразмерная скорость волны

$$c^2 = 1 - \mu_0^2. \quad (38)$$

Из следующего приближения по  $\varepsilon$ , учитывая (37) и (38), находится система уравнений, являющихся составными для  $u_{10}^{(i)}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m}{l \varepsilon} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} = \\ = - \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \frac{1}{2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \left[ q_x^{(i)} - \mu_0 \frac{R^{(i)}}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^{i-1} \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

В случае отсутствия жидкости правая часть уравнений (39) равна нулю и система распадается на два одинаковых уравнения, представляющих модифицированные уравнения Кортевега – де Вриза – Бюргерса для

$$\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} = \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)}.$$

7. Для определения правой части уравнения (39) введем безразмерные переменные и параметры



$$\begin{aligned}
V_r &= w_m \frac{c_0}{l} v_r, \quad V_x = w_m \frac{c_0}{R_1} v_x, \quad r^* = \frac{r R_2}{\delta}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \\
x^* &= \frac{c_0}{l} x, \quad p = \frac{\rho \nu c_0 l w_m}{\delta^3} P; \\
\psi &= \frac{\delta}{R_2} = o(1), \quad \lambda = \frac{w_m}{\delta} = \frac{w_m}{R_2} \frac{R_2}{\delta} = O\left(\frac{\varepsilon}{\psi}\right), \\
\frac{\delta}{l} &= \frac{\delta}{R_2} \frac{R_2}{l} = \psi \frac{R_2}{l} \ll 1, \quad \psi \ll 1, \quad \lambda \ll 1.
\end{aligned} \tag{40}$$

Подставляя (40) в уравнения гидродинамики (2) и граничные условия (7.2), представим безразмерные скорость и давление в виде разложения по малому параметру  $\lambda$ :

$$v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots, \quad P = P^0 + \lambda P^1 + \dots \tag{41}$$

В нулевом приближении по  $\psi$  ( $\delta/l \approx 0$  – гидравлическая теория смазки), считая  $(\delta/l)(\delta c_0/\nu) \ll 1$  (– ползущие течения [9, 10]), и в нулевом приближении по  $\lambda$  получаем уравнения гидродинамики (классические уравнения гидродинамической теории смазки)

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x^0}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \tag{42}$$

и граничные условия

$$\begin{aligned}
v_r^0 &= -\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0 \quad \text{при} \quad r^* = 1, \\
v_r^0 &= -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0 \quad \text{при} \quad r^* = 0.
\end{aligned} \tag{43}$$

Из решения задачи (42), (43) ) следует, что

$$\begin{aligned}
P^0 &= 12 \int \left[ \int \left( \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^* \right] dx^*, \\
\left[ \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right]_{r^*=1} &= 6 \int \left( \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \\
\left[ \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right]_{r^*=0} &= 6 \int \left( \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} \right) dx^*.
\end{aligned} \tag{44}$$

Учитывая, что были введены переменные (35), (36), и, имея соотношения (37) и (38), из (44) получим

$$\begin{aligned}
P^0 &= 12\sqrt{1-\mu_0^2} \int (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) d\xi = \\
&= 12\mu_0\sqrt{1-\mu_0^2} \frac{u_m}{w_m l} (R^{(1)}u_{10}^{(1)} - R^{(2)}u_{10}^{(2)})
\end{aligned} \tag{45}$$

С принятой точностью по  $\varepsilon, \psi, \lambda$  из (32) найдем

$$q_x^{(i)} = \left[ \rho \nu \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right]_{r^*=1,0}, \quad q_n = -\rho \nu \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{l}{\delta} P, \quad \frac{q_x^{(i)}}{q_n} = O\left(\frac{\delta}{l}\right)$$

и, следовательно,  $q_x^{(i)} \ll q_n$  и в правой части уравнения (39) остается выражение

$$6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0^{(i)}} \frac{\nu}{\delta c_0 \varepsilon} \left[ \frac{R^{(i)} R^{(2)}}{\delta^2} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{R^{(i)} R^{(1)}}{\delta^2} \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right] (-1)^{i-1}. \tag{46}$$

С принятой точностью по  $\psi, \varepsilon$  положим

$$R^{(1)} \approx R^{(2)} = R, \quad h_0^{(1)} \approx h_0^{(2)} = h_0.$$

Подставляя (46) в уравнение (39), окончательно получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m}{l \varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^4} + \\
&\quad + 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{\delta c_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^2 \left( \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right) = 0; \\
&\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m}{l \varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^4} + \\
&\quad + 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{\delta c_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^2 \left( \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right) = 0;
\end{aligned} \tag{47}$$

Легко видеть, что замена

$$\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} = c \varphi^{(1)}, \quad \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} = c \varphi^{(2)}, \quad \eta = c_1 \xi, \quad t = c_2 \tau \tag{48}$$

позволяет записать систему уравнений (47) в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial t} + 6\varphi^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \varphi^{(1)}}{\partial \eta^3} + \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)} = 0, \\
&\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial t} + 6\varphi^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \varphi^{(2)}}{\partial \eta^3} + \varphi^{(2)} - \varphi^{(1)} = 0.
\end{aligned} \tag{49}$$

Постоянные  $c, c_1, c_2$  определяются при подстановке (48) в (47) и имеют вид

$$c_2 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{\delta c_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^2, \quad c_1 = \left[ c_2 \varepsilon \left( \frac{l}{R} \right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \right]^{1/3}, \quad c = 6 \frac{R^2}{lu_m} \mu_0^2 c_1^2.$$

8. Обозначим через  $C_+^{(i)}, C_-^{(i)}$  постоянные значения, к которым асимптотически стремятся функции начального условия при  $\eta \rightarrow +\infty$  и  $\eta \rightarrow -\infty$  соответственно:

$$\varphi^{(i)} \rightarrow \tilde{N}_\pm^{(i)}, \left( \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^3 \varphi^{(i)}}{\partial \eta^3} \rightarrow 0 \right), \quad \eta \rightarrow \pm\infty, t = 0; \quad i = 1, 2. \quad (50)$$

Из уравнений (49) с начальными условиями (50) следуют нестационарные граничные условия на бесконечности

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &\rightarrow \varphi_{\pm\infty}^{(1)}(t) \equiv \frac{1}{2}(\tilde{N}_\pm^{(1)} + \tilde{N}_\pm^{(2)}) + \frac{1}{2}(\tilde{N}_\pm^{(1)} - \tilde{N}_\pm^{(2)})e^{-2t}, \\ \varphi^{(2)} &\rightarrow \varphi_{\pm\infty}^{(2)}(t) \equiv \frac{1}{2}(\tilde{N}_\pm^{(1)} + \tilde{N}_\pm^{(2)}) - \frac{1}{2}(\tilde{N}_\pm^{(1)} - \tilde{N}_\pm^{(2)})e^{-2t}, \\ &\left( \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^3 \varphi^{(i)}}{\partial \eta^3} \rightarrow 0 \right), \quad \eta \rightarrow \pm\infty, t \geq 0; \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (51)$$

Умножим первое и второе уравнения (49) на искомые функции  $\varphi^{(1)}$  и  $\varphi^{(2)}$  соответственно и приведем уравнения к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi^{(1)2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ 2\varphi^{(1)3} + \varphi \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \varphi^{(1)} (\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}) &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi^{(2)2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ 2\varphi^{(2)3} + \varphi \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \varphi^{(2)} (\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) &= 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Снесем граничные условия из бесконечности на концы отрезка  $[a, b]$  и введем норму функций на временном слое

$$\|\varphi\|^2 = \int_a^b \varphi^2(\eta, t) d\eta. \quad (53)$$

Взяв интегралы от уравнений (52) в пределах  $a, b$  и учитывая граничные условия (51), получим дифференциальные соотношения

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|\varphi^{(1)}\|^2 + \|\varphi^{(2)}\|^2 \right) + 2 \left[ \varphi_{+\infty}^{(1)3}(t) + \varphi_{+\infty}^{(2)3}(t) - \varphi_{-\infty}^{(1)3}(t) - \varphi_{-\infty}^{(2)3}(t) \right] + \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|^2 = 0, \quad (54)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|\varphi^{(1)}\|^2 - \|\varphi^{(2)}\|^2 \right) + 2 \left[ \varphi_{+\infty}^{(1)3}(t) - \varphi_{+\infty}^{(2)3}(t) - \varphi_{-\infty}^{(1)3}(t) + \varphi_{-\infty}^{(2)3}(t) \right] + \|\varphi^{(1)}\|^2 - \|\varphi^{(2)}\|^2 = 0. \quad (55)$$

Из соотношения (55) получается явная зависимость от времени для разности квадратов норм искоемых функций:

$$\begin{aligned} \|\varphi^{(1)}\|^2 - \|\varphi^{(2)}\|^2 &= e^{-2t} \left[ D_0 - 3t \left( A_+^2 B_+ - A_-^2 B_- \right) - \frac{1}{4} (B_+^3 - B_-^3) (1 - e^{-4t}) \right], \\ D_0 &= \left( \|\varphi^{(1)}\|^2 - \|\varphi^{(2)}\|^2 \right)_{t=0}, \quad A_{\pm} = \tilde{N}_{\pm}^{(1)} + \tilde{N}_{\pm}^{(2)}, \quad B_{\pm} = \tilde{N}_{\pm}^{(1)} - \tilde{N}_{\pm}^{(2)}. \end{aligned} \quad (56)$$

Оценка (56) может быть использована для интегрального контроля точности численного решения рассматриваемой задачи.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Землянухин, А. И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках / А. И. Землянухин, Л. И. Могилевич // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика, 1995. – Т. 3, № 1. – С. 52-58.
2. Землянухин, А. И. Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция / А. И. Землянухин, Л. И. Могилевич. – Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 1999. – 132 с.
3. Аршинов, Г. А. Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде / Г. А. Аршинов, А. И. Землянухин, Л. И. Могилевич // РАН. Акустический журнал, 2000. – Т. 46, № 1. – С. 116-117.
4. Землянухин, А. И. Нелинейные волны в неоднородных цилиндрических оболочках: новое эволюционное уравнение / А. И. Землянухин, Л. И. Могилевич // РАН. Акустический журнал, 2001. – Т. 47, № 3. – С. 359-363.
5. Аршинов, Г. А. Статические и динамические задачи вязкоупругости / Г. А. Аршинов, Л. И. Могилевич – Саратов: Сарат. гос. агр. ун-т, 2002. – 152 с.
6. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
7. Каузерер, К. Нелинейная механика / К. Каузерер. – М.: Иностранная литература, 1961. – 240 с.
8. Вольмир, А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
9. Чивилихин, С. А. Динамика скручивающихся нанотрубок в вязкой жидкости / С. А. Чивилихин, И. Ю. Попов, В. В. Гусаров // Доклады РАН, 2007. – Т. 412, № 2. – С. 201-203.
10. Попов, Ю. И. Солитоны в стенке нанотрубки и стоксово течение в ней / Ю. И. Попов, О. А. Розыгина, С. А. Чивилихин, В. В. Гусаров // Письма в ЖТФ, 2010. – Т. 36, Вып. 18. – С. 42-54.
11. Могилевич, Л. И. Нелинейные волны деформаций в упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость / Л. И. Могилевич, А. Ю. Блинкова, С. В. Иванов // Магистраль: Межвуз. сб. научн. статей, вып. №3. – Изд. центр «Наука», г. Саратов, 2011. – С. 3-11.
12. Могилевич Л. И. Нелинейные волны в соосных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними / Л. И. Могилевич, И. А. Ковалева // Магистраль: Межвуз. сб. научн. статей, вып. №3. – Изд. центр «Наука», г. Саратов, 2011. – С. 11-19.

*И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова* (г. Пенза)

## ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОЛИГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

*Построены оптимальные по порядку по точности кубатурные формулы вычисления полигиперсингулярных интегралов.*

### Введение

Несмотря на то, что понятие гиперсингулярного интеграла было введено в 1903г. (см. [1]), его широкое применение к решению задач физики и техники началось значительно позже, с середины 20 века. Применению гиперсингулярных интегральных уравнений к решению задач аэродинамики посвящены опубликованные к тому времени фундаментальные работы А.И. Некрасова [2], Х. Эшли и М. Лэндала [3], Р. Бисплингхоффа, Х. Эшли и Р. Хапфмана [4]. Начиная с 70 годов прошлого века, методы гиперсингулярных интегральных уравнений находят все больше применение в задачах аэродинамики [5] и становятся инструментом математического моделирования в электродинамике [6], ядерной физике [7], геофизике [8].

Непосредственное вычисление гиперсингулярных интегралов возможно лишь для нескольких очень узких классов функций. Это обстоятельство вызвало интенсивное развитие приближенных методов вычисления гиперсингулярных интегралов. Для приближенного вычисления одномерных гиперсингулярных интегралов предложено большое число различных методов, подробный анализ которых приведен в работах [9]–[10].

Значительно слабее разработаны приближенные методы вычисления полигиперсингулярных интегралов. Приближенным методам вычисления бигиперсингулярных интегралов видов

$$I\varphi \equiv \iint_{\gamma_1 \gamma_2} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^{p_1} (\tau_2 - t_2)^{p_2}}, \quad p_i = 2, 3, \dots, t_i \in \gamma_i, i = 1, 2. \quad (1.1)$$

посвящены работы [9], [10]. Здесь  $\gamma_i = \{z_i : |z_i| = 1\}$  ( $z_i$  – точка на  $i$ -ой плоскости комплексной переменной) или  $\gamma_i$  – сегмент  $[-1, 1]$ ,  $i = 1, 2$ .

Ниже, в разделе 5 предложены оптимальные по порядку методы вычисления интегралов вида (1.1).

Статья построена следующим образом. В разделе 2 даны определения гиперсингулярных интегралов. В разделе 3 приведены определения классов функций, используемых в работе. В разделе 4 даны определения оптимальных алгоритмов вычисления гиперсингулярных интегралов. В разделе 5 построены

оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления полигиперсингулярных интегралов.

## 2. Определение гиперсингулярных интегралов

В работе [1] Ж. Адамар ввел новый тип особых интегралов.

**Определение 1.1** [1], [11]. Интеграл вида  $\int_a^b \frac{A(x)dx}{(b-x)^{p+\alpha}}$  при целом  $p$  и  $0 < \alpha < 1$  определяет величину ("конечную часть") рассматриваемого интеграла как предел при  $x \rightarrow b$  суммы  $\int_a^x \frac{A(t)dt}{(b-t)^{p+\alpha}} + \frac{B(x)}{(b-x)^{p+\alpha-1}}$ , если предположить, что  $A(x)$  имеет  $p$  производных в окрестности точки  $b$ . Здесь  $B(x)$  – любая функция, на которую налагаются два условия: а) рассматриваемый предел существует; б)  $B(x)$  имеет по крайней мере  $p$  производных в окрестности точки  $x = b$ .

В данной работе используется следующее определение. Для простоты обозначений ограничимся бигиперсингулярным интегралом (1.1), где  $\gamma_i$  – сегмент  $[-1, 1]$ ,  $i=1, 2$ . Пусть функция  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$  имеет частные производные

$$\varphi^{(v_1, v_2)}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\partial^{|v|} \varphi(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1^{v_1} \partial \tau_2^{v_2}}, \quad v = (v_1, v_2), \quad |v| = v_1 + v_2, \quad 0 \leq v_i \leq p_i, \quad i = 1, 2.$$

Пусть  $\rho_i$ ,  $i=1, 2$  – положительное число, такое, что  $\rho_i < \min(|1-t_i|, |1+t_i|)$ ,  $i=1, 2$ . Обозначим через  $l_i$  сегмент  $[-1, 1] \setminus (t_i - \rho_i, t_i + \rho_i)$ ,  $i=1, 2$ .

Интеграл  $I\varphi$  определяется выражением [10]

$$I\varphi = \lim_{\rho_1 \rightarrow 0, \rho_2 \rightarrow 0} \left[ \iint_{l_1 l_2} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^{p_1} (\tau_2 - t_2)^{p_2}} - \sum_{k=1}^{p_1} \sum_{l=1}^{p_2} \frac{\gamma_{kl}(\rho_1, \rho_2)}{\rho_1^{k-1} \rho_2^{l-1}} - \sum_{k=1}^{p_1} \frac{\gamma_k(\rho_1, \rho_2)}{\rho_1^{k-1}} \ln \rho_2 - \sum_{l=1}^{p_2} \frac{\delta_l(\rho_1, \rho_2)}{\rho_2^{l-1}} \ln \rho_1 - \alpha(\rho_1, \rho_2) \ln \rho_1 \ln \rho_2 \right], \quad (2.2)$$

где функция  $\gamma_{kl}(\rho_1, \rho_2)$  имеет непрерывные частные производные до  $k$  порядка по первой переменной и  $l$  порядка по второй переменной; функция  $\gamma_k(\rho_1, \rho_2)$  имеет непрерывные частные производные до  $k$  порядка по первой переменной и удовлетворяет условию Дини–Липшица по второй переменной; функция  $\delta_l(\rho_1, \rho_2)$  удовлетворяет условию Дини–Липшица по первой переменной и имеет непрерывные частные производные до  $l$  порядка по второй переменной; функция  $\alpha(t_1, t_2)$  удовлетворяет условию Дини–Липшица по обоим переменным. Функции  $\gamma(\rho_1, \rho_2)$ ,  $\gamma_k(\rho_1, \rho_2)$ ,  $\delta_l(\rho_1, \rho_2)$ ,  $\alpha(t_1, t_2)$  выбираются таким образом, чтобы предел существовал и был единственным.

### 3. Классы функций

Через  $H_{\alpha_1\alpha_2}(D, M)$  обозначен гельдеровский класс функций  $f(x, y)$ , определенных в области  $D(D = \{a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\})$ ,  $0 < M < \infty$ , и удовлетворяющих условию  $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq M(|x_1 - x_2|^{\alpha_1} + |y_1 - y_2|^{\alpha_2})$ .

$W^{r,s}(D, M)$ ,  $D = [a, b; c, d]$ ,  $0 < M < \infty$ , означает класс определенных на  $D$  функций  $f(x, y)$ , имеющих частные производные

$$f^{(\alpha, \beta)}(x, y) = \partial^{\alpha+\beta} f(x, y) / \partial x^\alpha \partial y^\beta \quad (0 \leq \alpha \leq r, 0 \leq \beta \leq s),$$

причем

$$\|f^{(r,s)}(x, y)\|_{C(D)} \leq M, \|f^{(r,j)}(x, 0)\|_{C(D)} \leq M, j = 0, 1, \dots, s-1, \|f^{(i,s)}(0, y)\|_{C(D)} \leq M, i = 0, 1, \dots, r-1.$$

Через  $C_l^r(\Omega, 1)$ ,  $\Omega = [a_1, b_1; \dots; a_l, b_l]$  обозначен класс функций  $l$  независимых переменных, у которых существуют и ограничены по модулю единицей все частные производные до  $r$ -го порядка включительно.

### 4. Постановка задачи построения оптимальных алгоритмов вычисления гиперсингулярных интегралов

Постановка задачи построения оптимальных квадратурных формул принадлежит А. Н. Колмогорову. Н. С. Бахвалов [12] сформулировал задачу построения оптимальных алгоритмов решения задач математической физики, из которой следует постановка задачи построения оптимальных, асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку кубатурных формул.

Для интегралов в смысле Римана, эта постановка заключается в следующем. Рассмотрим кубатурную формулу

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \sum_{i=0}^{\rho_1} \sum_{j=0}^{\rho_2} p_{klij} \varphi^{(i,j)}(x_k, y_l) + R_{mn}(x_k, y_l; p_{klij}; \varphi) \quad (4.1)$$

где  $-1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 1$ ,  $-1 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_n \leq 1$  – узлы кубатурной формулы;  $p_{klij}$  – ее коэффициенты.

Абсолютной погрешностью формулы (4.1) является величина  $|R_{mn}(x_k, y_l; p_{klij}; \varphi)|$ . Пусть  $\Psi$  – некоторый класс заданных в квадрате  $\Omega = [-1, 1]^2$  функций. Положим  $R_{mn}(x_k, y_l; p_{klij}; \Psi) = \sup_{\varphi \in \Psi} |R_{mn}(x_k, y_l; p_{klij}; \varphi)|$ ,

$$\zeta_{mn}[\Psi] = \inf_{(x_k, y_l; p_{klij})} |R_{mn}(x_k, y_l; p_{klij}; \Psi)|.$$

Здесь нижняя грань берется по всевозможным узлам  $(x_k, y_l) \in \Omega$ ,  $1 \leq k \leq m$ ,  $1 \leq l \leq n$ , и коэффициентам  $p_{klij}$  ( $1 \leq k \leq m; 1 \leq l \leq n; 0 \leq i \leq \rho_1, 0 \leq j \leq \rho_2$ ).

Кубатурная формула (4.1), построенная на векторах  $(x_k^*, y_l^*; p_{klij}^*)$  ( $0 \leq k \leq m, 0 \leq l \leq n, 0 \leq i \leq \rho_1, 0 \leq j \leq \rho_2$ ) называется оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если  $|R_{mn}(x_k^*, y_l^*; p_{klij}^*; \Psi)| / \zeta_{mn}[\Psi] = 1, \sim 1, \asymp 1$ .

*Замечание.* Говорят, что  $\alpha_n \sim \beta_n$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n / \beta_n = 1$ . Аналогично,  $\alpha_n \asymp \beta_n$ , если  $0 < A \leq \alpha_n / \beta_n \leq B < \infty$ ,  $A, B$  – константы.

Бигиперсингулярные интегралы с переменными особенностями

$$I\varphi = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^{p_1} (\tau_2 - t_2)^{p_2}} d\tau_1 d\tau_2, \quad -1 \leq t_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \quad (4.2)$$

будем вычислять по кубатурным формулам

$$I\varphi = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \sum_{i=0}^{\rho_1} \sum_{j=0}^{\rho_2} p_{klij} (t_1, t_2) \varphi^{(i,j)}(x_k, y_l) + R_{mn}(t_1, t_2; x_k, y_l; p_{klij}; \varphi), \quad (4.3)$$

определяемыми узлами  $-1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 1$ ,  $-1 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_n \leq 1$  и коэффициентами  $p_{klij}$  ( $1 \leq k \leq m$ ,  $1 \leq l \leq n$ ,  $i = 0, 1, \dots, \rho_1$ ,  $j = 0, 1, \dots, \rho_2$ ). Значения  $\rho_i$ ,  $i = 1, 2$ , определяются классом, к которому принадлежит функция  $\varphi$ .

Погрешность кубатурной формулы (4.3) равна

$$R_{mn}(x_k, y_l; p_{klij}, \varphi) = \sup_{t_1, t_2} |R_{mn}(t_1, t_2; x_k, y_l; p_{klij}, \varphi)|.$$

Пусть  $\Psi$  – некоторый класс заданных в  $\Omega = [-1, 1]^2$  функций. Положим

$$R_{mn}(x_k, y_l; p_{klij}, \Psi) = \sup_{\varphi \in \Psi} R_{mn}(x_k, y_l; p_{klij}, \varphi).$$

Введем функционал  $\zeta_{mn}[\Psi] = \inf_{(x_k, y_l; p_{klij})} R_{mn}(x_k, y_l; p_{klij}, \Psi)$ , в котором нижняя грань берется по всевозможным векторам  $(x_k, y_l, p_{klij})$  узлов и весов ( $k = 1, 2, \dots, m$ ,  $l = 1, 2, \dots, n$ ). Кубатурную формулу (4.3), построенную на векторах  $(x_k^*, y_l^*; p_{klij}^*)$ , будем называть оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если  $R_{mn}(x_k^*, y_l^*; p_{klij}^*, \Psi) / \zeta_{mn}[\Psi] = 1$ ,  $\sim 1, \asymp 1$ .

При оценке погрешности оптимальных кубатурных формул понадобится следующее утверждение, цитируемое по работе [12].

*Лемма С. А. Смоляка.* Пусть функционалы  $L(f), L_1(f), \dots, L_N(f)$  – линейные и  $\Omega$  – выпуклое центрально-симметричное множество с центром симметрии  $Q$  в линейном метрическом пространстве. Пусть  $\sup_{f \in \Omega_0} L(f) < \infty$ , где  $\Omega_0 \equiv \{f; f \in \Omega, L_k(f) = 0, k = 1, 2, \dots, N\}$ . Тогда существуют числа  $D_1, \dots, D_N$ , такие, что  $\sup_{f \in \Omega} |L(f) - \sum_{k=1}^N D_k L_k(f)| = R(T)$ , то есть среди наилучших методов есть линейный.

Следствие.  $R(T) = \sup_{f \in \Omega_0} Lf$ .

## 5. Приближенное вычисление полигиперсингулярных интегралов

Рассмотрим полигиперсингулярный интеграл

$$C\varphi = \frac{1}{(\pi i)^l} \int_{\gamma_1} \dots \int_{\gamma_l} \frac{\varphi(\tau_1, \dots, \tau_l) d\tau_1 \dots d\tau_l}{(\tau_1 - t_1)^{p_1} \dots (\tau_l - t_l)^{p_l}}, \quad (5.1)$$

где  $\gamma_i$  – единичная окружность с центром в начале координат плоскости комплексной переменной  $z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ ;  $p_i = 2, 3, \dots$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ .



Для простоты обозначений положим  $p_i = p$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$  и положим  $l = 2$ .

Интегралу (5.1) при  $l = 2$  и  $p_i = p$  поставим в соответствие кубатурную формулу

$$C\varphi = \sum_{k_1=0}^{N_1} \sum_{k_2=0}^{N_2} \sum_{i_1=0}^{\rho_1} \sum_{i_2=0}^{\rho_2} p_{k_1 k_2 i_1 i_2} (t_1, t_2) \varphi^{(i_1, i_2)}(x_{k_1}, x_{k_2}) + R_{N_1 N_2}(t_1, t_2; p_{k_1 k_2 i_1 i_2}; x_{k_1}, x_{k_2}; \varphi), \quad (5.2)$$

где  $(x_{k_1}, x_{k_2})$  – узлы кубатурной формулы,  $p_{k_1 k_2 i_1 i_2}(t_1, t_2)$  – ее коэффициенты.

При исследовании сингулярных интегралов, как правило, одновременно рассматривают сингулярные интегралы с ядрами Коши и Гильберта. Получим аналог формулы Гильберта для полигиперсингулярного интеграла.

Сделаем замену переменных  $t_i = e^{is_i}$ ,  $\tau_i = e^{i\sigma_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ . Тогда интеграл  $C\varphi$  можно представить в виде

$$C\varphi = \frac{1}{(\pi i)^l} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \frac{i^l \varphi^*(\sigma_1, \dots, \sigma_l) e^{i\sigma_1} \dots e^{i\sigma_l} d\sigma_1 \dots d\sigma_l}{(e^{i\sigma_1} - e^{is_1})^{p_1} \dots (e^{i\sigma_l} - e^{is_l})^{p_l}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \psi(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \left( \frac{\sigma_1 - s_1}{2} + i \right)^{p_1} \dots \left( \frac{\sigma_l - s_l}{2} + i \right)^{p_l} d\sigma_1 \dots d\sigma_l, \quad (5.3)$$

где  $\psi(\sigma_1, \dots, \sigma_l) = (2i)^{p_1 + \dots + p_l} \pi^l e^{-i((p_1-1)\sigma_1 + \dots + (p_l-1)\sigma_l)} \varphi(e^{i\sigma_1}, \dots, e^{i\sigma_l})$ .

Таким образом, при  $l = 2$  интегралу (5.1) соответствует интеграл

$$H\psi = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\sigma_1, \sigma_2) \left( \frac{\sigma_1 - s_1}{2} + i \right)^{p_1} \left( \frac{\sigma_2 - s_2}{2} + i \right)^{p_2} d\sigma_1 d\sigma_2, \quad (5.3)$$

а формуле (5.2) соответствует кубатурная формула

$$H\psi = \sum_{k_1=0}^{N_1} \sum_{k_2=0}^{N_2} \sum_{i_1=0}^{\rho_1} \sum_{i_2=0}^{\rho_2} p_{k_1 k_2 i_1 i_2} (s_1, s_2) \psi^{(i_1, i_2)}(s_{k_1}, s_{k_2}) + R_{N_1 N_2}(s_1, s_2; p_{k_1 k_2 i_1 i_2}; s_{k_1}, s_{k_2}; \psi) \quad (5.4)$$

где  $x_{k_1} = e^{is_{k_1}}$ ,  $x_{k_2} = e^{is_{k_2}}$ ,  $k_j = 0, 1, \dots, N_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Нетрудно видеть, что в оценку функционала  $\zeta_{N_1 N_2}[\Psi]$  на любом классе функций  $\Psi$ , на котором интеграл (5.3) существует, наибольший вклад вносит интеграл

$$H\psi = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\sigma_1, \sigma_2) \left( \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \right)^{p_1} \left( \frac{\sigma_2 - s_2}{2} \right)^{p_2} d\sigma_1 d\sigma_2. \quad (5.5)$$

Будем вычислять интеграл (5.5) по кубатурной формуле

$$H\psi = \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{l=0}^{N_2} \sum_{i_1=0}^{\rho_1} \sum_{i_2=0}^{\rho_2} p_{kl i_1 i_2} (s_1, s_2) \psi(x_k, y_l) + R_{N_1 N_2}(s_1, s_2; p_{kl i_1 i_2}(s_1, s_2); x_k, y_l; \psi), \quad (5.6)$$

где  $\{x_k, y_l\}$  – узлы,  $p_{kl}(s_1, s_2)$  – коэффициенты кубатурной формулы,  $k = 0, 1, \dots, N_1$ ,  $l = 0, 1, \dots, N_2$ .

Обозначим через  $\Psi$  класс функций, на котором интеграл (5.5) сходится. Обозначим через  $\varphi^*(s_1, s_2)$  функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

функция  $\varphi^*(s_1, s_2)$  принадлежит классу функций  $\Psi$ , неотрицательная и обращается в нуль вместе с частными производными до  $p_1 - 1$  порядка по переменной  $s_1$  и до  $p_2 - 1$  порядка по переменной  $s_2$  в узлах кубатурной формулы (5.6). Введем узлы  $v_k = 2k\pi/N_1$ ,  $k = 0, 1, \dots, N_1$ ,  $w_l = 2l\pi/N_2$ ,  $l = 0, 1, \dots, N_2$  и построим прямоугольники  $\Delta_{kl} = [v_k, v_{k+1}; w_l, w_{l+1}]$ . Для простоты дальнейших выкладок будем считать числа  $N_1$  и  $N_2$  четными.

Каждому узлу  $u_{kl} = (v_k, w_l)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $l = 0, 1, \dots, m$ , поставим в соответствие функцию

$$\varphi_{kl}^*(\sigma_1, \sigma_2) = \begin{cases} 0, & (\sigma_1, \sigma_2) \in D, \\ \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) \left( \operatorname{sgn}^{p_1} \frac{\sigma_1 - v_k}{2} \right) \left( \operatorname{sgn}^{p_2} \frac{\sigma_2 - w_l}{2} \right), & (\sigma_1, \sigma_2) \in [0, 2\pi]^2 \setminus D, \end{cases}$$

где

$$D = \left\{ (\sigma_1, \sigma_2) : \left[ \sigma_1 - v_k - \frac{2\pi}{N_1}, \sigma_1 - v_k + \frac{2\pi}{N_1}; 0, 2\pi \right] \cup \right. \\ \cup \left[ \sigma_1 - v_{k+N_1/2} - \frac{2\pi}{N_1}, \sigma_1 - v_{k+N_1/2} + \frac{2\pi}{N_1}; 0, 2\pi \right] \cup \left[ 0, 2\pi; \sigma_2 - w_l - \frac{2\pi}{N_2}, \sigma_2 - w_l + \frac{2\pi}{N_2} \right] \cup \\ \left. \cup \left[ 0, 2\pi; \sigma_2 - w_{l+N_2/2} - \frac{2\pi}{N_2}, \sigma_2 - w_{l+N_2/2} + \frac{2\pi}{N_2} \right] \right\}.$$

Тогда

$$H(\varphi_{kl}^*(v_k, w_l)) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{kl}^*(\sigma_1, \sigma_2) \left( \frac{\sigma_1 - v_k}{2} \right)^{p_1} \left( \frac{\sigma_2 - w_l}{2} \right)^{p_2} d\sigma_1 d\sigma_2 \geq \\ \geq \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} \int_{v_i}^{v_{i+1}} \int_{w_j}^{w_{j+1}} \varphi_{kl}^*(\sigma_1, \sigma_2) \left( \frac{\sigma_1 - v_k}{2} \right)^{p_1} \left( \frac{\sigma_2 - w_l}{2} \right)^{p_2} d\sigma_1 d\sigma_2 \geq \\ \geq \sum_{i=k+1}^{k+N_1/2-2} \sum_{j=l+1}^{l+N_2/2-2} \left| \frac{\pi(i-k)}{N_1} \right|^{p_1} \left| \frac{\pi(j-l)}{N_2} \right|^{p_2} \int_{v_i}^{v_{i+1}} \int_{w_j}^{w_{j+1}} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 + \\ + \sum_{i=k+1}^{k+N_1/2-2} \sum_{j=l-1-N_2/2-2}^{l-1} \left| \frac{\pi(i-k)}{N_1} \right|^{p_1} \left| \frac{\pi(j-l)}{N_2} \right|^{p_2} \int_{v_i}^{v_{i+1}} \int_{w_j}^{w_{j+1}} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 + \\ + \sum_{i=k-1-N_1/2-2}^{k-1} \sum_{j=l+1}^{l+N_2/2-2} \left| \frac{\pi(i-k)}{N_1} \right|^{p_1} \left| \frac{\pi(j-l)}{N_2} \right|^{p_2} \int_{v_i}^{v_{i+1}} \int_{w_j}^{w_{j+1}} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 + \\ + \sum_{i=k-1-N_1/2-2}^{k-1} \sum_{j=l-1-N_2/2-2}^{l-1} \left| \frac{\pi(i-k)}{N_1} \right|^{p_1} \left| \frac{\pi(j-l)}{N_2} \right|^{p_2} \int_{v_i}^{v_{i+1}} \int_{w_j}^{w_{j+1}} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2,$$

где  $\sum'$  означает суммирование по  $i \neq k-1, k$ ,  $\sum''$  означает суммирование по  $j \neq l-1, l$ .

Усредняя предыдущее неравенство по  $k(k = 0, 1, \dots, N_1 - 1)$  и  $l(l = 0, 1, \dots, N_2 - 1)$ , имеем:

$$\begin{aligned}
& \sup_{\varphi \in \Psi} \max_{0 \leq s_1, s_2 \leq 2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma_1, \sigma_2) \left( \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \right)^{p_1} \left( \frac{\sigma_2 - s_2}{2} \right)^{p_2} d\sigma_1 d\sigma_2 \geq \\
& \geq \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{l=0}^{N_2-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{kl}^*(\sigma_1, \sigma_2) \left( \frac{\sigma_1 - v_k}{2} \right)^{p_1} \left( \frac{\sigma_2 - w_l}{2} \right)^{p_2} d\sigma_1 d\sigma_2 \geq \\
& \geq \frac{1+o(1)}{N_1 N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{l=0}^{N_2-1} \left[ \sum_{i=1}^{N_1/2-2} \sum_{j=1}^{N_2/2-2} \left( \frac{N_1}{\pi(i+1)} \right)^{p_1} \left( \frac{N_2}{\pi(j+1)} \right)^{p_2} \int_{v_{k+i}}^{v_{k+i+1}} \int_{w_{l+j}}^{w_{l+j+1}} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 + \right. \\
& + \sum_{i=1}^{N_1/2-2} \sum_{j=1}^{N_2/2-2} \left( \frac{N_1}{\pi(i+1)} \right)^{p_1} \left( \frac{N_2}{\pi(j+1)} \right)^{p_2} \int_{v_{k+i+1}}^{v_{k+i+2}} \int_{w_{l-j-1}}^{w_{l-j}} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 + \\
& + \sum_{i=1}^{N_1/2-2} \sum_{j=1}^{N_2/2-2} \left( \frac{N_1}{\pi(i+1)} \right)^{p_1} \left( \frac{N_2}{\pi(j+1)} \right)^{p_2} \int_{v_{k-i}}^{v_{k-i+1}} \int_{w_{l+j+1}}^{w_{l+j}} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 + \\
& \left. + \sum_{i=1}^{N_1/2-2} \sum_{j=1}^{N_2/2-2} \left( \frac{N_1}{\pi(i+1)} \right)^{p_1} \left( \frac{N_2}{\pi(j+1)} \right)^{p_2} \int_{v_{k-i-1}}^{v_{k-i}} \int_{w_{l-j-1}}^{w_{l-j}} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \right] = \\
& = 4(1+o(1)) N_1^{p_1-1} N_2^{p_2-1} \sum_{i=1}^{N_1/2-2} \sum_{j=1}^{N_2/2-2} \left( \frac{1}{\pi(i+1)} \right)^{p_1} \left( \frac{1}{\pi(j+1)} \right)^{p_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \geq \\
& = (1+o(1)) \frac{4N_1^{p_1-1}}{(2\pi)^{p_1}} \frac{N_2^{p_2-1}}{(2\pi)^{p_2}} \frac{1}{p_1-1} \frac{1}{p_2-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2. \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Таким образом, оценка функционала  $\zeta_{NM}[\Psi]$  для кубатурной формулы (5.6) свелась к оценке интеграла  $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2$ .

Выше мы ограничились рассмотрением интеграла (5.5). Оценим погрешность, которую вносят остальные слагаемые, входящие в интеграл (5.3)

и имеющие вид  $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma_1, \sigma_2) \left( \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \right)^i \left( \frac{\sigma_2 - s_2}{2} \right)^j d\sigma_1 d\sigma_2$ ,

$0 \leq i \leq p_1, 0 \leq j \leq p_2, 0 \leq i+j \leq p_1+p_2-1$ . Можно показать, что эти слагаемые вносят в оценку функционала  $\zeta_{NM}[\Psi]$  кубатурной формулы (5.4) величины порядка

$$CN_1^{i-1} N_2^{j-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2, 0 \leq i \leq p_1-1, 0 \leq j \leq p_2-1, i+j = p_1+p_2-1.$$

Все эти величины являются бесконечно малыми более высокого порядка малости по отношению к выражению, стоящему в правой части формулы

(5.7). Таким образом, величина функционала  $\zeta_{NM}[\Psi]$  для кубатурной формулы

$$(5.4) \text{ связана с величиной интеграла } \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2.$$

В разделе 4 для кубатурных формул вида (4.1) был введен функционал  $\zeta_{mn}[\Psi]$ . Для отличия от аналогичных функционалов для гиперсингулярных интегралов будем обозначать их через  $\zeta_{mn}^R[\Psi]$  ( $R$  – означает, что интеграл берется в смысле Римана). Пользуясь леммой Смоляка, можно показать, что

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^*(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \geq \zeta_{mn}^R[\Psi].$$

Отсюда следует оценка  $\zeta_{NM}[\Psi]$  для кубатурной формулы (5.4):

$$\zeta_{N_1 N_2}[\Psi] \geq (1 + o(1)) \frac{4N_1^{p_1-1}}{(2\pi)^{p_1}} \frac{N_2^{p_2-1}}{(2\pi)^{p_2}} \frac{1}{p_1-1} \frac{1}{p_2-1} \zeta_{N_1 N_2}^R[\Psi]. \quad (5.8)$$

Из проведенного выше сопоставления кубатурных формул для гиперсингулярных интегралов с ядрами Коши и Гильберта, следует, что функционал  $\zeta_{N_1 N_2}[\Psi]$  для кубатурных формул (5.2) оценивается неравенством

$$\zeta_{N_1 N_2}[\Psi] \geq c N_1^{p_1-1} N_2^{p_2-1} \zeta_{N_1 N_2}^R[\Psi]. \quad (5.9)$$

Оценке функционалов  $\zeta_{NM}^R[\Psi]$  на различных классах  $\Psi$  и для различных кубатурных формул вычисления интегралов  $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2$  посвящено много работ (См. [14]).

Воспользовавшись неравенствами (5.8), (5.9) можно получить оценки функционала  $\zeta_{N_1 N_2}[\Psi]$  для различных функциональных классов  $\Psi$ . В частности, если  $\Psi = W^{r,s}(1)$ , то имеем  $\zeta_{N_1 N_2}[W^{r,s}(1)] \geq c N_1^{p_1-1} N_2^{p_2-1} (N_1^{-r} + N_2^{-s})$ . Если  $\Psi = C_2^r(1)$ , то имеем  $\zeta_{NN}[C_2^r(1)] \geq c n^{-(r/2-p+1)}$ , где  $n$  – число узлов кубатурной формулы (5.2).

Приступим к построению кубатурных формул.

Вначале рассмотрим кубатурные формулы интерполяционного вида.

Пусть  $\gamma_i = \{z_i : |z_i| = 1, i = 1, 2\}$ . В работе [15, стр. 151–152] для приближения функций  $\varphi(t)$ , заданных на единичной окружности  $\gamma$  с центром в начале координат, построен интерполяционный полином

$$L_N(\varphi, t) = \sum_{k=-N}^N \alpha_k t^k, \alpha_k = \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^N \varphi(v_j) v_j^{-k}, \quad (5.10)$$

$v_j = e^{2\pi i j / (2N+1)}$  и установлены следующие оценки:

$$\|L_N(\varphi, t)\|_{C(\gamma)} \leq \left( \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\pi} (2N+1) \right) \max_j |\varphi(v_j)|, \quad (5.11)$$

$$\|\varphi(t) - L_N(\varphi, t)\|_{C(\gamma)} \leq \left(1 + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\pi} (2N+1)\right) E_N(\varphi, \gamma), \quad (5.12)$$

где  $E_N(\varphi, \gamma)$  – наилучшее приближение функции  $\varphi(t)$  в равномерной метрике полиномами вида  $\sum_{k=-N}^N \alpha_k t^k$ .

Построим полином  $L_{NN}(\varphi; t_1, t_2)$  интерполирующий функции двух переменных  $\varphi(t_1, t_2)$ , определенных на  $\gamma_1 \times \gamma_2$ . По аналогии с формулой (5.10), имеем

$$L_{NN}(\varphi; t_1, t_2) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N \alpha_{kl} t_1^k t_2^l, \quad \alpha_{kl} = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{j_1=-N}^N \sum_{j_2=-N}^N \varphi(v_{j_1}, v_{j_2}) v_{j_1}^{-k} v_{j_2}^{-l}, \quad v_j = e^{2\pi j i / (2N+1)}. \quad (5.13)$$

Воспользовавшись неравенствами (5.11), (5.12) и учитывая [16], что константа Лебега интерполяции периодических функций по  $2N+1$  равноотстоящему узлу равна  $\lambda_N = O(\ln N)$ , получаем оценки

$$\|L_{NN}(\varphi; t_1, t_2)\|_{C(\gamma_1 \times \gamma_2)} \leq \beta^2 \max_{j_1, j_2} |\varphi(v_{j_1}, v_{j_2})|, \quad \beta = \left(\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\pi} (2N+1)\right) \quad (5.14)$$

$$\|\varphi(t_1, t_2) - L_{NN}(\varphi; t_1, t_2)\|_{C(\gamma_1 \times \gamma_2)} \leq c(\ln^2 N) (E_N^1(\varphi(t_1, t_2), \gamma_1) + E_N^2(\varphi(t_1, t_2), \gamma_2)). \quad (5.15)$$

Здесь  $E_N^i(\varphi(t_1, t_2), \gamma_i)$  – наилучшее приближение функции  $\varphi(t_1, t_2)$  по переменной  $t_i$  в равномерной метрике на окружности  $\gamma_i$  полиномами вида  $\sum_{k=-N}^N \alpha_k t_i^k, i=1, 2$ .

В качестве интерполяционной кубатурной формулы для вычисления интеграла  $C\varphi$  при  $l=2$  возьмем следующую:

$$C\varphi = \iint_{\gamma_1 \gamma_2} \frac{L_{NN}(\varphi; \tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} + R_{NN}(\varphi). \quad (5.16)$$

Прежде всего заметим, что кубатурная формула (5.16) легко реализуется. Воспользовавшись определением бигиперсингулярного интеграла, имеем

$$\begin{aligned} & \iint_{\gamma_1 \gamma_2} \frac{L_{NN}(\varphi; \tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} = \\ & = -\pi^2 \left\{ \sum_{k=-N}^{-1} \sum_{l=-N}^{-1} k(k-1) \cdots (k-p+2) l(l-1) \cdots (l-p+2) t_1^{k-p+1} t_2^{l-p+1} a_{kl} - \right. \\ & \quad - \sum_{k=-N}^{-1} \sum_{l=p-1}^N k(k-1) \cdots (k-p+2) l(l-1) \cdots (l-p+2) t_1^{k-p+1} t_2^{l-p+1} a_{kl} - \\ & \quad - \sum_{k=p-1}^N \sum_{l=-N}^{-1} k(k-1) \cdots (k-p+2) l(l-1) \cdots (l-p+2) t_1^{k-p+1} t_2^{l-p+1} a_{kl} + \\ & \quad \left. + \sum_{k=p-1}^N \sum_{l=p-1}^N k(k-1) \cdots (k-p+2) l(l-1) \cdots (l-p+2) t_1^{k-p+1} t_2^{l-p+1} a_{kl} \right\}. \end{aligned}$$

Оценим погрешность кубатурной формулы (5.16). Обозначим функцию  $\frac{\partial^{2p-2}}{\partial \tau_1^{p-1} \partial \tau_2^{p-1}}(\varphi(\tau_1, \tau_2) - L_{NN}(\varphi; \tau_1, \tau_2))$  через  $\psi^*(\tau_1, \tau_2)$ . Из определения гиперсингулярных интегралов следует, что

$$\begin{aligned} |R_{NN}(\varphi)| &\leq \left| \iint_{\gamma_1 \gamma_2} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) - L_{NN}(\varphi; \tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} d\tau_1 d\tau_2 \right| = \left| \iint_{\gamma_1 \gamma_2} \psi^*(\tau_1, \tau_2) \frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} \right| \leq \\ &\leq \pi^2 \left| \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi^*(\sigma_1, \sigma_2) \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \right| + \\ &+ \pi^2 \left| \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi^*(\sigma_1, \sigma_2) \frac{\sigma_1 - s_1}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \right| + \pi^2 \left| \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi^*(\sigma_1, \sigma_2) \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \right| + \\ &+ \pi^2 \left| \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi^*(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \right| = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \quad \psi^*(\sigma_1, \sigma_2) = \psi(e^{i\sigma_1}, e^{i\sigma_2}). \quad (5.17) \end{aligned}$$

Оценим интеграл  $I_1$ , т.к. он дает наибольший вклад в величину погрешности. Пусть  $\psi^*(\sigma_1, \sigma_2) \in H_{\alpha\alpha}(\gamma)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $\gamma = \text{const}$ . Очевидно,

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi^*(\sigma_1, \sigma_2) \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \right| = \\ &= \left| \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\psi^*(\sigma_1, \sigma_2) - \psi^*(s_1, \sigma_2) - \psi^*(\sigma_1, s_2) + \psi^*(s_1, s_2)) \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \right| \leq \\ &\leq 2\gamma \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sigma_1 - s_1|^{\alpha/2} |\sigma_2 - s_2|^{\alpha/2} \left| \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \frac{\sigma_2 - s_2}{2} \right| d\sigma_1 d\sigma_2 \leq 8\gamma(2\pi)^\alpha \pi^2 \frac{1}{\alpha^2}. \quad (5.18) \end{aligned}$$

Оценим величину  $\gamma$ . Для этого необходимо конкретизировать класс, к которому принадлежит функция  $\varphi(t_1, t_2)$ . Пусть  $\varphi(t_1, t_2) \in W^{r,r}(1)$ ,  $r \geq p$ .

Из формулы (5.15) следует, что  $\|\psi^*(s_1, s_2)\|_{\tilde{C}([0, 2\pi]^2)} \leq cN^{-r+2p-2} \ln^2 N$ .

Воспользовавшись результатами работ [17], [18] можно показать, что функция  $\psi^*(s_1, s_2) \in H_{\alpha\alpha}(\gamma)$ , где  $\gamma = cN^{-r-2+2p+\alpha}$ . Из неравенства (5.18) следует неравенство  $I_1 \leq c\alpha^{-2} N^{-r-2+2p+\alpha} \ln^2 N$ . Аналогичные рассуждения приводят к неравенствам  $I_2 \leq c\alpha^{-1} N^{-r-2+2p+\alpha} \ln^2 N$ ,  $I_3 \leq c\alpha^{-1} N^{-r-2+2p+\alpha} \ln^2 N$ ,  $I_4 \leq cN^{-r-2+2p+\alpha} \ln^2 N$ .

Таким образом, получена оценка  $|R_{NN}(\varphi)| \leq c\alpha^{-2} N^{-r-2+2p+\alpha} \ln^2 N$ .

Полагая  $\alpha = 1/\ln N$ , имеем  $|R_{NN}(\varphi)| \leq cN^{-r-2+2p} \ln^4 N$ .

Так как  $\varphi$  – произвольная функция из  $W^{r,r}$ , то справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.1.** Пусть  $\varphi(t) \in W^{r,r}(1)$ ,  $r \geq p$ . Кубатурная формула (5.16) имеет погрешность  $R_{NN}[W^{r,r}(1)] \leq cN^{-(r+2-2p)} \ln^4 N$ .

Аналогичным образом доказывается

**Теорема 3.2.** Пусть  $\varphi(t) \in C_2^r(1)$ ,  $r \geq 2p-1$ . Кубатурная формула (5.16) имеет погрешность  $R_{NN}[C_2^r(1)] \leq cN^{-(r+2-2p)} \ln^4 N$ .

Из сравнения этих оценок с оценками снизу функционалов  $\zeta_{NN}(W^{r,r}(1))$  и  $\zeta_{NN}[C_2^r(1)]$  следует, что погрешность кубатурной формулы (5.18) в  $O(\ln^2 n)$  раз больше величин упомянутых функционалов. Поэтому представляет интерес построение оптимальных по порядку кубатурных формул, которые были бы достаточно простыми при реализации.

В качестве такого алгоритма рассмотрим следующую кубатурную формулу. Для простоты ограничимся рассмотрением интеграла (5.5).

Пусть функция  $\varphi \in C_2^r(1)$ . Пусть  $n$  – натуральное число,  $N = rn$ . Введем сетку узлов  $(t_k, t_l)$ ,  $k, l = 0, 1, \dots, N$ ,  $t_k = 2k\pi/N$ , и  $(v_k, v_l)$ ,  $k, l = 0, 1, \dots, n$ ,  $v_k = 2k\pi/n$ . Покроем квадрат  $[0, 2\pi]^2$  более мелкими квадратами  $\Delta_{k,l} = [v_k, v_{k+1}; v_l, v_{l+1}]$ ,  $k, l = 0, 1, \dots, n$ . Обозначим через  $P_{r,r}(\varphi, \Delta_{k,l})$  интерполяционный полином степени  $r$  по каждой переменной, построенный в области  $\Delta_{k,l}$  по  $r+1$  равноотстоящему узлу по переменной  $\sigma_1$  и по  $r+1$  равноотстоящему узлу по переменной  $\sigma_2$ . Отметим, что вершины квадрата  $\Delta_{k,l}$  входят в число узлов интерполяции.

Пусть  $(s_1, s_2) \in \Delta_{ij}$ . Интеграл (5.5) будем вычислять по формуле

$$\begin{aligned}
H\varphi \equiv & \int \int_{\Delta_{i,j}^{***}} P_{3r,3r}(\varphi, \Delta_{i,j}^{***})^p \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 + \\
& + \sum_{k=0}^{i-2} \int \int_{\Delta_{k,j}^{**}} P_{r,3r}(\varphi, \Delta_{k,j}^{**}) \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 + \\
& + \sum_{k=i+2}^{n-1} \int \int_{\Delta_{k,j}^{**}} P_{r,3r}(\varphi, \Delta_{k,j}^{**}) \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 + \\
& + \sum_{l=0}^{j-2} \int \int_{\Delta_{i,l}^*} P_{3r,r}(\varphi, \Delta_{i,l}^*) \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 + \\
& + \sum_{l=j+2}^{n-1} \int \int_{\Delta_{i,l}^*} P_{3r,r}(\varphi, \Delta_{i,l}^*) \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 + \\
& + \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=0}^{j-2} \int \int_{\Delta_{k,l}} P_{r,r}(\varphi, \Delta_{k,l}) \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 + \\
& + \sum_{k=i+2}^{n-1} \sum_{l=0}^{j-2} \int \int_{\Delta_{k,l}} P_{r,r}(\varphi, \Delta_{k,l}) \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 + \\
& + \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=j+2}^{n-1} \int \int_{\Delta_{k,l}} P_{r,r}(\varphi, \Delta_{k,l}) \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 + \\
& + \sum_{k=i+2}^{n-1} \sum_{l=j+2}^{n-1} \int \int_{\Delta_{k,l}} P_{r,r}(\varphi, \Delta_{k,l}) \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 + R_m(\varphi).
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Здесь  $\Delta_{i,j}^{***} = [t_{i-1}, t_{i+2}; t_{j-1}, t_{j+2}]$ ,  $\Delta_{k,j}^{**} = [t_k, t_{k+1}; t_{j-1}, t_{j+2}]$ ,  $k = 0, 1, \dots, i-2, i+2, \dots, n-1$ ,  
 $\Delta_{i,l}^* = [t_{i-1}, t_{i+2}; t_l, t_{l+1}]$ ,  $l = 0, 1, \dots, j-2, j+1, \dots, n-1$ .

Погрешность кубатурной формулы (5.19) оценивается неравенством

$$\begin{aligned}
|R_m(\varphi)| \leq & \left| \int \int_{\Delta_{ij}^{***}} \psi(\sigma_1, \sigma_2; \Delta_{ij}^{***}) \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \right| + \\
& + \sum_{k=0}^{i-2} \left| \int \int_{\Delta_{ij}^{**}} \psi(\sigma_1, \sigma_2; \Delta_{ij}^{**}) \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \right| + \\
& + \sum_{k=i+2}^{n-1} \left| \int \int_{\Delta_{ij}^{**}} \psi(\sigma_1, \sigma_2; \Delta_{ij}^{**}) \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \right| + \\
& + \sum_{l=0}^{j-2} \left| \int \int_{\Delta_{il}^*} \psi(\sigma_1, \sigma_2; \Delta_{il}^*) \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \right| + \\
& + \sum_{l=j+2}^{n-1} \left| \int \int_{\Delta_{il}^*} \psi(\sigma_1, \sigma_2; \Delta_{il}^*) \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \right| + \\
& + \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=0}^{j-2} \left| \int \int_{\Delta_{kl}} \psi(\sigma_1, \sigma_2; \Delta_{kl}) \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \right| + \\
& + \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=j+2}^{n-1} \left| \int \int_{\Delta_{kl}} \psi(\sigma_1, \sigma_2; \Delta_{kl}) \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \right| + \\
& + \sum_{k=i+2}^{n-1} \sum_{l=0}^{j-2} \left| \int \int_{\Delta_{kl}} \psi(\sigma_1, \sigma_2; \Delta_{kl}) \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \right| + \\
& + \sum_{k=i+2}^{n-1} \sum_{l=j+2}^{n-1} \left| \int \int_{\Delta_{kl}} \psi(\sigma_1, \sigma_2; \Delta_{kl}) \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \operatorname{ctg}^p \frac{\sigma_2 - s_2}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \right| = I_1 + \dots + I_9, \quad (5.20)
\end{aligned}$$

где  $\psi(\sigma_1, \sigma_2; \Delta_{ij}^{***}) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2) - P_{3r,3r}(\varphi, \Delta_{ij}^{**})$ ;  $\psi(\sigma_1, \sigma_2; \Delta_{kj}^{**}) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2) - P_{r,3r}(\varphi, \Delta_{kj}^{**})$ ,  
 $k = 0, 1, \dots, i-2, i+2, \dots, n-1$ ;  $\psi(\sigma_1, \sigma_2; \Delta_{il}^*) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2) - P_{3r,r}(\varphi, \Delta_{il}^*)$ ,  $l = 0, 1, \dots, j-2, j+2, \dots, n-1$ ;  
 $\psi(\sigma_1, \sigma_2; \Delta_{kl}) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2) - P_{r,r}(\varphi, \Delta_{kl})$ ,  $k = 0, 1, \dots, i-2, l = 0, 1, \dots, j-2$ ;  
 $k = l+2, \dots, n-1, l = 0, 1, \dots, j-2$ ;  $k = 0, 1, \dots, i-2, l = j+2, \dots, n-1$ ;  $k = i+2, \dots, n-2, l = j+2, \dots, n-2$ .

Оценим каждое слагаемое в формуле (5.20) в отдельности. Очевидно,

$$\begin{aligned}
I_1 & \leq An^{2p-2} \max_{(\sigma_1, \sigma_2) \in \Delta_{ij}^{***}} |\psi(\sigma_1, \sigma_2; \Delta_{ij}^{***})| \leq An^{-r+2p-2}; \\
I_2 & \leq An^{2p-2} \sum_{k=i+2}^{n-1} \sum_{l=0}^{j-2} \frac{1}{(k-i)^p} \max_{(\sigma_1, \sigma_2) \in \Delta_{kl}^*} |\psi(\sigma_1, \sigma_2; \Delta_{kl}^*)| \leq An^{-r+2p-2};
\end{aligned}$$



$$I_6 \leq An^{2p} \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=0}^{j-2} \frac{1}{(i-k)^p} \frac{1}{(j-l)^p} \int \int_{\Delta_{kl}} |\psi(\sigma_1, \sigma_2; \Delta_{kl})| d\sigma_1 d\sigma_2 \leq An^{-r+2p-2}.$$

Слагаемые  $I_3, I_4, I_5$  оцениваются по аналогии с оценкой суммы  $I_2$ , а слагаемые  $I_7, I_8, I_9$  оцениваются по аналогии с оценкой суммы  $I_6$ .

В результате имеем  $|R_n(\varphi)| \leq An^{-r+2p-2}$ . Так как  $\varphi$  – производная функции из класса  $C_2^r(1)$ , то приходим к оценке  $R_m[C_2^r(1)] \leq An^{-r+2p-2}$ .

Из сопоставления этой оценки с оценкой снизу функционала  $\zeta_m[C_2^r(1)]$  приходим к заключению, что кубатурная формула (5.19) является оптимальной по порядку на классе функций  $C_2^r(1)$ .

**Теорема 3.3.** Среди всевозможных кубатурных формул вида (5.6) формула (5.19) является оптимальной по порядку на классах функций  $W^{r,r}(1)$  и  $C_2^r(1), r \geq p$ . Ее погрешность равна  $R_{NN}[W^{r,r}(1)] \asymp R_{NN}[C_2^r(1)] \asymp N^{-(r-2p+2)} \asymp m^{-(r-2p+2)/2}$ , где  $m$  – число узлов кубатурной формулы (5.19).

Аналогичным образом строятся оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления гиперсингулярных интегралов вида (5.1).

Рассмотрим гиперсингулярный интеграл вида

$$\Gamma \varphi = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} d\tau_1 d\tau_2, -1 \leq t_1, t_2 \leq 1, \quad (5.21)$$

Интегралу (5.21) поставим в соответствие кубатурную формулу

$$\Gamma \varphi = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p p_{kl ij}(t_1, t_2) \varphi^{(i,j)}(x_k, y_l) + R_{NN}(x_k, y_l; p_{kl ij}; \varphi), \quad (5.22)$$

где  $(x_k, y_l) \in [-1, 1]^2$  – узлы кубатурной формулы,  $p_{kl ij}(t_1, t_2)$  – коэффициенты кубатурной формулы; величина  $\rho$  определяется гладкостью функции  $\varphi$ .

Пусть  $\varphi(t_1, t_2) \in W^{r,r}(1)$  или  $\varphi(t_1, t_2) \in C_2^r(1)$ . Пусть  $N$  – целое число,  $n = [N/r]$ . Для простоты обозначений будем полагать  $N$  кратным  $r$ . Введем узлы  $v_k = -1 + 2k/n, k = 0, 1, \dots, n$ . Пусть  $\Delta_{kl} = [v_k, v_{k+1}; v_l, v_{l+1}]$ .

Пусть  $(t_1, t_2) \in \Delta_{ij}$ . Интеграл (5.21) будем вычислять по кубатурной формуле

$$\begin{aligned} \Gamma \varphi = & \int \int_{\Delta_{ij}^{***}} P_{3r, 3r}(\varphi, \Delta_{ij}^{***}) \frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} + \sum_{k=0}^{i-2} \int \int_{\Delta_{k,j}^*} P_{r, 3r}(\varphi, \Delta_{k,j}^{**}) \frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} + \\ & + \sum_{k=i+2}^{n-1} \int \int_{\Delta_{k,j}^*} P_{r, 3r}(\varphi, \Delta_{k,j}^{**}) \frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} + \sum_{l=0}^{j-2} \int \int_{\Delta_{i,l}^*} P_{3r, r}(\varphi, \Delta_{i,l}^*) \frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} + \\ & + \sum_{l=j+2}^{n-1} \int \int_{\Delta_{i,l}^*} P_{3r, r}(\varphi, \Delta_{i,l}^*) \frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} + \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=0}^{j-2} \int \int_{\Delta_{k,l}} P_{r, r}(\varphi, \Delta_{k,l}) \frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} + \\ & + \sum_{k=0}^{i-2} \sum_{l=j+2}^{n-1} \int \int_{\Delta_{k,l}} P_{r, r}(\varphi, \Delta_{k,l}) \frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} + \sum_{k=j+2}^{n-1} \sum_{l=0}^{j-2} \int \int_{\Delta_{k,l}} P_{r, r}(\varphi, \Delta_{k,l}) \frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=i+2l=j+2}^{n-1} \sum_{\Delta_{k,l}}^{n-1} \int \int P_{r,r}(\varphi, \Delta_{k,l}) \frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^p (\tau_2 - t_2)^p} + R_{nn}(\varphi), \quad (5.23)$$

где  $\Delta_{i,j}^{***} = [v_{i-1}, v_{i+2}; v_{j-1}, v_{j+2}]$ ,  $\Delta_{k,j}^{**} = [v_k, v_{k+1}; v_{j-1}, v_{j+2}]$ ,  $k = 0, 1, \dots, i-2, i+2, \dots, n-1$ ,  
 $\Delta_{i,l}^* = [v_{i-1}, v_{i+2}; v_l, v_{l+1}]$ ,  $l = 0, 1, \dots, j-2, j+2, \dots, n-1$ .

По аналогии с доказательствами теоремы 3.3 доказывается следующее утверждение.

**Теорема 3.4.** Среди всевозможных кубатурных формул вида (5.22) формула (5.23) является оптимальной по порядку на классах функций  $W^{r,r}(1)$  и  $C_2^r(1)$ ,  $r \geq p$ . Ее погрешность равна  $R_{NN}[W^{r,r}(1)] \asymp R_{NN}[C_2^r(1)] \asymp N^{-(r-2p+2)} \asymp m^{-(r-2p+2)/2}$ , где  $m$  – число узлов кубатурной формулы (3.25).

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Hadamard J. Lecons sur la Propagation des Ondes et les Equations de l'Hydrodynamique. Herman/ J. Hadamard. – Paris. 1903. – 320 p. (reprinted by Chelsea. – New York. –1949).
2. Некрасов, А. И. Теория крыла в нестационарном потоке / А. И. Некрасов. – М. : Изд-во АН СССР, 1947. – С. 3-65.
3. Бисплингхофф, Р. Аэроупругость / Р. Бисплингхофф, Х. Эшли, Р. Халфмен. – М.: Иностран. лит., 1958. – 283 с.
4. Эшли, Х. Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов / Х. Эшли, М. Лэндал. – М. : Машиностроение, 1969. – 129 с.
5. Вайникко, Г. М. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г. М. Вайникко, И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский. – М : Янус-К, 2001. – 508 с.
6. Назарчук, З. Т. Численное исследование дифракций на цилиндрических структурах/ З. Т. Назарчук. – Киев : Наук. думка, 1989. –256 с.
7. Марчук, Г. И. Численные методы в теории переноса нейтронов / Г. И. Марчук, В. И. Лебедев. – М. : Атомиздат. 1971. – 496 с.
8. Бойкова, А. И. Об одном приближенном методе вычисления трансформаций потенциальных полей/ А. И. Бойкова // Известия РАН. Физика Земли, 2004. – № 1. – С. 58–69.
9. Boikov, I. V. Numerical methods of computation of singular and hypersingular integrals / I. V. Boikov // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 28(3), (2001). – P. 127–179.
10. Бойков, И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов / И. В. Бойков. – Часть вторая. Гиперсингулярные интегралы. Пенза: Издательство Пензенского государственного университета, 2009. – 252 с.
11. Адамар, Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М.: Наука, 1978. – 351с.

12. Бахвалов, Н. С. О свойствах оптимальных методов решения задач математической физики / Н. С. Бахвалов // Журнал вычислит. матем. и матем. Физики, 1970. – Т. II, № 3. – С. 555-568.
13. Мусхелешвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1968. – 511 с.
14. Никольский, С. М. Квадратурные формулы / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1979. – 254 с.
15. Иванов, В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений / В. В. Иванов. – Киев. : Наукова думка, 1968. – 288 с.
16. Натансон, И. П. Конструктивная теория функций/ И. П. Натансон. – М. ; Л. : ГИФМЛ, 1949. – 688 с.
17. Стечкин, С. Б. О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами / С. Б. Стечкин // Изв. АН СССР. Серия математическая, 1956. –Т. 20. – С. 197-206.
18. Gaier D. Konstruktive Methoden der Konformen Abbildung/ D. Gaier. – Berlin – Heidelberg: Springer, 1964. – 294 p.

**И. П. Борискина, Н. В. Дворянинова** (г. Саранск)

## **ДИНАМИКА ЧАСТИЦ В ЗВУКОВОЙ ВОЛНЕ С УЧЕТОМ ПАРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ**

*В данной статье рассматривается динамика частиц в звуковой волне и влияние различных факторов на поведение частиц в звуковой волне: первоначальная ориентация частиц относительно скорости набегающего потока жидкости, относительно начальной фазы волны. Исследования показывают, что возможно как сближение частиц, так и их удаление друг от друга. Полученные результаты по динамике частиц в звуковой волне могут быть использованы для вычисления интенсивности рассеяния энергии звуковой волны с учетом взаимодействия частиц.*

Звуковые волны представляют собой колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемой жидкости.

Рассмотрим две одинаковые сферические частицы  $A$  и  $B$ , помещенные в поток жидкости, соответствующий распространению монохроматической звуковой волны, в которой все величины являются гармоническими функциями времени. Для плоской монохроматической волны, распространяющейся в положительном направлении оси  $x$ , скорость невозмущенного течения жидкости имеет вид [2]:

$$V_i = v_{oi} \cos(k\vec{r}_A - \omega t),$$

где  $k$  – волновой вектор,  $\vec{r}$  – радиус-вектор центра сферы  $A$ ,  $\omega$  – частота волны,  $t$  – время.

Плоская монохроматическая волна представляет интерес в связи с тем, что всякую волну можно представить в виде совокупности плоских монохроматических волн с различными волновыми векторами и частотами.

Длину волны  $\lambda$  будем считать много большей расстояния  $r$  между частицами  $\lambda \gg r$ . В этом случае скорость  $V_i$  невозмущенного течения жидкости для плоской волны в окрестности частиц можно представить в виде ряда. В линейном приближении по координатам получим

$$V_i \approx v_{oi} \cos(k\vec{r}_A - \omega t) - v_{oi} k \sin(k\vec{r}_A - \omega t) x_j. \quad (1)$$

Легко видеть, что полученное выражение (1) аналогично записи

$$V_i(t) = V_{oi} \cos(t) + E_{ij}(t) x_j,$$

$$V_{oi}(t) = v_{oi} \cdot \cos(k\vec{r}_A - \omega t), \quad E_{ij}(t) = -v_{oi} \cdot k \sin(k\vec{r}_A - \omega t).$$

$$E_{ij} = E_{ji}, \quad E_{ii} \neq 0.$$

Потенциал  $\varphi$  возмущенного поля скоростей вблизи частиц в силу условия  $\lambda \gg r$  удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Но это – уравнение, определяющее потенциальное движение несжимаемой жидкости. Значит, сила  $\vec{F}$ , действующая на частицы  $A$  и  $B$  в звуковой волне, вычисляется как [2]:

$$F_s = -\oint \Pi_{ik} n_k ds.$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} m_A \frac{d^2 \vec{r}_A}{dt^2} = \vec{F}^A \\ m_A \frac{d^2 \vec{r}_B}{dt^2} = \vec{F}^B \end{cases} \quad (2)$$

определяем скорости сфер  $A$  и  $B$  в звуковой волне, что позволит проследить динамику частиц в звуковой волне с учетом парных взаимодействий и при различных значениях начальной фазы  $k \cdot \vec{r}_A$ . Обезразмерим систему уравнений (2). Для этого введем следующим образом безразмерные переменные:

$$\begin{cases} r_1^A[t] = Rx_1^*[t] \\ r_2^A[t] = Rx_2^*[t], \\ r_3^A[t] = Rx_3^*[t] \end{cases} \quad \begin{cases} r_1^B[t] = r_o r_1^*[t] \\ r_2^B[t] = r_o r_2^*[t] \\ r_3^B[t] = r_o r_3^*[t] \end{cases}$$

$$\dot{r}_i^A[t] = R w \dot{r}_i^{A*}[t], \dot{r}_i^B[t] = r_o w \dot{r}_i^{B*}[t], r[t] = r_o r^*[t], t = w t^*,$$

$$g_1^*[t] = \sin(V x_1^*[t] - t^*),$$

$$g_2^*[t] = \cos(V x_1^*[t] - t^*),$$

$$g_3^*[t] = \cos(V x_1^*[t] - t^*)(V \dot{x}_1^*[t] - 1),$$

$$g_4^*[t] = \sin(V x_1^*[t] - t^*)(V \dot{x}_1^*[t] - 1).$$

Введем обозначения:

$$r[t] = \sqrt{x_2^2[t] + y_2^2[t] + z_2^2[t]}, \frac{v_0}{c} = V, \frac{w}{k} = c, kR = u, \frac{r_0}{R} = d, R = \frac{v_0}{w}, \frac{l_\rho}{l_e} = l.$$

На следующих графиках представлена зависимость безразмерных функций  $x_1^*[t]$ ,  $x_2^*[t]$ ,  $x_3^*[t]$ , характеризующих изменение координат точки  $A$ , и функции  $a/r$ , характеризующей изменение относительного положения точки  $B$ , от времени в звуковой волне для случая, когда  $l = 0.5$  при различных начальных положениях частиц относительно друг друга и начальной фазе волны.

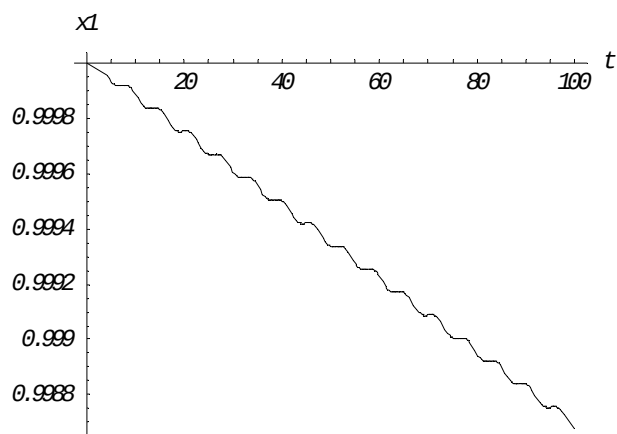


Рис. 1. Изменение координаты  $x$  одиночной сферы  $A(1,0,0)$  в волне при начальной фазе  $\psi = \pi/4$

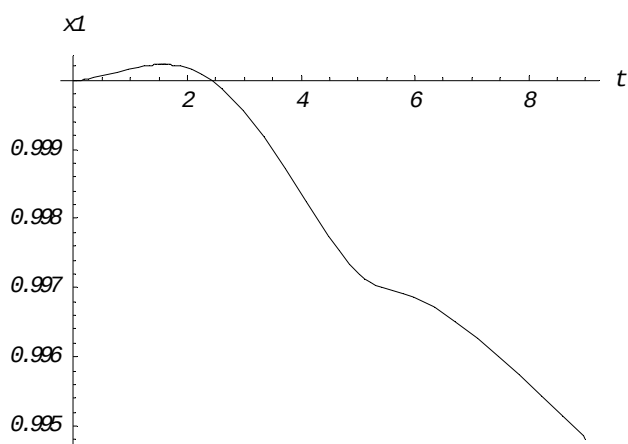


Рис. 2. Изменение координаты  $x$  сферы  $A(1,0,0)$  при наличии сферы  $B(0,0.1,0)$  при начальной фазе  $\psi = \pi/4$

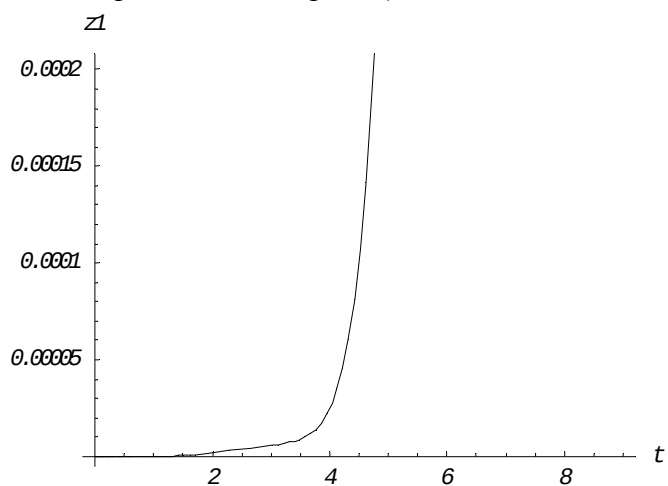


Рис. 3. Изменение координаты  $z$  сферы  $A(1,0,0)$  при наличии сферы  $B(0,0.1,0)$  при начальной фазе  $\psi = \pi/4$

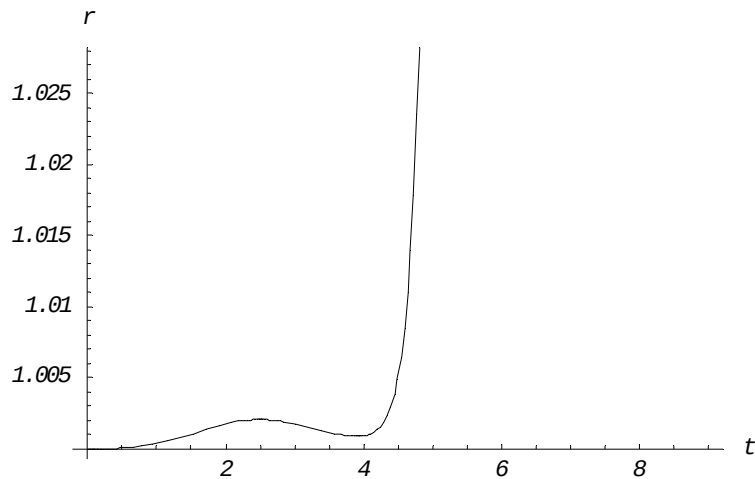


Рис. 4. Движение сферы  $B(0,0.1,0)$  относительно сферы  $A(1,0,0)$  при начальной фазе  $\psi = \pi/4$

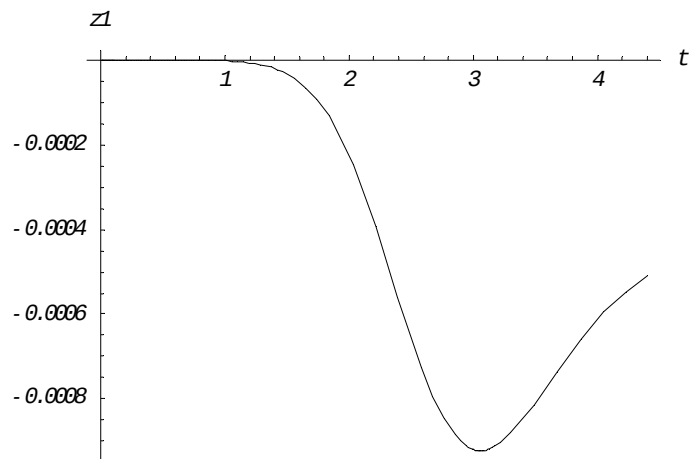


Рис. 5. Изменение координаты  $z$  сферы  $A(1,0,0)$  при наличии сферы  $B(1.1,0,0)$  при начальной фазе  $\psi = \pi/4$

Как видно из графиков (рис. 1. – рис. 5.), гидродинамическое взаимодействие частиц существенно влияет на их движение в звуковой волне (сравнение со случаем одиночной частицы в волне рис. 1.). При этом, в отличие от случая взаимодействия частиц в однородном течении с постоянной скоростью, объединение частиц возможно в случае, когда они находятся одна за другой относительно направления распространения волны. Полученные результаты согласуются с выводами о возможном объединении частиц, полученными в работе [1].

Полученные результаты по взаимодействию частиц в звуковой волне используем для определения количества рассеиваемой энергии.

Если на пути распространения звуковой волны находится какое-либо тело, то происходит рассеяние звука. Это связано с появлением дополнительных волн, распространяющихся во все стороны [2, 3]. Рассеяние звуковой волны вызвано уже наличием самого тела. Кроме того, под влиянием

звуковой волны само тело приходит в движение, что вызывает некоторое дополнительное излучение звука телом, то есть дополнительное рассеяние.

Если длина излучаемой волны велика по сравнению с расстоянием  $r$  между частицами  $A$  и  $B$  в звуковой волне  $\lambda \gg r$ , что вблизи сфер  $A$  и  $B$  движение определяется уравнение Лапласа [2]:

$$\Delta\psi = 0$$

где  $\psi$  – потенциал возмущенного поля скоростей в рассеянной волне. Следовательно, на больших расстояниях от частиц потенциала  $\psi$  рассеянной волны может быть представлен в виде ряда по мультиполям аналогично случаю взаимодействия частиц в звуковой волне или несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} \psi = & E_{ii}S(L_o^A + L_o^B) + H_i^{(1)}(L_i^A - L_i^B) + F_{ij}^{(1)}(L_{ijo}^A + L_{ij}^B) + \\ & + G_{ijk}^{(1)}(L_{ijk}^A - L_{ijk}^B) + \dots + H_i^{(2)}L_i^A + H_i^{(2)}L_i^B + F_{ij}^{(2)}L_{ij}^A + F_{ij}^{(2)}L_{ij}^B + \quad (3) \\ & + G_{ijk}^{(2)}L_{ijk}^A + G_{ijk}^{(2)}L_{ijk}^B + \dots \end{aligned}$$

Распределение скорости зависит от расстояний до центров частиц. На больших расстояниях от частиц решение (3) должно совпадать с решением волнового уравнения для сферических волн [2]:

$$\psi = \frac{f_1(ct - r)}{r} + \frac{f_2(ct + r)}{r}.$$

Первый член представляет собой расходящуюся волну, второй – волна, сходящаяся к центру.

В выражении (3) при условии  $\lambda \gg r$  получим

$$\begin{aligned} L_0^A = \frac{1}{x_A}, L_0^B = \frac{1}{x_B} = \frac{1}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{r}^2 - 2\bar{x}_A \cdot \bar{r}_A}} \approx \frac{1}{x_A}, \\ L_i^A = -\frac{\bar{x}_i^A}{\bar{x}_A^3}, L_i^B = -\frac{\bar{x}_i^B}{\bar{x}_B^3} = \frac{\bar{x}_i^A - \bar{r}_i^A}{(\bar{x}_A^2 + \bar{r}_A^2 - 2\bar{x}_A \cdot \bar{r}_A)^{3/2}} \approx -\frac{\bar{x}_i^A}{\bar{x}_A^3}. \end{aligned}$$

Ограничимся в выражении (3) только членами, наименее быстро убывающими с ростом  $r$ , получим, что потенциал рассеянной волны равен

$$\psi = 2E_{ii}SL_o^A + \frac{d(H_j^{(1)} + H_j^{(2)})}{dt}L_i^A.$$

Тогда скорость жидкости в рассеянной волне равна

$$v_i = \frac{dE_{ij}}{dt} \cdot \frac{2Sx_i}{cx^2} + 2 \frac{d^2(H_j^{(1)} + H_j^{(2)})}{2t^2} \cdot \frac{x_j x_i}{c^2 x^3}. \quad (4)$$

Здесь в соответствии с решением волнового уравнения

$$E_{ii}(t) \sim E_{ii}\left(t - \frac{x}{c}\right), H_j^{(1)}(t) \sim H_j\left(t + \frac{x}{c}\right), H_j^{(2)}(t) \sim H_j\left(t + \frac{x}{c}\right),$$

где  $c$  – скорость звука.



Среднее количество рассеиваемой за одну секунду энергии в данном элементе телесного угла  $d\Omega$  определяется произведением  $c p v^2 d\Omega$ . Полная интенсивность  $I$  рассеяния получается интегрированием выражения (4) по всем направлениям рассеяния. При этом интегрировании удвоенное произведение обоих членов в (4), пропорциональное первой степени косинуса угла между направлением рассеяния и направлением распространения звуковой волны, исчезает, и получаем следующее выражение:

$$I = 16\pi\rho \left\langle \left( \frac{dE_{jj}}{dt} \right)^2 \right\rangle > \frac{S}{c} + 16\pi\rho \left\langle \left( \frac{dH_j}{dt^2} \right)^2 \right\rangle > \frac{1}{3c}.$$

Здесь скобками « $\langle \rangle$ » определены усредненные параметры. Усреднение элементов осуществляется по правилу  $\langle a \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt$ . Таким образом, исследование распространения звуковых волн в дисперсных средах показывает, что гидродинамическое взаимодействие дисперсных частиц влияет на рассеивание звука.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Горьков Л. П. О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости // ДАН СССР. – 1961. – Т. 140. – № 1. – С.88-91.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
3. Рэлей. Теория звука. – М.: ИЛ., 1955. – Т. 1. – 503 с.

## MODIFICATIONS OF ALGORITHM QUICK SORT

*The main idea in quick sort algorithm is swapping of elements which are maximal remote. Most important step from algorithm is selection of median element. This paper presents two heuristic algorithms for median finding. The faster approach is variant 1 which select middle value from elements with indices  $n/4$ ,  $n/2$  and  $3*n/4$ . When sorting 100000 integers variant 1 is faster than quick sort algorithm.*

## INTRODUCTION

Sorting of numbers is basic operation in many programs. In many cases it is necessary sorting of large arrays. These means that we needs from faster sorting algorithms. Sorting algorithms are dividing in two groups [1]:

- private sorting algorithms: they are applicable for objects with specific characteristics;
- common (universal) sorting algorithms. Examples of algorithms of this group are: straight selection algorithm, bubble sort algorithm, quick sort algorithm and etc.

The faster sorting algorithm is Quick sort [1, 2, 3, 4, 6]. Efficiency of this algorithm depends of median selection. The algorithm is recursive and use exchanges of elements which are outermost one from other. On figure 1 is shown execution of Quick sort algorithm for 9 numbers which values are from 1 to 9. Median value is 5 which is ideal case.

Time complexity of Quick sort algorithm is [1, 2, 3]:

- $T_{\min} = O(n \log n)$ , minimal time complexity which is received when on every division we have two parts with approximately equal number of the array elements;
- $T_{\text{cp.}} = O(n \log n)$ , average time complexity;

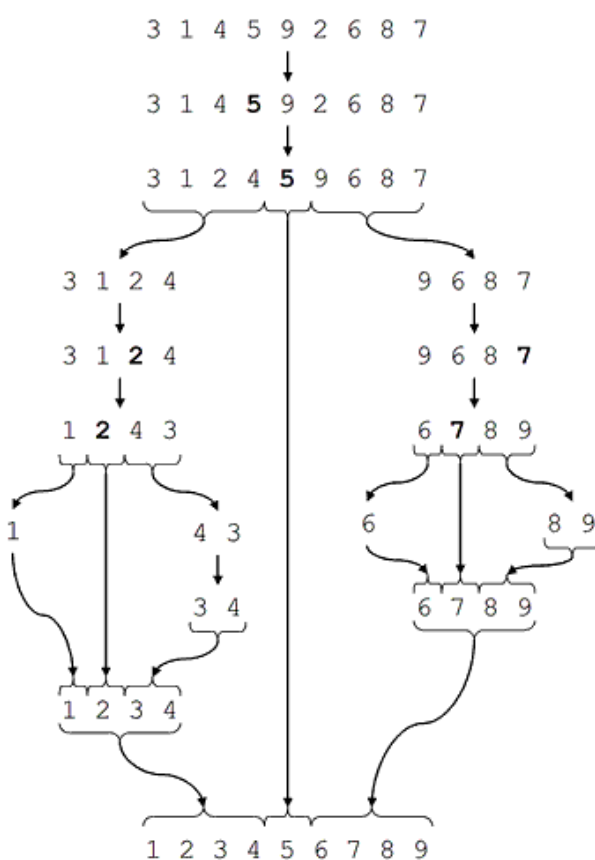


Fig.1. Execution of Quick sort algorithm

-  $T_{\max} = O(n^2)$ , maximal time complexity which is received when on every division we have one part with one element and second part with other elements.

First version of Quick sort algorithm appears in 1960. In this version median element is selected to be middle element in processed part of the array. Later Quick sort algorithm is modified. The median value already selected among three values – first, middle and last elements in processed part of the array. Quick sort algorithm sorts the array while processed parts are bigger than 10 elements. When processed parts are with 10 elements we sort them with direct insert algorithm.

## FINDING MEDIAN IN SET OF NUMBERS

The median value in set of numbers is middle by value element in sorted row. To find median in set of numbers we can use algorithm for finding of k-th element without sorting of all elements [1, 5, 6]. This algorithm finds exact median but works slowly. Therefore Quick sort algorithm uses a heuristic approach to find current median. The median value is middle value in sorted order of three elements – first, middle and last elements in processed part of the array. This paper presents two heuristic approaches to find median. These approaches are applied in Quick sort algorithm.

**Variant 1:** The median is middle value in sorted order of three elements with indices  $n/4$ ,  $n/2$  and  $3*n/4$ . With  $n$  is denoted number of elements in processed part of the array. On figure 2 is shown variant 1 for median finding.

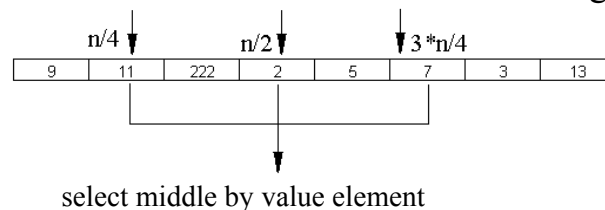


**Fig.2.** Variant 1 for selection of median

**Variant 2:** The median is middle value in sorted order of five elements with indices 1,  $n/4$ ,  $n/2$ ,  $3*n/4$  and  $n$ . With  $n$  is denoted number of elements in processed part of the array. On figure 3 is shown variant 2 for median finding.

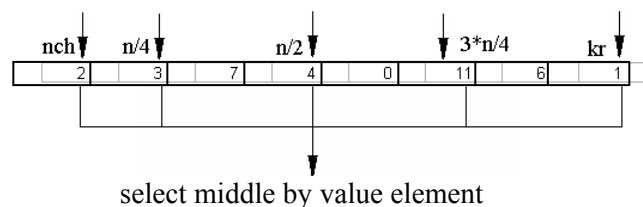


**Fig.3.** Variant 2 for selection of median

In variant 1 for median selection are used tree values. In variant 2 for median selection are used five values.

## PROGRAM IMPLEMENTATION

Variant 1 and variant 2 (fig.2 and fig.3) are implemented on C++ in Microsoft Visual Studio 2005 version 8 [7, 8]. Both variants are implemented in functions. These functions are used for selection of median element. We read numbers for sorting from file. After sorting we write sorted numbers in other file. On figure 4 is shown principle schema of implemented program. The extension of file with numbers for sorting is txt. First number in this file shows what count of the numbers is. First number in file with sorted numbers also shows what count of the numbers is.

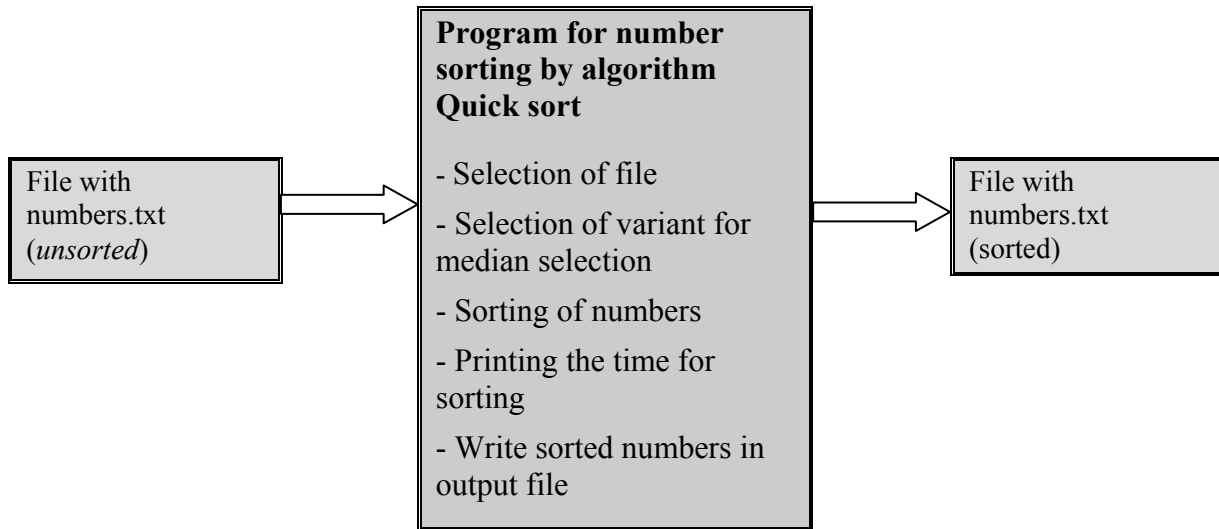


**Fig.4.** Principle schema of program for numbers sorting

When you start the program you must select file with numbers for sorting. Next step is selection of variant for median selection. (We can make a choice among tree options for median selection – using first, middle and last elements; using  $n/4$ ,  $n/2$  and  $3*n/4$  elements; using first,  $n/4$ ,  $n/2$ ,  $3*n/4$  and last elements.) After numbers sorting on the screen is printed time for processing. The program saves sorted numbers in file which name is selected from user.

For our experiments we use files with numbers which are received by random generation. (For number generation is used function `rand()`.) On figure 5 is shown block-schema of algorithm of program for generation of numbers. We use this program to make files with different count random integers.

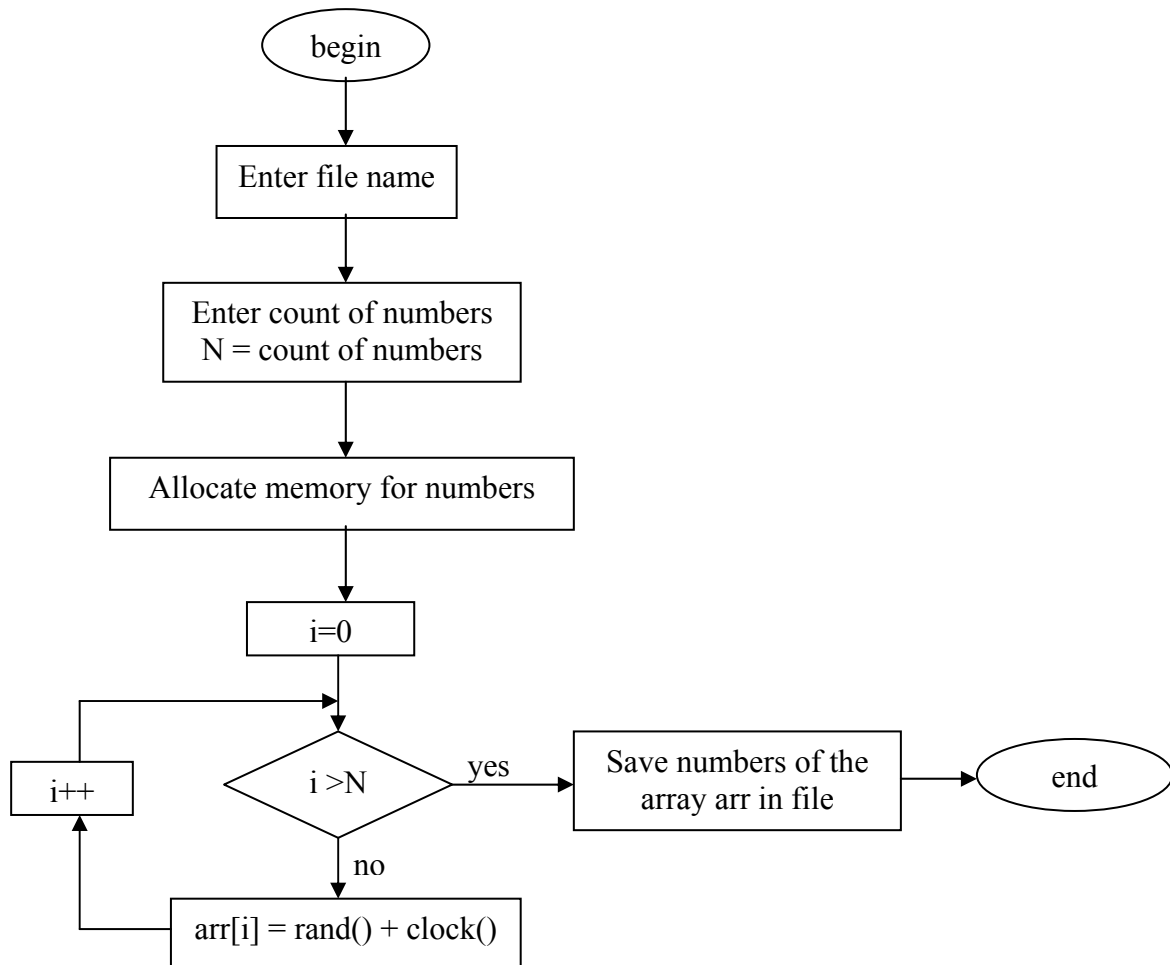


*Fig.5. Block-schema of algorithm for generation of random numbers*

## EXPERIMENTAL RESULTS

Table 1 shows time for processing of 1000 integers. It is used 10 different files. Last row in table shows average time for sorting of this 1000 numbers. Used files are received by our program for generation of files with random numbers (fig.5).

|         | Quick sort | вариант 1 | вариант 2 |
|---------|------------|-----------|-----------|
| 1       | 0          | 0         | 0         |
| 2       | 0          | 0         | 0         |
| 3       | 0          | 0         | 0         |
| 4       | 0          | 0         | 0         |
| 5       | 0          | 0         | 0         |
| 6       | 0          | 0         | 0         |
| 7       | 0          | 0         | 0         |
| 8       | 0          | 0         | 0         |
| 9       | 0          | 0         | 0         |
| 10      | 0          | 0         | 0         |
| average | 0          | 0         | 0         |

**Table 1** Time for sorting of 1000 numbers

|         | Quick sort | вариант 1 | вариант 2 |
|---------|------------|-----------|-----------|
| 1       | 0          | 0.015     | 0         |
| 2       | 0.016      | 0.016     | 0.015     |
| 3       | 0.015      | 0         | 0.016     |
| 4       | 0          | 0.016     | 0         |
| 5       | 0.016      | 0.015     | 0.016     |
| 6       | 0.015      | 0         | 0         |
| 7       | 0          | 0         | 0         |
| 8       | 0          | 0         | 0.015     |
| 9       | 0          | 0.016     | 0         |
| 10      | 0          | 0.016     | 0.016     |
| average | 0,0062     | 0,0094    | 0,0078    |

**Table 2** Time for sorting of 10000 numbers

Table 2 shows time for processing of 10000 integers. Table 3 shows time for processing of 100000 integers. By experiments it used 10 different files. These files are received by our program for generation of files with random numbers. Last row in tables 2 and last row in table 3 shows average time for numbers sorting.

When sorting 1000 integers quick sort algorithm and our two modifications processes numbers for 0 seconds.

|         | Quick sort | Variant 1 | Variant 2 |
|---------|------------|-----------|-----------|
| 1       | 0.079      | 0.078     | 0.079     |
| 2       | 0.078      | 0.015     | 0.032     |
| 3       | 0.062      | 0.078     | 0.078     |
| 4       | 0.063      | 0.078     | 0.078     |
| 5       | 0.063      | 0.078     | 0.062     |
| 6       | 0.062      | 0.063     | 0.078     |
| 7       | 0.078      | 0.062     | 0.078     |
| 8       | 0.063      | 0.062     | 0.078     |
| 9       | 0.078      | 0.063     | 0.078     |
| 10      | 0.063      | 0.078     | 0.078     |
| average | 0,0689     | 0,0655    | 0,0719    |

**Table 3** Time for sorting of 100000 numbers

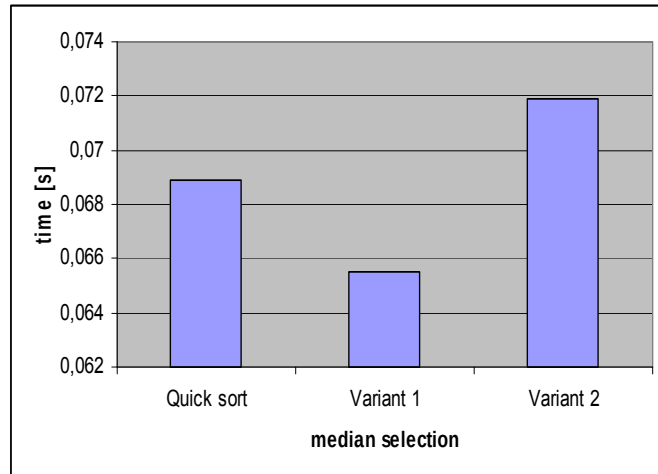


**Fig.6.** Average time- sorting of 100000 numbers

When sorting 10000 numbers the faster algorithm is Quick sort. When sorting 100000 numbers the faster algorithm is modification of Quick sort algorithm which uses variant 1 for median selection. Figure 6 shows average time for sorting of 100000 integers.

## CONCLUSION

Efficiency of Quick sort algorithm is casual of exchanging of maximal remote elements. A very important step of this algorithm is median selection. In this paper are presented two heuristic approaches for median selection. Most efficient is first approach (variant 1 – median value is selected among  $n/4$ ,  $n/2$  and  $3*n/4$  elements).

## REFERENCES

1. Стойчев Ст. Синтез и анализ на алгоритми. – София, България: „БПС”, 2005.
2. <http://en.wikipedia.org/wiki/Quicksort>
3. Sedgewick R. Algorithms. – Addison-Wesley, 1989.
4. Knuth D. The art of computer programming. – V3. Sorting and Searching, Addison Wesley Publishing Company, 1973.
5. [http://en.wikipedia.org/wiki/Selection\\_algorithm](http://en.wikipedia.org/wiki/Selection_algorithm)
6. Cormen T., Leiserson Ch., Rivest R. Introduction to Algorithms. – Second Edition, MIT, 2001.
7. Катранджиев Н., Шопов Н. Програмиране на C/C++ в примери, ISBN 978-954-24-0179-7. – Академично издателство на УХТ-Пловдив, 2011.
8. MS Visual Studio 2005 help

*Т. В. Быкова, Л. И. Могилевич, В. С. Попов* (г. Саратов)

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ, С ПУЛЬСИРУЮЩИМ СЛОЕМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

*Осуществлена постановка задачи гидроупругости для круглой пластины, подкреплённой ребрами жесткости, взаимодействующей с абсолютно твердым штампом через слой вязкой несжимаемой жидкости. На базе данной задачи разработана математическая модель для исследования динамики взаимодействия стенок канала с находящимся в нем пульсирующим слоем жидкости.*

Пластины, подкреплённые ребрами жесткости, находят все более широкое применение в современной технике. В частности, данные пластины могут образовывать стенки каналов, в которых находится слой жидкости. Динамика взаимодействия геометрически однородной пластины-стенки канала со слоем вязкой жидкости в условиях вибрации основания канала была исследована в [1-3]. Рассмотрим круглую пластину 2 с ребрами жесткости, образующую стенку щелевого канала, в котором находится пульсирующий слой вязкой несжимаемой жидкости (см. рис. 1). Внутренняя поверхность пластины, находящаяся в контакте с жидкостью является плоской, а внешняя поверхность пластины имеет  $n$  ребер жесткости ступенчато изменяющейся высоты. Ребра расположены концентрически. Толщина пластины на участках, где отсутствуют ребра жесткости, равна  $h_0$ . Высота  $j$ -го ребра равна  $h_{pj}$ , а его ширина  $\varepsilon_j$ . Прогибы пластины считаются малыми, а ее края жестко защемлены по всему контуру.

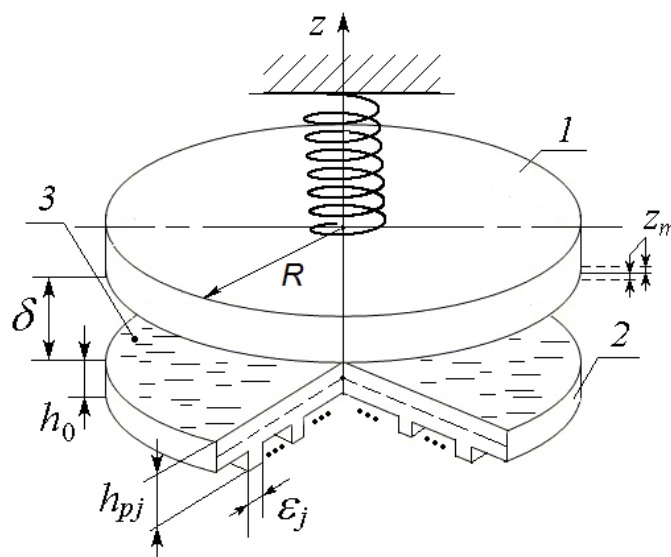


Рис. 1.

© Т. В. Быкова, Л. И. Могилевич, В. С. Попов, 2011

Вторую стенку канала образует абсолютно твердый диск (штамп) 1. Радиус пластины и штампа  $R$ . Штамп имеет подвес (например, магнитный или пружинный), который обладает упругой податливостью. Вследствие этого, он может совершать колебания. Частота его колебаний  $\omega$ , а амплитуда колебаний –  $z_m$ . При этом будем полагать, что подвес выполнен так, что штамп может перемещаться только в вертикальной плоскости.

Вязкая несжимаемая жидкость 3 непрерывно заполняет щелевой зазор между штампом и пластиной. При этом в жидкости, находящейся в щелевом зазоре, так и вне его, поддерживается давление  $p_0 + p_1(\omega t)$ , имеющее постоянную составляющую (постоянный уровень давления)  $p_0$  и гармонически пульсирующую по времени составляющие (противодавление)  $p_1(\omega t)$ . Средняя величина щелевого зазора равна  $\delta_0$ . На торцах по контуру щели жидкость может свободно истекать в окружающую жидкость, находящуюся в технологических полостях. При этом истечение можно считать струйным в среду той же плотности с давлением  $p_0 + p_1(\omega t)$ .

Прогибы пластины и амплитуда колебаний штампа являются малыми и значительно меньшими, чем средняя толщина слоя жидкости, т.е.  $\delta \gg z_m$ . В силу осевой симметрии канала далее будем рассматривать осесимметричную задачу.

Введем в рассмотрение цилиндрическую систему координат  $Ozr\varphi$ , центр которой совпадает с координатной поверхностью пластины в невозмущенном состоянии.

Закон изменения давления в жидкости представим в виде

$$p = p_0 + p_1(\omega t) = p_0 + p_m f_p(\omega t), \quad (1)$$

здесь  $p_m$  – амплитуда гармонической составляющей давления (противодавления);  $\omega$  – частота колебаний;  $t$  – время;  $p_0$  – постоянный уровень давления (статическое давление);  $f_p(\omega t)$  – закон изменения противодавления.

Принимая во внимание, что штамп 1 совершает гармонические колебания вдоль оси  $Oz$ , закон его движения во введенной системе координат представим в следующем виде

$$z = \delta(t) = \delta_0 + z_m f_z(\omega t), \quad (2)$$

здесь  $\delta_0$  – среднее значение ширины щелевого зазора  $\delta$ ;  $z_m$  – амплитуда колебаний штампа;  $f_z(\omega t)$  – закон движения штампа.

Уравнение динамики штампа запишется в виде

$$m_1 \ddot{z} + n_1 z = N_3, \quad (3)$$

здесь  $m_1$  – масса штампа;  $n_1$  – коэффициент упругой жесткости подвеса штампа;  $N_3$  – сила, действующая на штамп со стороны слоя жидкости.

Уравнения динамики рабочей жидкости во введенной цилиндрической системе координат запишутся в виде [4]



$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\
\ddot{z}_0 + \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right), \\
\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} V_r + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь  $V_r$ ,  $V_z$  – проекции вектора скорости жидкости на оси введенной в рассмотрение цилиндрической системы координат.

Граничные условия для данных уравнений будут представлять собой условия прилипания жидкости к непроницаемым поверхностям штампа и пластины

$$\begin{aligned}
V_r = 0, \quad V_z = \frac{d\delta(t)}{dt} \quad \text{при} \quad z = \delta_0 + z_m f_z(\omega t) + \frac{h_0}{2}, \\
V_r = 0, \quad V_z = \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{при} \quad z = w + \frac{h_0}{2}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь  $w$  – упругое перемещение пластины по нормали (т.е. прогиб координатной поверхности ребристой круглой пластины).

Данные условия дополняются условиями свободного струйного истечения жидкости в радиальном направлении по контуру пластины, выражающиеся в совпадении давления в вытекающей струе с давлением в окружающей среде. Данные условия записываются в виде

$$p = p_0 + p_1(\omega t) \quad \text{при} \quad r = R. \tag{6}$$

Кроме того, принимаются во внимание условия ограниченности давления в центре

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0. \tag{7}$$

Уравнение динамики пластины с ребрами жесткости получено вариационным методом Гамильтона и в рассматриваемой постановке запишется в виде

$$\begin{aligned}
\frac{Eh_0^3}{12(1-\mu_0^2)} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[ \tilde{z}^3 r \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\mu_0}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \tilde{z}^3 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \mu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \right] \right\} + \\
+ \rho_0 h_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \tilde{z}^1 \frac{\partial w}{\partial t} \right) = (q_{zz} - q_{zr} \cdot \frac{\partial w}{\partial r}).
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь,  $q_{zr}$ ,  $q_{zz}$  – напряжения, действующие на поверхность упругой круглой пластины со стороны слоя жидкости при  $z = w + \frac{h_0}{2}$ .

Выражения для напряжений  $q_{zr}$ ,  $q_{zz}$ , действующих со стороны вязкой несжимаемой жидкости могут быть записаны как [4]

$$q_{zr} = \rho v \left( \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right), \quad q_{zz} = -p + 2\rho v \frac{\partial V_z}{\partial z}. \quad (9)$$

Функции  $\tilde{z}^1$  и  $\tilde{z}^3$ , описывающие влияние ребер жесткости определяются формулами

$$\tilde{z}^1 = \left\{ 1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \frac{\varepsilon_j}{R} \delta_{rj}(r/R - r_j/R) \right\}, \quad \tilde{z}^3 = \left\{ 1 + \sum_{j=1}^n k_{3j} \frac{\varepsilon_j}{R} \delta_{rj}(r/R - r_j/R) \right\}, \quad (10)$$

$$k_{1j} = \left( 1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) \frac{h_{pj}}{h_0}; \quad k_{3j} = \left( 4 - 2 \frac{h_0}{h_{pj}} + \frac{h_0^2}{h_{pj}^3} \right) \left( 1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) \frac{h_{pj}^3}{h_0^3}, \quad (11)$$

где  $\delta_{rj}(r/R - r_j/R)$  – функция Дирака,  $r_j$  – текущие значения радиуса соответствующие началу интервалов  $r_j \leq r \leq r_j + \varepsilon_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ), на которых находятся ребра.

Краевые условия для уравнений динамики пластины с ребрами жесткости (8) представляют собой условия жесткого защемления, записываемые в виде:

$$w = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = R. \quad (12)$$

Кроме того, ставится условие ограниченности прогиба пластины при  $r = 0$

$$r \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 0. \quad (13)$$

Введем в рассмотрение малые параметры  $\psi = \frac{\delta_0}{R} \ll 1$  – относительную

толщину слоя жидкости,  $\lambda = \frac{z_m}{\delta_0} \ll 1$  – относительную амплитуду колебаний

штампа, и безразмерные переменные:

$$\zeta = \frac{z - h_0/2}{\delta_0}, \quad \xi = \frac{r}{R}, \quad \tau = \omega t, \quad V_z = z_m \omega U_\zeta, \quad V_r = \frac{z_m \omega R}{\delta_0} U_\xi, \quad (14)$$

$$w = w_M W, \quad p = p_0 + \frac{\rho v z_m \omega}{\delta_0 \psi^2} P + p_1(\tau).$$

Нормальное напряжение, действующее со стороны слоя жидкости на внутреннюю поверхность штампа, приводит к следующему выражению для искомой силы

$$N_3 = 2\pi R^2 \int_0^1 \xi \left( p_0 + p_1(\tau) + \frac{\rho v z_m \omega}{\delta_0 \psi^2} P - 2\rho v \frac{z_m \omega}{\delta_0} \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} \right) d\xi, \quad (15)$$

действующей на штамп при  $\zeta = 1 + \lambda f_z(\tau)$ .

Учитывая, что малый параметр  $\psi \ll 1$ , можно отбросить последнее слагаемое под знаком интеграла (15). Проводя интегрирование (15), с учетом сделанного замечания, получим следующее выражение

$$N_3 = 2\pi R^2 \left[ \frac{1}{2} p_0 + \frac{1}{2} p_1(\tau) + \frac{\rho v z_m \omega}{\delta_0 \psi^2} \int_0^1 \xi P d\xi \right]. \quad (16)$$

Подставляя введенные в рассмотрения малые параметры и безразмерные переменные (15) в (1)-(13) в нулевом приближении по  $\psi$  получим следующую динамическую задачу гидроупругости круглой пластины с ребрами жесткости записанную в безразмерном виде и включающую в себя:

$$m_1 \ddot{z} + n_1 z = \pi R^2 \left[ p_0 + p_m f_p(\tau) \right] + \frac{2\pi R^2 \rho v z_m \omega}{\delta_0 \psi^2} \int_0^1 P(\xi, \tau) \xi d\xi, \quad (17)$$

уравнения динамики тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} + \lambda \left( U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right) \right] = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} U_\xi + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0,$$

уравнения динамики круглой пластины с ребрами жесткости с учетом малости  $\psi$

$$\begin{aligned} & \frac{E h_0^3 w_m}{12(1-\mu_0^2) R^4} \left\{ \left( \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \frac{2}{\xi} \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} - \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^3} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_j k_{3j} \frac{\varepsilon_j}{R} \delta_{rj}'' \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_0}{\xi} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi_j} - \right. \\ & \quad \left. - \sum_j k_{3j} \frac{\varepsilon_j}{R} \delta_{rj}' \cdot \left( \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\mu_0}{\xi} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right) \Big|_{\xi_j} \right\} + \rho_0 h_0 w_m \omega^2 \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \right. \\ & \quad \left. + \sum_j k_{1j} \frac{\varepsilon_j}{R} \delta_{\xi j} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} \right\} = -p_0 - p_1(\tau) - \frac{\rho v z_m \omega}{\delta_0 \psi^2} P(\xi, \tau). \end{aligned} \quad (19)$$

здесь учтено, что  $q_{zr} = \frac{\rho v z_m \omega}{h_0 \psi} \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta}$ , значительно меньше

$q_{zz} = -p_0 - p_1(\tau) - \frac{\rho v z_m \omega}{h_0 \psi^2} P$ , (т.е., в рассматриваемой постановке, можно

пренебречь касательными напряжениями на поверхности штампа и пластины по сравнению с нормальными напряжениями). Штрих означает производную функции по ее аргументу.

Граничные условия прилипания жидкости к непроницаемым поверхностям штампа и пластины

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df_z(\tau)}{d\tau} \quad \text{при} \quad \zeta = 1 + \lambda f_z(\tau), \quad (20)$$

$$U_{\xi}=0, U_{\zeta}=\frac{w_m}{z_m}\frac{\partial W}{\partial \tau} \text{ при } \zeta=\lambda\frac{w_m}{z_m}W,$$

условия для гидродинамического давления по контуру

$$P=0 \text{ при } \xi=1; \quad (21)$$

и условия жесткой заделки пластины по контуру совместно с условием ограниченности прогиба в центре пластины

$$W=\frac{\partial W}{\partial \xi}=0 \text{ при } \xi=1, \quad (22)$$

$$\xi\frac{\partial W}{\partial \xi}=0 \text{ при } \xi=0. \quad (23)$$

Таким образом, сформулированная нелинейная задача гидроупругости в безразмерном виде (17)-(23), требующая совместного рассмотрения уравнений динамики твердого тела, ребристой пластины и жидкости в силу ее связности. Решение задачи проведем методом возмущений, представляя гидродинамическое давление, скорости движения жидкости и прогибы пластины в виде следующих асимптотических разложений:

$$P=P_0+\lambda P_1+\dots, U_{\xi}=U_{\xi 0}+\lambda U_{\xi 1}+\dots, U_{\zeta}=U_{\zeta 0}+\lambda U_{\zeta 1}+\dots, \\ W=W_0+\lambda W_1+\dots. \quad (24)$$

В результате, в нулевом приближении по  $\lambda$ , получим линеаризованную связанную задачу гидроупругости, включающую в себя уравнение движения штампа

$$m_1\ddot{z}+n_1z=\pi R^2[p_0+p_m f_p(\tau)]+\frac{2\pi R^2\rho\nu z_m\omega}{h_0\psi^2}\int_0^1 P_0\xi d\xi, \quad (25)$$

уравнения динамики сдавливаемого слоя жидкости

$$\operatorname{Re}\frac{\partial U_{\xi 0}}{\partial \tau}=-\frac{\partial P_0}{\partial \xi}+\frac{\partial^2 U_{\xi 0}}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial P_0}{\partial \zeta}=0, \frac{\partial U_{\xi 0}}{\partial \xi}+\frac{1}{\xi}U_{\xi 0}+\frac{\partial U_{\zeta 0}}{\partial \zeta}=0, \quad (26)$$

с граничными условиями для давления и условиями прилипания

$$P_0=0 \text{ при } \xi=1; \quad (27)$$

$$U_{\xi 0}=0, U_{\zeta 0}=\frac{df_z(\tau)}{d\tau} \text{ при } \zeta=1, \quad (28)$$

$$U_{\xi 0}=0, U_{\zeta 0}=\frac{w_m}{z_m}\frac{\partial W_0}{\partial \tau} \text{ при } \zeta=0, \quad (29)$$

уравнение динамики круглой пластины с ребрами жесткости

$$\frac{Eh_0^3w_m}{12(1-\mu_0^2)R^4}\left\{\left(\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4}+\frac{2}{\xi}\frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3}-\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}+\frac{1}{\xi^3}\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)+\right. \\ \left.+\sum_j k_{3j}\frac{\varepsilon_j}{R}\delta_{rj}''\cdot\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}+\frac{\mu_0}{\xi}\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)\right|_{\xi_j}- \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_j k_{3j} \frac{\varepsilon_j}{R} \delta'_{rj} \cdot \left( \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\mu_0}{\xi} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right) \Big|_{\xi_j} \} + \rho_0 h_0 w_m \omega^2 \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \right. \\
& \left. + \sum_j k_{1j} \frac{\varepsilon_j}{R} \delta_{\xi j} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} \Big|_{\xi_j} \right\} = -p_0 - p_1(\tau) - \frac{\rho v z_m \omega}{\delta_0 \psi^2} P_0(\xi, \tau)
\end{aligned}$$

с граничными условиями

$$W_0 = \frac{\partial W_0}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 1, \quad (31)$$

$$\xi \frac{\partial W_0}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0. \quad (32)$$

Для определения законов распределения скоростей и давления в сжимаемом слое жидкости необходимо решить уравнения гидродинамики (26) с граничными условиями (27)-(29). При этом ограничимся рассмотрением режима установившихся гармонических колебаний и прогиба круглой пластины, подкрепленной ребрами жесткости, в виде  $W_0 = f_w(\xi) \sin(\tau + \varphi_w)$ .

В этом случае, определяем выражение для проекций скоростей  $U_{\xi 0}$   $U_{\xi 0}$

$$U_{\xi 0} = \frac{1}{2\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial P_0}{\partial \tau} (1 + \overline{\Psi}(\xi)) + P_0 \overline{\Phi}(\xi) \right], \quad (33)$$

$$U_{\xi 0} = \frac{1}{2\varepsilon^2} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \left[ -\frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi \partial \tau} \xi + \frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi \partial \tau} \overline{\Psi}_1(\xi) + \frac{\partial P_0}{\partial \xi} \overline{\Phi}_1(\xi) \right] \right) + \frac{w_m}{z_m} \frac{\partial W_0}{\partial \tau}, \quad (34)$$

и выражение для гидродинамического давления в сжимаемом слое вязкой несжимаемой жидкости, находящейся в рабочем зазоре опоры

$$\begin{aligned}
P_0 = \frac{1}{4} (\xi^2 - 1) & \left( 2\varepsilon^2 \alpha \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} + 12\gamma \frac{df_z}{d\tau} \right) + \\
& + \frac{w_m}{z_m} \int_{\xi}^1 \left[ \frac{1}{\xi} \int_{\xi}^{\xi} \xi \left( 2\varepsilon^2 \alpha \frac{\partial^2 W_0}{\partial \tau^2} + 12\gamma \frac{\partial W_0}{\partial \tau} \right) d\xi \right] d\xi.
\end{aligned} \quad (35)$$

Для определения прогибов пластины необходимо решить уравнение (30). Учитывая краевые условия (31), (32) решение данного уравнения представим в виде нормальной формы колебаний (или собственных функций задачи Штурма-Лиувилля):

$$w = w_m W_0 = w_m \sum_{k=1}^{\infty} (R_k^0 + R_k(\tau)) \left[ \frac{J_0(\beta_k \xi)}{J_0(\beta_k)} - \frac{I_0(\beta_k \xi)}{I_0(\beta_k)} \right], \quad (36)$$

здесь  $J_0$  – функция Бесселя нулевого порядка первого рода;  $I_0$  – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка;  $\beta_k$  – корень трансцендентного уравнения ( $k=1, 2, \dots$ )  $I_1(\beta_k)/I_0(\beta_k) = -J_1(\beta_k)/J_0(\beta_k)$ , где  $J_1(\beta_k)$ ,  $J_0(\beta_k)$  – соответствующие функции Бесселя первого порядка. Первые пятнадцать корней  $\beta_k$  вычислены и приведены в [5].

Первый, требующий определения, коэффициент  $R_k^0$  в выражении (36) соответствует, постоянному уровню давления. Второй коэффициент  $R_k$  является гармонической функцией времени  $\tau$ .

Учитывая (35), (36) в (30), выполняя переразложения по нормальным формам колебания членов уравнения отличных от заданной формы (36) и задаваясь  $k=1,2,\dots,n$  получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения  $R_k^0$  и  $R_k$ , которая легко разрешается для исследуемого режима установившихся гармонических колебаний.

Таким образом, задаваясь количеством удерживаемых членов ряда (36) можно найти искомые коэффициенты  $R_k^0$  и найти функции  $R_k(\tau)$ , тем самым, определив прогибы ребристой пластины (36) и распределение давления в слое жидкости (35). Затем из уравнения движения штампа (25) находится закон его движения, как гармоническая функция времени, и обратным ходом определяются окончательно прогибы ребристой пластины и давление жидкости через заданный закон изменения давления в слое жидкости.

*Выполнено при поддержке гранта РФФИ № 10-01-00177-а.*

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Могилевич Л. И. Исследование взаимодействия слоя вязкой несжимаемой жидкости со стенками канала, образованного соосными вибрирующими дисками / Л. И. Могилевич, В. С. Попов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа, 2011. – №3. – С.55-68.

2. Могилевич Л. И. Динамика взаимодействия упругих элементов вибромашины со сдвигаемым слоем жидкости, находящимся между ними / Л. И. Могилевич, В. С. Попов, А. А. Попова // РАН. Проблемы машиностроения и надежности машин, 2010. – №4. – С.23-32.

3. Попов В. С. Математическое моделирование динамики взаимодействия пульсирующего слоя вязкой жидкости с упругими стенками канала, образованного двумя параллельными пластинами / М. И. Волов, В. С. Попов // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2011. – №2 (53), Вып. 1. – С.34-38.

4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский – М.: Дрофа, 2003. – 840с.

5. Горшков А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М.: Физматлит, 2005. – 576 с.

П. А. Вельмисов, Ю. А. Казакова (г. Ульяновск)

## О РЕШЕНИЯХ ТИПА «ПРОСТАЯ ВОЛНА» ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

*В статье рассматриваются решения типа «бегущая волна» ранга 1 (которые называются также решениями типа «простая волна») дифференциальных уравнений с частными производными. Предложена методика, позволяющая получить решения указанного типа без применения метода дифференциальных связей, требующего анализа совместности переопределенных систем [3-5]. В качестве примера построены решения простых волн для уравнений газовой динамики.*

### 1. Общая схема построения решений типа «бегущая волна ранга $r$ »

Рассматривается дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка:

$$L\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}, \{H\}\right) = 0, \quad (1.1)$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – независимые переменные,  $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – искомая функция,  $\{H\}$  – совокупность всевозможных частных производных второго порядка (при этом  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_l \partial x_k}$ ).

С помощью преобразования Ампера от функции  $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  перейдем к функции  $\omega(u_1, \dots, u_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\omega(u_1, u_2, \dots, u_r, x_{r+1}, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^r u_k x_k, \quad u_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad x_i = \frac{\partial \omega}{\partial u_i}.$$

При построении решений типа «бегущая волна ранга  $r$ » функция  $\omega$  представляется в виде:

$$\omega(u_1, u_2, \dots, u_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = \omega_0(u_1, u_2, \dots, u_r) + \sum_{k=1}^{n-r} \omega_{r+k}(u_1, u_2, \dots, u_r) x_{r+k};$$

$$x_i = \frac{\partial \omega_0}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^{n-r} \frac{\partial \omega_{r+k}}{\partial u_i} x_{r+k}, \quad i = 1 \div r, \quad r = 1 \div n.$$

В частности, для построения решения простой волны ( $r=1$ ) следует перейти от функции  $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  к функции  $\omega(u, x_2, x_3, \dots, x_n)$

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\omega(u, x_2, x_3, \dots, x_n) + x_1 u, \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad x_1 = \frac{\partial \omega}{\partial u}.$$

Тогда частные производные функции  $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  пересчитываются по формулам:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} &= -\omega_{x_k}, \quad k = 2 \div n; & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} &= \frac{1}{\omega_{uu}}; \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \partial x_m} &= \frac{\omega_{x_k x_m} \omega_{uu} - \omega_{ux_k} \omega_{ux_m}}{\omega_{uu}}, \quad k, m = 2 \div n; \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \partial x_1} &= -\frac{\omega_{x_k u}}{\omega_{uu}}, \quad k = 2 \div n, \quad \omega_{uu} \neq 0,\end{aligned}\tag{1.2}$$

где нижние индексы у функции  $\omega(u, x_2, x_3, \dots, x_n)$  обозначают производные. Подставив (1.2) в уравнение (1.1), получим дифференциальное уравнение для функции  $\omega(u, x_2, x_3, \dots, x_n)$ .

Чтобы получить решение простой волны, функцию  $\omega(u, x_2, x_3, \dots, x_n)$  следует искать в виде:

$$\omega(u, x_2, \dots, x_n) = \omega_0(u) + \sum_{k=1}^{n-1} \omega_{k+1}(u) x_{k+1}, \quad x_1 = \frac{\partial \omega_0}{\partial u} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial u} x_{k+1}.$$

Рассмотрим частный случай уравнения (1.1), когда искомая функция зависит от координат  $x, y, z$  и времени  $t$ :

$$\begin{aligned}L \left( x, y, z, t, \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t}, \right. \\ \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial y}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} \right) = 0.\end{aligned}\tag{1.3}$$

При построении решения простой волны перейдем в уравнении (1.3) от функции  $\Phi(x, y, z, t)$  к функции  $\omega(u, y, z, t)$ :

$$\Phi(x, y, z, t) = -\omega(u, y, z, t) + xu, \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad x = \frac{\partial \omega}{\partial u}.\tag{1.4}$$

Частные производные пересчитываются по формулам

$$\begin{aligned}\Phi_y &= -\omega_y; \quad \Phi_z = -\omega_z; \quad \Phi_t = -\omega_t; \quad \Phi_{xx} = \frac{1}{\omega_{uu}}; \quad \Phi_{xt} = -\frac{\omega_{ut}}{\omega_{uu}}; \quad \Phi_{xy} = -\frac{\omega_{uy}}{\omega_{uu}}; \\ \Phi_{xz} &= -\frac{\omega_{uz}}{\omega_{uu}}; \quad \Phi_{yy} = \frac{\omega_{uy}^2 - \omega_{yy} \omega_{uu}}{\omega_{uu}}; \quad \Phi_{yt} = \frac{\omega_{uy} \omega_{ut} - \omega_{yt} \omega_{uu}}{\omega_{uu}}; \\ \Phi_{yz} &= \frac{\omega_{uy} \omega_{uz} - \omega_{yz} \omega_{uu}}{\omega_{uu}}; \quad \Phi_{zz} = \frac{\omega_{uz}^2 - \omega_{zz} \omega_{uu}}{\omega_{uu}}; \\ \Phi_{zt} &= \frac{\omega_{uz} \omega_{ut} - \omega_{zt} \omega_{uu}}{\omega_{uu}}; \quad \Phi_{tt} = \frac{\omega_{ut}^2 - \omega_{tt} \omega_{uu}}{\omega_{uu}}.\end{aligned}\tag{1.5}$$



Подставив (1.5) в уравнение (1.3), получим дифференциальное уравнение для функции  $\omega(u, y, z, t)$ :

$$N(u, y, z, t, \omega, \omega_u, \omega_t, \omega_y, \omega_z, \omega_{uu}, \omega_{ut}, \omega_{uy}, \omega_{uz}, \omega_{tt}, \omega_{yt}, \omega_{zt}, \omega_{yz}, \omega_{yy}, \omega_{zz}) = 0.$$

Для построения решения простой волны функция  $\omega(u, y, z, t)$  представляется в виде

$$\omega(u, y, z, t) = \omega_0(u) + \omega_1(u)y + \omega_2(u)z + \omega_3(u)t. \quad (1.6)$$

Тогда  $x = \omega'_0(u) + \omega'_1(u)y + \omega'_2(u)z + \omega'_3(u)t$ ,  $\Phi_y = -\omega_1(u)$ ,  $\Phi_z = -\omega_2(u)$ ,  $\Phi_t = -\omega_3(u)$ .

## 2. Решения типа «простая волна» уравнений газовой динамики

Построим решение типа «простая волна» для уравнения, описывающего безвихревые изэнтропические неустановившиеся трехмерные течения газа или жидкости:

$$\begin{aligned} & \Phi_{tt} + 2\Phi_x\Phi_{xt} + 2\Phi_y\Phi_{yt} + 2\Phi_z\Phi_{zt} + 2\Phi_x\Phi_z\Phi_{xz} + 2\Phi_z\Phi_y\Phi_{zy} + \\ & + 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + \Phi_x^2\Phi_{xx} + \Phi_y^2\Phi_{yy} + \Phi_z^2\Phi_{zz} - \left[ a_0^2 + \frac{\chi-1}{2}V_0^2 - \right. \\ & \left. - (\chi-1)\left(\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_x^2 + \frac{1}{2}\Phi_y^2 + \frac{1}{2}\Phi_z^2\right) \right] (\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $a_0$  – скорость звука в однородном потоке;  $V_0$  – скорость однородного потока;  $\chi = \frac{c_p}{c_v} = \text{const}$ ;  $c_p$ ,  $c_v$  – коэффициенты теплоемкости. Функцию  $\Phi(x, y, z, t)$  представим в виде (1.4), тогда для функции  $\omega(u, y, z, t)$  получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \omega_{ut}^2 - \omega_{tt}\omega_{uu} - 2u\omega_{ut} - 2\omega_y(\omega_{uy}\omega_{ut} - \omega_{yt}\omega_{uu}) - 2\omega_z(\omega_{uz}\omega_{ut} - \omega_{zt}\omega_{uu}) + \\ & + 2u\omega_z\omega_{uz} + 2\omega_z\omega_y(\omega_{uy}\omega_{uz} - \omega_{yz}\omega_{uu}) + 2u\omega_y\omega_{uy} + u^2 + \omega_y^2(\omega_{uy}^2 - \omega_{yy}\omega_{uu}) + \\ & + \omega_z^2(\omega_{uz}^2 - \omega_{zz}\omega_{uu}) - \left[ a_0^2 + \frac{\chi-1}{2}V_0^2 - (\chi-1)\left(-\omega_t + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\omega_y^2 + \frac{1}{2}\omega_z^2\right) \right] \cdot \\ & \cdot \left( 1 + (\omega_{uy}^2 - \omega_{yy}\omega_{uu}) + (\omega_{uz}^2 - \omega_{zz}\omega_{uu}) \right) = 0 \end{aligned}$$

Для построения решения простой волны функция  $\omega(u, y, z, t)$  представляется в виде (1.6). Тогда получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение для трех функций  $\omega_1(u)$ ,  $\omega_2(u)$ ,  $\omega_3(u)$ :

$$\begin{aligned} & \left(\omega'_3\right)^2 - 2u\omega'_3 - 2\omega_1\omega'_1\omega'_3 - 2\omega_2\omega'_2\omega'_3 + 2u\omega_2\omega'_2 + 2\omega_1\omega_2\omega'_1\omega'_2 + 2u\omega_1\omega'_1 + \\ & + u^2 + \omega_1^2\left(\omega'_1\right)^2 + \omega_2^2\left(\omega'_2\right)^2 - \left[ a_0^2 + \frac{\chi-1}{2}V_0^2 - (\chi-1)\left(-\omega_3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2\right) \right] \cdot \\ & \cdot \left( 1 + \left(\omega'_1\right)^2 + \left(\omega'_2\right)^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Две из функций  $\omega_1(u)$ ,  $\omega_2(u)$ ,  $\omega_3(u)$  можно выбрать произвольно, произвольной остается также функция  $\omega_0(u)$ . Таким образом, получено решение, зависящее от трех произвольных функций:  $x = \omega_0(u) + \omega_1(u)y + \omega_2(u)z + \omega_3(u)t$ ,  $\Phi_y = -\omega_1(u)$ ,  $\Phi_z = -\omega_2(u)$ ,  $\Phi_t = -\omega_3(u)$ . Скорость газа  $V$ , давление  $P$ , плотность  $\rho$ , скорость звука  $a$  находятся по формулам:

$$V = \sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2} = \sqrt{u^2 + \omega_1^2(u) + \omega_2^2(u)};$$

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\chi-1}{\chi}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\chi-1} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = 1 + \frac{\chi-1}{2} \frac{V_0^2}{a_0^2} - \frac{\chi-1}{a_0^2} \left( \Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 + \frac{1}{2} \Phi_y^2 \right) =$$

$$= 1 + \frac{\chi-1}{2} \frac{V_0^2}{a_0^2} - \frac{\chi-1}{a_0^2} \left( -\omega_3(u) + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} \omega_1^2(u) \right).$$

В случае, когда течение одномерное ( $\Phi_y = 0$ ,  $\Phi_z = 0$ ) и нестационарное, уравнение (2.1) принимает вид:

$$\Phi_{tt} + 2\Phi_x \Phi_{xt} + \Phi_x^2 \Phi_{xx} - \left[ a_0^2 + \frac{\chi-1}{2} V_0^2 - (\chi-1) \left( \Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 \right) \right] \Phi_{xx} = 0.$$

Для построения решения простой волны перейдем от функции  $\Phi(x, t)$  к функции  $\omega(u, t)$ . Тогда получим уравнение для  $\omega(u, t)$ :

$$\omega_{ut}^2 - \omega_{tt} \omega_{uu} - 2u \omega_{ut} + u^2 - \left[ a_0^2 + \frac{\chi-1}{2} V_0^2 - (\chi-1) \left( -\omega_t + \frac{1}{2} u^2 \right) \right] = 0.$$

Задавая функцию  $\omega(u, t)$  в виде  $\omega(u, t) = \omega_0(u) + \omega_3(u)t$ , получим дифференциальное уравнение для  $\omega_3(u)$ :

$$\left( \omega_3' \right)^2 - 2u \omega_3' + u^2 - \left[ a_0^2 + \frac{\chi-1}{2} V_0^2 - (\chi-1) \left( -\omega_3 + \frac{1}{2} u^2 \right) \right] = 0.$$

Функция  $\omega_0(u)$  остается произвольной, т. е. получено решение, зависящее от одной произвольной функции:  $x = \omega_0(u) + \omega_3(u)t$ .

Если течение двумерное ( $\Phi_z = 0$ ) и стационарное ( $\Phi_t = 0$ ), то уравнение (2.1) примет вид:

$$2\Phi_x \Phi_y \Phi_{xy} + \Phi_x^2 \Phi_{xx} + \Phi_y^2 \Phi_{yy} - \left[ a_0^2 + \frac{\chi-1}{2} V_0^2 - (\chi-1) \left( \frac{1}{2} \Phi_x^2 + \frac{1}{2} \Phi_y^2 \right) \right] \cdot (\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) = 0. \quad (2.2)$$

После перехода от функции  $\Phi(x, y)$  к функции  $\omega(u, y)$  получим следующее уравнение:

$$2u\omega_y\omega_{uy} + u^2 + \omega_y^2(\omega_{uy}^2 - \omega_{yy}\omega_{uu}) - \left[ a_0^2 + \frac{\chi-1}{2}V_0^2 - (\chi-1)\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\omega_y^2\right) \right] \cdot \\ \cdot \left(1 + (\omega_{uy}^2 - \omega_{yy}\omega_{uu})\right) = 0.$$

Представляя решение простой волны в виде  $\omega(u, y) = \omega_0(u) + \omega_1(u)y$ , получим уравнение для  $\omega_1(u)$ :

$$2u\omega_1\omega_1' + u^2 + \omega_1^2(\omega_1')^2 - \left[ a_0^2 + \frac{\chi-1}{2}V_0^2 - (\chi-1)\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2\right) \right] (1 + (\omega_1')^2) = 0.$$

Получено решение, зависящее от одной произвольной функции  $\omega_0(u)$ :

$$x = \omega_0'(u) + \omega_1'(u)y.$$

### 3. Решения простой волны для приближенных уравнений в газовой динамике

**Линейное разложение.** Предполагая, что имеют место малые возмущения однородного потока, движущегося со скоростью  $V$  в направлении оси  $Ox$ , представим  $\Phi(x, y, z, t)$  в виде:

$$\Phi(x, y, z, t) = V_0x + \varepsilon\varphi(x, y, z, t) + \dots, \text{ где } \varepsilon \ll 1.$$

Тогда, оставляя в (2.1) старшие члены (порядка  $\varepsilon$ ), получим линейное уравнение для функции  $\varphi(x, y, z, t)$ :

$$\varphi_{tt} + 2V_0\varphi_{xt} + V_0^2\varphi_{xx} - a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = 0. \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) – асимптотическое уравнение линейной теории. При построении решения простой волны для уравнения (3.1) перейдем по формуле (1.4) от функции  $\varphi(x, y, z, t)$  к функции  $\omega(u, y, z, t)$ . Тогда уравнение для  $\omega(u, y, z, t)$  будет иметь вид

$$\omega_{ut}^2 - \omega_{tt}\omega_{uu} - 2V_0\omega_{ut} + V_0^2 - a_0^2\left(1 + (\omega_{uy}^2 - \omega_{yy}\omega_{uu}) + (\omega_{uz}^2 - \omega_{zz}\omega_{uu})\right) = 0.$$

Решение простой волны ищется в виде (1.6). Тогда получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение для трех функций  $\omega_1(u)$ ,  $\omega_2(u)$ ,  $\omega_3(u)$ :

$$(\omega_3')^2 - 2V_0\omega_3' + V_0^2 - a_0^2\left(1 + (\omega_1')^2 + (\omega_2')^2\right) = 0.$$

Две из функций  $\omega_1(u)$ ,  $\omega_2(u)$ ,  $\omega_3(u)$  можно выбрать произвольно. Произвольной также остается функция  $\omega_0(u)$ . Таким образом, получено решение, зависящее от трех произвольных функций:  $x = \omega_0'(u) + \omega_1'(u)y + \omega_2'(u)z + \omega_3'(u)t$ .

Для неустановившегося одномерного течения ( $\varphi_y = 0$ ,  $\varphi_z = 0$ ) уравнение (3.1) принимает вид:

$$\varphi_{tt} + 2V_0\varphi_{xt} + V_0^2\varphi_{xx} - a_0^2\varphi_{xx} = 0. \quad (3.2)$$

При построении решения простой волны этого уравнения необходимо перейти от функции  $\varphi(x, t)$  к функции  $\omega(u, t)$ . Тогда уравнение для  $\omega(u, t)$  запишется следующим образом:

$$\omega_{ut}^2 - \omega_{tt}\omega_{uu} - 2V_0\omega_{ut} + V_0^2 - a_0^2 = 0.$$

Задавая функцию  $\omega(u, t)$  в виде  $\omega(u, t) = \omega_0(u) + \omega_3(u)t$ , получим дифференциальное уравнение для  $\omega_3(u)$ :  $(\omega_3')^2 - 2V_0\omega_3' + V_0^2 - a_0^2 = 0$ , общее решение которого:  $\omega_3(u) = (V_0 \pm a_0)u + C$ . Функция  $\omega_0(u)$  остается произвольной. В этом случае получено решение, зависящее от одной произвольной функции:  $x = \omega_0'(u) + (V_0 \pm a_0)t$ . Тогда

$$u = f\left(x - (V_0 \pm a_0)t\right), \quad (3.3)$$

т. е. получено решение, описывающее возмущения, распространяющиеся вниз (знак «+») или вверх (знак «-») по течению. Заметим, что общее решение уравнения (3.2) имеет вид:  $\varphi(x, t) = f(x - (V_0 + a_0)t) + g(x - (V_0 - a_0)t)$ , где  $f, g$  – произвольные функции. Это решение является суммой двух решений, получающихся из (3.3) при выборе знака «-» и знака «+».

Для плоских ( $\varphi_z = 0$ ) установившихся ( $\varphi_t = 0$ ) течений согласно (3.1) имеем уравнение (волновое при  $M_0 > 1$ ; приводящееся к уравнению Лапласа при  $M_0 < 1$ ):

$$(M_0^2 - 1)\varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0, \quad (3.4)$$

где  $M_0 = \frac{V_0}{a_0}$  – число Маха. После перехода от функции  $\varphi(x, y)$  к функции

$\omega(u, y)$ , получим уравнение для  $\omega(u, y)$ :

$$M_0^2 - 1 - (\omega_{uy}^2 - \omega_{yy}\omega_{uu}) = 0.$$

Задавая функцию  $\omega(u, y)$  в виде  $\omega(u, y) = \omega_0(u) + \omega_1(u)y$ , для  $\omega_1(u)$  получим дифференциальное уравнение:  $M_0^2 - 1 - (\omega_1')^2 = 0$ , общее решение которого существует при  $M_0 > 1$ :  $\omega_1(u) = \pm u\sqrt{M_0^2 - 1} + C$ . Функция  $\omega_0(u)$  остается произвольной. В этом случае получено решение, зависящее от одной произвольной функции:

$$x = \omega_0'(u) \pm y\sqrt{M_0^2 - 1}, \quad u = f(x \mp y\sqrt{M_0^2 - 1}). \quad (3.5)$$

Полученное решение можно использовать для описания течения, возникающего при сверхзвуковом ( $V_0 > a_0$ ) обтекании профиля. Общее решение уравнения (3.4) имеет вид:

$\varphi(x, y) = f\left(x - y\sqrt{M_0^2 - 1}\right) + g\left(x + y\sqrt{M_0^2 - 1}\right)$ , где  $f, g$  – произвольные

функции. Оно состоит из двух решений, получаемых из (3.5) при выборе знака «+» или знака «-».

**Трансзвуковое разложение.** а) Для течений, скорость которых близка к скорости звука, рассмотрим трансзвуковое разложение функции  $\Phi(x, y, z, t)$ :

$$\Phi(x, y, z, t) = V_0 x + \varepsilon^2 \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}),$$

где  $x = \varepsilon \bar{x}$ ,  $y = \sqrt{\varepsilon} \bar{y}$ ,  $z = \sqrt{\varepsilon} \bar{z}$ ,  $t = \bar{t}$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ,  $V_0^2 - a_0^2 \sim \varepsilon$ .

Подставляя в (2.1) и оставляя члены порядка  $\varepsilon$ , получим нелинейное уравнение трансзвуковой теории движения идеального газа:

$$2V_0 \bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{t}} + V_0^2 \bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} + V_0(\chi + 1) \bar{\varphi}_{\bar{x}} \bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} - a_0^2 (\bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{\varphi}_{\bar{y}\bar{y}} + \bar{\varphi}_{\bar{z}\bar{z}}) = 0. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) описывает течения, содержащие как области с дозвуковой скоростью, так и области со сверхзвуковой скоростью. При построении решения типа «простая волна» для уравнения (3.6) перейдем от функции  $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$  к функции  $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$  по формуле (1.4). Уравнение для функции  $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$  запишется в следующем виде:

$$-2V_0 \omega_{u\bar{t}} + V_0^2 + V_0(\chi + 1)u - a_0^2 \left( 1 + \left( \omega_{u\bar{y}}^2 - \omega_{\bar{y}\bar{y}} \omega_{uu} \right) + \left( \omega_{u\bar{z}}^2 - \omega_{\bar{z}\bar{z}} \omega_{uu} \right) \right) = 0.$$

Функцию  $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$  зададим в виде (1.6). Тогда получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение для трех функций  $\omega_1(u)$ ,  $\omega_2(u)$ ,  $\omega_3(u)$ , две из которых можно выбрать произвольно:

$$\left( V_0^2 - a_0^2 \right) - 2V_0 \omega_3' + V_0(\chi + 1)u - a_0^2 \left( \left( \omega_1' \right)^2 + \left( \omega_2' \right)^2 \right) = 0.$$

С учетом того, что  $\omega_0(u)$  также произвольная функция, получено решение, зависящее от трех произвольных функций:  $x = \omega_0(u) + \omega_1(u)\bar{y} + \omega_2(u)\bar{z} + \omega_3(u)\bar{t}$ .

Построим решение простой волны для нестационарного одномерного течения (в (3.6)  $\bar{\varphi}_{\bar{y}} = 0$ ,  $\bar{\varphi}_{\bar{z}} = 0$ ). После перехода от функции  $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{t})$  к функции  $\omega(u, \bar{t})$  получим уравнение для функции  $\omega(u, \bar{t})$ :

$$-2V_0 \omega_{u\bar{t}} + V_0^2 + V_0(\chi + 1)u - a_0^2 = 0. \quad (3.7)$$

Функция  $\omega(u, \bar{t})$  задается в виде  $\omega(u, \bar{t}) = \omega_0(u) + \omega_3(u)\bar{t}$ . Тогда получим дифференциальное уравнение для  $\omega_3(u)$ :  $-2V_0 \omega_3' + V_0^2 - a_0^2 + V_0(\chi + 1)u = 0$ , общее решение которого имеет вид:  $\omega_3(u) = \frac{\chi + 1}{4} u^2 + \frac{V_0^2 - a_0^2}{2V_0} u + C$ . Функция  $\omega_0(u)$  остается произвольной. Получено решение, зависящее от одной произвольной функции:

$$x = \omega_0'(u) + \frac{1}{2V_0} (V_0(\chi+1)u + V_0^2 - a_0^2) \bar{t}.$$

Заметим, что в этом случае решение простой волны является общим решением уравнения (3.7).

В случае, когда течение двумерное установившееся ( $\bar{\varphi}_t = 0$ ,  $\bar{\varphi}_z = 0$ ), уравнение (3.6) будет иметь вид:

$$V_0^2 \bar{\varphi}_{xx} + V_0(\chi+1) \bar{\varphi}_x \bar{\varphi}_{xx} - a_0^2 (\bar{\varphi}_{xx} + \bar{\varphi}_{yy}) = 0.$$

При построении решения простой волны перейдем от функции  $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y})$  к функции  $\omega(u, \bar{y})$ . Тогда для функции  $\omega(u, \bar{y})$  получим уравнение

$$V_0^2 + V_0(\chi+1)u - a_0^2 \left( 1 + \left( \omega_{u\bar{y}}^2 - \omega_{y\bar{y}} \omega_{uu} \right) \right) = 0.$$

Функцию  $\omega(u, \bar{y})$  зададим в виде  $\omega(u, \bar{y}) = \omega_0(u) + \omega_1(u) \bar{y}$ . Для  $\omega_1(u)$  получим уравнение:  $V_0^2 - a_0^2 + V_0(\chi+1)u - a_0^2 (\omega_1')^2 = 0$ . Тогда решение, зависящее от одной произвольной функции  $\omega_0(u)$ , будет иметь вид:

$$x = \omega_0'(u) + \frac{\bar{y}}{a_0} \sqrt{V_0^2 - a_0^2 + V_0(\chi+1)u}.$$

б) Рассмотрим частный случай уравнения (3.6), когда скорость однородного потока  $V_0$  равна скорости звука в однородном потоке  $a_0$ . Тогда получим асимптотическое трансзвуковое уравнение:

$$2\bar{\varphi}_{xt} + (\chi+1)\bar{\varphi}_x \bar{\varphi}_{xx} - a_0 \cdot (\bar{\varphi}_{yy} + \bar{\varphi}_{zz}) = 0. \quad (3.8)$$

После перехода к функции  $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$  по формуле (1.4) получим уравнение для функции  $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ :

$$-2\omega_{u\bar{t}} + (\chi+1)u - a_0 \left( \left( \omega_{u\bar{y}}^2 - \omega_{y\bar{y}} \omega_{uu} \right) + \left( \omega_{u\bar{z}}^2 - \omega_{z\bar{z}} \omega_{uu} \right) \right) = 0.$$

Функцию  $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$  зададим в виде (1.6). Тогда получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение для трех функций  $\omega_1(u)$ ,  $\omega_2(u)$ ,  $\omega_3(u)$ , две из которых можно выбрать произвольно:

$$-2\omega_3' + (\chi+1)u - a_0 \left( (\omega_1')^2 + (\omega_2')^2 \right) = 0.$$

Так как  $\omega_0(u)$  есть произвольная функция, то получено решение, зависящее от трех произвольных функций:  $x = \omega_0'(u) + \omega_1'(u) \bar{y} + \omega_2'(u) \bar{z} + \omega_3'(u) \bar{t}$ .

Для нестационарного одномерного течения (в (3.8)  $\bar{\varphi}_{\bar{y}} = 0$ ,  $\bar{\varphi}_{\bar{z}} = 0$ ) после перехода от функции  $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{t})$  к функции  $\omega(u, \bar{t})$  получим уравнение

для функции  $\omega(u, \bar{t})$ :

$$-2\omega_{u\bar{t}} + (\chi + 1)\mu = 0. \quad (3.9)$$

Функция  $\omega(u, \bar{t})$  задается в виде  $\omega(u, \bar{t}) = \omega_0(u) + \omega_3(u)\bar{t}$ . Тогда получим дифференциальное уравнение для  $\omega_3(u)$ :  $-2\omega_3' + (\chi + 1)\mu = 0$ , общее решение которого имеет вид:  $\omega_3(u) = \frac{\chi + 1}{4}u^2 + C$ . Функция  $\omega_0(u)$  остается произвольной. Получено решение, зависящее от одной произвольной функции:  $x = \omega_0'(u) + \frac{(\chi + 1)}{2}u\bar{t}$ . Решение простой волны является общим решением уравнения (3.9).

В случае, когда течение двумерное установившееся ( $\bar{\varphi}_{\bar{t}} = 0$ ,  $\bar{\varphi}_{\bar{z}} = 0$ ), уравнение (3.8) будет иметь вид:

$$(\chi + 1)\bar{\varphi}_{\bar{x}}\bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} - a_0\bar{\varphi}_{\bar{y}\bar{y}} = 0.$$

При построении решения простой волны перейдем от функции  $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y})$  к функции  $\omega(u, \bar{y})$ . Тогда для функции  $\omega(u, \bar{y})$  получим уравнение:

$$(\chi + 1)\mu - a_0\left(\omega_{u\bar{y}}^2 - \omega_{\bar{y}\bar{y}}\omega_{uu}\right) = 0.$$

Функцию  $\omega(u, \bar{y})$  зададим в виде:  $\omega(u, \bar{y}) = \omega_0(u) + \omega_1(u)\bar{y}$ . Для  $\omega_1(u)$  получим уравнение:  $(\chi + 1)\mu - a_0\left(\omega_1'\right)^2 = 0$ . Тогда решение, зависящее от одной произвольной функции  $\omega_0(u)$ , существует лишь при  $u > 0$  и имеет вид:  $x = \omega_0'(u) + \frac{\bar{y}}{a_0}\sqrt{a_0(\chi + 1)\mu}$ .

в) Уточним уравнение (3.6), добавив в него линейный член порядка  $\varepsilon^2$  трансзвукового разложения функции  $\Phi(x, y, z, t)$ . Тогда получим составное уравнение:

$$\bar{\varphi}_{\bar{t}\bar{t}} + 2V_0\bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{t}} + V_0^2\bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} + V_0(\chi + 1)\bar{\varphi}_{\bar{x}}\bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} - a_0^2(\bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{\varphi}_{\bar{y}\bar{y}} + \bar{\varphi}_{\bar{z}\bar{z}}) = 0. \quad (3.10)$$

Это уравнение содержит все члены как уравнения (3.1), так и уравнения (3.6). При построении решения типа «простая волна» для уравнения (3.10) перейдем от функции  $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$  к функции  $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$  по формуле (1.4). Уравнение для функции  $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$  запишется в следующем виде:

$$\omega_{u\bar{t}}^2 - \omega_{\bar{t}\bar{t}}\omega_{uu} - 2V_0\omega_{u\bar{t}} + V_0^2 + V_0(\chi + 1)\mu - a_0^2\left(1 + \left(\omega_{u\bar{y}}^2 - \omega_{\bar{y}\bar{y}}\omega_{uu}\right) + \left(\omega_{u\bar{z}}^2 - \omega_{\bar{z}\bar{z}}\omega_{uu}\right)\right) = 0$$

Представляя функцию  $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$  в виде (1.6), получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение для трех функций  $\omega_1(u)$ ,  $\omega_2(u)$ ,  $\omega_3(u)$ , две из которых можно выбрать произвольно:

$$\left(\omega_3'\right)^2 + \left(V_0^2 - a_0^2\right) - 2V_0\omega_3' + V_0(\chi + 1)u - a_0^2\left(\left(\omega_1'\right)^2 + \left(\omega_2'\right)^2\right) = 0.$$

Так как  $\omega_0(u)$  является произвольной функцией, то получено решение, зависящее от трех произвольных функций:

$$x = \omega_0'(u) + \omega_1'(u)\bar{y} + \omega_2'(u)\bar{z} + \omega_3'(u)\bar{t}.$$

Построим решение простой волны в случае нестационарного одномерного течения (в (3.10)  $\bar{\varphi}_{\bar{y}} = 0$ ,  $\bar{\varphi}_{\bar{z}} = 0$ ). После перехода от функции  $\bar{\varphi}(x, \bar{t})$  к функции  $\omega(u, \bar{t})$  получим уравнение для функции  $\omega(u, \bar{t})$ :

$$\omega_{ut}^2 - \omega_{tt}^-\omega_{uu} - 2V_0\omega_{ut}^- + V_0^2 + V_0(\chi + 1)u - a_0^2 = 0. \quad (3.11)$$

Функцию  $\omega(u, \bar{t})$  зададим в виде  $\omega(u, \bar{t}) = \omega_0(u) + \omega_3(u)\bar{t}$ . Тогда получим дифференциальное уравнение для  $\omega_3(u)$ :

$$\left(\omega_3'\right)^2 - 2V_0\omega_3' + V_0^2 - a_0^2 + V_0(\chi + 1)u = 0,$$

общее решение которого имеет вид:

$$\omega_3(u) = V_0u \mp \frac{2}{3V_0(\chi + 1)}\left(a_0^2 - V_0(\chi + 1)u\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Таким образом, получено решение, зависящее от одной произвольной функции  $\omega_0(u)$ :

$$x = \omega_0'(u) + \left(V_0 \pm \sqrt{a_0^2 - V_0(\chi + 1)u}\right)\bar{t}.$$

Если течение двумерное установившееся ( $\bar{\varphi}_{\bar{t}} = 0$ ,  $\bar{\varphi}_{\bar{z}} = 0$ ), то уравнение (3.10) принимает вид уравнения (3.6) в двумерном установившемся случае.

г) Наряду с уравнением (3.10) для описания околосзвуковых течений газа используют также следующее составное уравнение:

$$\begin{aligned} &\bar{\varphi}_{tt}^- + 2V_0\bar{\varphi}_{xt}^- + V_0^2\bar{\varphi}_{xx}^- + [V_0(\chi + 1)\bar{\varphi}_{\bar{x}} + (\chi - 1)\bar{\varphi}_{\bar{t}}]\bar{\varphi}_{xx}^- - \\ &- a_0^2(\bar{\varphi}_{xx}^- + \bar{\varphi}_{yy}^- + \bar{\varphi}_{zz}^-) = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

При построении решения типа «простая волна» для уравнения (3.12) перейдем от функции  $\bar{\varphi}(x, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$  к функции  $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$  по формуле (1.4). Уравнение для функции  $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$  запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\omega_{ut}^2 - \omega_{tt}^-\omega_{uu} - 2V_0\omega_{ut}^- + V_0^2 + [V_0(\chi + 1)u - (\chi - 1)\omega_t] - a_0^2\left(1 + \left(\omega_{uy}^2 - \omega_{yy}^-\omega_{uu}\right) + \right. \\ &\left. + \left(\omega_{uz}^2 - \omega_{zz}^-\omega_{uu}\right)\right) = 0 \end{aligned}$$



Функцию  $\omega(u, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$  зададим в виде (1.6). Тогда получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение для трех функций  $\omega_1(u)$ ,  $\omega_2(u)$ ,  $\omega_3(u)$ , две из которых можно выбрать произвольно:

$$\left(\omega_3'\right)^2 + \left(V_0^2 - a_0^2\right) - 2V_0\omega_3' + V_0(\chi + 1)u - (\chi - 1)\omega_3 - a_0^2\left(\left(\omega_1'\right)^2 + \left(\omega_2'\right)^2\right) = 0.$$

Так как  $\omega_0(u)$  является произвольной функцией, то получено решение, зависящее от трех произвольных функций:

$$x = \omega_0'(u) + \omega_1'(u)\bar{y} + \omega_2'(u)\bar{z} + \omega_3'(u)\bar{t}.$$

Построим решение простой волны в случае нестационарного одномерного течения (в (3.12)  $\bar{\varphi}_{\bar{y}} = 0$ ,  $\bar{\varphi}_{\bar{z}} = 0$ ). После перехода от функции  $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{t})$  к функции  $\omega(u, \bar{t})$  получим уравнение для функции  $\omega(u, \bar{t})$ :

$$\omega_{u\bar{t}}^2 - \omega_{\bar{t}\bar{t}}\omega_{uu} - 2V_0\omega_{u\bar{t}} + V_0^2 + V_0(\chi + 1)u - (\chi - 1)\omega_{\bar{t}} - a_0^2 = 0. \quad (3.13)$$

Задавая функцию  $\omega(u, \bar{t})$  в виде  $\omega(u, \bar{t}) = \omega_0(u) + \omega_3(u)\bar{t}$ , получим дифференциальное уравнение для  $\omega_3(u)$ :

$$\left(\omega_3'\right)^2 - 2V_0\omega_3' + V_0^2 - a_0^2 + V_0(\chi + 1)u - (\chi - 1)\omega_3 = 0,$$

общее решение которого можно найти. Таким образом, получено решение, зависящее от одной произвольной функции  $\omega_0(u)$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вельмисов П. А., Фалькович С. В. Некоторые классы решений околосвуковых уравнений и уравнений коротких волн. – Сборник "Избранные проблемы прикладной механики", посвященный шестидесятилетию академика В. Н. Челомея. – Москва, 1974. – С. 215-222.
2. Вельмисов П. А. Асимптотические уравнения газовой динамики. – Изд-во Саратов. ун-та, 1986. – 136 с.
3. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 368 с.
4. Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. – Новосибирск, Наука, 1984. – 272 с.
5. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука", 1978. – 687 с.

**П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова, Е. С. Серебрянникова** (г. Ульяновск)

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ ИЗМЕРЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ**

*Рассматриваются математические модели механической системы, включающей в себя трубопровод с рабочей средой и датчик, составной частью которого является упругий элемент. Датчик предназначен для определения давления рабочей среды (например, на выходе из камеры сгорания двигателя), закон изменения которого считается заданным. Получены дифференциальные уравнения, описывающие колебания упругого элемента, и на их основе проведен численный эксперимент по исследованию динамики элемента.*

### **Введение**

Упругие чувствительные элементы нашли широкое применение в авиационной, ракетно-космической и другой технике в приборах измерения давления различных сред, в топливно-регулирующих системах двигателей, в пилотажно-навигационных приборах и др. Они широко используются во всех отраслях хозяйства, всюду, где нужно измерять или регулировать давление жидких или газообразных сред.

Развитие техники требует постоянного совершенствования и разработки новых типов первичных преобразователей, в частности, датчиков давления, характеризующихся экстремными условиями эксплуатации.

Независимо от принципа преобразования все датчики давления в той или иной степени критичны к воздействию температур и виброускорений. Размещение датчика давления непосредственно на корпусе двигателя принципиально обеспечивает более высокую достоверность измерения, но, как правило, сопровождается воздействием на датчики давления высоких температур и повышенных виброускорений, что приводит к погрешности измерений, а в ряде случаев к разрушению упругого чувствительного элемента датчика.

Несмотря на то, что упругий чувствительный элемент по существу представляет собой одну единственную деталь – оболочку или пластину, он способен обеспечить реализацию определенной функциональной зависимости между действующим на него давлением среды и одним из выходных параметров, к примеру, перемещением.

В системе «трубопровод – датчик давления» датчик расположен на некотором расстоянии от двигателя и соединен с ним с помощью трубопровода, что позволяет ослабить воздействие высоких температур и

виброускорений. Задача состоит в получении уравнений, связывающих закон изменения рабочей среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания двигателя) и деформацию упругого элемента датчика, и предназначенных по величине деформации элемента рассчитать давление в двигателе.

Математические модели системы «трубопровод – датчик давления» рассматривались в [1-7]. Исследовались как линейные модели (динамика рабочей среды, а также динамика чувствительного элемента датчика описываются линейными уравнениями), так и нелинейные (динамика элемента описывается нелинейными уравнениями).

В данной статье рассматриваются плоские математические модели системы «трубопровод – датчик давления» с упругим элементом, расположенным в полости.

### 1. Линейные математические модели механической системы «трубопровод – датчик давления»

Рассматриваются плоские модели механической системы «трубопровод – датчик давления» для трубопроводов с прямолинейными стенками (Рис.1) и трубопроводов с датчиком, расположенным в торцевой полости (Рис.2, 3).

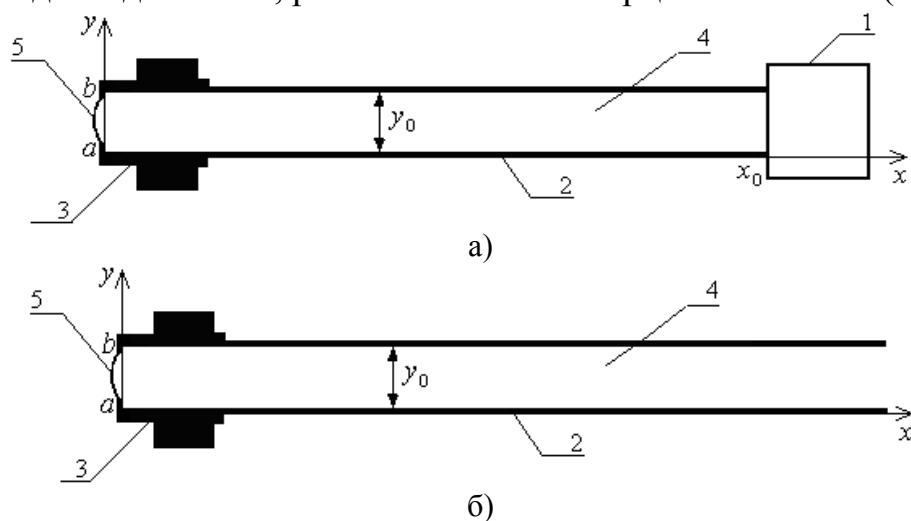
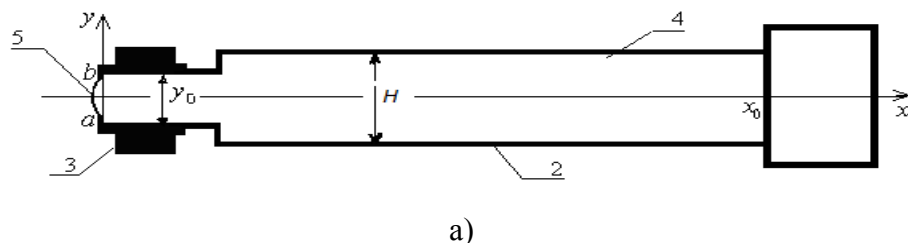
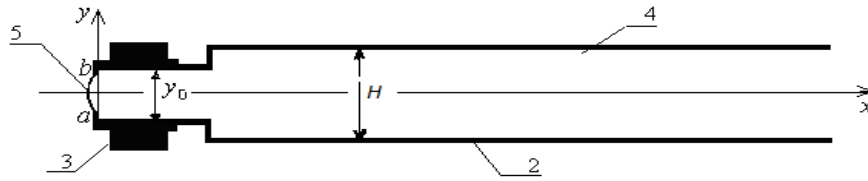


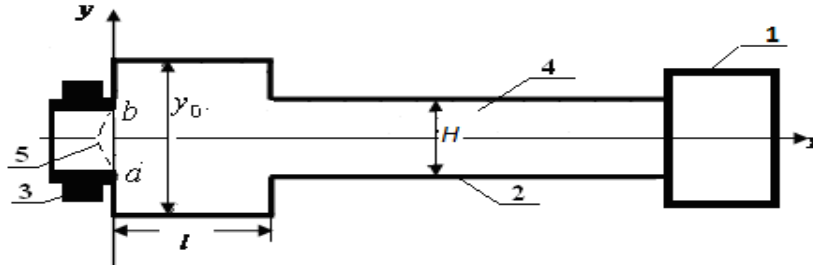
Рис. 1. Схема механической системы для трубопровода конечной (а) и бесконечной (б) длины



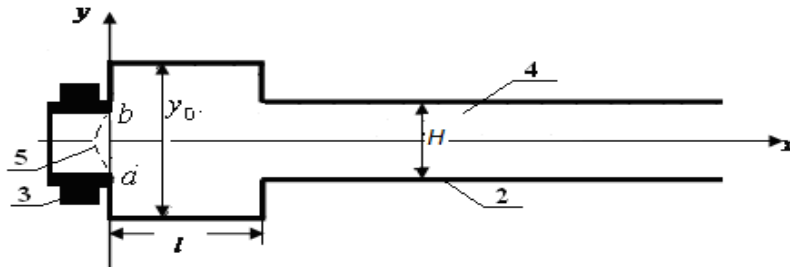


б)

Рис. 2. Трубопровод конечной (а) и бесконечной (б) длины с упругим элементом датчика, расположенным в полости



а)



б)

Рис. 3. Схема механической системы с датчиком, расположенным в полости трубопровода конечной (а) и бесконечной (б) длины

На рис. 1-3: 1 – двигатель, 2 – трубопровод, 3 – датчик, 4 – рабочая среда, 5 – пластина (упругий элемент датчика).

Для того, чтобы создать у читателя общее представление о рассматриваемых в этой статье задачах, рассмотрим наиболее простую задачу о динамике упругого элемента датчика давления рабочей среды, расположенного на торцевой стенке трубопровода постоянного сечения и конечной длины (рис.1,а).

Соответствующая математическая модель определяется следующими уравнениями и граничными условиями:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G = \{(x, y) : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}, \quad (1.1)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = \varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad (1.2)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = \dot{w}(y, t), \quad y \in (a, b), \quad 0 < a < b < y_0, \quad (1.3)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = 0, \quad y \in (0, a) \cup (b, y_0), \quad (1.4)$$

$$\tilde{P} - \rho \varphi_t(x_0, y, t) = P_*(y, t), \quad y \in (0, y_0), \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} L(w) &\equiv M\ddot{w} + Dw_{yyyy} + Nw_{yy} + \alpha\dot{w}_{yyyy} + \beta\dot{w} - \delta\ddot{w}'' + \gamma w = \\ &= P_0(y, t) - \tilde{P} + \rho \varphi_t(0, y, t), \quad y \in (a, b). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь (1.1) – уравнение Лапласа, описывающее движение рабочей среды в трубопроводе; (1.2)-(1.4) – условия непротекания; условие (1.5) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; (1.6) – уравнение динамики пластины;  $\varphi(x, y, t)$  – потенциал скорости среды;  $w(y, t)$  – прогиб упругого элемента;  $x_0, y_0$  – продольный и поперечный размеры трубопровода;  $a, b$  – координаты концов упругого элемента;  $\tilde{P}$  – давление рабочей среды в трубопроводе в состоянии покоя;  $\rho$  – плотность среды;  $M$  – погонная масса;  $D$  – изгибная жесткость;  $N$  – сжимающее (растягивающее) усилие;  $\alpha, \beta$  – коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования;  $\delta$  – коэффициент, учитывающий инерцию вращения; точка и штрих, также как и индексы  $t$  и  $y$  снизу, обозначают частную производную по  $t$  и  $y$  соответственно;  $P_*(y, t)$  – закон распределения давления среды в сечении  $x = x_0$  (на выходе из двигателя).

Математические постановки задач, соответствующих остальным пяти рассматриваемым в статье схемам, приводить не будем, а запишем сразу разрешающие уравнения, полученные с помощью исключения потенциала скорости.

Для всех указанных моделей (рис.1-3) с помощью метода Фурье или методов теории функций комплексного переменного (с использованием интеграла Кристофеля-Шварца, формулы Сохоцкого) потенциал скорости выражен через функцию прогиба, что позволило получить разрешающие уравнения [1]-[5], связывающие давление на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания двигателя) и прогиб (деформацию) упругого элемента датчика давления.

Для модели, изображенной на рис.1 а:

$$L(w) = P_0(y, t) - \frac{\rho x_0}{y_0} \int_a^b \ddot{w}(y, t) dy - \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} P_*(y, t) dy - \frac{2\rho}{y_0} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_s y)}{\operatorname{ch}(\lambda_s x_0)} \left[ \int_0^{y_0} \frac{P_*(y, t)}{\rho} \cos(\lambda_s y) dy + \frac{\operatorname{sh}(\lambda_s x_0)}{\lambda_s} \int_a^b \ddot{w}(y, t) \cos(\lambda_s y) dy \right], \quad (1.7)$$

где оператор  $L(w)$  определяется, согласно (1.6), выражением  $L(w) \equiv M\ddot{w} + Dw_{yyyy} + Nw_{yy} + \alpha\dot{w}_{yyy} + \beta\dot{w} - \delta\ddot{w}'' + \gamma w$ .

Для модели, изображенной на рис.1 б:

$$L(w) = P_0(y, t) - P_*(t) + \frac{\rho}{\pi} \int_a^b \ddot{w}(s, t) \ln \left| \cos \frac{\pi s}{y_0} - \cos \frac{\pi y}{y_0} \right| ds. \quad (1.8)$$

Для модели, изображенной на рис.2 а:

$$L(w) = P_0(y, t) - \frac{\sqrt{1-\lambda^2}\xi^2}{\pi} \left( \int_a^{1/\lambda} \frac{\rho u(\tau, t)}{\sqrt{1-\lambda^2\tau^2}} \frac{d\tau}{\tau-\xi} + \int_{1/\lambda}^{\infty} \frac{P_*(y(\tau), t)}{\sqrt{\lambda^2\tau^2-1}} \frac{d\tau}{\tau-\xi} - \int_{-\infty}^{-1/\lambda} \frac{P_*(y(\tau), t)}{\sqrt{\lambda^2\tau^2-1}} \frac{d\tau}{\tau-\xi} \right) \quad (1.9)$$

где  $\xi = \xi(y)$  – функция, обратная к функции

$$y(\xi) = K_0 \cdot \int_0^\xi \sqrt{\frac{1 - (m+n)s^2}{(1 - ns^2)(1 - (n+1)s^2)(1 - (n-k)s^2)}} ds, \quad u(\xi, t) = \begin{cases} \int_a^{y(\xi)} \ddot{w}(y, t) dy, & \xi \in (\alpha, \beta) \\ \int_a^b \ddot{w}(y, t) dy, & \xi \in \left[ \beta, \frac{1}{\sqrt{n-k}} \right) \end{cases}.$$

Концы отрезка  $[\alpha, \beta]$  определяются из условий:  $y(\alpha) = a$ ,  $y(\beta) = b$ . Входящие в уравнение постоянные  $m$ ,  $n$ ,  $k$  связаны с параметрами  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $l$ ,  $H$ .

Для модели, изображенной на рис.2 б:

$$L(w) = P_0(y, t) - P_*(t) + \frac{\rho}{\pi} \int_a^b \ddot{w}(\tau, t) \ln |\xi(\tau) - \xi(y)| d\tau, \quad y \in (a, b). \quad (1.10)$$

где  $\xi(y)$  – функция обратная к функции

$$y = y(\xi) = y_0 K \cdot \int_0^\xi \sqrt{\frac{1 - (m+n)s^2}{(1 - ns^2)(1 - (n+1)s^2)}} ds, \quad \xi \in [\alpha, \beta]. \quad \text{Концы отрезка } [\alpha, \beta]$$

определяются из условий:  $y(\alpha) = a$ ,  $y(\beta) = b$ . Параметры  $m$  и  $n$  выражаются через параметры  $l$ ,  $y_0$ ,  $H$ .

Для модели, изображенной на рис.3 а:

$$L(w) = P_0(y, t) - \frac{\sqrt{1 - \lambda^2 \xi^2}}{\pi} \left( \int_\alpha^{1/\lambda} \frac{\rho u(\tau, t)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \tau^2}} \frac{d\tau}{\tau - \xi} + \int_{1/\lambda}^\infty \frac{P(y(\tau), t)}{\sqrt{\lambda^2 \tau^2 - 1}} \frac{d\tau}{\tau - \xi} - \int_{-\infty}^{-1/\lambda} \frac{P(y(\tau), t)}{\sqrt{\lambda^2 \tau^2 - 1}} \frac{d\tau}{\tau - \xi} \right), \quad (1.11)$$

где  $\xi = \xi(y)$  – функция, обратная к функции

$$y = y(\xi) = y_0 K \cdot \int_0^\xi \sqrt{\frac{1 - ns^2}{(1 - (n+1)s^2)(1 - (m+n)s^2)(1 - (n-k)s^2)}} ds, \quad \xi \in [\alpha, \beta].$$

Концы отрезка  $[\alpha, \beta]$  определяются из условий:  $y(\alpha) = a$ ,  $y(\beta) = b$ .

$$u(\xi, t) = \begin{cases} \int_a^{y(\xi)} \ddot{w}(y, t) dy, & \xi \in (\alpha, \beta), \\ \int_a^b \ddot{w}(y, t) dy, & \xi \in \left[ \beta, \frac{1}{\sqrt{n-k}} \right). \end{cases}$$

Параметры  $m$ ,  $n$ ,  $k$  выражаются через параметры  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $l$ ,  $H$ .

Для модели, изображенной на рис.3 б:

$$L(w) = P_0(y, t) - P(t) + \frac{\rho}{\pi} \int_a^b \ddot{w}(\tau, t) \ln |\xi(\tau) - \xi(y)| d\tau, \quad y \in (a, b). \quad (1.12)$$

где  $\xi = \xi(y)$  – функция, обратная к функции

$$y = y(\xi) = y_0 K \cdot \int_0^\xi \sqrt{\frac{1 - ns^2}{(1 - (n+1)s^2)(1 - (m+n)s^2)}} ds, \quad \xi \in [\alpha, \beta].$$

Концы отрезка  $[\alpha, \beta]$  определяются из условий:  $y(\alpha) = a$ ,  $y(\beta) = b$ . Параметры  $m$  и  $n$  выражаются через параметры  $l$ ,  $y_0$ ,  $H$ .

## 2. Нелинейные математические модели механической системы «трубопровод – датчик давления»

Постановка задач (1.1) – (1.6) соответствует линейной теории аэрогидроупругости, когда динамика жидкости (газа), а также динамика чувствительного элемента датчика описываются линейными уравнениями.

Авторами предлагались в [5] нелинейные модели, которые определяются приведенными выше уравнениями типа (1.1) – (1.6), при этом в уравнении (1.6), описывающем динамику пластины, линейный дифференциальный оператор  $L(w)$  заменяется нелинейным:

$$L(w) \equiv M\ddot{w} + \left( \frac{Dw''}{[1 + (w')^2]^{3/2}} \right)'' + Nw'' + \alpha \dot{w}''' - \delta \ddot{w}'' + \beta \dot{w} + \gamma w.$$

В предположении, что  $w'$  мало, проводилась замена  $\frac{1}{[1 + (w')^2]^{3/2}}$  на  $(1 - \frac{3}{2}(w')^2)$ . В результате выражение для  $L(w)$  принимало вид

$$L(w) \equiv M\ddot{w} + Dw'''' - \frac{3}{2}Dw'''(w')^2 - 9Dw'w''w''' - 3D(w'')^3 + \quad (2.1) \\ + Nw'' + \alpha \dot{w}''' - \delta \ddot{w}'' + \beta \dot{w} + \gamma w.$$

В данной работе рассматривается нелинейная модель системы «трубопровод – датчик давления», учитывающая как поперечную, так и продольную деформации упругого элемента датчика. В уравнении (1.6), описывающем динамику пластины, дифференциальный оператор  $L(w)$  заменяется системой уравнений:

$$\begin{cases} -EF \left[ u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right]' + M\ddot{u} + \alpha \dot{u}'' = 0, \\ -EF \left[ w' \left( u' + \frac{1}{2}(w')^2 \right) \right]' + \left( \frac{Dw''}{[1 + (w')^2]^{3/2}} \right)'' + M\ddot{w} + \alpha \dot{w}''' - \delta \ddot{w}'' + \beta \dot{w} + Nw'' = \\ = P_0(y, t) - \tilde{P} + \rho \varphi_t(0, y, t), \quad y \in (a, b). \end{cases} \quad (2.2)$$

Здесь  $u(y,t)$ ,  $w(y,t)$  – продольная и поперечная деформации упругого элемента в направлении осей  $y$  и  $x$  соответственно;  $E$  – модуль упругости;  $F$  – площадь поперечного сечения. В предположении, что  $w'$  мало, проводится замена  $\frac{1}{[1+(w')^2]^{3/2}}$  на  $(1 - \frac{3}{2}(w')^2)$ .

### 3. Решение уравнения для деформации

Для линейных и нелинейных моделей, согласно методу Галеркина, решение  $w$  уравнения, связывающего закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод и функцию прогиба упругого элемента датчика

давления, ищется в виде  $w(y,t) = \sum_{k=1}^n \omega_k(t) g_k(y)$  (для моделей с упругим

элементом на торцевой стенке), где  $\{g_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$  – полная на  $[a,b]$  система базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям, соответствующим условиям закрепления пластины.

Из условия ортогональности невязки уравнения к системе базисных функций  $\{g_k(y)\}_{k=1}^n$  получим систему из  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений для  $w_k(t)$ .

Для нелинейной модели, учитывающей как продольную, так и поперечную деформации, согласно методу Галеркина, искомые функции деформации  $u(y,t)$ ,  $w(y,t)$  ищем в виде

$$u(y,t) = \sum_{k=1}^n u_k(t) h_k(y), \quad w(y,t) = \sum_{k=1}^n w_k(t) g_k(y),$$

где  $\{h_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $\{g_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$  – полные на  $[a,b]$  системы базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям, соответствующим условиям закрепления пластины.

Из условия ортогональности невязок первого и второго уравнений (2.2) к системам базисных функций  $\{h_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $\{g_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$  соответственно, получим систему из  $2n$  обыкновенных дифференциальных уравнений для  $u_k(t)$ ,  $w_k(t)$ .

### 4. Численное моделирование

Для всех рассмотренных моделей задача Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений решается с помощью системы Mathematica. Проведено численное моделирование на ЭВМ динамики упругого элемента датчика в зависимости от закона изменения давления в двигателе. Исследовалась деформация элемента как функция времени (в фиксированных



точках элемента) и как функция координаты (в фиксированные моменты времени) для различных параметров механической системы.

**Пример 1.** Рассмотрим плоскую модель, изображенную на рис.1а (шарнирное закрепление концов упругого элемента). Рабочая среда – вода ( $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ ), пластина изготовлена из стали ( $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\rho_0 = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $h = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ ). Сжимающее (растягивающее) усилие  $N$  полагаем постоянным.

Для значений параметров  $n = 2$ ,  $x_0 = 2 \text{ м}$ ,  $y_0 = 0,02 \text{ м}$ ,  $a = 0 \text{ м}$ ,  $b = 0,02 \text{ м}$ ,  $M = 2,34 \text{ кг/м}^2$ ,  $D = 0,495 \text{ Дж}$ ,  $N = 10^3 \text{ Н}$ ,  $\alpha = 0,01 \text{ м·кг/с}$ ,  $\beta = 0,3 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}$ ,  $\delta = 0 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}^2$ ,  $w(y, 0) = 0 \text{ м}$ ,  $\dot{w}(y, 0) = 0,5 \text{ м/с}$ ,  $u(y, 0) = 0 \text{ м}$ ,  $\dot{u}(y, 0) = 0,5 \text{ м/с}$ ,  $P_0(x, t) = 0 \text{ Па}$ ,  $P_*(y, t) = 10^5 (20 + \cos(10t)) \text{ Па}$  получено решение для функции  $w(y, t)$  в точке  $y_* = \frac{a+b}{2,5}$  (Рис.4-6):

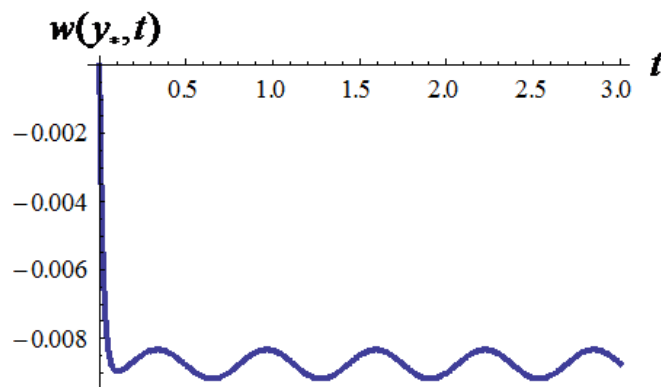


Рис.4. График деформации  $w(y, t)$  для линейной модели (1.1)-(1.7).

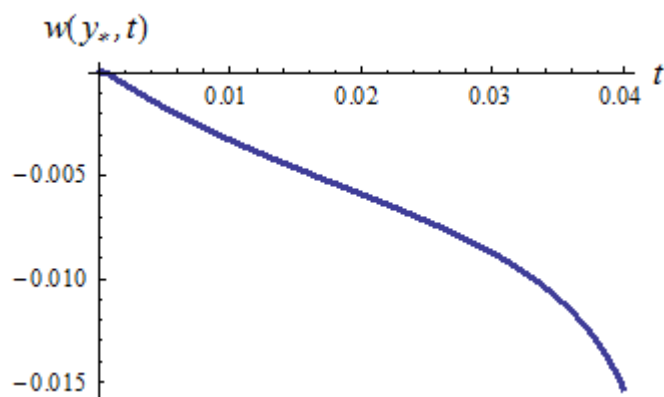


Рис.5. График деформации  $w(y, t)$  для одностепенной нелинейной модели (1.1)-(1.5), (1.7), (2.1).

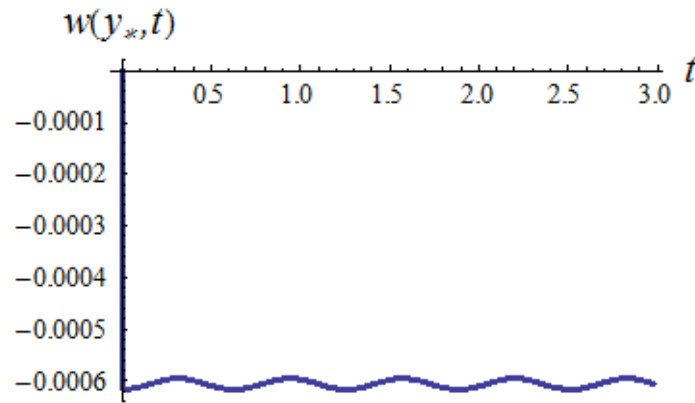


Рис.6. График деформации  $w(y_*, t)$  для двухстепенной нелинейной модели (1.1)-(1.5), (1.7), (2.2).

**Пример 2.** Проведем исследование динамики упругого элемента датчика для двухстепенной нелинейной модели, изображенной на рис.1 а, с учетом теплового воздействия ( $N(t)$  – функция времени). Рассмотрим шарнирное закрепление концов упругого элемента. Рабочая среда – вода ( $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ ), пластина изготовлена из стали ( $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\rho_0 = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $h = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ ).

Для значений параметров  $n = 2$ ,  $x_0 = 2 \text{ м}$ ,  $y_0 = 0,02 \text{ м}$ ,  $a = 0 \text{ м}$ ,  $b = 0,02 \text{ м}$ ,  $M = 3,12 \text{ кг/м}^2$ ,  $D = 1,1722 \text{ Дж}$ ,  $\alpha = 0,01 \text{ м} \cdot \text{кг/с}$ ,  $\beta = 0,3 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}$ ,  $\delta = 0 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}^2$ ,  $w(y, 0) = 0 \text{ м}$ ,  $\dot{w}(y, 0) = 0,5 \text{ м/с}$ ,  $u(y, 0) = 0 \text{ м}$ ,  $\dot{u}(y, 0) = 0,5 \text{ м/с}$ ,  $P_0(x, t) = 0 \text{ Па}$ ,  $P_*(y, t) = 10^5 (20 + \cos(10t)) \text{ Па}$ ,  $N(t) = 10^3 - 2500(10 + 20t)$  получено решение для функции  $w(y, t)$  в точке  $y_* = \frac{a+b}{2,5}$  (Рис.7-10):

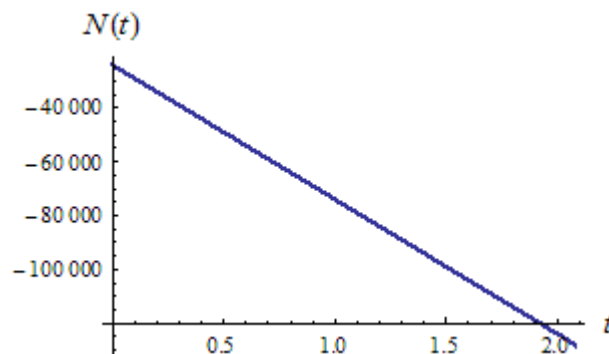


Рис. 7. График сжимающего (растягивающего) усилия  $N(t) = 10^3 - 2500(10 + 20t)$

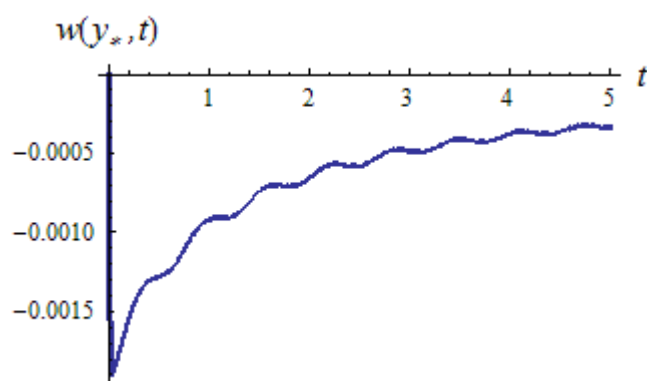


Рис. 8. График деформации  $w(y, t)$  для линейной модели (1.1)-(1.7).

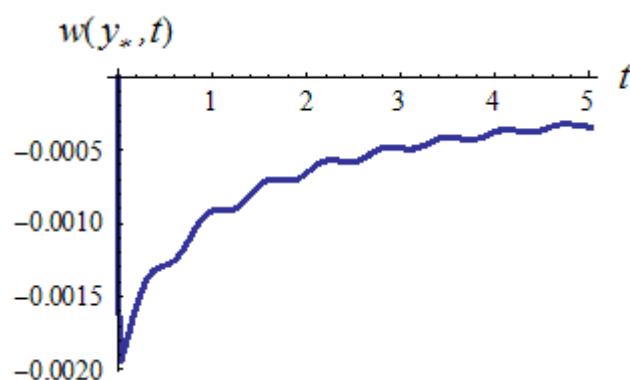


Рис. 9. График деформации  $w(y, t)$  для одностепенной нелинейной модели (1.1)-(1.5), (1.7), (2.1).

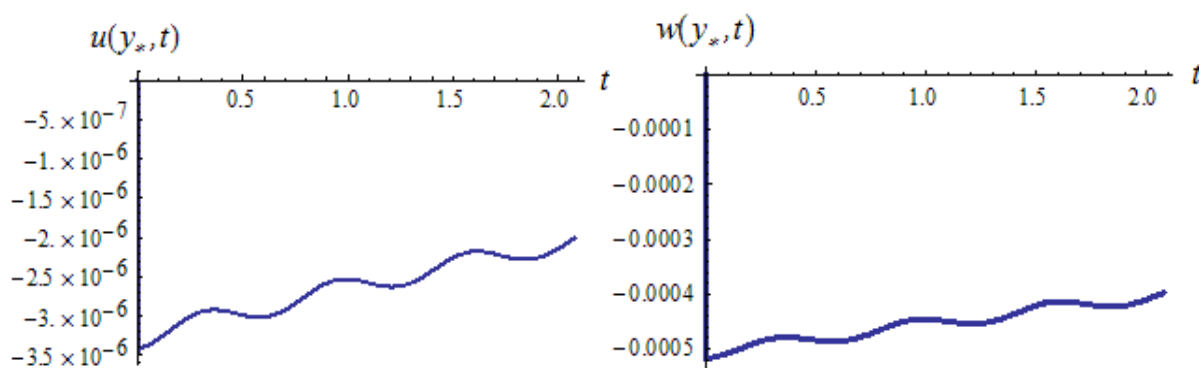


Рис. 10. Графики деформации  $u(y, t)$ ,  $w(y, t)$  для двухстепенной нелинейной модели (1.1)-(1.5), (1.7), (2.2).

Численный эксперимент показал, что для одинаковых значений параметров системы графики деформаций пластины для нелинейных и линейной моделей существенно отличаются. Можно сделать вывод, что учет нелинейных членов в уравнении, описывающем динамику пластины, имеет важное значение при исследовании динамики чувствительного элемента.

### Заключение

Развитие авиационной техники требует постоянного совершенствования и разработки новых типов первичных преобразователей, в частности, датчиков

давления. В связи с вышеизложенным возникает актуальная задача разработки специальных методов исследования динамики и устойчивости упругих элементов датчиков давления, взаимодействующих с жидкостью. Предложенные новые модели, а также методика решения соответствующих задач аэрогидроупругости позволяют дополнить и усовершенствовать базу современного проектирования датчиков давления.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК:

1. Vel'misov P. A., Pokladova Yu. V. An investigation of mathematical models of a mechanical system "Pipeline-Pressure Sensor" // Romai Journal. Pitești, Romania, 2005. – V.2, №1. – P.214-219.
2. Vel'misov P. A., Pokladova Yu. V. Investigation of dynamics of an elastic element of a pressure sensor // Applications of Mathematics in Engineering and Economics. – Soft trade, Sofia, Bulgaria, 2006. – P.51-57.
3. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Покладова Ю. В. Математическое моделирование механической системы "трубопровод - датчик давления". – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – 188 с.
4. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. Математические модели механической системы "трубопровод - датчик давления" // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2007. – №3(27), Вып.2. – С. 7-14.
5. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. О некоторых математических моделях механической системы «трубопровод – датчик давления» // Proceeding of the international conference "Education, science and economics at universities. Integration to international education area" (Poland, Plock, 20.09.10 – 25.09.10). – Plock: NOVUM, 2010. – P.492-499.
6. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. О некоторых математических моделях механической системы "трубопровод - датчик давления" // Вестник Самарского государственного технического университета, 2011. – №1(29). – С.137-144.
7. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., Серебрянникова Е. С. Математическое моделирование систем измерения давления // Proceeding of the international conference "Education, science and economics at universities. Integration to international education area" (Armenia, Yerevan, 26.09.11 – 30.09.11). – Yerevan, 2011. – P.84-86.

**А. И. Вельмисова, М. В. Вильде** (г. Саратов)

## **ПОГРАНСЛОЙ В ОКРЕСТНОСТИ УСЛОВНОГО ФРОНТА ВОЛНЫ РЭЛЕЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ УДАРНОМ ПОВЕРХНОСТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ**

*Изучается дальнее поле волны Рэлея в задаче Лэмба для двухслойной пластины. Точное решение задачи сопоставляется с решением приближенных уравнений, выведенных асимптотическими методами. Показано, что асимптотическая модель достаточно точно описывает НДС в окрестности условного фронта волны Рэлея. Получены аналитические формулы для определения скачков перерезывающего усилия на фронтах волн Рэлея.*

До недавнего времени анализ поля нестационарной волны Рэлея, возникающей при ударном воздействии на поверхность полупространства или пластины, был осложнен тем, что в традиционных формулировках динамических задач теории упругости волна Рэлея не присутствует в явном виде, и для ее выявления требуется осуществить некоторые дополнительные преобразования. В работе [1] (для случая полупространства, находящегося в условиях плоской деформации) впервые была предложена асимптотическая модель, направленная непосредственно на описание поля волны Рэлея. Эта модель включает в себя одномерное волновое уравнение, содержащее в явном виде скорость волны Рэлея и описывающее распространение волны вдоль поверхности, и краевые задачи Неймана для потенциалов Ламе, описывающие затухание волнового поля вглубь полупространства. Приближенная теория [1] существенно облегчает количественный и качественный анализ поля нестационарной волны Рэлея. Результаты работы [1] распространены в работе [2] на случай дальнего поля Рэлея в бесконечном упругом слое при нормальном воздействии на его поверхности, в работе [3] – на случай полуполосы при действии торцевой нагрузки и в работе [4] – на случай многослойной пластины.

Целью данной работы является изучение погранслоя в окрестности условного фронта волны Рэлея в задаче Лэмба для двухслойной пластины на основе асимптотической модели, построенной в [4].

### **1. Постановка задачи**

Рассмотрим задачу определения нестационарного НДС бесконечной двухслойной пластины, занимающей в декартовых координатах  $(x, y, z)$  область  $(-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, |z| \leq h)$ , при этом положение поверхности раздела слоев характеризуется координатой  $z = h_1$  (см. рис. 1).

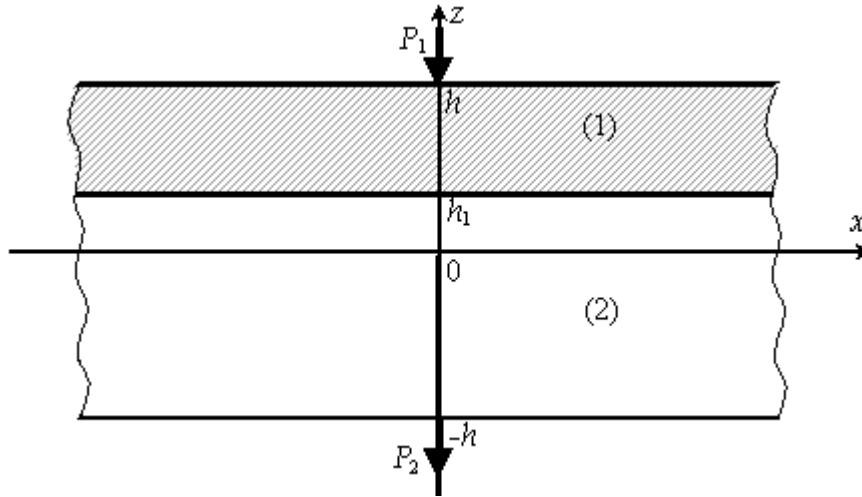


Рис. 1. Двухслойная полоса под действием поверхностной нормальной нагрузки

Будем считать, что приложенная к поверхностям пластины нагрузка не зависит от переменной  $y$ , тогда искомое НДС будет определяться как решение динамических уравнений плоской задачи теории упругости. Все характеристики, относящиеся к  $k$ -тому слою ( $k=1,2$ ), будем отмечать верхним (для искомых функций) или нижним (для постоянных параметров, в случае двух индексов – второй) индексом  $k$ . В частности, упругие константы Ламе и плотность материала обозначаются символами  $\lambda_k$ ,  $\mu_k$  и  $\rho_k$ , соответственно. В безразмерных переменных уравнения движения для каждого из слоев могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \zeta^2} - \theta_k^2 \kappa_k^2 \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \tau^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \zeta^2} - \theta_k^2 \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \tau^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\varphi^{(k)}$ ,  $\psi^{(k)}$  – объемный и сдвиговой потенциалы Ламе,  $\theta_k = c_{2,1}/c_{2,k}$ ,  $\kappa_k = c_{2,k}/c_{1,k}$ ,  $\xi = x/h$ ,  $\zeta = z/h$ ,  $\tau = tc_{2,1}/h$ ,  $c_{2,k} = \sqrt{\mu_k/\rho_k}$  и  $c_{1,k} = \sqrt{(\lambda_k + 2\mu_k)/\rho_k}$  – скорости волн сдвига и расширения, соответственно,  $t$  – время. Компоненты тензора напряжений и вектора перемещений выражаются через потенциалы  $\varphi^{(k)}$ ,  $\psi^{(k)}$  по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)} &= \mu_1 h^{-2} \frac{\gamma_k}{\kappa_k^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \xi^2} + (1 - 2\kappa_k^2) \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \zeta^2} + 2\kappa_k^2 \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} \right), \\ \sigma_{33}^{(k)} &= \mu_1 h^{-2} \frac{\gamma_k}{\kappa_k^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \zeta^2} + (1 - 2\kappa_k^2) \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \xi^2} - 2\kappa_k^2 \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{13}^{(k)} &= \mu_1 h^{-2} \gamma_k \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \zeta^2} \right), \\ v_1^{(k)} &= \frac{1}{h} \left( \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \zeta} \right), \quad v_3^{(k)} = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial \xi} \right),\end{aligned}\quad (1.2)$$

где  $\gamma_k = \mu_k / \mu_1$ .

Запишем граничные условия на лицевых поверхностях и поверхности контакта:

$$\begin{aligned}\zeta = 1: \quad \sigma_{13}^{(1)} &= 0, \quad \sigma_{33}^{(1)} = P_1(\xi, \tau); \\ \zeta = r_1: \quad \sigma_{13}^{(1)} &= \sigma_{13}^{(2)}, \quad \sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)}, \quad v_1^{(1)} = v_1^{(2)}, \quad v_3^{(1)} = v_3^{(2)}; \\ \zeta = -1: \quad \sigma_{13}^{(2)} &= 0, \quad \sigma_{33}^{(2)} = P_2(\xi, \tau).\end{aligned}\quad (1.3)$$

В (1.3)  $P_1(\xi, \tau)$ ,  $P_2(\xi, \tau)$  – заданные напряжения,  $r_1 = h_1/h$ . Введем также обозначения

$$r_0 = 1, \quad r_2 = -1.$$

При  $\tau = 0$  ставятся нулевые начальные условия.

Безразмерная скорость волны Рэлея  $k_{R,k}$  определяется из известного трансцендентного уравнения [5], в обозначениях данной работы принимающего вид

$$\left( 1 - \frac{1}{2} \theta_k^2 k_{R,k}^2 \right)^2 - \sqrt{1 - \theta_k^2 \kappa_k^2 k_{R,k}^2} \sqrt{1 - \theta_k^2 k_{R,k}^2} = 0. \quad (1.4)$$

Без ограничения общности можно принять  $k_{R,1} = k_R \leq k_{R,2}$ .

Рассмотрим случай воздействия типа сосредоточенной силы:

$$P_1 = -I_1 \delta(\xi) H(\tau), \quad P_2 = I_2 \delta(\xi) H(\tau), \quad (1.5)$$

где  $I_1$  и  $I_2$  – постоянные, имеющие размерность напряжения,  $\delta(\xi)$  – дельта-функция Дирака,  $H(\tau)$  – функция Хевисайда.

Ограничимся исследованием окрестности условного фронта волн Рэлея. В работе [4] получена асимптотическая модель, направленная на вычисление дальнего поля волны Рэлея в многослойной пластине. Эта модель состоит из “головной системы”, описывающей распространение волн Рэлея вдоль поверхности пластины, и ряда краевых задач для уравнений эллиптического типа, позволяющих восстановить волновое поле во всех слоях. Если мы ограничимся вычислением перерезывающего усилия, то для решения задачи достаточно решить “головную систему”, которая записывается для составляющих перерезывающего усилия и имеет вид

$$\frac{\partial^2 N_1^{(1)}}{\partial \tau^2} - k_R^2 \frac{\partial^2 N_1^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{2k_R B_1 S_{11}}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1^{(1)}(q_1 x_1 + q_1 x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2k_R B_1 S_{12} K_{N,1}}{\pi^2 K_{N,2}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1^{(2)}(q_2 x_1 + q_1 x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 = \frac{hk_R B_1 K_{N,1}}{\gamma_1} \frac{\partial P_1}{\partial \xi}, \\
& - k_R B_2 D_2 \frac{\partial^2 N_1^{(2)}}{\partial \xi^2} + \left( \frac{\partial^2 N_1^{(2)}}{\partial \tau^2} - k_R^2 \frac{\partial^2 N_1^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) - \\
& - \frac{k_R B_2' S_{22}^{(1)}}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1^{(2)}(q_2 x_1 + q_2 x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 - \\
& - \frac{k_R B_2' S_{21}^{(1)} K_{N,2}}{\pi^2 K_{N,1}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1^{(1)}(q_1 x_1 + q_2 x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 = \frac{hk_R B_2 K_{N,2}}{\gamma_2} \frac{\partial P_2}{\partial \xi}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

где

$$\begin{aligned}
B_1 &= \left[ \frac{\theta_1^2 k_R}{2} \left( \frac{\kappa_1^2}{k_{1,1}^2} + \frac{1}{k_{2,1}^2} - \frac{2}{k_{3,1}^2} \right) \right]^{-1}, \quad B_2 = \left[ \frac{\theta_2^2 k_R}{2} \left( \frac{k_{3,2}^4 \kappa_2^2}{k_{1,2}^3 k_{2,2}} + \frac{k_{3,2}^4}{k_{1,2} k_{2,2}^3} - \frac{2k_{3,2}^2}{k_{1,2} k_{2,2}} \right) \right]^{-1}, \\
D_2 &= 1 - \frac{k_{3,2}^4}{k_{1,2} k_{2,2}}, \quad B_2' = B_2 \left( \frac{k_{3,2}^4}{k_{1,2} k_{2,2}} + 1 \right), \quad K_{N,1} = \gamma_1 \frac{\theta_1^4 k_R^4}{4k_{2,1}^2 k_{3,1}^2}, \quad K_{N,2} = \gamma_2 k_{3,2}^2 \frac{k_{1,2} - k_{2,2}}{k_{1,2} k_{2,2}^2}, \\
k_{1,k} &= \sqrt{1 - \theta_k^2 \kappa_k^2 k_R^2}, \quad k_{2,k} = \sqrt{1 - \theta_k^2 k_R^2}, \quad k_{3,k}^2 = 1 - \frac{\theta_k^2 k_R^2}{2}, \quad q_k = 2\eta_k k_{2,k}, \quad \eta_k = \frac{r_{k-1} - r_k}{2}, \\
S_{ii}^{(1)} &= \frac{1}{\Delta_0^{(1)}} \left[ (k_{3,i}^4 + k_{1,i} k_{2,i}) (k_{1,l} k_{2,l} - 1) \gamma_i^2 + s_{il} \gamma_i \gamma_l + (k_{1,l} k_{2,l} - k_{3,l}^4) (k_{1,i} k_{2,i} + 1) \gamma_l^2 \right], \tag{1.7} \\
s_{il} &= (2 + k_{1,i} k_{2,l} - k_{1,l} k_{2,i}) k_{3,i}^2 k_{3,l}^2 - (2k_{1,l} k_{2,l} + k_{1,i} k_{2,i} - k_{1,l} k_{2,i}) k_{3,i}^2 + \\
&+ (2k_{1,i} k_{2,i} + k_{1,l} k_{2,l} - k_{1,i} k_{2,l}) k_{3,l}^2 - 2k_{1,i} k_{2,i} k_{1,l} k_{2,l} - k_{1,l} k_{2,i} + k_{1,i} k_{2,l}, \\
S_{il}^{(1)} &= \frac{2k_{2,i}}{\Delta_0^{(1)}} (k_{3,l}^2 - 1) \left[ (k_{3,l}^2 k_{1,i} - k_{1,l}) \gamma_l^2 + (k_{3,i}^2 k_{1,l} - k_{1,i}) \gamma_l \gamma_i \right],
\end{aligned}$$

$l, i = 1, 2, \quad l \neq i, \text{ и}$

$$\Delta_0^{(1)} = \begin{vmatrix} \gamma_1 k_{1,1} & \gamma_1 k_{3,1}^2 & \gamma_2 k_{1,2} & \gamma_2 k_{3,2}^2 \\ \gamma_1 k_{3,1}^2 & \gamma_1 k_{2,1} & -\gamma_2 k_{3,2}^2 & -\gamma_2 k_{2,2} \\ k_{1,1} & 1 & k_{1,2} & 1 \\ 1 & k_{2,1} & -1 & -k_{2,2} \end{vmatrix}.$$

После определения составляющих  $N_1^{(1)}$  и  $N_1^{(2)}$  перерезывающее усилие определяется по формуле

$$N_1 = N_1^{(1)} - N_1^{(2)}. \tag{1.8}$$

При применении построенной модели следует иметь в виду, что она не предназначена для описания длинноволновых колебаний, поэтому частные



решения подобного рода должны быть отброшены. Также следует отметить, что волновой оператор во втором уравнении системы (1.6) необходим, строго говоря, только в случае  $k_{R,1} = k_{R,2}$  (равные скорости волны Рэлея), когда постоянная  $D_2$  обращается в нуль. Если же скорости волн Рэлея различны, то с течением времени их фронты расходятся достаточно далеко и перестают влиять друг на друга. Однако в случае очень близких значений скоростей возможны ситуации, когда даже в дальнем поле фронт второй волны попадает в окрестность фронта первой волны. В этом случае построенная модель, при сохранении волнового оператора во втором уравнении, описывает оба фронта, однако скорость движения второго фронта определяется приближенно – чем ближе значения скоростей, тем точнее. В случае существенного различия скоростей учет волнового оператора во втором уравнении становится неэффективным. Отбрасывая его и следующее слагаемое, малое по сравнению с первым, получим упрощенную систему:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 N_1^{(1)}}{\partial \tau^2} - k_R^2 \frac{\partial^2 N_1^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{2k_R B_1 S_{11}^{(1)}}{\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1^{(1)}(q_1 x_1 + q_1 x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 - \\ & - \frac{2k_R B_1 S_{12}^{(1)} K_{N,1}}{\pi^2 K_{N,2}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1^{(2)}(q_2 x_1 + q_1 x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 = \frac{h k_R B_1 K_{N,1}}{\gamma_1} \frac{\partial P_1}{\partial \xi}, \\ & - k_R B_2 D_2 \frac{\partial^2 N_1^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{k_R B_2' S_{21}^{(1)} K_{N,2}}{\pi^2 K_{N,1}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_1^{(1)}(q_1 x_1 + q_2 x_2 + \xi, \tau)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} dx_1 dx_2 = \\ & = \frac{h k_R B_2 K_{N,2}}{\gamma_2} \frac{\partial P_2}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Критерием выбора между системами (1.6) и (1.9) является погрешность аппроксимации величины  $k_{R,2}$  выражением  $\sqrt{k_R^2 + k_R B_2 D_2}$ . Если она мала (порядка десятых долей процента), то следует пользоваться системой (1.6), в противном случае – системой (1.9).

## 2. Решение приближенных уравнений и сравнение с точным решением

Применим к системе (1.6) интегральное преобразование Лапласа по времени

$$N_1^{L(k)} = \int_0^{\infty} N_1^{(k)} e^{-s\tau} d\tau \quad (2.1)$$

и преобразование Фурье по продольной координате

$$N_1^{LF(k)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} N_1^{L(k)} e^{i\chi\xi} d\xi. \quad (2.2)$$

Преобразование интегральных членов сводится к вычислению интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}. \quad (2.3)$$

Формула (2.3) легко получается с помощью теории вычетов (см. [6]). Для изображений составляющих перерезывающего усилия получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} [s^2 + \chi^2(k_R^2 + 2k_R a_{11})] N_1^{\text{LF}(1)} + 2k_R \chi^2 a_{12} N_1^{\text{LF}(2)} &= \frac{i\chi k_R}{s} K_{P,1}, \\ 2k_R \chi^2 a_{21} N_1^{\text{LF}(1)} + [s^2 + \chi^2(k_R^2 + k_R B_2 D_2 + 2k_R a_{22})] N_1^{\text{LF}(2)} &= -\frac{i\chi k_R}{s} K_{P,2}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= B_1 S_{11}^{(1)} e_1^2, \quad a_{12} = \frac{B_1 S_{12}^{(1)} K_{N,1}}{K_{N,2}} e_1 e_2, \quad a_{21} = \frac{1}{2} \frac{B_2' S_{21}^{(1)} K_{N,2}}{K_{N,1}} e_1 e_2, \quad a_{22} = \frac{1}{2} B_2' S_{22}^{(1)} e_2^2, \\ e_k &= e^{-q_k |\chi|}, \quad K_{P,k} = \frac{h I_k B_k K_{N,k}}{\sqrt{2\pi} \gamma_k}. \end{aligned}$$

Решение системы (2.4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} N_1^{\text{LF}(1)} &= \frac{i\chi k_R}{s} \frac{K_{P,1} (s^2 + \chi^2(k_R^2 + k_R B_2 D_2 + 2k_R a_{22})) + 2k_R \chi^2 a_{12} K_{P,2}}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}, \\ N_1^{\text{LF}(2)} &= -\frac{i\chi k_R}{s} \frac{K_{P,2} (s^2 + \chi^2(k_R^2 + 2k_R a_{11})) + 2k_R \chi^2 a_{21} K_{P,1}}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \min\{\omega_{1,0}, \omega_{2,0}\}, \quad \omega_2 = \max\{\omega_{1,0}, \omega_{2,0}\}, \\ \omega_{1,0} &= \chi \sqrt{k_R^2 + 2k_R(a_{11} - b)}, \quad \omega_{2,0} = \chi \sqrt{k_R^2 + k_R B_2 D_2 + 2k_R(a_{22} + b)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В (2.6)

$$b = \frac{1}{2} \left[ b_0 - \text{sgn}(b_0) \sqrt{b_0^2 + 4a_{12}a_{21}} \right], \quad b_0 = a_{11} - \frac{1}{2} B_2 D_2 - a_{22},$$

и при  $\chi \rightarrow \infty$  всегда  $\omega_1 = \omega_{1,0}$ ,  $\omega_2 = \omega_{2,0}$ .

При использовании упрощенной системы (1.9) система (2.4) также упрощается:

$$\begin{aligned} [s^2 + \chi^2(k_R^2 + 2k_R a_{11})] N_1^{\text{LF}(1)} + 2k_R \chi^2 a_{12} N_1^{\text{LF}(2)} &= \frac{i\chi k_R}{s} K_{P,1}, \\ 2k_R \chi^2 a_{21} N_1^{\text{LF}(1)} + k_R B_2 D_2 \chi^2 N_1^{\text{LF}(2)} &= -\frac{i\chi k_R}{s} K_{P,2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Решение уравнений (2.7) имеет вид

$$\begin{aligned} N_1^{\text{LF}(1)} &= \frac{i\chi k_R}{s} \left[ \frac{K_{P,1}}{(s^2 + \omega_{1*}^2)} + \frac{2a_{12}K_{P,2}}{(s^2 + \omega_{1*}^2)B_2D_2} \right], \\ N_1^{\text{LF}(2)} &= \frac{i\chi k_R}{s} \left[ K_{P,2} \left( 1 - \frac{2k_R\chi^2 b_*}{(s^2 + \omega_{1*}^2)} \right) - \frac{2a_{21}K_{P,1}}{(s^2 + \omega_{1*}^2)B_2D_2} \right], \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\omega_{1*} = \chi \sqrt{k_R^2 + 2k_R(a_{11} + b_*)}, \quad b_* = -\frac{2a_{12}a_{21}}{B_2D_2}. \quad (2.9)$$

Обратим преобразование Лапласа, используя разложение по вычетам. При этом будем учитывать только полюса

$$s_{1,2} = \pm i\omega_{1,2}, \quad (2.10)$$

соответствующие волнам Рэлея. Обращая далее преобразование Фурье и ограничиваясь исследованием волны, распространяющейся в положительном направлении оси  $\xi$ , приходим к решению системы (1.6) в виде

$$N_1^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\chi_0}^{\infty} R_1^{(k)} \sin(\omega_1\tau - \chi\xi) + R_2^{(k)} \sin(\omega_2\tau - \chi\xi) d\chi, \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} R_1^{(1)} &= \frac{\chi k_R}{\omega_1^2} \left( K_{P,1} \left( 1 - \frac{2k_R\chi^2 b}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \right) + K_{P,2} \frac{2k_R\chi^2 a_{12}}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \right), \\ R_2^{(1)} &= -\frac{2\chi^3 k_R^2}{\omega_1^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} (a_{21}K_{P,1} + bK_{P,2}), \\ R_1^{(2)} &= -\frac{2\chi^3 k_R^2}{\omega_2^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} (bK_{P,1} - a_{12}K_{P,2}), \\ R_2^{(2)} &= -\frac{\chi k_R}{\omega_2^2} \left( K_{P,2} \left( 1 - \frac{2k_R\chi^2 b}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \right) - K_{P,1} \frac{2k_R\chi^2 a_{21}}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Обращая аналогичным образом изображения (2.8), получаем

$$N_1^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\chi_0}^{\infty} R^{(k)} \sin(\omega_{1*}\tau - \chi\xi) d\chi, \quad (2.13)$$

где

$$R^{(1)} = \frac{\chi k_R}{\omega_{1*}^2} \left( K_{P,1} + K_{P,2} \frac{2a_{12}}{B_2D_2} \right), \quad R^{(2)} = \frac{2\chi k_R}{\omega_{1*}^2 B_2D_2} (K_{P,1}a_{21} - K_{P,2}b_*). \quad (2.14)$$

Нижний предел интегрирования в (2.11) и (2.13) заменен на  $\chi_0$ , так как длинноволновые компоненты при применении данной приближенной модели должны быть исключены.

Величины  $a_{ij}$ ,  $b$ ,  $b_*$ , входящие в (2.12) и (2.14), имеют экспоненциальные множители, быстро затухающие с ростом  $\chi$ . Разобьем интегралы в (2.11) и (2.13) на два: по конечному отрезку  $[\chi_0, \chi_1]$  и по бесконечному интервалу  $[\chi_1, \infty)$ . Величина  $\chi_1$  выбирается таким образом, чтобы во втором интеграле можно было с заданной точностью заменить подынтегральные функции их приближенными выражениями, отбросив все члены с экспонентами. Для формулы (2.13) имеем

$$N_1^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\chi_0}^{\chi_1} R^{(k)} \sin(\omega_* \tau - \chi \xi) d\chi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_{P,1}}{k_R} \int_{\chi_1}^{\infty} \frac{1}{\chi} \sin \chi (k_R \tau - \xi) d\chi. \quad (2.15)$$

Первое слагаемое в (2.15) не имеет разрыва при  $\xi = k_R \tau$ , а второе можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K_{P,1}}{k_R} \operatorname{sgn}(k_R \tau - \xi) \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(\chi_1 |k_R \tau - \xi|) \right), \quad (2.16)$$

где  $\operatorname{Si}(x)$  – интегральный синус. Формула (2.16) позволяет вычислить величину скачка перерезывающей силы на фронте той волны Рэлея, которая распространяется вдоль верхней поверхности:

$$|[N_1]^{(1)}| = hI_1 \frac{B_1 \theta_1^4 k_R^3}{8k_{2,1}^2 k_{3,1}^2}. \quad (2.17)$$

Величина  $|[N_1]^{(1)}|$  определяется построенной моделью *точно*, поскольку представляет собой коротковолновый предел, в котором погрешность приближенных уравнений равна нулю. Та же самая формула получается при анализе решения (2.11). Также из (2.11) следует формула для величины скачка на фронте второй волны Рэлея

$$|[N_1]^{(2)}| = hI_2 \frac{B_2 k_R k_{3,2}^2 (k_{1,2} - k_{2,2})}{2k_{1,2} k_{2,2}^2 (k_R^2 + k_R B_2 D_2)}. \quad (2.18)$$

Величина  $|[N_1]^{(2)}|$  определяется данной моделью приближенно, и тем точнее, чем ближе значения скоростей волн Рэлея в первом и втором слоях.

Для оценки пределов применимости предложенной модели сравним решение, полученное по формулам (2.11) и (2.13), с точным решением задачи (1.1)–(1.3). Последнее также можно получить с помощью интегральных преобразований Лапласа и Фурье, однако это требует гораздо более громоздких выкладок. Техника получения решения в изображениях аналогична случаю однородной пластины [7]. Применяя тот же порядок обращения, что и при получении решений (2.11) и (2.13), запишем точное решение в виде

$$N_1^{\text{ex}} = \frac{1}{\pi} \sum_n \int_0^\infty \frac{\chi}{\omega_{n,\text{ex}}} \left( \frac{\partial D(\omega^2, \chi^2)}{\partial \omega} \right)^{-1} \bigg|_{\omega=\omega_{n,\text{ex}}} N_0(\omega_{n,\text{ex}}^2, \chi^2) \sin(\omega_{n,\text{ex}} \tau - \chi \xi) d\chi, \quad (2.19)$$

где  $D(\omega^2, \chi^2)$ ,  $N_0(\omega^2, \chi^2)$  – известные функции, выражения для которых не приводятся здесь из-за их громоздкости ( $D(\omega^2, \chi^2)$  представляет собой определитель восьмого порядка, а  $N_0(\omega^2, \chi^2)$  – линейную комбинацию определителей седьмого порядка),  $\omega_{n,\text{ex}} = \omega_{n,\text{ex}}(\chi)$  – корни дисперсионного уравнения для двухслойной полосы

$$D(\omega^2, \chi^2) = 0. \quad (2.20)$$

Отметим некоторые свойства корней уравнения (2.20), имеющие отношение к данному исследованию. Нам понадобятся только два из корней уравнения (2.20) – те, что описывают т.н. фундаментальные моды ( $\omega(\chi) \rightarrow 0$  при  $\chi \rightarrow 0$ ). В длинноволновой области фундаментальные моды аналогичны фундаментальным модам однородной полосы, при этом одна из мод соответствует колебаниям растяжения-сжатия, а другая – изгибным колебаниям. Поведение дисперсионных кривых с ростом волнового числа существенно зависит от соотношения упругих параметров, однако всегда (за исключением, может быть, некоторых частных случаев) существует наименьший корень  $\omega_{1,\text{ex}}(\chi)$ , который при малых  $\chi$  определяет фундаментальную моду изгибного типа, а при  $\chi \rightarrow \infty$  асимптотически выходит на прямую  $k_{R,1}\chi$  (при  $k_{R,1} \leq k_{R,2}$ ). Если значение второй скорости волны Рэлея близко к первой, то корень  $\omega_{2,\text{ex}}(\chi)$  (вторая фундаментальная мода) стремится при  $\chi \rightarrow \infty$  к прямой  $k_{R,2}\chi$  (если существует волна Стоунли, то корень  $\omega_{2,\text{ex}}(\chi)$  может выйти на прямую, связанную с этой волной). Если скорость волны Рэлея во втором слое превышает скорость волны сдвига в первом слое, то при  $\chi \rightarrow \infty$  существует бесконечная серия корней, имеющих почти прямолинейные участки, расположенные на прямой  $k_{R,2}\chi$ . В этом случае мы применяем упрощенную модель, и нас интересует только прямая  $k_{R,1}\chi$  и первая фундаментальная мода.

На рис. 2,3 приведены графики перерезывающего усилия при  $I_1 = I_2 = I$ , нормированного на  $hI$ . Жирная линия соответствует точному решению (2.19), в котором подынтегральная функция вычислялась без каких-либо отбрасываний. Для удобства сравнения нижний предел интеграла в (2.19) был взят равным  $\chi_0$ , как и в приближенных формулах. Тонкая линия на рис. 2,3 соответствует приближенному решению. Рис. 2 получен для параметров

$$E_2/E_1 = 1.2, \quad \rho_2/\rho_1 = 0.9, \quad \nu_1 = 0.3, \quad \nu_2 = 0.4, \quad \eta_1/\eta_2 = 3 \quad (2.21)$$

(случай существенно различных скоростей волн Рэлея:  $k_{R,1} = 0.927$ ,  $k_{R,2} = 1.048$ ),  $\tau = 100$ ,  $\chi_0 = 3.4$ . При вычислении точного решения

использовалась одна мода ( $\omega_{1,ex}$ ), при вычислении приближенного решения – формула (2.13). На рис. 3 представлено решение для параметров

$$E_2/E_1 = 0.5, \quad \rho_2/\rho_1 = 0.5, \quad \nu_1 = 0.31, \quad \nu_2 = 0.3, \quad \eta_1/\eta_2 = 3 \quad (2.22)$$

(случай близких скоростей волн Рэлея:  $k_{R,1} = 0.929$ ,  $k_{R,2} = 0.931$ ),  $\tau = 200$ ,  $\chi_0 = 3.4$ . При вычислении точного решения учитывались две моды. Приближенное решение получено по формуле (2.11). Как видно из рис. 2,3, приближенная модель достаточно точно описывает окрестность условного фронта волны Рэлея, причем в случае близких значений скоростей волн Рэлея достаточно хорошо описываются оба фронта (рис. 3).

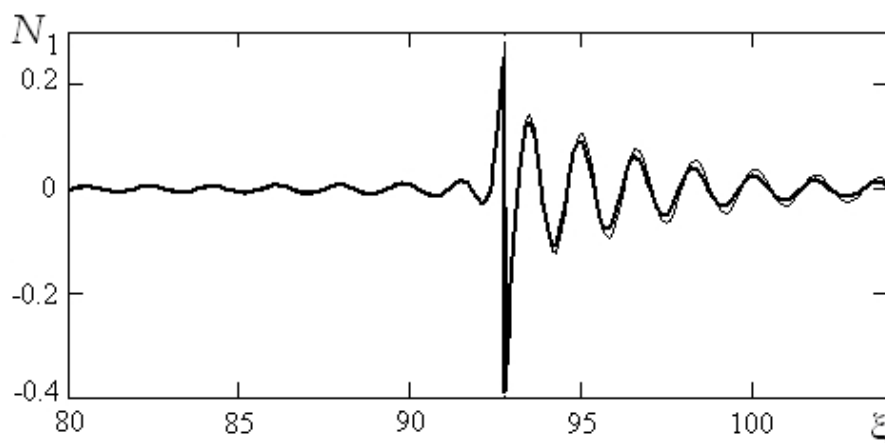


Рис. 2. Окрестность условного фронта волны Рэлея для параметров (2.21).

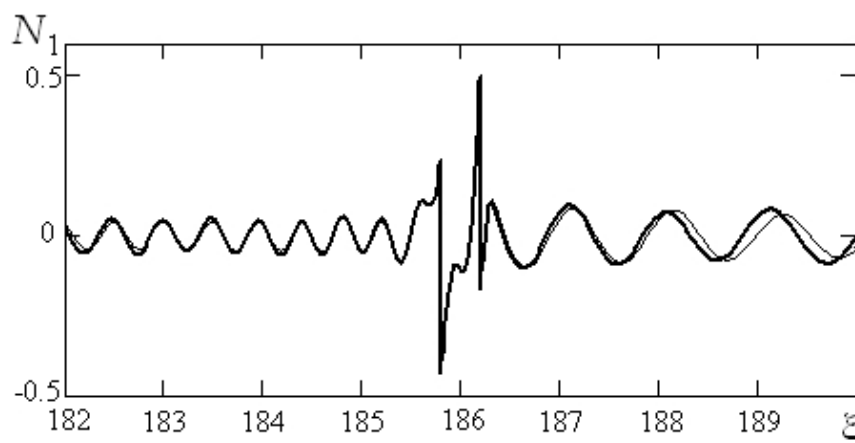


Рис. 3. Окрестность условного фронта волны Рэлея для параметров (2.22)

На рис. 4 представлено решение, полученное при тех же данных, что и решение на рис. 2, но при  $I_1 = 0$ . Этот рисунок иллюстрирует возможности приближенной модели при описании “наведенного” поля волны Рэлея. В данном случае скачок перерезывающего усилия отсутствует, поскольку сосредоточенная сила приложена на противоположной поверхности. Положение условного фронта волны Рэлея показано на рис. 4 вертикальной линией.

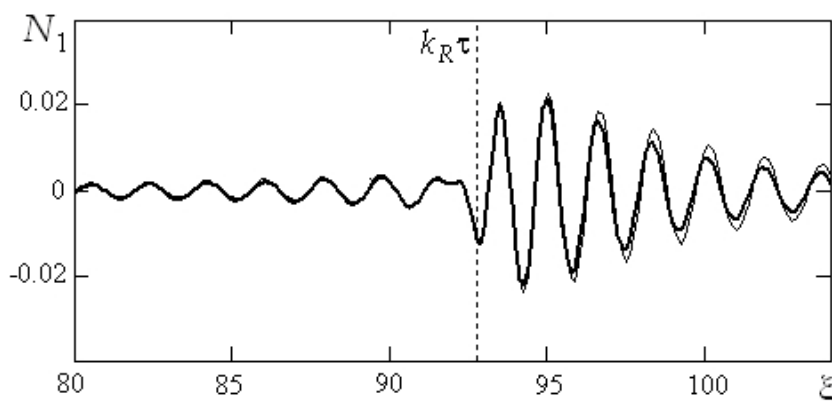


Рис. 4. Окрестность условного фронта волны Рэлея для параметров (2.21) в случае, когда нагрузка приложена только на нижней поверхности

### Заключение

Численные результаты, представленные на рис. 2–4, подтверждают применимость асимптотической модели, полученной в работе [4]. Численные эксперименты при других значениях параметров показали, что приближенные уравнения наиболее эффективны в тех случаях, когда упругие параметры и относительные толщины являются величинами одного порядка. При значительном различии параметров слоев приближенная теория также применима, но область её применимости сужается. То же касается случаев, когда величина определителя  $\Delta_0^{(1)}$  оказывается малой (например, в случае существования волны Стоунли).

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №11-01-00545а).*

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Каплунов, Ю. Д. Асимптотическая модель для вычисления дальнего поля волны Рэлея в случае упругой полуплоскости / Ю. Д. Каплунов, Л. Ю. Коссович // ДАН, 2004. – Т. 395. – № 4. – С. 482-484.
2. Коссович, Л. Ю. Поле Рэлея в бесконечном упругом слое / Л. Ю. Коссович, А. Н. Кушеккалиев // Математика, механика. Сборник научных трудов. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. – Вып. 5. – С. 159-161.
3. Ковалев, В. А. Дальнее поле волны Рэлея для упругой полуполосы при действии торцевой нагрузки / В. А. Ковалев, Л. Ю. Коссович, О. Г. Таранов // Изв. РАН. МТТ, 2005. – № 5. – С. 89-96.
4. Вильде, М. В. Асимптотическая модель дальнего поля волны Рэлея в многослойной пластине / М. В. Вильде, Л. Ю. Коссович // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Серия Математика. Механика. Информатика, 2011. – Т.11. – Вып. 4. – С. 74-86.
5. Rayleigh, J. W. S. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid / J. W. S. Rayleigh // Proc. Lond. Math. Soc., 1885/1886. – V. 17. – № 253. – P. 4-11.
6. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
7. Коссович, Л. Ю. Анализ приближений в задаче Лэмба для бесконечного упругого слоя / Л. Ю. Коссович, А. Н. Кушеккалиев // Известия Вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. Науки, 2003. – № 5. – С. 10-22.

**С. В. Данилова** (г. Чебоксары)

## **ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОГО КОЛЬЦА В СЛУЧАЕ КОНТАКТА С ТРЕНИЕМ**

*В работе рассматривается вторая основная задача теории упругости для кольца, составленного из двух однородно-изотропных концентрических колец с различными упругими постоянными, когда на границе раздела сред заданы условия контакта с трением, а на внешних окружностях заданы смещения в виде рядов Фурье, которые сходятся абсолютно и равномерно.*

*Ключевые слова:* упругое равновесие, двухслойное кольцо, контакт с трением

**S. V. Danilova**

## **THE SECOND MAIN PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR THE COMPOUND RING IN CASE OF CONTACT TO THE FRICTION**

*In work the second main problem of the theory of elasticity for a ring made of two is homogeneous-isotropic concentric rings with various elastic constants when on border of section of environments conditions of contact to a friction are set is considered, and on external circles displacement in the form of numbers Fourie which converge absolutely and in regular intervals are set.*

*Key words:* elastic balance, two-layer ring, contact to a friction.

В различных областях техники применяются многослойные конструкции. Вопрос об устойчивости таких конструкций к разрушению является одним из важнейших и тесно связан с задачей о напряженно-деформированном состоянии конструкции в целом. В связи с этим представляет теоретический и практический интерес задачи теории упругости для различных видов многослойных областей.

Контактные задачи для концентрических колец рассматривались многими авторами, см., например, обзоры [1], [2]. Но во всех этих работах изучались либо задачи о вдавливании штампов, либо некоторые частные задачи для концентрических колец. В такой общей постановке, как в нашей статье, задачи теории упругости не рассматривались.

**Постановка задачи.** Найти упругое равновесие плосконапряженного кольца, составленного из двух однородно-изотропных концентрических колец  $R_1 \leq r \leq R_2$  и  $R_2 \leq r \leq R_3$  ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ) с модулями упругости  $E^{(1)}, E^{(2)}$  и коэффициентами Пуассона  $\nu^{(1)}, \nu^{(2)}$  соответственно.



Задача, очевидно, состоит в нахождении напряжений  $\sigma_r(r, \theta)$ ,  $\sigma_\theta(r, \theta)$ ,  $\tau_{r\theta}(r, \theta)$  из уравнений равновесия:

$$\begin{cases} r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0, \\ r \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2\tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

и условия сплошности:

$$\Delta(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0.$$

На окружности  $r = R_2$  заданы условия контакта с трением:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=R_2} &= \sigma_\theta^{(2)}(r, \theta) \Big|_{r=R_2}, & \tau_{r\theta}^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=R_2} &= \tau_{r\theta}^{(2)}(r, \theta) \Big|_{r=R_2}, \\ \tau_{r\theta}^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=R_2} &= \mu_{tr} \sigma_\theta^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=R_2}, & \nu^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=R_2} &= \nu^{(2)}(r, \theta) \Big|_{r=R_2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и ниже, верхний индекс (1) соответствует кольцевой области  $R_1 \leq r \leq R_2$  ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ) с параметрами  $\nu^{(1)}, E^{(1)}$ , а индекс (2) – области  $R_2 \leq r \leq R_3$  ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ) с параметрами  $\nu^{(2)}, E^{(2)}$ ,  $\mu_{tr}$  – коэффициент трения.

На окружностях  $r = R_1$  и  $r = R_3$  заданы смещения в виде рядов Фурье, которые сходятся абсолютно и равномерно:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=R_1} &= p_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} [p_n^{(1)} \cos n\theta + q_n^{(1)} \sin n\theta], \\ \nu^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=R_1} &= f_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} [f_n^{(1)} \cos n\theta + g_n^{(1)} \sin n\theta], \\ u^{(2)}(r, \theta) \Big|_{r=R_3} &= p_0^{(3)} + \sum_{n=1}^{\infty} [p_n^{(3)} \cos n\theta + q_n^{(3)} \sin n\theta], \\ \nu^{(2)}(r, \theta) \Big|_{r=R_3} &= f_0^{(3)} + \sum_{n=1}^{\infty} [f_n^{(3)} \cos n\theta + g_n^{(3)} \sin n\theta]. \end{aligned} \quad (2)$$

**Решение.** Для решения этой задачи построим структуру напряжений и смещений в виде тригонометрических рядов. Для этого воспользуемся формулами Папковича-Нейбера, выражающими напряжения и перемещения через три гармонические функции, две из которых связаны условиями Коши-Римана. (Формулы Папковича-Нейбера в полярной системе координат даны, например, в монографии [3, с. 144-145]. Они приведены там с опечатками. Мы использовали формулы, исправив неточности.) Гармонические функции в кольце имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\Phi_0^{(j)}(r, \theta) &= A_{0,0}^{(j)} + B_{0,0}^{(j)} \ln r + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( A_{n,0}^{(j)} r^n + B_{n,0}^{(j)} r^{-n} \right) \cos n\theta + \left( C_{n,0}^{(j)} r^n + D_{n,0}^{(j)} r^{-n} \right) \sin n\theta \right], \\
\Phi_1^{(j)}(r, \theta) &= A_{0,1}^{(j)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( A_{n,1}^{(j)} r^n + B_{n,1}^{(j)} r^{-n} \right) \cos n\theta + \left( C_{n,1}^{(j)} r^n + D_{n,1}^{(j)} r^{-n} \right) \sin n\theta \right], \\
\Phi_2^{(j)}(r, \theta) &= A_{0,2}^{(j)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\left( C_{n,1}^{(j)} r^n - D_{n,1}^{(j)} r^{-n} \right) \cos n\theta + \left( A_{n,1}^{(j)} r^n - B_{n,1}^{(j)} r^{-n} \right) \sin n\theta \right].
\end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя их в выражения Папковича-Нейбера, получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(j)}(r, \theta) &= B_{0,0}^{(j)} r^{-2} + 2A_{1,1}^{(j)} - 2B_{1,0}^{(j)} r^{-3} \cos \theta - 2D_{1,0}^{(j)} r^{-3} \sin \theta + 2A_{2,1}^{(j)} r \cos \theta + \\
&\quad + 2C_{2,1}^{(j)} r \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ -n(n-1) A_{n,0}^{(j)} r^{n-2} - n(n+1) B_{n,0}^{(j)} r^{-n-2} + (n+1)(n+2) \times \right. \\
&\quad \times A_{n+1,1}^{(j)} r^n + (n-1)(n-2) B_{n-1,1}^{(j)} r^{-n} \left. \right] \cos n\theta + \left[ -n(n-1) C_{n,0}^{(j)} r^{n-2} - n(n+1) \times \right. \\
&\quad \times D_{n,0}^{(j)} r^{-n-2} + (n+1)(n+2) C_{n+1,1}^{(j)} r^n + (n-1)(n-2) D_{n-1,1}^{(j)} r^{-n} \left. \right] \sin n\theta,
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta^{(j)}(r, \theta) &= -B_{0,0}^{(j)} r^{-2} + 2A_{1,1}^{(j)} + 2B_{1,0}^{(j)} r^{-3} \cos \theta + 2D_{1,0}^{(j)} r^{-3} \sin \theta + 6A_{2,1}^{(j)} r \times \\
&\quad \times \cos \theta + 6C_{2,1}^{(j)} r \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ n(n-1) A_{n,0}^{(j)} r^{n-2} + n(n+1) B_{n,0}^{(j)} r^{-n-2} + (n+1) \times \right. \\
&\quad \times (n+2) A_{n+1,1}^{(j)} r^n + (n-1)(n-2) B_{n-1,1}^{(j)} r^{-n} \left. \right] \cos n\theta + \left[ n(n-1) C_{n,0}^{(j)} r^{n-2} + n \times \right. \\
&\quad \times (n+1) D_{n,0}^{(j)} r^{-n-2} + (n+1)(n+2) C_{n+1,1}^{(j)} r^n + (n-1)(n-2) D_{n-1,1}^{(j)} r^{-n} \left. \right] \sin n\theta,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta}^{(j)}(r, \theta) &= -2B_{1,0}^{(j)} r^{-3} \sin \theta + 2D_{1,0}^{(j)} r^{-3} \cos \theta + 2A_{2,1}^{(j)} r \sin \theta - 2C_{2,1}^{(j)} r \cos \theta + \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ -n(n-1) C_{n,0}^{(j)} r^{n-2} + n(n+1) D_{n,0}^{(j)} r^{-n-2} - n(n+1) C_{n+1,1}^{(j)} r^n + n(n-1) \times \right. \\
&\quad \times D_{n-1,1}^{(j)} r^{-n} \left. \right] \cos n\theta + \left[ n(n-1) A_{n,0}^{(j)} r^{n-2} - n(n+1) B_{n,0}^{(j)} r^{-n-2} + n(n+1) A_{n+1,1}^{(j)} \times \right. \\
&\quad \times r^n - n(n-1) B_{n-1,1}^{(j)} r^{-n} \left. \right] \sin n\theta;
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
2G^{(j)} u^{(j)}(r, \theta) &= \left( \kappa^{(j)} - 1 \right) A_{1,1}^{(j)} r - B_{0,0}^{(j)} r^{-1} + \left[ \kappa^{(j)} A_{0,1}^{(j)} - A_{1,0}^{(j)} + B_{1,0}^{(j)} r^{-2} + \right. \\
&\quad + \left( \kappa^{(j)} - 2 \right) A_{2,1}^{(j)} r^2 \left. \right] \cos \theta + \left[ \kappa^{(j)} A_{0,2}^{(j)} - C_{1,0}^{(j)} + D_{1,0}^{(j)} r^{-2} + \left( \kappa^{(j)} - 2 \right) C_{2,1}^{(j)} r^2 \right] \times \\
&\quad \times \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ -n A_{n,0}^{(j)} r^{n-1} + n B_{n,0}^{(j)} r^{-n-1} + \left( \kappa^{(j)} - n - 1 \right) A_{n+1,1}^{(j)} r^{n+1} + \left( \kappa^{(j)} + \right. \right. \\
&\quad + n - 1 \left. \right) B_{n-1,1}^{(j)} r^{-n+1} \left. \right] \cos n\theta + \left[ -n C_{n,0}^{(j)} r^{n-1} + n D_{n,0}^{(j)} r^{-n-1} + \left( \kappa^{(j)} - n - 1 \right) \times \right. \\
&\quad \times C_{n+1,1}^{(j)} r^{n+1} + \left( \kappa^{(j)} + n - 1 \right) D_{n-1,1}^{(j)} r^{-n+1} \left. \right] \sin n\theta,
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
2G^{(j)}v^{(j)}(r, \theta) = & -(\kappa^{(j)} + 1)C_{1,1}^{(j)}r + \left[ \kappa^{(j)}A_{0,2}^{(j)} - C_{1,0}^{(j)} - D_{1,0}^{(j)}r^{-2} - (\kappa^{(j)} + 2) \times \right. \\
& \times C_{2,1}^{(j)}r^2 \left. \right] \cos \theta + \left[ -\kappa^{(j)}A_{0,1}^{(j)} + A_{1,0}^{(j)} + B_{1,0}^{(j)}r^{-2} + (\kappa^{(j)} + 2)A_{2,1}^{(j)}r^2 \right] \sin \theta + \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ -nC_{n,0}^{(j)}r^{n-1} - nD_{n,0}^{(j)}r^{-n-1} - (\kappa^{(j)} + n + 1)C_{n+1,1}^{(j)}r^{n+1} + (\kappa^{(j)} - n + 1) \times \right. \\
& \times D_{n-1,1}^{(j)}r^{-n+1} \left. \right] \cos n\theta + \left[ nA_{n,0}^{(j)}r^{n-1} + nB_{n,0}^{(j)}r^{-n-1} + (\kappa^{(j)} + n + 1)A_{n+1,1}^{(j)}r^{n+1} - \right. \\
& \left. - (\kappa^{(j)} - n + 1)B_{n-1,1}^{(j)}r^{-n+1} \right] \sin n\theta,
\end{aligned} \tag{8}$$

где  $\kappa^{(j)} = 3 - 4v^{(j)}$ ,  $G^{(j)} = E^{(j)} / \left[ 2(1 + v^{(j)}) \right]$ ,  $j = 1, 2$ .

Неизвестные коэффициенты определим из условий контакта с трением и граничных условий. Подставив выражения (4) – (8) в условия контакта с трением (1), в граничные условия (2) и приравнявая множители при  $\cos n\theta$  и  $\sin n\theta$ , получим систему линейных алгебраических уравнений.

При  $n = 0$  система содержит 7 уравнений и шесть неизвестных коэффициентов  $B_{0,0}^{(1)}$ ,  $A_{1,1}^{(1)}$ ,  $C_{1,1}^{(1)}$ ,  $B_{0,0}^{(2)}$ ,  $A_{1,1}^{(2)}$ ,  $C_{1,1}^{(2)}$ :

$$\frac{1}{2G^{(1)}} \left[ -B_{0,0}^{(1)}R_1^{-1} + (\kappa^{(1)} - 1)A_{1,1}^{(1)}R_1 \right] = p_0^{(1)}, \tag{9}$$

$$\frac{1}{2G^{(2)}} \left[ -B_{0,0}^{(2)}R_3^{-1} + (\kappa^{(2)} - 1)A_{1,1}^{(2)}R_3 \right] = p_0^{(3)}, \tag{10}$$

$$-B_{0,0}^{(1)}R_2^{-2} + 2A_{1,1}^{(1)} + B_{0,0}^{(2)}R_2^{-2} - 2A_{1,1}^{(2)} = 0, \tag{11}$$

$$-B_{0,0}^{(1)}R_2^{-2} + 2A_{1,1}^{(1)} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{1}{2G^{(1)}} \left[ -(\kappa^{(1)} + 1)C_{1,1}^{(1)}R_1 \right] = f_0^{(1)}, \tag{13}$$

$$\frac{1}{2G^{(2)}} \left[ -(\kappa^{(2)} + 1)C_{1,1}^{(2)}R_3 \right] = f_0^{(3)}, \tag{14}$$

$$\frac{1}{2G^{(1)}} \left[ -(\kappa^{(1)} + 1)C_{1,1}^{(1)}R_2 \right] - \frac{1}{2G^{(2)}} \left[ -(\kappa^{(2)} + 1)C_{1,1}^{(2)}R_2 \right] = 0. \tag{15}$$

Уравнения (9) – (12) дают систему для нахождения коэффициентов  $B_{0,0}^{(1)}$ ,  $A_{1,1}^{(1)}$ ,  $B_{0,0}^{(2)}$ ,  $A_{1,1}^{(2)}$ . Условие неравенства определителя этой системы нулю имеет вид:

$$((\kappa^{(1)} - 1)R_1^2 - 2R_2^2)((\kappa^{(2)} - 1)R_3^2 - 2R_2^2) \neq 0. \tag{16}$$

Уравнения системы (13) - (15) используем для нахождения коэффициентов  $C_{1,1}^{(1)}$ ,  $C_{1,1}^{(2)}$ . При этом получаем условие, которое необходимо должно быть выполнено:

$$\frac{f_0^{(1)}}{R_1} = \frac{f_0^{(3)}}{R_3}. \quad (17)$$

При  $n=1$  условия контакта и граничные условия дают систему 16 порядка относительно неизвестных  $\kappa^{(1)} A_{0,1}^{(1)} - A_{1,0}^{(1)}$ ,  $B_{1,0}^{(1)}$ ,  $A_{2,1}^{(1)}$ ,  $\kappa^{(2)} A_{0,1}^{(2)} - A_{1,0}^{(2)}$ ,  $B_{1,0}^{(2)}$ ,  $A_{2,1}^{(2)}$ ,  $\kappa^{(1)} A_{0,2}^{(1)} - C_{1,0}^{(1)}$ ,  $D_{1,0}^{(1)}$ ,  $C_{2,1}^{(1)}$ ,  $\kappa^{(2)} A_{0,2}^{(2)} - C_{1,0}^{(2)}$ ,  $D_{1,0}^{(2)}$ ,  $C_{2,1}^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G^{(1)}} \left[ \kappa^{(1)} A_{0,1}^{(1)} - A_{1,0}^{(1)} + B_{1,0}^{(1)} R_1^{-2} + \left( \kappa^{(1)} - 2 \right) A_{2,1}^{(1)} R_1^2 \right] &= p_1^{(1)}, \\ \frac{1}{2G^{(1)}} \left[ \kappa^{(1)} A_{0,1}^{(1)} - A_{1,0}^{(1)} - B_{1,0}^{(1)} R_1^{-2} - \left( \kappa^{(1)} + 2 \right) A_{2,1}^{(1)} R_1^2 \right] &= -g_1^{(1)}, \\ \frac{1}{2G^{(1)}} \left[ \kappa^{(1)} A_{0,2}^{(1)} - C_{1,0}^{(1)} + D_{1,0}^{(1)} R_1^{-2} + \left( \kappa^{(1)} - 2 \right) C_{2,1}^{(1)} R_1^2 \right] &= q_1^{(1)}, \\ \frac{1}{2G^{(1)}} \left[ \kappa^{(1)} A_{0,2}^{(1)} - C_{1,0}^{(1)} - D_{1,0}^{(1)} R_1^{-2} - \left( \kappa^{(1)} + 2 \right) C_{2,1}^{(1)} R_1^2 \right] &= f_1^{(1)}, \\ \frac{1}{2G^{(2)}} \left[ \kappa^{(2)} A_{0,1}^{(2)} - A_{1,0}^{(2)} + B_{1,0}^{(2)} R_3^{-2} + \left( \kappa^{(2)} - 2 \right) A_{2,1}^{(2)} R_3^2 \right] &= p_1^{(3)}, \\ \frac{1}{2G^{(2)}} \left[ \kappa^{(2)} A_{0,1}^{(2)} - A_{1,0}^{(2)} - B_{1,0}^{(2)} R_3^{-2} - \left( \kappa^{(2)} + 2 \right) A_{2,1}^{(2)} R_3^2 \right] &= -g_1^{(3)}, \\ \frac{1}{2G^{(2)}} \left[ \kappa^{(2)} A_{0,2}^{(2)} - C_{1,0}^{(2)} + D_{1,0}^{(2)} R_3^{-2} + \left( \kappa^{(2)} - 2 \right) C_{2,1}^{(2)} R_3^2 \right] &= q_1^{(3)}, \\ \frac{1}{2G^{(2)}} \left[ \kappa^{(2)} A_{0,2}^{(2)} - C_{1,0}^{(2)} - D_{1,0}^{(2)} R_3^{-2} - \left( \kappa^{(2)} + 2 \right) C_{2,1}^{(2)} R_3^2 \right] &= f_1^{(3)}, \\ 2B_{1,0}^{(1)} R_2^{-3} + 6A_{2,1}^{(1)} R_2 - 2B_{1,0}^{(2)} R_2^{-3} - 6A_{2,1}^{(2)} R_2 &= 0, \\ \frac{1}{2G^{(1)}} \left[ \kappa^{(1)} A_{0,1}^{(1)} - A_{1,0}^{(1)} - B_{1,0}^{(1)} R_2^{-2} - \left( \kappa^{(1)} + 2 \right) A_{2,1}^{(1)} R_2^2 \right] - \\ - \frac{1}{2G^{(2)}} \left[ \kappa^{(2)} A_{0,1}^{(2)} - A_{1,0}^{(2)} - B_{1,0}^{(2)} R_2^{-2} - \left( \kappa^{(2)} + 2 \right) A_{2,1}^{(2)} R_2^2 \right] &= 0, \\ 2D_{1,0}^{(1)} R_2^{-3} + 6C_{2,1}^{(1)} R_2 - 2D_{1,0}^{(2)} R_2^{-3} - 6C_{2,1}^{(2)} R_2 &= 0, \\ \frac{1}{2G^{(1)}} \left[ \kappa^{(1)} A_{0,2}^{(1)} - C_{1,0}^{(1)} - D_{1,0}^{(1)} R_2^{-2} - \left( \kappa^{(1)} + 2 \right) C_{2,1}^{(1)} R_2^2 \right] - \\ - \frac{1}{2G^{(2)}} \left[ \kappa^{(2)} A_{0,2}^{(2)} - C_{1,0}^{(2)} - D_{1,0}^{(2)} R_2^{-2} - \left( \kappa^{(2)} + 2 \right) C_{2,1}^{(2)} R_2^2 \right] &= 0, \\ -2B_{1,0}^{(1)} R_2^{-3} + 2A_{2,1}^{(1)} R_2 + 2B_{1,0}^{(2)} R_2^{-3} - 2A_{2,1}^{(2)} R_2 &= 0, \\ -2D_{1,0}^{(1)} R_2^{-3} + 2C_{2,1}^{(1)} R_2 + 2D_{1,0}^{(2)} R_2^{-3} - 2C_{2,1}^{(2)} R_2 &= 0, \\ -2B_{1,0}^{(1)} R_2^{-3} + 2A_{2,1}^{(1)} R_2 - \mu_{rr} \left[ 2D_{1,0}^{(1)} R_2^{-3} + 6C_{2,1}^{(1)} R_2 \right] &= 0, \\ -2D_{1,0}^{(1)} R_2^{-3} + 2C_{2,1}^{(1)} R_2 + \mu_{rr} \left[ 2B_{1,0}^{(1)} R_2^{-3} + 6A_{2,1}^{(1)} R_2 \right] &= 0. \end{aligned}$$

Исследуем систему на совместность. Первые 12 уравнений системы используем для нахождения коэффициентов  $\kappa^{(1)} A_{0,1}^{(1)} - A_{1,0}^{(1)}$ ,  $B_{1,0}^{(1)}$ ,  $A_{2,1}^{(1)}$ ,  $\kappa^{(2)} A_{0,1}^{(2)} - A_{1,0}^{(2)}$ ,  $B_{1,0}^{(2)}$ ,  $A_{2,1}^{(2)}$ ,  $\kappa^{(1)} A_{0,2}^{(1)} - C_{1,0}^{(1)}$ ,  $D_{1,0}^{(1)}$ ,  $C_{2,1}^{(1)}$ ,  $\kappa^{(2)} A_{0,2}^{(2)} - C_{1,0}^{(2)}$ ,  $D_{1,0}^{(2)}$ ,  $C_{2,1}^{(2)}$ . Для коэффициентов  $\kappa^{(1)} A_{0,1}^{(1)} - A_{1,0}^{(1)}$ ,  $B_{1,0}^{(1)}$ ,  $A_{2,1}^{(1)}$ ,  $\kappa^{(2)} A_{0,1}^{(2)} - A_{1,0}^{(2)}$ ,  $B_{1,0}^{(2)}$ ,  $A_{2,1}^{(2)}$  получаем систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2G^{(1)}} \left[ \kappa^{(1)} A_{0,1}^{(1)} - A_{1,0}^{(1)} + B_{1,0}^{(1)} R_1^{-2} + \left( \kappa^{(1)} - 2 \right) A_{2,1}^{(1)} R_1^2 \right] = p_1^{(1)}, \\ \frac{1}{2G^{(1)}} \left[ \kappa^{(1)} A_{0,1}^{(1)} - A_{1,0}^{(1)} - B_{1,0}^{(1)} R_1^{-2} - \left( \kappa^{(1)} + 2 \right) A_{2,1}^{(1)} R_1^2 \right] = -g_1^{(1)}, \\ \frac{1}{2G^{(2)}} \left[ \kappa^{(2)} A_{0,1}^{(2)} - A_{1,0}^{(2)} + B_{1,0}^{(2)} R_3^{-2} + \left( \kappa^{(2)} - 2 \right) A_{2,1}^{(2)} R_3^2 \right] = p_1^{(3)}, \\ \frac{1}{2G^{(2)}} \left[ \kappa^{(2)} A_{0,1}^{(2)} - A_{1,0}^{(2)} - B_{1,0}^{(2)} R_3^{-2} - \left( \kappa^{(2)} + 2 \right) A_{2,1}^{(2)} R_3^2 \right] = -g_1^{(3)}, \\ 2B_{1,0}^{(1)} R_2^{-3} + 6A_{2,1}^{(1)} R_2 - 2B_{1,0}^{(2)} R_2^{-3} - 6A_{2,1}^{(2)} R_2 = 0, \\ \frac{1}{2G^{(1)}} \left[ \kappa^{(1)} A_{0,1}^{(1)} - A_{1,0}^{(1)} - B_{1,0}^{(1)} R_2^{-2} - \left( \kappa^{(1)} + 2 \right) A_{2,1}^{(1)} R_2^2 \right] - \\ - \frac{1}{2G^{(2)}} \left[ \kappa^{(2)} A_{0,1}^{(2)} - A_{1,0}^{(2)} - B_{1,0}^{(2)} R_2^{-2} - \left( \kappa^{(2)} + 2 \right) A_{2,1}^{(2)} R_2^2 \right] = 0. \end{array} \right. \quad (18)$$

Условие отличия определителя этой системы от нуля записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \kappa^{(1)} \kappa^{(2)} (G^{(1)} - G^{(2)}) R_1^4 R_3^4 + 6(G^{(1)} - G^{(2)}) R_2^8 + 6G^{(2)} R_1^2 R_2^6 - \\ & - 6G^{(1)} R_2^6 R_3^2 + 2\kappa^{(1)} G^{(1)} R_1^4 R_2^2 R_3^2 - 2\kappa^{(2)} G^{(2)} R_1^2 R_2^2 R_3^4 + \\ & + 3R_2^8 (\kappa^{(2)} G^{(1)} - \kappa^{(1)} G^{(2)}) + \kappa^{(2)} (G^{(2)} (\kappa^{(1)} + 2) - 3G^{(1)}) R_2^4 R_3^4 - \\ & - \kappa^{(1)} (G^{(1)} (\kappa^{(2)} + 2) - 3G^{(2)}) R_1^4 R_2^4 \neq 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Для коэффициентов  $\kappa^{(1)} A_{0,2}^{(1)} - C_{1,0}^{(1)}$ ,  $D_{1,0}^{(1)}$ ,  $C_{2,1}^{(1)}$ ,  $\kappa^{(2)} A_{0,2}^{(2)} - C_{1,0}^{(2)}$ ,  $D_{1,0}^{(2)}$ ,  $C_{2,1}^{(2)}$  имеем систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2G^{(1)}} \left[ \kappa^{(1)} A_{0,2}^{(1)} - C_{1,0}^{(1)} + D_{1,0}^{(1)} R_1^{-2} + \left( \kappa^{(1)} - 2 \right) C_{2,1}^{(1)} R_1^2 \right] = q_1^{(1)}, \\ \frac{1}{2G^{(1)}} \left[ \kappa^{(1)} A_{0,2}^{(1)} - C_{1,0}^{(1)} - D_{1,0}^{(1)} R_1^{-2} - \left( \kappa^{(1)} + 2 \right) C_{2,1}^{(1)} R_1^2 \right] = f_1^{(1)}, \\ \frac{1}{2G^{(2)}} \left[ \kappa^{(2)} A_{0,2}^{(2)} - C_{1,0}^{(2)} + D_{1,0}^{(2)} R_3^{-2} + \left( \kappa^{(2)} - 2 \right) C_{2,1}^{(2)} R_3^2 \right] = q_1^{(3)}, \\ \frac{1}{2G^{(2)}} \left[ \kappa^{(2)} A_{0,2}^{(2)} - C_{1,0}^{(2)} - D_{1,0}^{(2)} R_3^{-2} - \left( \kappa^{(2)} + 2 \right) C_{2,1}^{(2)} R_3^2 \right] = f_1^{(3)}, \\ 2D_{1,0}^{(1)} R_2^{-3} + 6C_{2,1}^{(1)} R_2 - 2D_{1,0}^{(2)} R_2^{-3} - 6C_{2,1}^{(2)} R_2 = 0, \\ \frac{1}{2G^{(1)}} \left[ \kappa^{(1)} A_{0,2}^{(1)} - C_{1,0}^{(1)} - D_{1,0}^{(1)} R_2^{-2} - \left( \kappa^{(1)} + 2 \right) C_{2,1}^{(1)} R_2^2 \right] - \\ - \frac{1}{2G^{(2)}} \left[ \kappa^{(2)} A_{0,2}^{(2)} - C_{1,0}^{(2)} - D_{1,0}^{(2)} R_2^{-2} - \left( \kappa^{(2)} + 2 \right) C_{2,1}^{(2)} R_2^2 \right] = 0. \end{array} \right. \quad (20)$$

При условии, что (19) выполнено, система (20) имеет решение.

Остальные уравнения исходной системы дают еще одно условие разрешимости:

$$p_1^{(1)} + g_1^{(1)} - q_1^{(1)} + f_1^{(1)} = 0. \quad (21)$$

При  $n \geq 2$  система состоит из 16 уравнений относительно коэффициентов  $A_{n,0}^{(j)}$ ,  $B_{n,0}^{(j)}$ ,  $A_{n+1,1}^{(j)}$ ,  $B_{n+1,1}^{(j)}$ ,  $C_{n,0}^{(j)}$ ,  $D_{n,0}^{(j)}$ ,  $C_{n+1,1}^{(j)}$ ,  $D_{n+1,1}^{(j)}$ . Запишем ее в матричной форме:

$$A_n X_n = B_n, \quad (22)$$

где

$$A_n = \begin{bmatrix} L_n^{(1)}(R_1) & 0_{2,4} & 0_{2,4} & 0_{2,4} \\ 0_{2,4} & L_n^{(1)}(R_1) & 0_{2,4} & 0_{2,4} \\ 0_{2,4} & 0_{2,4} & L_n^{(2)}(R_3) & 0_{2,4} \\ 0_{2,4} & 0_{2,4} & 0_{2,4} & L_n^{(2)}(R_3) \\ M_n^{(1)}(R_2) & 0_{2,4} & -M_n^{(2)}(R_2) & 0_{2,4} \\ 0_{2,4} & M_n^{(1)}(R_2) & 0_{2,4} & -M_n^{(2)}(R_2) \\ P_n(R_2) & 0_{1,4} & -P_n(R_2) & 0_{1,4} \\ 0_{1,4} & P_n(R_2) & 0_{1,4} & -P_n(R_2) \\ P_n(R_2) & -\mu_{tr} Q_n(R_2) & 0_{1,4} & 0_{1,4} \\ \mu_{tr} Q_n(R_2) & P_n(R_2) & 0_{1,4} & 0_{1,4} \end{bmatrix},$$

$$L_n^{(j)}(R_i) = \begin{bmatrix} \frac{-R_i^{n-1}}{2G^{(j)}} & \frac{R_i^{-n-1}}{2G^{(j)}} & -\frac{\left(1 - \frac{\kappa^{(j)} - 1}{n}\right) R_i^{n+1}}{2G^{(j)}} & \frac{\left(1 + \frac{\kappa^{(j)} - 1}{n}\right) R_i^{-n+1}}{2G^{(j)}} \\ -\frac{R_i^{n-1}}{2G^{(j)}} & -\frac{R_i^{-n-1}}{2G^{(j)}} & -\frac{\left(1 + \frac{\kappa^{(j)} + 1}{n}\right) R_i^{n+1}}{2G^{(j)}} & -\frac{\left(1 - \frac{\kappa^{(j)} + 1}{n}\right) R_i^{-n+1}}{2G^{(j)}} \end{bmatrix},$$

$$0_{2,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0_{1,4} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$M_n^{(j)}(R_i) =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{1}{n}\right) R_i^{n-2} & \left(1 + \frac{1}{n}\right) R_i^{-n-2} & \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) R_i^{n+2} & \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) R_i^{-n+2} \\ -\frac{R_i^{n-1}}{2G^{(j)}} & -\frac{R_i^{-n-1}}{2G^{(j)}} & -\frac{\left(1 + \frac{\kappa^{(j)} + 1}{n}\right) R_i^{n+1}}{2G^{(j)}} & -\frac{\left(1 - \frac{\kappa^{(j)} + 1}{n}\right) R_i^{-n+1}}{2G^{(j)}} \end{bmatrix},$$

$$P_n(R_i) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{1}{n}\right) R_i^{n-2} & -\left(1 + \frac{1}{n}\right) R_i^{-n-2} & \left(1 + \frac{1}{n}\right) R_i^{n+2} & -\left(1 - \frac{1}{n}\right) R_i^{-n+2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
Q_n(R_i) &= \\
&= \left[ \left(1 - \frac{1}{n}\right) R_i^{n-2} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right) R_i^{-n-2} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) R_i^{n+2} \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) R_i^{-n+2} \right], \\
X_n^T &= (A_{n,0}^{(1)}, B_{n,0}^{(1)}, A_{n+1,1}^{(1)}, B_{n-1,1}^{(1)}, C_{n,0}^{(1)}, D_{n,0}^{(1)}, C_{n+1,1}^{(1)}, D_{n-1,1}^{(1)}, \\
&\quad A_{n,0}^{(2)}, B_{n,0}^{(2)}, A_{n+1,1}^{(2)}, B_{n-1,1}^{(2)}, C_{n,0}^{(2)}, D_{n,0}^{(2)}, C_{n+1,1}^{(2)}, D_{n-1,1}^{(2)}), \\
B_n^T &= \frac{1}{n} (p_n^{(1)}, -g_n^{(1)}, q_n^{(1)}, f_n^{(1)}, p_n^{(3)}, -g_n^{(3)}, q_n^{(3)}, f_n^{(3)}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).
\end{aligned}$$

В связи с тем, что в системе присутствуют параметры  $v^{(1)}, v^{(2)}, E^{(1)}, E^{(2)}, R_1, R_2, R_3, \mu_{tr}$ , исследовать определитель на нули в общем случае вызывает трудности. При решении конкретных задач необходимо вычислить определитель системы, построить его график относительно  $n$ . Численными методами найти те значения  $n$ , при которых определитель обращается в нуль. Считая, что решение найдено с некоторой погрешностью, подставить ближайшие натуральные числа и, если при всех таких  $n$  определитель отличен от нуля, то система совместна и имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера.

Например,

$$\begin{aligned}
A_{n,0}^{(1)} &= \frac{1}{n} \left[ p_n^{(1)} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + g_n^{(1)} \frac{\Delta_{21}}{\Delta} + q_n^{(1)} \frac{\Delta_{31}}{\Delta} - f_n^{(1)} \frac{\Delta_{41}}{\Delta} + \right. \\
&\quad \left. + p_n^{(3)} \frac{\Delta_{51}}{\Delta} + g_n^{(3)} \frac{\Delta_{61}}{\Delta} + q_n^{(3)} \frac{\Delta_{71}}{\Delta} - f_n^{(3)} \frac{\Delta_{81}}{\Delta} \right], \quad (23)
\end{aligned}$$

где  $\Delta_{ij}$  – минор 15 порядка,  $\Delta$  – определитель матрицы  $A_n$ .

Покажем, что ряды, дающие напряжения и смещения, сходятся равномерно и абсолютно в соответствующих кольцах. Для этого оценим выражение (23) в пределе при  $n \rightarrow \infty$ . Рассмотрим систему  $\overline{A}_n X_n = B_n$ , где

$$\begin{aligned}
L_n^{(j)}(R_i) \sim \overline{L}_n^{(j)}(R_i) &= \begin{bmatrix} -\frac{R_i^{n-1}}{2G^{(j)}} & \frac{R_i^{-n-1}}{2G^{(j)}} & -\frac{R_i^{n+1}}{2G^{(j)}} & \frac{R_i^{-n+1}}{2G^{(j)}} \\ -\frac{R_i^{n-1}}{2G^{(j)}} & -\frac{R_i^{-n-1}}{2G^{(j)}} & -\frac{R_2^{n+1}}{2G^{(j)}} & -\frac{R_i^{-n+1}}{2G^{(j)}} \end{bmatrix}, \\
M_n^{(j)}(R_i) \sim \overline{M}_n^{(j)}(R_i) &= \begin{bmatrix} R_i^{n-2} & R_i^{-n-2} & R_i^{n+2} & R_i^{-n+2} \\ -\frac{R_i^{n-1}}{2G^{(j)}} & -\frac{R_i^{-n-1}}{2G^{(j)}} & -\frac{R_2^{n+1}}{2G^{(j)}} & -\frac{R_i^{-n+1}}{2G^{(j)}} \end{bmatrix}, \\
P_n(R_i) \sim \overline{P}_n(R_i) &= \begin{bmatrix} R_i^{n-2} & -R_i^{-n-2} & R_i^{n+2} & -R_i^{-n+2} \end{bmatrix}, \\
Q_n(R_i) \sim \overline{Q}_n(R_i) &= \begin{bmatrix} R_i^{n-2} & R_i^{-n-2} & R_i^{n+2} & R_i^{-n+2} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$A_n \sim \bar{A}_n = \begin{bmatrix} \bar{L}_n^{(1)}(R_1) & 0_{2,4} & 0_{2,4} & 0_{2,4} \\ 0_{2,4} & \bar{L}_n^{(1)}(R_1) & 0_{2,4} & 0_{2,4} \\ 0_{2,4} & 0_{2,4} & \bar{L}_n^{(2)}(R_3) & 0_{2,4} \\ 0_{2,4} & 0_{2,4} & 0_{2,4} & \bar{L}_n^{(2)}(R_3) \\ \bar{M}_n^{(1)}(R_2) & 0_{2,4} & -\bar{M}_n^{(2)}(R_2) & 0_{2,4} \\ 0_{2,4} & \bar{M}_n^{(1)}(R_2) & 0_{2,4} & -\bar{M}_n^{(2)}(R_2) \\ \bar{P}_n(R_2) & 0_{1,4} & -\bar{P}_n(R_2) & 0_{1,4} \\ 0_{1,4} & \bar{P}_n(R_2) & 0_{1,4} & -\bar{P}_n(R_2) \\ \bar{P}_n(R_2) & -\mu_{tr} \bar{Q}_n(R_2) & 0_{1,4} & 0_{1,4} \\ \mu_{tr} \bar{Q}_n(R_2) & \bar{P}_n(R_2) & 0_{1,4} & 0_{1,4} \end{bmatrix}.$$

Тогда  $\Delta_{ij} \sim \bar{\Delta}_{ij}$ ,  $\Delta \sim \bar{\Delta}$ , где  $\bar{\Delta}_{ij}$  – минор 15 порядка,  $\bar{\Delta}$  – определитель матрицы  $\bar{A}_n$ . Доказываем, что для  $\forall i, j$   $\bar{\Delta}_{ij} / \bar{\Delta} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , следовательно,  $\Delta_{ij} / \Delta \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Таким образом,

$$A_{n,0}^{(1)} = \frac{1}{n} [p_n^{(1)} \alpha_n + g_n^{(1)} \beta_n + q_n^{(1)} \gamma_n - f_n^{(1)} \delta_n + p_n^{(3)} \varepsilon_n + g_n^{(3)} \varphi_n + q_n^{(3)} \psi_n - f_n^{(3)} \xi_n],$$

где  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$ .

Аналогичную структуру имеют все остальные коэффициенты.

Выполнение этих условий обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость рядов (3) в соответствующих областях и на их границах, а также возможность почленного дифференцирования этих рядов. Таким образом, все произведенные в ходе решения задачи действия с рядами (3) корректны.

Итак, имеет место

**Теорема.** *Задача об упругом равновесии плоско-напряженного кольца, составленного из двух однородно-изотропных кольцевых областей с различными модулями упругости и различными коэффициентами Пуассона, на стыке которых заданы условия контакта с трением (1), а граничные условия представлены в виде (2), имеет единственное решение, если для фиксированных  $n$  определитель системы (22) отличен от нуля при всех натуральных  $n$  и выполнены условия (16), (17), (19) и (21). Решение записывается в виде рядов (4) – (8), коэффициенты которых находятся по формулам Крамера из систем (9) – (15), (18), (20), (22).*

**Численные расчеты.** Рассмотрим задачу о равновесии кольца, составленного из меди и железа в следующей постановке: пусть область  $1 \leq r \leq 2$  ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ) занимает медь ( $\nu^{(1)} = 0.34, E^{(1)} = 1.23 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ), а область  $2 \leq r \leq 4$  ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ) – железо ( $\nu^{(2)} = 0.29, E^{(2)} = 1.96 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ).



Граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=1} &= 10^{-11} \cos 2\theta, & v^{(1)}(r, \theta) \Big|_{r=1} &= 10^{-11} \sin 2\theta, \\ u^{(2)}(r, \theta) \Big|_{r=4} &= 3 \cdot 10^{-11} \cos 2\theta, & v^{(2)}(r, \theta) \Big|_{r=4} &= 3 \cdot 10^{-11} \sin 2\theta. \end{aligned}$$

На границе раздела сред выполняются условия контакта с трением (1), где  $\mu_{tr} = 0.51$  – коэффициент трения.

Очевидно, для такой постановки задачи условия (16), (17), (19) и (21) выполняются. Перейдем к рассмотрению системы (22), вычислим ее определитель. Численными методами найдем те значения  $n$ , при которых определитель обращается в нуль, для этого решим уравнение  $\Delta_n = 0$ . Это уравнение не имеет решение при  $n \geq 2$ . Определитель отличен от нуля, следовательно, система совместна и имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера.

Итак,

$$\begin{aligned} A_{2,0}^{(1)} &= -0.332259837, & B_{2,0}^{(1)} &= 0.5860407386, & A_{3,1}^{(1)} &= 0.04353186149, \\ B_{1,1}^{(1)} &= -0.3255632823, & C_{2,0}^{(1)} &= -0.4240072803, & D_{2,0}^{(1)} &= 0.3341334467, \\ C_{3,1}^{(1)} &= -0.04357830855, & D_{1,1}^{(1)} &= -0.5967984672, & A_{2,0}^{(2)} &= -2.283601805, \\ B_{2,0}^{(2)} &= 8.367245618, & A_{3,1}^{(2)} &= 0.06404712009, & B_{1,1}^{(2)} &= -12.98210301, \\ C_{2,0}^{(2)} &= 2.114651349, & D_{2,0}^{(2)} &= -13.73215879, & C_{3,1}^{(2)} &= -0.03946284331, \\ D_{1,1}^{(2)} &= 20.30509756. \end{aligned}$$

Все остальные коэффициенты равны нулю.

Построим графики приближения найденного решения к граничным функциям, например, в кольце  $2 \leq r \leq 4$  ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ).

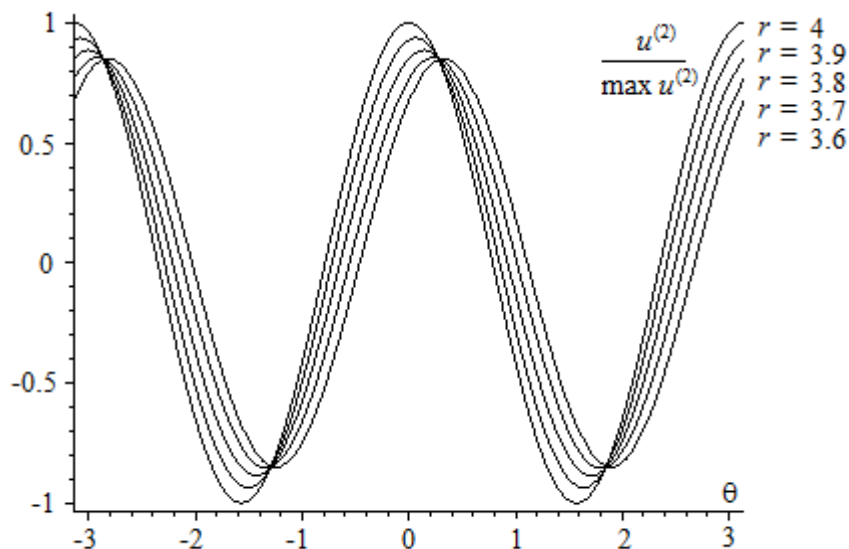


Рис. 1

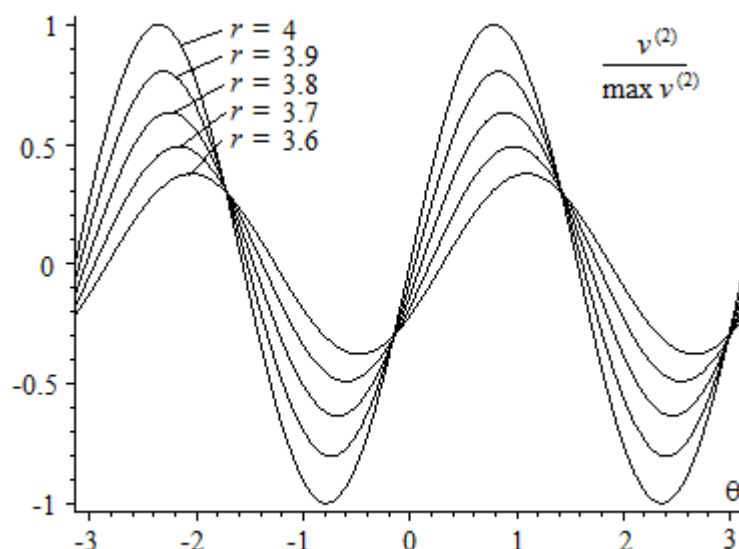


Рис. 2

Построим также график, иллюстрирующий поведение решений к области контакта, например для нормальной компоненты напряжения.

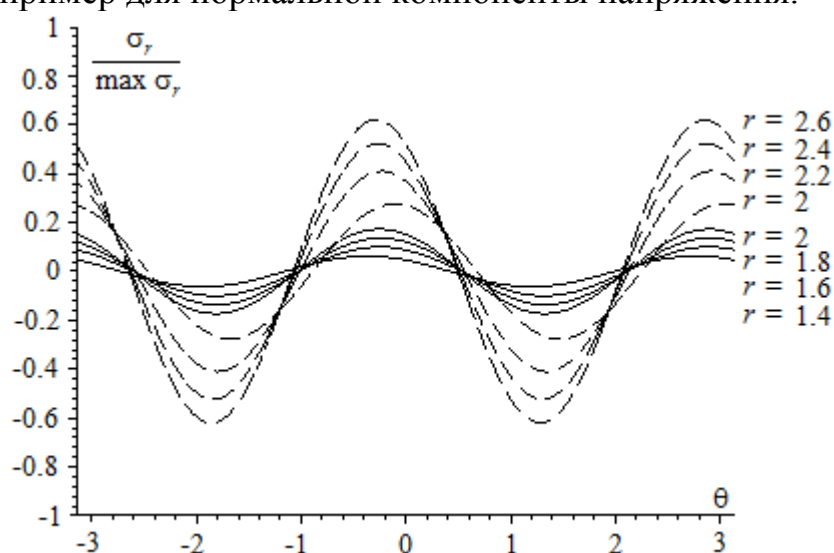


Рис. 3

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Механика контактных взаимодействий / Под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 672 с.
2. Теплый М. И. Контактные задачи для областей с круговыми границами. – Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983. – 176 с.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.

**М. С. Дерябина, С. И. Мартынов** (г. Ханты-Мансийск)

## **МОДЕЛЬ ФИЛЬТРАЦИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ПЕРИОДИЧЕСКУЮ РЕШЕТКУ ЧАСТИЦ С ЗАДАНЫМ ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ**

*В настоящей работе рассматривается модель течения вязкой жидкости через периодическую решетку, позволяющая построить периодическое всюду конечное решение.*

### **1. Введение**

Моделирование течения вязкой жидкости в пористой среде является одной из актуальных проблем механики жидкости. Это связано как с математической сложностью самой задачи, так и с чрезвычайно широкой областью возможных приложений результатов моделирования. Например, в таких областях, как извлечение нефти из пласта, водоотведение и водоотбор, создание пористых строительных материалов с заданными свойствами, бытовых и промышленных фильтров для очистки воды. Используемые модели фильтрации вязкой жидкости основываются на уравнении Дарси [1] или на его модификациях. Закономерность дает связь между расходом жидкости и градиентом давления. Очевидно, что эти уравнения связывает средние величины и не может описать гидродинамику в порах. Поэтому сразу возникла идея вывести его на основе усреднения течения, возникающего в порах и описываемого обычными уравнениями гидродинамики. Однако, при этом возникли математические трудности, связанные с определением параметров потока при наличии большого числа обтекаемых тел. Для того, чтобы обойти эти трудности, появились модели, основанные на различных упрощающих задачу предположениях. Наиболее известные и используемые и до настоящего времени это: модель ячейки [1], в которой считается, что возмущения от одной частицы локализованы в замкнутой ограниченной области вокруг частицы; модель пористой среды как системы цилиндрических капилляров различных радиусов [1]. Однако данные модели имеют ряд недостатков. Для ячейечной модели такими недостатками являются, в первую очередь, неоднозначность выбора размера ячейки и граничных условий на ее поверхности. Для модели на основе цилиндрических капилляров это отсутствие криволинейных участков, на которых возникают вторичные течения, которые меняют свойства потока, в частности зависимость расхода от перепада давления, и невозможность учесть влияние потока в одном канале на поток в другом. Кроме того, довольно затруднительно системой цилиндрических капилляров учесть изотропность пористой среды.

Выход из этой ситуации дает модель пористой среды как периодической решетки частиц [2]. И хотя реальные пористые среды не являются периодическими структурами, такая модель дает возможность изучить фильтрацию жидкости на такой идеальной системе, учитывающей основные свойства пористой среды: пористость, изотропность, масштаб. Однако и здесь имеются математические трудности, связанные с учетом гидродинамического взаимодействия большого числа частиц [3]. Попытка свести это взаимодействие к сумме парных взаимодействий частиц приводит к расходящимся интегралам. Чтобы обойти эти трудности в работе [2] для получения решения использовалась гипотеза о том, что возмущение, вносимое в поток жидкости частицей, такое же, как и возмущение от точечной силы, действующей на жидкость в точке, занимаемой центром частицы. Поэтому использовались уравнения движения жидкости, содержащие точечные силы, действующие в узлах решетки, а распределение скорости и давление в жидкости представляются тройными рядами Фурье. Граничные условия на поверхности частиц при этом явно не учитывались, а вместо них условие, что среднее значение скорости жидкости по поверхности частицы равно нулю. Имеются и модификации этого подхода, которые применяются в сочетании с другими методами, позволяет напрямую использовать краевые условия [4--5].

В работах [6,7] показано, что решение задачи о гидродинамическом взаимодействии частиц в принципе нельзя свести к сумме решений задач о парных взаимодействиях этих частиц. Это связано с тем, что хотя уравнения и граничные условия линейные, однако, граничные условия для скорости жидкости на поверхности каждой частицы являются интегральными в том смысле, что описывают суммарный вклад от гидродинамического взаимодействия выделенной частицы со всеми остальными. В работах [8, 9] предложено аналитическое решение задачи о течении вязкой жидкости через неподвижную бесконечную периодическую решетку сфер. Учитывается гидродинамическое взаимодействие всех частиц. Решение основано на суммировании возмущений от каждой частицы в решетке. Показано, что известная проблема расходимости рядов или интегралов при учете взаимодействия большого числа частиц в действительности связана с заменой условия равенства нулю на поверхности частиц суммарной скорости возмущений жидкости от всех частиц на условие равенства нулю скорости возмущения потока жидкости от каждой отдельной частицы. В работе [9] построено периодическое всюду конечное решение уравнений Стокса для бесконечной решетки. Скорость жидкости в этом решении представляется в виде постоянной или линейной функции координат. Соответственно давление представляется в виде линейной или постоянной функции. Первую задачу (с постоянной скоростью в потоке) можно рассматривать с двух точек зрения. Если задана скорость, то можно найти градиент давления, и, наоборот, зная, градиент давления можно найти скорость. Но если в первом случае имеется предельный переход к решению об обтекании единичной сферы, то во втором

такой переход отсутствует. Почему-то в литературе для получения выражения коэффициента фильтрации используется первый подход. Хотя на практике возникает иная задача: известен градиент давления и требуется найти скорость фильтрации. Однако в этом случае при рассмотренном в работе [9] виде решения с постоянной составляющей скорости возникает особенность при малых значениях параметра, характеризующего расстояние между частицами. В работе [8] сделано предположение, что наличие этой особенности связано с видом решения для скорости. То есть в этом случае решение должно представляться с другим профилем скорости, который вблизи частиц приближенно можно заменить течением с квадратичным по координатам профилем скорости. Для этого случая были проведены оценки коэффициента фильтрации. Вопрос, как построить периодическое всюду конечное решение, соответствующее этому случаю, оставался открытым.

В настоящей работе рассматривается модель течения вязкой жидкости через периодическую решетку, позволяющая построить такое решение.

## 2. Постановка задачи

Исследуем течение несжимаемой жидкости с вязкостью  $\eta$  через периодическую решетку, образованную неподвижными сферическими частицами радиуса  $a$ . Структура решетки такова, что частица лежит в ячейке в виде правильной треугольной призмы со стороной  $b\sqrt{3}$  и высотой  $c$ . Введем параметр  $\varepsilon = a/b$ , причем  $\varepsilon \leq 1/2$  и предельное значение достигается при касании сфер. Решетка характеризуется ортогональными векторами  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ . Выберем произвольную частицу в решетке и совместим начало системы координат с центром в этой частицы, при этом ось  $x_3$  направлена по вектору скорости, оси  $x_2$  и  $x_1$  – вдоль высоты и основания правильного треугольника, соответственно. Положение  $n$ -ой частицы в решетке определяется вектором  $= \vec{r}_n n_j \vec{r}_j, j=1,2,3; n_j \in \mathbb{Z}^3$ . Здесь и далее используется соглашение Эйнштейна: по повторяющимся индексам производится суммирование. Положение точки относительно первой частицы задается вектором  $\vec{x}$ , а относительно  $n$ -й сферы – вектором  $\vec{x}_n = \vec{x} - \vec{r}_n$ .

Будем считать  $Re \ll 1$  и использовать приближение Стокса для скорости  $\vec{u}(\vec{x})$  и давления  $p(\vec{x})$  в жидкости:

$$\mu \Delta \vec{u} = \nabla p, \quad \text{div} \vec{u} = 0. \quad (2.1)$$

На поверхности каждой частицы должны выполняться граничные условия:

$$\vec{u} = 0, \quad |\vec{x}_n| = a. \quad (2.2)$$

Скорость и давление ищутся в виде

$$\vec{u}_i = U_i + \vec{v}_i, \quad p = P + p'$$

Возмущения  $\vec{v}, p'$  являются периодическими относительно решетки: для любого  $\vec{r}_n$  должно выполняться соотношение

$$\vec{v}(\vec{x} + \vec{r}_n) = \vec{v}(\vec{x}), \quad p'(\vec{x} + \vec{r}_n) = p'(\vec{x}). \quad (2.3)$$

Вектор  $\vec{U}(\vec{x})$  и скаляр  $P(\vec{x})$  задают характер течения. При этом, если задана скорость  $\vec{U}(\vec{x})$ , то давление  $P(\vec{x})$  есть неизвестная величина. И наоборот, если известно давление,  $P(\vec{x})$ , например, задан перепад давления в задаче о фильтрации, то вектор скорости  $\vec{U}(\vec{x})$  подлежит определению. В работе [9] найдено периодическое решение, соответствующее первому случаю. Ниже дается подход, позволяющий построить решение во втором случае.

### 3. Общее решение задачи для произвольной решетки

В работе [9] получено всюду конечное периодическое решение для функций  $p$  и  $\mu \vec{v}$  в случае решетки любого типа, имеющее вид

$$\begin{aligned} p &= H_j(L_j^\infty - \gamma_{jk}x_k) + F_{jk}L_{jk}^\infty + \dots + W_{jklmstq}L_{jklmstq}^\infty + \dots, \\ \mu v_i &= -\frac{1}{2}H_i(L_0^\infty - \frac{1}{2}\gamma_{jk}x_jx_k) - \frac{1}{2}H_j(K_{ij}^\infty - \alpha_{ijkl}x_kx_l) + B_{ij}(L_j^\infty - \gamma_{jk}x_k) + \\ &+ \frac{3}{2}F_{jk}(M_{ijk}^\infty - \beta_{ijk}x_l) - \frac{4}{7}G_{ijk}L_{jk}^\infty - \frac{1}{14}G_{jkl}L_{ijkl}^\infty |\vec{x}|^2 + \sum_{n \neq 0} [L_{ijk}^n |\vec{x}_n|^2 - \\ &- (L_{ijk}^n |\vec{x}_n|^2)_{n=0}] - \frac{5}{9}D_{ijkl}L_{jkl}^\infty - \frac{1}{18}D_{jklm} \sum_n L_{ijklm}^n |\vec{x}_n|^2 - \dots \\ &- \frac{8}{15}W_{ijklmst}L_{jklmst}^\infty - \frac{1}{30}W_{jklmstq} \sum_n L_{ijklmstq}^n |\vec{x}_n|^2 - \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $\vec{x}$  – радиус-вектор точки наблюдения, и введены обозначения:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{1}{|\vec{x}|}, \quad L_{i\dots j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \dots \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{|\vec{x}|} \right), \\ K_{ij}(x) &= \frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^3}, \quad M_{ijk}(x) = \frac{x_i x_j x_k}{|\vec{x}|^5}, \\ K_{ijk\dots l}(x) &= K_{ljk\dots i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \dots \frac{\partial}{\partial x_l} K_{ij}(x), \\ M_{ijkl\dots m}(x) &= M_{lmjik\dots i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_l} \dots \frac{\partial}{\partial x_m} M_{ijk}(x) \end{aligned}$$

Данные мультиполи связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} K_{ii} &= L_0, \quad K_{ijk} = -(\delta_{ik}L_j + \delta_{jk}L_i + 3M_{ijk}), \\ M_{iik} &= -L_k, \quad M_{ijk} = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Тензоры  $H_i, \dots, W_{ijklmst}$  не зависят от  $x$  и должны быть найдены из (2.3);  $B_{ij}$  является антисимметричным.

$$\begin{aligned} L_{ij}^\infty &= L_{ij} + L'_{ij}, \quad L_i^\infty - \gamma_{ij}x_j = L_i + L'_i - \gamma_{ij}x_j, \\ L_0^\infty - \frac{1}{2}\gamma_{kj}x_kx_j &= L_0 + L'_0 - \frac{1}{2}\gamma_{kj}x_kx_j, \end{aligned}$$

$$\gamma_{jk} = 2L_j^{\infty} \left(\frac{1}{2}r_s\right) R_{(s)k}$$

Здесь  $\vec{R}_{(s)}$  – вектор базиса, взаимного к  $\vec{r}_s$ . Штрих обозначает сумму по всем узлам решетки, кроме начального:

$$\begin{aligned} L'_{ij...k} &= \sum_{n \neq 0} L^n_{ij...k}, & L'_{ij} &= \sum_{n \neq 0} [L^n_{ij} - L^n_{ij}(0)], \\ L'_i &= \sum_{n \neq 0} [L^n_i - L^n_i(0) - L^n_{ij}(0)x_j], \\ L'_i &= \sum_{n \neq 0} [L^n_0 - L^n_0(0) - L^n_i(0)x_j - \frac{1}{2}L^n_{ij}(0)x_jx_k] \end{aligned}$$

Неизвестные величины  $H_i, \dots, W_{ijklmst}$  находятся из краевых условий численным методом или разложением по неотрицательным степеням параметра  $\varepsilon$ . В силу периодичности решения задачи, достаточно изучить поведение жидкости вблизи нулевой частицы, поэтому  $K', L', M'$  раскладываются в ряд Тейлора в окрестности  $x = 0$ . С точностью до  $\varepsilon^6$  имеем следующее выражение для скорости (3.1)

$$\begin{aligned} \mu v_i &= -\frac{1}{2}H_i[L_0 + \frac{1}{4!}L'_{ijklm}(0)x_jx_kx_lx_m - \frac{1}{2}\gamma_{jk}x_jx_k] - \frac{1}{2}H_j[K_{ij} + \\ &+ \frac{1}{4!}K'_{ijklms}(0)x_kx_lx_mx_s - \alpha_{ijkl}x_kx_l] + B_{ij} \left[ L_j + \frac{1}{3!}L'_{ijklm}(0)x_kx_lx_m - \frac{1}{2}\gamma_{jk}x_k \right] + \\ &+ \frac{3}{2}F_{jk} \left[ M_{ijk} + \frac{1}{3!}M'_{ijklms}(0)x_lx_mx_s - \beta_{ijkl}x_l \right] - \frac{4}{7}G_{ijk} \left[ L_{jk} + \frac{1}{2!}L'_{ijklm}(0)x_lx_m \right] - \\ &- \frac{1}{14}G_{jkl} \left[ L_{ijkl}|x|^2 + \frac{1}{2}L^{6,2}_{ijklms}x_mx_s + (L^{5,1}_{ijklms} + L^{5,1}_{ijklsm})x_mx_s + L'_{ijkl}(0)|x|^2 \right] \\ &- \dots \quad (3.3) \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$L^{6,2}_{ijklms} = \sum_{n \neq 0} [L^n_{ijklms} |\vec{x}_n|^2]_{x=0}, \quad L^{5,1}_{ijklms} = \sum_{n \neq 0} [L^n_{ijklms} x_s]_{x=0}$$

Тензоры  $\alpha, \beta, \gamma, K'(0), L'(0), M'(0)$  зависят только от конфигурации частиц и потому обладают симметрией решетки. При решении конкретной задачи эти тензоры известны заранее. Напротив,  $H_i, \dots, W_{ijklmst}$  должны быть инвариантны относительно пересечения точечной группы решетки и группы симметрии краевых условий. Таким образом, учет структуры решетки позволяет резко снизить количество параметров, необходимых для задания тензоров.

На неизвестные тензоры  $H_i, \dots, W_{ijklmst}$  накладываются и дополнительные ограничения. Во-первых, эти тензоры должны быть симметричны по индексам, по которым происходит их свертывание с мультиполями (то есть по всем, начиная со второго). Во-вторых, произведения базисных тензоров,



входящие в состав  $H_i, \dots, W_{i, \text{geom}}$ , должны включать не более одного символа Кронекера. При этом один из индексов  $\delta$  при суммировании не должен быть немым, иначе свертка этого слагаемого с  $L_{i,j}^2$  дает нуль. Эти два ограничения справедливы для любой задачи, решение которой представлено линейной комбинацией мультиполей.

С помощью данного метода в работе [9] найдены скорость и давление в жидкости и построены поля течений вокруг частицы в решетке. Установлено, что возмущения потока не распространяются за границы ячейки Вигнера-Зейтца решетки. Поскольку рассматриваемые выше две прямоугольные решетки равносильны одной, то можно предположить, что и в нашем случае возмущения не выйдут за рамки ячейки и воспользоваться этим результатом для получения выражений для распределения скорости и давления вокруг частиц в решетке.

#### 4. Решение задачи с заданным градиентом давления

Так как в рассматриваемом случае ячейка представляет собой прямую призму, в основании которой правильный треугольник, а частицы в решетке расположены таким образом, что призмы образуют непрерывный канал, то при заданном постоянном градиенте давления  $F = -Ax_2$  можно считать, что внутри каждого такого канала реализуется течение с профилем скорости  $\vec{U}(\vec{x})$  равным [10]

$$U_3 = U_0 \left( 1.5 + \frac{x_2^3}{b^3} - 1.5 \frac{x_2^2}{b^2} - 3 \frac{x_1^2 x_2}{b^3} - 1.5 \frac{x_1^2}{b^2} \right) \quad (4.1)$$

Здесь  $U_0$  – постоянная скорость на границах канала.

Профиль безразмерной скорости  $U_3^* = 6\mu U_0 / Ab^2$  в сечении, проходящем через высоту треугольника и ось призмы, показан на рис.1-2 (принято, что  $6\mu U_0 / Ab^2 = 1$ )

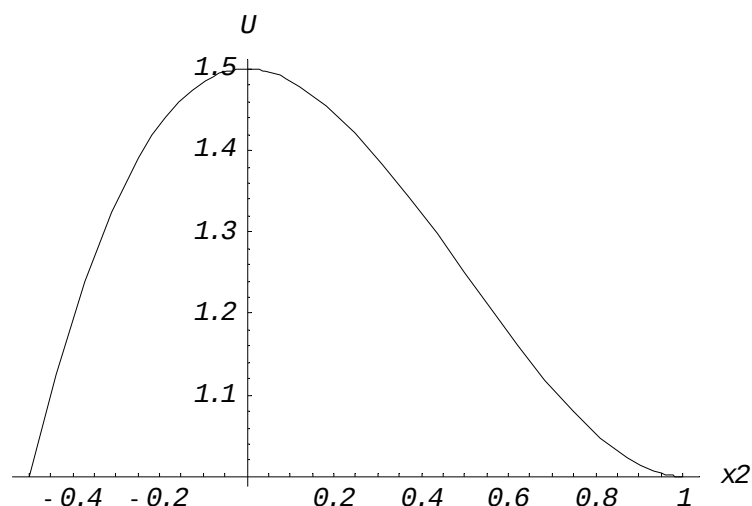


Рис. 1. Профиль скорости в канале треугольного сечения при  $x_1 = 0$



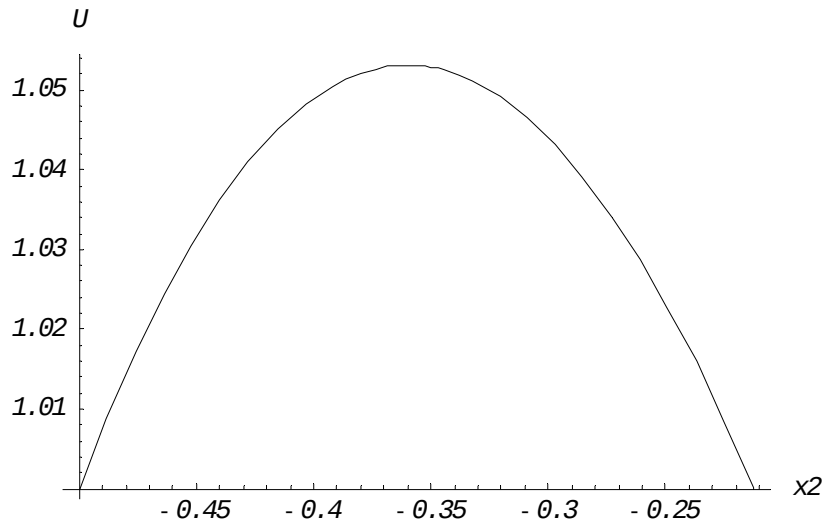


Рис.2. Профиль скорости в канале треугольного сечения при  $x_1 = 0.6$

Как видно из рисунков, хотя скорость зависит от координат не по квадратичному закону, вблизи частицы (точка с координатами  $x_1 = 0, x_2 = 0$ ) ее профиль близок к параболическому, что и было получено в работе [8]. Если предположить, что в соседних каналах имеется такое же распределение скорости, то легко проверить, что такое течение жидкости удовлетворяет условиям непрерывности скорости и касательных и нормальных напряжений на границе ячеек. Таким образом, невозмущенное течение вязкой жидкости представляет собой периодическое движение в каналах треугольного сечения с заданным градиентом давления. Предложенная модель фильтрации применима к любым решеткам и позволяет определять течения при заданном градиенте давления. Невозмущенная скорость течения определяется профилем сечением канала и, вообще говоря, может быть произвольным многоугольником.

В работе [9] получено, что с учетом гидродинамического взаимодействия всех частиц градиент давления и невозмущенная скорость течения  $\bar{U}$  должны быть связаны равенством ( $U_0$  неизвестная величина)

$$A_i + \mu \Delta U_i = \frac{4\pi}{|B|} H_i$$

Из выражения (4.1) получим соотношение

$$\mu \frac{6}{b^2} \left(1 + \frac{1}{4}\theta\right) U_0 = A, \quad \theta = \varepsilon^3 \left[1 - \frac{f\varepsilon}{2} + \left(\frac{f\varepsilon^3}{2}\right)^2\right]$$

Здесь  $f$  – параметр, характеризующий форму и размер ячейки. В рассматриваемом случае решетка имеет параметр равный  $f = 3\sqrt[3]{3}/8$ . Таким образом, получаем, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеется предельный переход  $6\mu U_0/b^2 \rightarrow A$ . Как видно из выражения (4.1) профиль и максимальная величина скорости зависят от размеров ячеек, через которые течет жидкость. Поэтому для

системы, состоящей из ячеек разных размеров, на различных участках будет реализовываться профиль скорости со своим максимальным значением.

Рассмотрим течение несжимаемой жидкости через две периодические решетки, образованные неподвижными сферическими частицами одинакового радиуса. Структура каждой решетки такова, что в каждой из них частица лежит в ячейке в виде правильной треугольной призмы со сторонами длиной  $b\sqrt{3}$  и  $2b\sqrt{3}$ , соответственно, и высотой  $c$ . Причем ячейка большего размера включает в себя четыре меньшего размера. Распределение скорости в канале большего размера имеет вид аналогичный (4.1)

$$V_z = U_0 \left( 1.5 + \frac{x_2^3}{8b^3} - 1.5 \frac{x_2^2}{4b^2} - 3 \frac{x_1^2 x_2}{8b^3} - 1.5 \frac{x_1^2}{4b^2} \right) \quad (4.2)$$

Так как канал с большим сечением содержит в себе три канала с меньшим сечением, то суммарное распределение скорости в нем, в силу линейности уравнений Стокса, можно представить в виде суммы решений для каждого из них. Профиль безразмерной скорости  $U$  в сечении, проходящем через высоту треугольника, показан на рис. 3

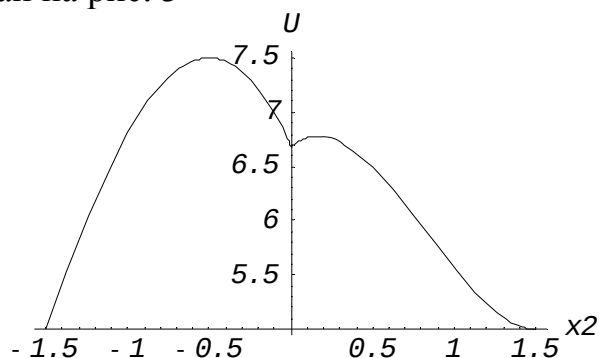


Рис. 3

Как видно из рисунка, профиль скорости и максимальная величина зависят от размеров ячеек, через которые течет жидкость. Поэтому для системы, состоящей из ячеек разных размеров, на различных участках будет реализовываться профиль скорости со своим максимальным значением. Поэтому получаем неоднородное по скорости распределение потока жидкости в такой системе.

Таким образом, невозмущенное течение вязкой жидкости представляется в виде периодических кусочно-гладких функций скорости течения в каналах треугольного сечения с заданным градиентом давления. Такое представление дает неоднородное по скорости распределение потока жидкости.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Happel J., Brenner H. Low Reynolds number hydrodynamics. Prentice-Hall, 1965 = Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 632 с.

2. Hasimoto H. On the periodic fundamental solutions of the Stokes equations and their applications to viscous flow past a cubic array of spheres // J. Fluid Mech, 1959. – V. 5. – P. 317-328.
3. Brady J. F., Durlofsky L. J. The sedimentation rate of disordered suspensions // Phys. Fluids, 1988. – Vol.31. – P.717-727.
4. Zick A. A., Homsy G. M. Stokes flow through periodic array of spheres // J. Fluid Mech, 1982. – V. 115. – P. 13-26.
5. Mo G., Sangani A. S. A method for computing flow interactions among spherical objects and its application to suspensions of drops and porous particles // Phys. Fluids, 1994. – V. 6, № 5. – P. 1637-1652.
6. Мартынов С. И. Взаимодействие частиц в течении с параболическим профилем скорости // Изв. РАН, МЖГ, 2000. – № 1. – С.84-91.
7. Мартынов С. И. Гидродинамическое взаимодействие частиц // Изв. РАН, МЖГ, 1998. – № 2. – С. 112-119.
8. Мартынов С. И. Движение вязкой жидкости через периодическую решетку сфер // Изв. РАН. МЖГ, 2002. – № 6. – С. 48 - 54.
9. Мартынов С. И., Сыромясов А. О. Вязкость суспензии с кубической решеткой сфер в сдвиговом потоке // Изв. РАН. МЖГ, 2005. – № 4. – С. 3-14.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.

*Н. И. Еремеева, Д. Р. Садыкова* (г. Димитровград)

## ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ РОСТА ОПУХОЛИ

*Данная статья посвящена изучению построенной Решиньо и Де Лизи модели реакции иммунной системы на опухоль.*

*Предметом наших исследований будет вывод условий, при которых рост опухоли будет контролируемым.*

### 1. Описание модели

Клетки опухоли содержат особые вещества (антигены), которые вызывают производство клеток – лимфоцитов, уничтожающих клетки опухоли.

Пусть:

$L$  – свободные лимфоциты на поверхности опухоли;

$C$  – опухолевые клетки;

$C_s$  – опухолевые клетки на поверхности опухоли;

$\bar{C}$  – опухолевые клетки на поверхности опухоли, не связанные с лимфоцитами;

$C_f$  – опухолевые клетки не связанные с лимфоцитами.

Форма опухоли предполагается шарообразной, то есть

$$C_s = K_1 C^{2/3}, \quad K_1 = \text{const}. \quad (1)$$

Взаимодействие опухолевых клеток с лимфоцитами происходит только на поверхности опухоли, причем нейтрализация опухолевых клеток происходит только в части случаев. Будем считать, что

$$C_s - \bar{C} = K_2 \bar{C} L, \quad K_2 = \text{const}. \quad (2)$$

Кроме того, предполагается, что величина  $\dot{L}/L$  состоит из двух слагаемых:

1. постоянного уровня смертности лимфоцитов  $\lambda_1$ ;
2. уровня стимуляции  $\alpha_1' \bar{C}(1 - L/L_M)$ , где  $L_M$  – максимальный размер популяции лимфоцитов.

Таким образом,  $L$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{L} = -\lambda_1 L + \alpha_1' \bar{C} L (1 - L/L_M). \quad (3)$$

Скорость роста популяции опухолевых клеток дается уравнением

$$\dot{C} = \lambda_2 C_f - \alpha_2' \bar{C} L, \quad (4)$$

в котором первое слагаемое описывает рост опухоли, не подвергающейся атаке лимфоцитов, а второе учитывает взаимодействие свободных лимфоцитов с опухолевыми клетками на поверхности опухоли.

Пусть

$$x = K_2 L, \quad c = K_2 L_M, \quad y = K_2 C, \quad (5)$$

тогда получаем динамические уравнения, описывающие задачу

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda_1 x + \alpha_1 x y^{2/3} \left(1 - \frac{x}{c}\right) / (1+x), \\ \dot{y} = \lambda_2 y - \alpha_2 x y^{2/3} / (1+x), \end{cases} \quad (6)$$

в которых переменные и коэффициенты характеризуют следующие параметры:

$x$  – количество лимфоцитов;

$y$  – количество опухолевых клеток;

$\alpha_1$  – уровень стимуляции лимфоцитов;

$\lambda_1$  – уровень смертности лимфоцитов;

$\lambda_2$  – уровень роста опухоли;

$\alpha_2$  – уровень взаимодействия лимфоцитов с опухолевыми клетками.

Найдем, при каких условиях система имеет асимптотически устойчивые стационарные точки.

## 2. Стационарные точки задачи

Для нахождения неподвижных точек решаем систему

$$\begin{cases} -\lambda_1 x + \alpha_1 x y^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{x}{c}\right) \frac{1}{1+x} = 0, \\ \lambda_2 y - \alpha_2 x y^{\frac{2}{3}} \frac{1}{1+x} = 0, \\ 0 \leq x < c, \end{cases} \quad (7)$$

из которой получаем

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ (1+x)^3 \phi = x^2 \left(1 - \frac{x}{c}\right), \\ y = \left(\frac{\alpha_2}{\lambda_2} * \frac{x}{1+x}\right)^3, \\ 0 < x < c, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\phi = \frac{\lambda_1}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\right)^2. \quad (9)$$

Таким образом, при любых значениях параметров задача имеет тривиальную неподвижную точку, и, в зависимости от коэффициентов, может иметь нетривиальные стационарные точки вида  $M(x_0, y_0)$ , где  $x_0$  – решение уравнения

$$(1+x)^3 \phi = x^2 \left(1 - \frac{x}{c}\right), \quad x_0 \in (0, c). \quad (10)$$

Анализируя поведение функций  $g_1 = (1+x)^3 \phi$  и  $g_2 = x^2 \left(1 - \frac{x}{c}\right)$  (см. рис.1, рис.2), можно сделать вывод, что графики функций пересекаются в одной или в двух точках или не пересекаются вообще.

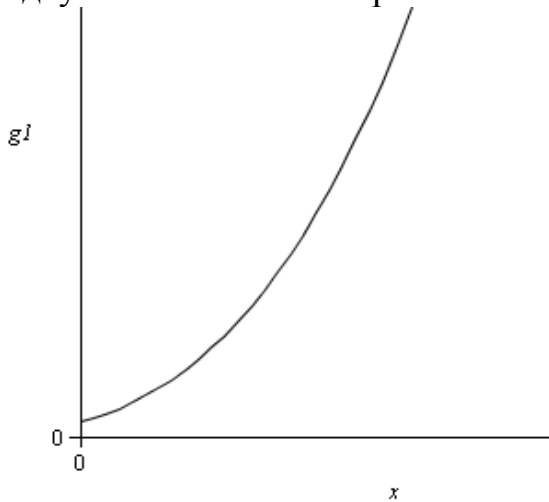


Рис. 4.

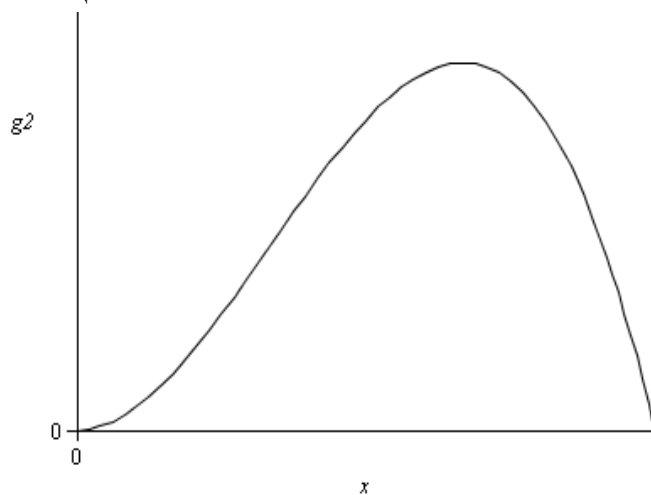


Рис.5.

При этом одна точка пересечения соответствует случаю касания графиков, то есть в ней выполняются условия

$$\begin{cases} (1+x_0)^3 \phi = x_0^2 \left(1 - \frac{x_0}{c}\right), \\ \left( \left( (1+x)^3 \phi \right)' \right) \Big|_{x_0} = \left( x^2 \left(1 - \frac{x}{c}\right) \right)' \Big|_{x_0}, \end{cases} \quad (11)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_0 = \frac{2c}{c+3}, \\ \phi = \frac{4c^2}{27(c+1)^2}. \end{cases} \quad (12)$$

Таким образом, получаем:

- если коэффициенты задачи удовлетворяют условию

$$\frac{\lambda_1}{\alpha_1} \left( \frac{\lambda_2}{\alpha_2} \right)^2 = \frac{4c^2}{27(c+1)^2}, \quad (13)$$

то задача имеет две стационарные точки, одна из которых тривиальная;

- если коэффициенты задачи таковы, что

$$\frac{\lambda_1}{\alpha_1} \left( \frac{\lambda_2}{\alpha_2} \right)^2 < \frac{4c^2}{27(c+1)^2}, \quad (14)$$

то задача имеет одну тривиальную и две нетривиальные стационарные точки;

- в остальных случаях у задачи только тривиальная неподвижная точка.

### 3. Исследование устойчивости стационарных точек

Легко видеть, что тривиальная стационарная точка при любых значениях параметров задачи является седлом.

Действительно, соответствующая лианеризованная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda_1 x, \\ \dot{y} = \lambda_2 y, \end{cases} \quad (15)$$

то есть имеет собственные числа разных знаков. Следовательно, тривиальная неподвижная точка всегда неустойчива.

Рассмотрим теперь нетривиальную стационарную точку  $M(x_0, y_0)$ . Производя замену

$$\begin{cases} \tau = x - x_0, \\ \nu = y - y_0 \end{cases} \quad (16)$$

и учитывая, что в окрестности точки  $M \Big|_{\substack{\tau=0 \\ \nu=0}}$

$$(\nu + y_0)^{\frac{2}{3}} = y_0^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3y_0^{\frac{1}{3}}} \nu + o(\nu), \quad (17)$$

$$\frac{\tau + x_0}{\tau + x_0 + 1} = \frac{x_0}{1 + x_0} + \frac{\tau}{(1 + x_0)^2} + o(\tau), \quad (18)$$

получаем линеаризованную систему

$$\begin{cases} \dot{\tau} = -\delta\tau + \Omega\nu, \\ \dot{\nu} = -\beta\tau + \gamma\nu, \end{cases} \quad (19)$$

в которой

$$\delta = \frac{\alpha_1 \alpha_2^2}{\lambda_2^2} * \frac{x_0^3 (1+c)}{(1+x_0)^4 c}, \quad (20)$$

$$\Omega = \frac{2\alpha_1 \lambda_2}{3\alpha_2} \left(1 - \frac{x_0}{c}\right), \quad (21)$$

$$\beta = \frac{\alpha_2}{\lambda_2^2} * \frac{x_0^2}{(1+x_0)^4}, \quad (22)$$

$$\gamma = \frac{1}{3} \lambda_2. \quad (23)$$

Устойчивость или неустойчивость системы зависит от знаков корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \lambda(\delta - \gamma) + \beta\Omega - \delta\gamma = 0. \quad (24)$$

Причем, асимптотическая устойчивость возможна в двух случаях:

1. точка  $M(x_0, y_0)$  является устойчивым фокусом;
2. точка  $M(x_0, y_0)$  является устойчивым узлом.

В первом случае должны выполняться условия

$$\begin{cases} (\gamma - \delta)^2 - 4(\beta\Omega - \delta\gamma) < 0, \\ \gamma - \delta < 0, \end{cases} \quad (25)$$

во втором

$$\begin{cases} (\gamma - \delta)^2 - 4(\beta\Omega - \delta\gamma) \geq 0, \\ \beta\Omega - \delta\gamma > 0, \\ \gamma - \delta < 0. \end{cases} \quad (26)$$

#### 4. Вывод условий, при которых стационарная точка является устойчивым фокусом

Рассмотрим систему (25). Учитывая равенства (20)-(23), получим



$$\begin{cases} \frac{1}{3}\lambda_2 < \frac{x_0^3(1+c)}{(1+x_0)^4 c} * \frac{\alpha_1 \alpha_2^2}{\lambda_2^2}, \\ \left( \frac{1}{3}\lambda_2 + \frac{x_0(1+c)\alpha_1 \alpha_2^2}{(1+x_0)^4 c \lambda_2^2} \right)^2 < \frac{8}{3} \frac{\alpha_1 \alpha_2^2}{\lambda_2} \frac{x_0^2}{(1+x_0)^4} \left( 1 - \frac{x_0}{c} \right). \end{cases} \quad (27)$$

Обозначим

$$z = \frac{\lambda_2^3}{\alpha_1 \alpha_2^2}; \quad (28)$$

$$c_1 = \frac{x_0^3(1+c)}{(1+x_0)^4 + c}; \quad c_2 = \frac{8}{3} \frac{x_0^2}{(1+x_0)^4} \left( 1 - \frac{y}{c} \right), \quad (29)$$

тогда система (27) примет вид

$$\begin{cases} z < 3c_1, \\ \left( \frac{1}{3}z + c_1 \right)^2 < c_2 z, \\ z > 0. \end{cases} \quad (30)$$

Следовательно,

$$\begin{cases} z < 3c_1, \\ -3c_1 + \frac{9}{2}c_2 - \frac{9}{2}\sqrt{c_2^2 - \frac{4}{3}c_1 c_2} < z < -3c_1 + \frac{9}{2}c_2 + \frac{9}{2}\sqrt{c_2^2 - \frac{4}{3}c_1 c_2}, \\ c_2 > \frac{4}{3}c_1, \\ z > 0. \end{cases} \quad (31)$$

Если  $c_2 \geq \frac{4}{3}c_1$ , то

$$\max \left\{ 0, -3c_1 + \frac{9}{2}c_2 - \frac{9}{2}\sqrt{c_2^2 - \frac{4}{3}c_1 c_2} \right\} = -3c_1 + \frac{9}{2}c_2 - \frac{9}{2}\sqrt{c_2^2 - \frac{4}{3}c_1 c_2}, \quad (32)$$

$$\min \left\{ 3c_1, -3c_1 + \frac{9}{2}c_2 + \frac{9}{2}\sqrt{c_2^2 - \frac{4}{3}c_1 c_2} \right\} = 3c_1. \quad (33)$$

Тогда будем иметь

$$\begin{cases} z > -3c_1 + \frac{9}{2}c_2 - \frac{9}{2}\sqrt{c_2^2 - \frac{4}{3}c_1c_2}, \\ z < 3c_1, \\ c_2 \geq \frac{4}{3}c_1. \end{cases} \quad (34)$$

Заметим, что

$$z = \frac{\lambda_2^3}{\alpha_1\alpha_2^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda^1} \varphi = \frac{\lambda^2}{\lambda^1} \frac{x_0^2}{(1+x_0)^3} \left(1 - \frac{x_0}{c}\right). \quad (35)$$

Учитывая (29) и обозначая

$$\eta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad (36)$$

получим искомые условия наличия устойчивого фокуса

$$\begin{cases} \sqrt{32(c-x_0)(2c-3x_0-x_0c)} > 3\eta x_0^2 + x_0(3\eta - 3\eta c - 9c - 45) - 3\eta c + 36c, \\ \eta x_0^2 + x_0(\eta - \eta c + 3 + 3c) - \eta c > 0, \\ x_0 \leq \frac{2c}{c+3}. \end{cases} \quad (37)$$

Выведенные условия означают, что если коэффициенты задачи таковы, что существует корень  $x_0$  уравнения (10), удовлетворяющий условиям (37), то в точке  $M\left(x_0, \left(\frac{\alpha_2}{\lambda_2} \frac{x_0}{1+x_0}\right)^3\right)$  задача имеет устойчивый фокус.

Например, если  $\lambda_1 = \frac{3}{16}; \lambda_2 = \frac{2}{5}; \alpha_1 = \frac{18}{25}; \alpha_2 = \frac{2}{3}; c = 4$ , то уравнение (10) принимает вид

$$3x_0^3 + 17x_0^2 - 23x_0 + 3 = 0 \quad (38)$$

и имеет два корня  $(x_0)_1 = 1$  и  $(x_0)_2 = \frac{\sqrt{109}-10}{3}$ , принадлежащие промежутку  $(0, c)$ .

Первый корень удовлетворяет выведенным условиям (37), а значит в точке  $M\left(1, \left(\frac{5}{6}\right)^3\right)$  – устойчивый фокус.

Этот результат подтверждает численный эксперимент. На рис.3 изображены графики функции  $y(t)$  и  $x(t)$ , являющихся решением системы (6) с начальными условиями  $x(0) = 1,01; y(0) = 126/216$ , при

$\lambda_1 = \frac{3}{16}; \lambda_2 = \frac{2}{5}; \alpha_1 = \frac{18}{25}; \alpha_2 = \frac{2}{3}; c = 4$ . Для построения графиков использовался математический пакет Maple.

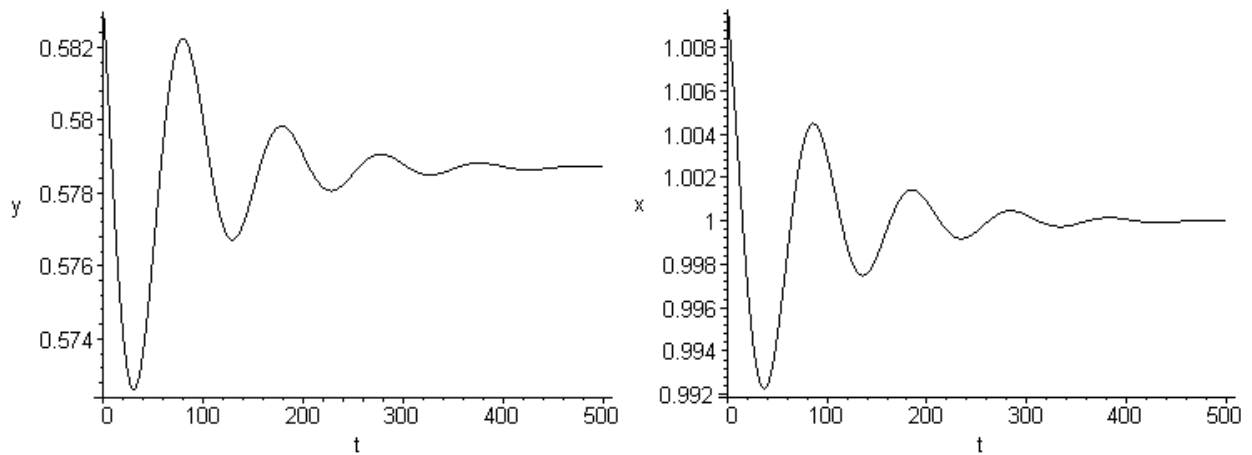


Рис.3.

### 5. Вывод условий, при которых стационарная точка является устойчивым узлом

Для того чтобы точка  $M(x_0, y_0)$  была устойчивым узлом необходимо выполнение условий (26), то есть

$$\begin{cases} (\delta + \gamma)^2 > 4\beta\Omega, \\ \beta\Omega > \delta\gamma, \\ \gamma < \delta. \end{cases} \quad (39)$$

Из неравенства  $\beta\Omega > \delta\gamma$ , учитывая (20)-(23), а также (29), можно получить, что

$$c_2 > \frac{4}{3}c_1. \quad (40)$$

Следовательно, дискриминант уравнения

$$\left(\frac{1}{3}z + c_1\right)^2 = c_2z, \quad (41)$$

вытекающего из уравнения

$$(\delta + \gamma)^2 = 4\beta\Omega, \quad (42)$$

всегда положителен.

Таким образом, систему (39) можно привести к виду

$$\begin{cases} c_2 > \frac{4}{3}c_1, \\ z < 3c_1, \\ \left[ \begin{aligned} z &< -3c_1 + \frac{9}{2}c_2 - \frac{9}{2}\sqrt{c_2^2 - \frac{4}{3}c_1c_2}, \\ z &> -3c_1 + \frac{9}{2}c_2 + \frac{9}{2}\sqrt{c_2^2 - \frac{4}{3}c_1c_2}. \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (43)$$

Так как при  $c_2 > \frac{4}{3}c_1$  выполняется

$$-3c_1 + \frac{9}{2}c_1 - \frac{9}{2}\sqrt{c_2^2 - \frac{4}{3}c_1c_2} < 3c_1 < -3c_1 + \frac{9}{2}c_1 + \frac{9}{2}\sqrt{c_2^2 - \frac{4}{3}c_1c_2}, \quad (44)$$

то приходим к системе

$$\begin{cases} c_2 > \frac{4}{3}c_1, \\ z < -3c_1 + \frac{9}{2}c_2 - \frac{9}{2}\sqrt{c_2^2 - \frac{4}{3}c_1c_2}, \end{cases} \quad (45)$$

из которой получаем искомые условия устойчивого узла

$$\begin{cases} x_0 < \frac{2c}{c+3}, \\ \sqrt{32(c-x_0)(2c-3x_0-x_0c)} < 3\eta x_0^2 + x_0(3\eta - 3\eta c - 9c - 45) - 3\eta c + 36c. \end{cases} \quad (46)$$

Для иллюстрации выведенных условий рассмотрим задачу в случае

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{4}, \alpha_1 = \frac{3}{4}, \alpha_2 = \frac{2}{3}, c = 4.$$

Уравнение (10) при данных параметрах имеет решение  $x_0 = 1$ , удовлетворяющее условиям (46). Значит, точка  $M\left(1, \left(\frac{4}{3}\right)^3\right)$  – устойчивый узел.

На рис.4 изображены результаты численного эксперимента.  $x(t)$  и  $y(t)$  – решения задачи (6) с начальными условиями  $x(0) = 1,01$ ;  $y(0) = 2,37$  при

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{4}, \alpha_1 = \frac{3}{4}, \alpha_2 = \frac{2}{3}, c = 4.$$

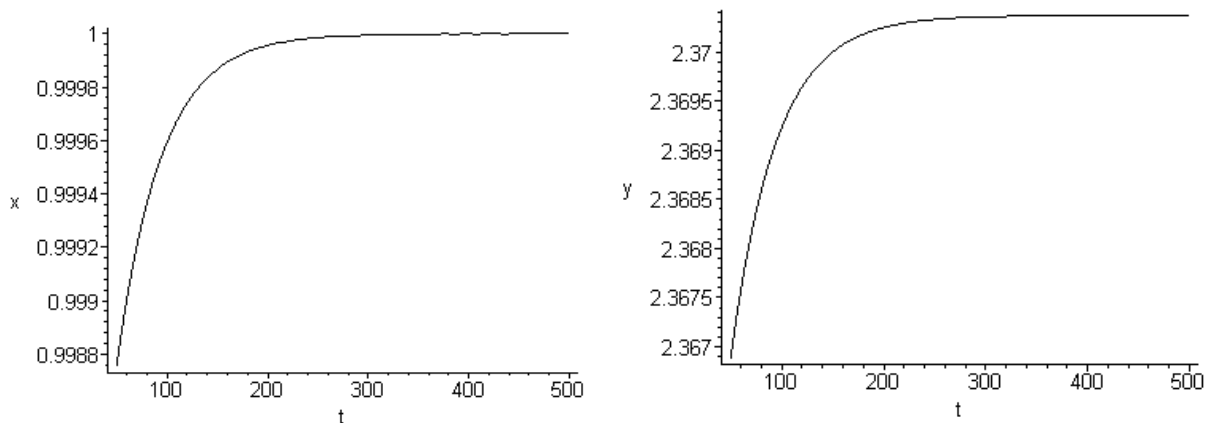


Рис.4

## 6. Условия асимптотической устойчивости

Обобщая результаты, полученные в двух предыдущих пунктах, можно сделать вывод, что при выполнении условий

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 < \frac{2c}{c+3}, \\ \left[ \begin{array}{l} \sqrt{32(c-x_0)(2c-3x_0-x_0c)} > 3\eta x_0^2 + x_0(3\eta - 3\eta c - 9c - 45) - 3\eta c + 36c, \\ \eta x_0^2 + x_0(\eta - \eta c + 3 + 3c) - \eta c > 0, \\ \sqrt{32(c-x_0)(2c-3x_0-x_0c)} < 3\eta x_0^2 + x_0(3\eta - 3\eta c - 9c - 45) - 3\eta c + 36c \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (47)$$

задача имеет асимптотически устойчивую точку  $M(x_0, y_0)$ .

**А. В. Еремин** (г. Самара)

## **АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ**

*Рассматривается метод получения аналитического решения задачи теплообмена при ламинарном течении жидкости в круглой трубе (задача Гретца – Нуссельта), основанный на совместном применении метода Фурье и интегрального метода теплового баланса с использованием дополнительных граничных условий, получаемых из основного дифференциального уравнения краевой задачи. Привлечение дополнительных граничных условий позволяет в аппроксимационном представлении аналитического решения находить любое число его слагаемых и таким образом получать аналитические решения практически с заданной степенью точности.*

Получение аналитических решений задач теплообмена при течении жидкости в круглых трубах представляет значительные математические трудности ввиду нелинейности краевой задачи. Аналитическое решение впервые было получено Гретцем [1] в 1885 и позднее (1910 г.), независимо от Гретца – Нуссельтом [2]. Однако использование этого решения при большом числе членов его бесконечного ряда ( $n \geq 6$ ) затруднено ввиду больших сложностей решения алгебраического уравнения высокой степени относительно собственных чисел краевой задачи.

В работе [3] дано уточненное решение задачи Гретца – Нуссельта. Однако собственные функции в этом решении находятся из трех различных соотношений, каждое из которых может быть применено лишь для определенного участка поперечной декартовой координаты (для малых значений радиуса – на оси трубы, для средних его значений и для значений вблизи стенки трубы). Кроме того, выражения для определения собственных функций для всех трех указанных участков поперечной координаты содержат функции Бесселя различных (в том числе и дробного) порядков. Указанные особенности полученного решения существенно затрудняют его практическое использование.

В настоящей работе для решения задачи Гретца – Нуссельта используются дополнительные граничные условия, позволяющие определить неизвестные коэффициенты решения краевой задачи Шурма – Лиувилля путем выполнения основного уравнения этой задачи и производных от него в граничных точках поперечной независимой переменной [3, 4].

В задаче Гретца – Нуссельта принимаются следующие допущения: течение жидкости ламинарное, а процесс теплообмена стационарный;

жидкость несжимаема, её физические свойства постоянны; профиль скорости не изменяется по длине трубы; температура жидкости на входе в трубу неизменна по сечению и равна  $t_0$ ; температура внутренней поверхности стенки трубы постоянна и равна  $t_{ст}$ , причем  $t_{ст} \neq t_0$ ; внутренние источники тепла и диссипация энергии не учитываются; переносом теплоты теплопроводностью вдоль оси трубы пренебрегается.

Математическая постановка такой задачи с учетом осевой симметрии (см. рис. 1) имеет вид

$$\frac{\partial^2 t(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial t(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\omega(\xi)}{a} \frac{\partial t(\xi, \eta)}{\partial \eta}; \quad (1)$$

$$(\eta > 0; \quad -r_0 \leq \xi < r_0)$$

$$t(\xi, 0) = t_0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial t(0, \eta)}{\partial \xi} = 0; \quad (3)$$

$$t(h, \eta) = t_{ст}, \quad (4)$$

где  $t$  – температура;  $\eta$  – продольная координата;  $\xi$  – поперечная координата;  $a$  – коэффициент температуропроводности жидкости;  $h = 2r_0$  – диаметр трубы;  $t_{ст}$  – температура стенки;  $r_0$  – радиус трубы;  $\omega(\xi) = 2\omega_{cp}(1 - \xi^2/r_0^2)$  – профиль скорости ламинарного течения;  $\omega_{\bar{\eta}\delta} = 0,5\omega_{max}$  – средняя скорость;  $\omega_{max}$  – максимальная скорость ламинарного течения;  $t_0$  – температура жидкости на входе в трубу.

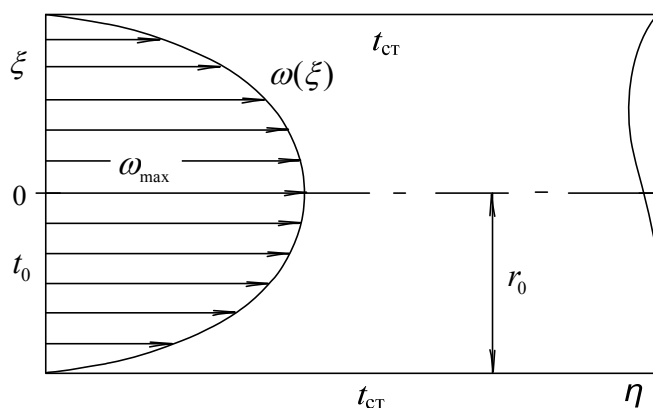


Рис. 1. Схема стабилизированного ламинарного течения жидкости в круглой трубе

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\Theta = \frac{t - t_{ст}}{t_0 - t_{ст}}; \quad y = \frac{\xi}{r_0}; \quad x = \frac{1}{Pe} \frac{\eta}{r_0}; \quad Pe = \frac{\omega_{cp} r_0}{a}, \quad (5)$$

где  $\Theta$  – относительная избыточная температура;  $y, x$  – безразмерные поперечная и продольная координаты;  $Pe$  – число Пекле.

С учетом принятых обозначений задача (1) – (4) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \Theta(y, x)}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \Theta(y, x)}{\partial y} = (1 - y^2) \frac{\partial \Theta(y, x)}{\partial x}; \quad (x > 0; \quad 0 \leq y < 1) \quad (6)$$

$$\Theta(y, 0) = 1; \quad (7)$$

$$\partial \Theta(0, x) / \partial y = 0; \quad (8)$$

$$\Theta(1, x) = 0. \quad (9)$$

Следуя методу разделения переменных, решение задачи (6) – (9) разыскивается в виде произведения двух функций

$$\Theta(y, x) = \varphi(x) \Psi(y). \quad (10)$$

Подставляя (10) в (6), получаем следующие обыкновенные дифференциальные уравнения

$$d\varphi(x)/dx + v\varphi(x) = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \Psi(y)}{\partial y} + v(1 - y^2) \Psi(y) = 0, \quad (12)$$

где  $v = -\mu^2$  – некоторая постоянная.

Решение уравнения (11) известно и имеет вид

$$\varphi(x) = A \exp(-v x), \quad (13)$$

где  $A$  – неизвестный коэффициент.

Граничные условия для уравнения Бесселя (12) согласно (8), (9) будут

$$d\Psi(0)/dy = 0; \quad (14)$$

$$\Psi(1) = 0. \quad (15)$$

Решение уравнения (12) с граничными условиями (14), (15) разыскивается в виде ряда

$$\Psi(y) = \sum_{i=0}^n b_i N_i(y), \quad (16)$$

где  $b_i (i = \overline{0, n})$  – неизвестные коэффициенты;  $N_i(y) = y^i$  – координатные функции.

Если ограничиться, например, шестью членами ряда (16) ( $n = 5$ ), то будем иметь шесть неизвестных коэффициентов  $b_i (i = \overline{0, 5})$ , а граничных условий только два (14), (15). В связи с чем, необходимо добавить еще четыре дополнительных граничных условия. Первое из этих условий следует из соотношения (14) [4]

$$\Psi(0) = \text{const} = 1. \quad (17)$$

Записывая уравнение (12) применительно к точке  $y = 1$ , получаем еще одно дополнительное граничное условие

$$\Psi''(1) = 0. \quad (18)$$



Записывая уравнение (12) применительно к точке  $y = 0$ , после раскрытия неопределенности по правилу Лопиталя во втором члене этого уравнения и учитывая, что  $\Psi(0) = 1$ , находим

$$\Psi''(0) + \Psi''(0) + v = 0. \quad (19)$$

Отсюда получаем следующее дополнительное граничное условие

$$\Psi''(0) = -v/2. \quad (20)$$

Для нахождения еще одного дополнительного граничного условия продифференцируем уравнение (12) по переменной  $y$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - 2vy\Psi + v(1-y^2) \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0. \quad (21)$$

Записывая соотношение (21) применительно к точке  $y = 0$ , после раскрытия неопределенностей во втором и третьем слагаемых по правилу Лопиталя и учитывая, что  $d\Psi(0)/dy = 0$ , получаем

$$\Psi'''(0) + \Psi'''(0)/2 + \Psi'''(0) = 0. \quad (22)$$

Отсюда будем иметь следующее дополнительное граничное условие

$$\Psi'''(0) = 0. \quad (23)$$

Подставляя (16) в основные (14), (15) и дополнительные (17), (18), (20), (23) граничные условия, относительно неизвестных  $b_i (i = \overline{0,5})$  получаем систему алгебраических линейных уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} & (b_1 + 2b_2\xi + 3b_3\xi^2 + 4b_4\xi^3 + 5b_5\xi^4)_{\xi=0} = 0; \\ & (b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3 + b_4\xi^4 + b_5\xi^5)_{\xi=1} = 0; \\ & (b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3 + b_4\xi^4 + b_5\xi^5)_{\xi=0} = 1; \\ & (2b_2 + 6b_3\xi + 12b_4\xi^2 + 20b_5\xi^3)_{\xi=1} = 0; \\ & (2b_2 + 6b_3\xi + 12b_4\xi^2 + 20b_5\xi^3)_{\xi=0} = -v/2; \\ & (6b_3 + 24b_4\xi + 60b_5\xi^2)_{\xi=0} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Анализ системы уравнений (24) показывает, что первое, третье, пятое и шестое уравнения разделяются. Каждое из этих уравнений содержит лишь по одному неизвестному, которые легко определяются и имеют вид  $b_0 = 1$ ;  $b_1 = 0$ ;  $b_2 = -v/4$ ;  $b_3 = 0$ . Оставшиеся коэффициенты находятся из решения системы двух алгебраических линейных уравнений, составленных для точки  $\xi = 1$  (второе и четвертое уравнение системы (24)). Формулы для них будут  $b_4 = 7v/12 - 25/9$ ;  $b_5 = 16/9 - v/3$ .

Анализируя полученные результаты, отмечаем, что все коэффициенты с нечетными номерами равны нулю. Причем, эти коэффициенты находятся из дополнительных граничных условий, составленных из нечетных производных

от функции  $\Psi(y)$ . Следовательно, координатную функцию в соотношении (16) можно представить в виде, включающем лишь четные степени  $N_i(y) = y^{2i}$ , а дополнительные граничные условия с нечетными производными функции  $\Psi(y)$  далее не рассматривать.

Соотношение (16) с учетом найденных значений коэффициентов  $b_i$  ( $i = 0, 5$ ) принимает вид

$$\Psi(y) = 1 - \frac{\nu}{4}\xi^2 + \left(\frac{7}{12}\nu - \frac{25}{9}\right)\xi^4 - \left(\frac{\nu}{3} + \frac{16}{9}\right)\xi^5. \quad (25)$$

Потребуем, чтобы соотношение (25) удовлетворяло не исходному уравнению (12), а некоторому осредненному уравнению (интегралу теплового баланса). Для этого определим интеграл от уравнения (12) в пределах от  $y = 0$  до  $y = 1$ , т. е.

$$\int_0^1 \left[ \frac{\partial^2 \Psi(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \Psi(y)}{\partial y} + \nu(1 - y^2)\Psi(y) \right] dy = 0. \quad (26)$$

Подставляя (25) в (26), после определения интегралов относительно собственных чисел  $\nu_k$  получим следующее характеристическое уравнение

$$43\nu^2 / 6048 - 1621\nu / 4536 + 20/9 = 0. \quad (27)$$

Корни этого уравнения являются собственными числами краевой задачи Штурма - Лиувилля (12), (14), (15)

$$\nu_1 = 7,269858; \quad \nu_2 = 42,99371.$$

Точные их значения [3]

$$\nu_1 = 7,3135868; \quad \nu_2 = 44,609460.$$

Для уточнения собственных чисел потребуем ортогональности невязки уравнения (12) к собственной функции (25), т. е.

$$\int_0^1 \left[ \frac{\partial^2 \Psi(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \Psi(y)}{\partial y} + \nu(1 - y^2)\Psi(y) \right] \Psi(y) dy = 0. \quad (28)$$

Характеристическое уравнение относительно собственных чисел в данном случае будет

$$\frac{4057\nu^3}{17297280} - \frac{21419\nu^2}{1297296} + \frac{289595\nu}{972972} - \frac{1010}{729} = 0. \quad (29)$$

Его корни

$$\nu_1 = 7,313761; \quad \nu_2 = 45,218722.$$

Анализ полученных результатов позволяет заключить, что требование ортогональности невязки уравнения (12) к собственной функции (25) позволяет существенно повысить точность определения собственных чисел.

Подставляя (13), (25) в (10), для каждого собственного числа получаем частные решения вида

$$\Theta(y, x) = A_k \exp(-\nu_k x) \sum_{i=0}^5 b_i(\nu_k) y^i. \quad (k = 1, 2) \quad (30)$$

Каждое частное решение вида (30) точно удовлетворяет граничным условиям (8), (9). Однако ни одно из них, в том числе и их сумма

$$\Theta(y, x) = \sum_{k=1}^l A_k \exp(-v_k x) \sum_{i=0}^n b_i(v_k) y^{2i}, \quad (31)$$

не удовлетворяют граничному условию (7) ( $n = 5, l = 2$ ).

Для выполнения граничного условия (7) составляется его невязка и требуется ортогональность невязки к каждой собственной функции, т.е.

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^2 \left[ A_k \exp(-v_k x) \sum_{i=0}^5 b_i(v_k) y^{2i} - 1 \right]_{x=0} \Psi_j(v_j, y) dy = 0. \quad (j = 1, 2) \quad (32)$$

Определяя интегралы в (32), для нахождения неизвестных коэффициентов  $A_k$  ( $k = 1, 2$ ) будем иметь следующую систему двух алгебраических линейных уравнений.

$$\left. \begin{aligned} 0,438686A_1 + 0,031909A_2 &= 0,578438; \\ 0,03191A_1 + 0,537187A_2 &= -0,2310002. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Ее решение  $A_1 = 1,3557$ ;  $A_2 = -0,5105$ .

Результаты расчетов по формуле (31) в сравнении с точным решением [3] даны на рис. 2. Их анализ позволяет заключить, что в диапазоне  $0,1 \leq x \leq \infty$  полученное решение практически совпадают с точным. Для  $x \leq 0,1$  наблюдается их существенное отклонение.

Для повышения точности необходимо увеличивать число членов ряда (16). Возникающие при этом неизвестные коэффициенты  $b_i$  могут быть найдены из дополнительных граничных условий. Для их определения необходимо многократно дифференцировать уравнение (12) по переменной  $y$  и после каждого дифференцирования применять полученное соотношение к точке  $y = 0$ . После раскрытия неопределенностей по правилу Лопиталья будем получать следующий набор дополнительных граничных условий:

$$\begin{aligned} \Psi^{IV}(0) &= 3v(v+4)/8; & \Psi^{VI}(0) &= 5v^2(v+20)/16; \\ \Psi^{VIII}(0) &= 35v^2(v^2+56v+144)/128; \dots \end{aligned} \quad (34)$$

Подставляя 16 (ограничиваясь 60 членами ряда) в основные (14), (15) и в дополнительные граничные условия вида (34) относительно неизвестных  $a_i$  получаем 60 алгебраических линейных уравнений. Из них 58 уравнений разделяются и легко находятся 58 неизвестных коэффициентов  $a_i$  ( $i = \overline{0, 58}$ ). Оставшиеся два неизвестных коэффициента находятся из решения системы двух алгебраических уравнений.

Первые девять собственных чисел в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} v_1 &= 7,3136; & v_2 &= 44,6095; & v_3 &= 113,9210; & v_4 &= 215,2405; & v_5 &= 348,5641; \\ v_6 &= 513,8901; & v_7 &= 711,2175; & v_8 &= 940,6955; & v_9 &= 1095,839. \end{aligned}$$

Точные значения собственных чисел

$$\nu_1 = 7,3136; \quad \nu_2 = 44,6095; \quad \nu_3 = 113,9210; \quad \nu_4 = 215,2405; \quad \nu_5 = 348,5641; \\ \nu_6 = 513,8900; \quad \nu_7 = 711,2175; \quad \nu_8 = 940,54604; \quad \nu_9 = 1201,8754.$$

Результаты расчетов по формуле (31) (в девятом приближении) в сравнении с точным решением [3] представлены на рис. 2. Анализ полученных результатов позволяет заключить, что в диапазоне  $0,025 \leq x < \infty$ , полученное решение отличается от точного не более чем на 1,5%.

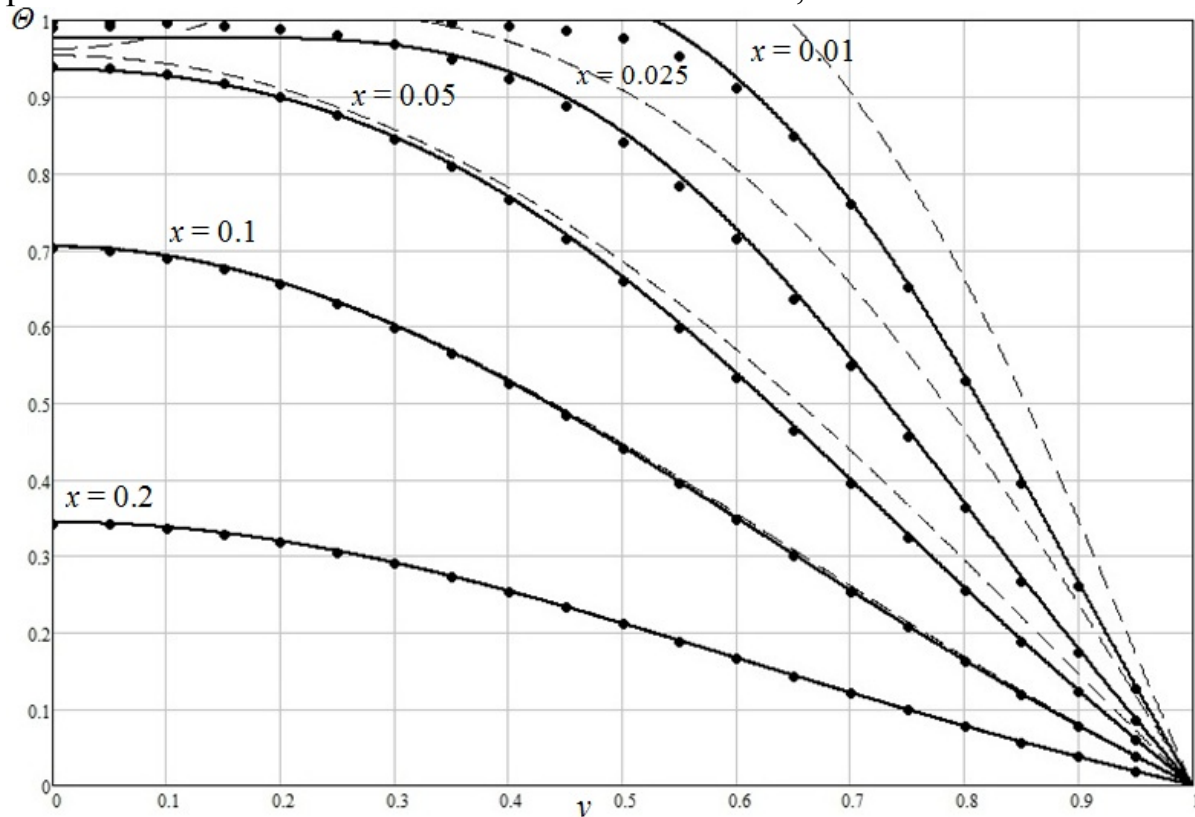


Рис. 2. Графики изменения температуры в пластине

— — — — — расчет по формуле (31) (девятое приближение);  
 — — — — — расчет по формуле (31) (второе приближение); ● - точное решение

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Graetz, L. *Über Wärmeleitfähigkeit von Flüssigkeiten* / L. Graetz. – Physik, 1858. – Bd. 25.5. – P. 337-357.
2. Nusselt W., *Zs. VDI*. 1910, Bd 54. – P. 1154 – 1158.
3. Петухов, Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкостей в трубах / Б. С. Петухов. – М.: Энергия, 1967. – 412 с.
4. Цой, П. В. Методы расчета задач тепломассопереноса / П. В. Цой. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 414 с.
5. Кудинов, В. А. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций / А. В. Кудинов, М. Э. Карташов, В. В. Калашников. – М.: Высшая школа, 2005. – 430 с.

**L. I. Karandzhulov** (Sofia, Bulgaria)

## FREDHOLM BOUNDARY-VALUE PROBLEMS ON TIME SCALES

*We consider linear and nonlinear (of Fredholm type) boundary value problems (BVP) for a systems of ordinary differential equations on different time scales. By using the Leray-Schauder theorem, we establish conditions for the existence of solutions of the BVP.*

### 1. Introduction

In the paper, we consider the existence of solutions to two systems on time scales:

$$x^\Delta = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in [a, b]_T, \quad (1)$$

$$x^\Delta = A(t)x(t) + f(t, x(t)), \quad t \in [a, b]_T, \quad (2)$$

subject to the boundary condition

$$l(x) = v \in \mathbb{R}^m, \quad (3)$$

where  $T$  (time scale) is an arbitrary nonempty closed subset of the set  $\mathbb{R}$ . Denote the time scale interval by  $[a, b]_T = [a, b] \cap T$ . The problems (1), (3) and (2), (3) is known as an boundary value problems (BVP) on time scales.

We consider the problem (1), (3) (or (2), (3)) in the class rd-continuously and regressive functions (see Definition 2.3 in section 2). Then the domain  $D(L)$  of the operator

$$(Lx)(t) = x^\Delta - A(t)x(t) - f(t) \quad (\text{or } (Lx)(t) = x^\Delta - A(t)x(t) - f(t, x(t)))$$

consists of a rd-continuously and regressive in  $[a, b]_T$  functions, satisfying the boundary condition (3).

Let the equation (1) (or (2)) is solvable for arbitrary  $f: [a, b]_T \rightarrow \mathbb{R}^n$  (or  $f: [a, b]_T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ). Then (see, for example, [7]) operator  $L$  is equal to the dimension  $n$  of the system (1) (or (2)) and the BVP (1), (3) (or (2), (3)) is Fredholm problem with index  $n - m$ :  $\text{ind}[L, l] = n - m$ . If  $m \neq n$ , the BVP is called Fredholm type with index no equal zero and Fredholm type with index equal zero, if  $m = n$ . We shall consider the case  $m \neq n$  in sections 3 and 5. Some aspects of theory of the type  $m = n$  were studied earlier, for instance [2], [19] and references therein.

### 2. Preliminaries on time scales

The time scales calculus was first introduced of S. Hilger (see [9] and [8]) and is being applied to many different fields in which dynamic processes can be described with discrete or continuous models [5, 4, 1, 6, 11, 14, 18].

The standard cases of continuous time  $T = \mathbb{R}$  and discrete time  $T = \mathbb{Z}$  many different models are used.

We give here basic definitions and facts concerning the calculus on time scales. For more information see the books [5, 6] and [9].

For each time scale  $T$  the following operators are used:

- the forward jump operator  $\sigma : T \rightarrow T$  by  $\sigma(t) := \inf \{s \in T : s > t\}$ ;
- the backward jump operator  $\rho : T \rightarrow T$  by  $\rho(t) := \sup \{s \in T : s < t\}$ ;
- the graininess function  $\mu : T \rightarrow [0, +\infty)$  by  $\mu(t) := \sigma(t) - t$ .

For example: if  $T = \mathbb{R}$ , then for any  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma(t) = t = \rho(t)$  and graininess function  $\mu(t) \equiv 0$ ; if  $T = \mathbb{Z}$ , then for every  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $\sigma(t) = t + 1$ ,  $\rho(t) = t - 1$  and  $\mu(t) \equiv 1$ .

A point  $t \in T$  is right scattered if  $\sigma(t) > t$  and right dense if  $\sigma(t) = t$ . A point  $t \in T$  is left scattered if  $\rho(t) < t$  and left dense if  $\rho(t) = t$ . If  $t$  is both left scattered and right scattered, we say  $t$  is isolated. If  $t$  is both left dense and right dense, we say that  $t$  is dense. If  $\sup T$  is finite and left-scattered, we define the set  $T^k := T \setminus \{\sup T\}$ . Otherwise,  $T^k := T$ . If  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  is a function, then the composition  $f \circ \sigma = f(\sigma(t))$  is often denoted by  $f^\sigma(t)$ .

**Definition 1.** Let  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  and fix  $t \in T^k$ . Delta derivative of  $f$  at  $t$ , denoted by  $f^\Delta(t)$ , is the number (if it exists) with the property that given  $\varepsilon > 0$  there is neighborhood  $U$  of  $t$  such that

$$|(f(\sigma(t)) - f(s)) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

for all  $s \in U$ .

**Definition 2.** If  $G^\Delta(t) = f(t)$ , then for all  $a, b \in T$  define the definite integral of  $f(t)$  by

$$\int_a^b f(s) \Delta s = G(b) - G(a).$$

If  $T = \mathbb{R}$ , then  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is delta differentiable at  $t \in \mathbb{Z}$  if and only if

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t).$$

If  $T = \mathbb{Z}$ , then  $f : \mathbb{Z} \rightarrow T$  is delta differentiable at  $t$  and

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = f(t + 1) - f(t) = \Delta f(t).$$

If  $T = \mathbb{R}$ , then  $\int_a^b f(s) \Delta s = \int_a^b f(t) dt$ , and if  $T = \mathbb{Z}$ , then  $\int_a^b f(s) \Delta s = \sum_{s=a}^{b-1} f(s)$ . If

$T = h\mathbb{Z}, h > 0$ , then  $\int_a^b f(s) \Delta s = \sum_{s=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(hs)h$  for  $a < b$ .

**Definition 3.** A function  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  is called *rd*-continuous if it is continuous at the right-dense point in  $T$  and its left-hand limits exist (finite) at all left-dense point in  $T$ .

A functions  $f: T \rightarrow \mathbb{R}^n$  is  $rd$ -continuous if all its components are  $rd$ -continuous.

The set of all  $rd$ -continuous functions is denoted  $C_{rd}$ . Similarly,  $C_{rd}^1$  will denote the set of functions from  $C_{rd}$  whose delta derivative belongs to  $C_{rd}$ .

**Definition 4.** A function  $f: T \rightarrow \mathbb{R}$  is called regressive if  $1 + \mu(t)f(t) \neq 0$  for all  $t \in T$ .

Let  $M_n(\mathbb{R})$  be the set of all  $(n \times n)$  constant matrices over  $\mathbb{R}$  and  $M_{mn}(\mathbb{R})$  be the set of all  $(m \times n)$  constant matrices over  $\mathbb{R}$ .

Denoting by  $G^+ \in M_{nm}(\mathbb{R})$  unique pseudoinverse on Moore-Penrose matrix of the matrix  $G \in M_{mn}(\mathbb{R})$ , by  $P_G$  and  $P_{G^*}$  the orthoprojectors

$$P_G: \mathbb{R}^n \rightarrow \ker(G), P_{G^*}: \mathbb{R}^m \rightarrow \ker(G^*), G^* = G^T.$$

For information regarding pseudoinverse and orthoprojectors, see [13, 15, 16, 17, 7].

Having in mind that  $\text{rank}(G) = r < \min(m, n)$ , so  $\text{rank}(P_G) = n - r = p$  and  $\text{rank}(P_{G^*}) = m - r = q$ . Then  $(n \times n)$ -matrix  $P_G$  and  $(m \times m)$ -matrix  $P_{G^*}$  contain  $p$  linear independent columns and  $q$  linear independent rows, respectively. We make such matrix and mark by  $P_{G_p}$  and  $P_{G_q^*}$ .

### 3. A linear systems

We denote  $C[a, b]_T$  the space of continuous functions  $f: [a, b]_T \rightarrow \mathbb{R}^n$  and  $C^1[a, b]_T$  the space of continuous maps on  $T$  with continuous  $\Delta$ -derivative on  $T^k$ . We denote the Banach space  $B[a, b]_T$  of functions  $f \in C[a, b]$  with norm  $\|f\| = \sup_{t \in [a, b]_T} \|f(t)\|$ . If  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , as norm of the vector  $\alpha$  we understand is  $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$ , but as norm of the matrix  $A = (a_{ij})$  we understand  $\|A\| = \max_j \|a_{ij}\|$ . If  $A = (a_{ij}(t))$ , as norm at the matrix  $A(t)$  we understand  $\|A(t)\| = \sup_j \|a_{ij}(t)\|$ .

We begin by considering the linear BVP (1), (3)

$$x^\Delta = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in [a, b]_T, \quad (4)$$

$$l(x) = v \in \mathbb{R}^m, \quad (5)$$

where  $A(t) = (a_{ij}(t))$  is  $(n \times n)$   $rd$ -continuous and regressive matrix,  $f: [a, b]_T \rightarrow \mathbb{R}^n$  is  $rd$ -continuous and the operator  $l$  is bounded linear vector functional operating from the space  $B[a, b]_T$  in  $\mathbb{R}^m$ .

Let  $\Phi(t)$  is the normal fundamental matrix of the linear system  $x^\Delta = A(t)x$  and  $\Phi_A(t, a) = \Phi(t)\Phi^{-1}(a)$  is corresponding Cauchy matrix (see [9], [11], [5]). Let us introduce the  $(m \times n)$  characteristic matrix for the BVP (4), (5)

$$Q = l(\Phi_A(\cdot, a)) \in M_{mn}(\mathbb{R}).$$

Depending on the form on the linear functional  $l$  at arbitrary time scales we get different BVP and different a characteristic matrix  $Q$ , respectively. For example: if we have two point BVP  $l(x) \equiv Mx(a) + Nx(\sigma(b))$ , where  $M, N \in M_{mn}(\mathbb{R})$ , then  $Q = M + N\Phi_A(\sigma(b), a)$ ; at multi point BVP  $l(x) \equiv \sum_{i=1}^s N_i x(t_i)$ , where  $N_i \in M_{mn}(\mathbb{R}), i = \overline{1, s}$  and  $a = t_1 < t_2 < \dots < t_{s-1} < t_s = b$ , the matrix  $Q$  has the form  $Q = \sum_{i=1}^s N_i \Phi_A(t_i, a)$ ; if  $l(x) \equiv Mx(a) + \int_a^{\sigma(b)} Nx(s)\Delta s$ , then  $Q = M + \int_a^{\sigma(b)} N\Phi_A(s, a)\Delta s$  and so on.

Every above-mentioned cases present separate interest.

A solution to (4, 5) is a function  $x \in C^1[a, b]_T$  that satisfies the system (4) for each and also satisfies the condition (5).

**Theorem 5.** Let  $A(t)$  is  $rd$ -continuous and regressive  $(n \times n)$  matrix,  $f: [a, b]_T \rightarrow \mathbb{R}^n$  is  $rd$ -continuous and the operator  $l$  is bounded linear vector functional  $l \in (B[a, b]_T, \mathbb{R}^m)$ . Assume the condition  $\text{rank } Q = r < \min(m, n)$  holds. Then exist a parametric solution of the BVP (4), (5) if is fulfilled the condition

$$P_{Q_q^*} \bar{h} = 0, \quad q = m - r, \quad (6)$$

$$\text{where } \bar{h} = h - l\left(\int_a^{(\cdot)} \Phi_A((\cdot), \sigma(s))f(s)\Delta s\right), \quad P_{Q_q^*}: \mathbb{R}^m \rightarrow \ker(Q^*), \quad P_{Q_q^*} \in M_{q, m}(\mathbb{R}).$$

This solution has the form

$$x(t) = \Phi_A(t, a)P_{Q_p} \eta + \bar{x}(t), \quad p = n - r, \quad (7)$$

$$\text{where } \bar{x}(t) = \Phi_A(t, a)Q^+ \bar{h} + \int_a^t \Phi_A(t, \sigma(s))f(s)\Delta s, \quad P_Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \ker(Q), \quad P_{Q_p} \in M_{n, p}(\mathbb{R}),$$

and  $\eta \in \mathbb{R}^p$  is arbitrary constant.

**Proof.** Any solution  $x(t)$  of (4) has the form

$$x(t) = \Phi_A(t, a)c + \int_a^t \Phi_A(t, \sigma(s))f(s)\Delta s, \quad c \in \mathbb{R}^n. \quad (8)$$

Substituting the general form (8) of  $x(t)$  in the boundary condition (5) we get,

$$l(\Phi_A((\cdot), a))c + l\left(\int_a^{(\cdot)} \Phi_A((\cdot), \sigma(s))f(s)\Delta s\right) = h$$

or

$$Qc = \bar{h}, \quad (9)$$



where  $Q$  and  $\bar{h}$  higher up introduced. But  $\text{rank } Q = r < \min(m, n)$ . Then the system (9) has parametric solution

$$c = P_{Q^*} \eta + Q^+ \bar{h}, \eta \in R^p \quad (10)$$

if  $\bar{h}$  satisfy the equation (6). We substitute (10) in (8) and we get the equality (7).

**Corollary 6.** If  $\text{rank } Q = m$ , ( $m < n$ ), the BVP (4), (5) has parametric solution in the form (7) at  $p = n - m$ .

**Proof.** In the case  $P_{Q^*} \equiv 0$  and the system (9) is always solvable.

**Corollary 7.** If  $\text{rank } Q = n = m$ , then the BVP (4), (5) has unique solution

$$x(t) = \Phi_A(t, a) Q^{-1} \bar{h} + \int_a^t \Phi_A(t, \sigma(s)) f(s) \Delta s. \quad (11)$$

**Proof.** In the case  $Q \in M_n(R)$ ,  $\det Q \neq 0$  and  $Q^+ = Q^{-1}$ . Then the system (9) has unique solution  $c = Q^{-1} \bar{h}$ .

**Corollary 8.** If  $\text{rank } Q = n$ , ( $n < m$ ), the BVP (4), (5) has unique solution  $x(t) = \bar{x}(t)$ , if condition (6) hold at  $q = m - n$ .

**Proof.** In the case  $P_Q \equiv 0$ .

#### 4. Examples

**Example 9.** Consider the following BVP in  $T = h\mathbb{Z}$ ,  $h < 1/2$

$$x^\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, t \in [a, b]_T, a, b \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

subject to the boundary condition

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(a) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(\sigma(b)) = v. \quad (13)$$

The BVP (12), (13) has an one-parametric solution.

**Proof.** In the case  $\sigma(t) = t + h$  and  $\Phi_A(t, s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-2h)^{\frac{t-s}{h}} \end{pmatrix}$ .

Let  $a = 0$ ,  $b = nh$ ,  $n \in N$ ,  $\sigma(b) = (n+1)h$  and  $v = (1-2h)^n h^2 \sum_{k=0}^n k(1-2h)^{-k}$ . Then in (9)  $Q = \begin{pmatrix} 1 & (1-2h)^{n+1} \end{pmatrix}$  and  $\bar{h} = 0$ . We calculate

$$Q^+ = \frac{1}{1 + (1-2h)^{2(n+1)}} \begin{pmatrix} 1 \\ (1-2h)^{n+1} \end{pmatrix}.$$

As  $n = 2$ ,  $m = 1$ ,  $r = \text{rank } Q = 1$ , then  $\text{rank } P_Q = 1$ ,  $\text{rank } P_{Q^*} = 0$  ( $P_{Q^*} = 0$ ) and

$$P_{Q_1} = \frac{1}{1 + (1-2h)^{2(n+1)}} \begin{pmatrix} -(1-2h)^{n+1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

The condition  $P_{Q^*} \bar{h} = 0$  is fulfilled and the equation (9) has the solution  $c = P_{Q_1} \eta$ ,  $\eta \in R$ . We will use Corollary 6. We have

$$x(t) = \frac{1}{1 + (1-2h)^{2(n+1)}} \begin{pmatrix} -(1-2h)^{n+1} \\ (1-2h)^{\frac{t}{h}} \end{pmatrix} \eta + \begin{pmatrix} 0 \\ (1-2h)^{\frac{t-1}{h}} h^2 \sum_{k=0}^{\frac{t-1}{h}} k(1-2h)^{-k} \end{pmatrix}.$$

**Example 10.** Again we consider the differential system

$$x^\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [2, 6]_T,$$

with time scales defined by [19]

$$T := [2, 3] \cup 4 \cup [5, 6]$$

and boundary conditions

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & -e^4 \end{pmatrix} x(2) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x(6) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^{-4} - \frac{11}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Thus we examine a hybrid problem. Here

$$x^\Delta(t) = \begin{cases} x'(t), & t \in [2, 3] \cup [5, 6], \\ \Delta x(t), & t \in 3, 4 \end{cases}$$

and

$$\sigma(t) = \begin{cases} t, & t \in [2, 3] \cup [5, 6], \\ t+1, & t \in 3, 4 \end{cases}$$

In the case  $Q = \begin{pmatrix} 1 & e^{-4} \\ 0 & e^{-4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  and  $\text{rank } Q = 2$ ,  $P_Q = 0$ ,  $P_{Q^*} \bar{h} = 0$ , i. e. the system (9) has a

unique solution  $c = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{-4} - 11 \\ 3 - 11e^4 \end{pmatrix}$ . The BVP has unique solution

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{4} (3e^{-4} - 112t - 1 - 11e^{-2t+8}), & t \in [2, 3], \\ x_2(t) = \frac{1}{4} \left( 3e^{-4} - 11(-1)^{t-1} [-11e + 5 + 4 \sum_{k=3}^{t-1} k(-1)^{-k}] \right), & t \in \{3, 4\}, \\ x_3(t) = \frac{1}{4} (3e^{-4} - 112t - 1 - 11e^{-2t+12}), & t \in [5, 6]. \end{cases}$$

## 5. Nonlinear BVP with linear part

In the section we consider the BVP

$$x^\Delta = A(t)x(t) + \mu f(t, x(t)), \quad t \in [a, b]_T, \quad \mu \in [0, 1), \quad (14)$$

$$l(x) = h \in \mathbb{R}^m. \quad (15)$$

**Lemma 11.** Let  $A: [a, b]_T \rightarrow B(\mathbb{R}^n)$  is  $rd$ -continuous and regressive  $n \times n$  matrix,  $f: [a, b]_T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  is  $rd$ -continuous and  $l$  is linear bounded vector functional  $l \in (B[a, b]_T, \mathbb{R}^m)$ . Assume the condition  $\text{rank } Q = r < \min(m, n)$ ,  $Q = l(\Phi_A(\cdot, a))$  is holds. If  $x \in C([a, b]_T, \mathbb{R}^n)$ ,  $x(t)$  is solutions of the system (14), (15), and  $P_{Q^*} \tilde{h}(x(s)) = 0$ , then the solution  $x(t)$  satisfy the integral equation

$$x(t) = \Phi_A(t, a) P_Q \eta + \Phi_A(t, a) Q^+ \tilde{h}(x(s)) + \int_a^t \Phi_A(t, \sigma(s)) \mu f(s, x(s)) \Delta s, \quad (16)$$

where

$$\tilde{h}(x(s)) = h - l \left( \int_a^{(\cdot)} \Phi_A(\cdot, \sigma(s)) \mu f(s, x(s)) \Delta s \right), \quad (17)$$

and  $\eta \in \mathbb{R}^n$  is arbitrary constant vector.

**Proof.** We apply the equation (8) for the system (14)

$$x(t) = \Phi_A(t, a) c + \int_a^t \Phi_A(t, \sigma(s)) \mu f(s, x(s)) \Delta s, \quad c \in \mathbb{R}^n \quad (18)$$

and we replace in (15)

$$l(\Phi_A(\cdot, a)) c + l \left( \int_a^{(\cdot)} \Phi_A(\cdot, \sigma(s)) \mu f(s, x(s)) \Delta s \right) = h.$$

We obtain the algebraic system

$$Qc = \tilde{h}(x(s)), \quad (19)$$

where  $\tilde{h}(x(s))$  has the form (17). The system (19) has the solution

$$c = P_Q \eta + Q^+ \tilde{h}(x(s)), \quad \eta \in \mathbb{R}^n \quad (20)$$

if and only if

$$P_{Q^*} \tilde{h}(x(s)) = 0 \quad \forall s \in [a, \sigma(b)]_T. \quad (21)$$

We substitute (20) in (18) and at  $t \in [a, \sigma(b)]_T$  we obtains the equation (16).  $\triangleleft$

**Remark 12.** The equation (16) and the condition (21) show that if  $x = x(t, \eta)$  is solution of the system (14), (15) at certain  $\eta = \eta^*$ , then  $\eta^*$  satisfy the equation  $P_{Q^*} \tilde{h}(x(s, \eta^*)) = 0$ , where  $\tilde{h}(x(s, \eta))$  be obtained from (17).

We will formulate the theorem of Lere-Schauder [3, 12, 20] a fixed point that we will use in this paper.

**Theorem 13.** (Lere-Schauder)[20, p. 417] Let the operator  $T$  map the Banach space  $X$  in  $X$  and is completely continues. Let for all solution of the equation with a parameter  $\lambda \in [0,1]$

$$x = \lambda T(x) \quad (22)$$

a priori estimate holds: there exists a constant  $c > 0$  such that for all  $\lambda \in [0,1]$  and for all  $x$ , satisfying (22), performed the inequality  $\|x\| \leq c$ . Then the equation  $x = T(x)$  has a solution.

Consider the map  $T : B[a, \sigma(b)]_T \rightarrow B[a, \sigma(b)]_T$  defined by equality

$$T(x(t, \eta)) = \Phi_A(t, a)P_Q\eta + \Phi_A(t, a)Q^+\tilde{h}(x(s, \eta)) + \int_a^t \Phi_A(t, \sigma(s))\mu f(s, x(s, \eta))\Delta s \quad (23)$$

for all  $t \in [a, \sigma(b)]_T$  and fixed  $\eta \in \mathbb{R}^n$ . Thus the problem of the existence of a solution of (14), (15) is reduced to proving the existence of at least one  $x(t, \eta)$  such that

$$x(t, \eta) = \lambda T(x(t, \eta)). \quad (24)$$

**Theorem 14.** Let  $A : [a, b]_T \rightarrow B(\mathbb{R}^n)$  is  $rd$ -continuous and regressive  $n \times n$  matrix, the function  $f : [a, b]_T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  is  $rd$ -continuous and  $l$  is linear bounded vector functional  $l \in (B[a, b]_T, \mathbb{R}^m)$ . Assume that  $\sup \|\Phi_A\| < \infty$  holds and  $\text{rank } Q = r < \min(m, n)$ . Suppose the following conditions are satisfied:

$C_1$ ) there exist a nondecreasing function  $d : [a, \sigma(b)]_T \rightarrow [0, \infty)$  and  $K_1 > 0$  such that  $\|\Phi_A(t, \sigma(s))\| \leq K_1 d(s)$  for  $t \in [a, \sigma(b)]_T$ . In particular, there is  $K_2 > 0$  such that  $\|\Phi_A(t, a)\| \leq K_2$  for  $t \in [a, \sigma(b)]_T$ . Let  $\sup_t \int_a^t d(s)\Delta s = K_3 < \infty$  for  $t \in [a, \sigma(b)]_T$ ;

$C_2$ )  $\sup_t \|l(\varphi)\| \leq \|l\| \sup_t \|\varphi(t)\|$ ,  $t \in [a, \sigma(b)]_T$ ;

$C_3$ ) there exist a nondecreasing function  $\psi : [a, \sigma(b)]_T \rightarrow [a, \sigma(b)]_T$  with  $\|f(s, x(s, \eta))\| \leq r(s)\psi(\|x(s, \eta)\|) + q(s)$  for  $\eta \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in B[a, \sigma(b)]_T$ , and  $s \in [a, \sigma(b)]_T$ ;

$C_4$ )  $\sup_t \int_a^t \|\Phi_A(t, \sigma(s))\| r(s)\Delta s = W < \infty$  for  $t \in [a, \sigma(b)]_T$ ;

$C_5$ )  $\sup_t \int_a^t \|\Phi_A(t, \sigma(s))\| q(s)\Delta s = P < \infty$  for  $t \in [a, \sigma(b)]_T$ ;

$C_6$ )  $\mu_0 > 0$  and  $\eta \in \mathbb{R}^n$  satisfies the inequality

$$\sup_{x \in (0, \infty)} \left( \frac{x}{E\|\eta\| + E_0\mu_0\psi(x) + E_1\mu_0 + E_2} \right) > 1,$$

where

$$E = K_2 \|P_Q\|, E_0 = W + WK_2 \|Q^+\| \|l\|, E_1 = P + PK_2 \|Q^+\| \|l\|, E_2 = K_2 \|Q^+\| \|h\|.$$

Then for every  $\lambda$  the equation (24) has a solution in  $B[a, \sigma(b)]_T$ , where  $T$  is operator from (23),  $\tilde{h}(x(s))$  from (17).

**Proof.** Fix  $\mu < \mu_0$ . Let  $M_0 > 0$  satisfy

$$\frac{M_0}{E \| \eta \| + E_0 \mu_0 \psi(x) + E_1 \mu_0 + E_2} > 1. \quad (25)$$

We want to show that the operator  $T(x(t, \eta))$  is completely continuous in  $B[a, \sigma(b)]_T$  for some  $\eta \in \mathbb{R}^n$ , i.e. in  $B[a, \sigma(b)]_T$  it is continuous and represents any bounded subset of  $B[a, \sigma(b)]_T$  in a compact subset also of  $B[a, \sigma(b)]_T$ .

For the sake of convenience, we break the proof into several steps.

**Step1.** We will show that  $T(x(t, \eta))$  is continuous operator. To see this  $\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in B[a, \sigma(b)]_T$ . Then from (23) and (17) for  $t \in [a, \sigma(b)]_T$  and every  $\eta \in \mathbb{R}^n$  we get

$$\begin{aligned} \|T(\bar{x}(t, \eta)) - T(\bar{\bar{x}}(t, \eta))\| &= \sup_t \left\| \Phi_A(t, a) Q^+ \left[ \tilde{h}(\bar{x}(s, \eta)) - \tilde{h}(\bar{\bar{x}}(s, \eta)) \right] + \right. \\ &\quad \left. \int_a^t \Phi_A(t, \sigma(s)) \mu \left[ f(s, \bar{x}(s, \eta)) - f(s, \bar{\bar{x}}(s, \eta)) \right] \Delta s \right\| = \\ &\quad \sup_t \left\| \Phi_A(t, a) Q^+ l \left( \int_a^{(\cdot)} \Phi_A(\cdot, \sigma(s)) \mu \left[ f(s, \bar{x}(s, \eta)) - f(s, \bar{\bar{x}}(s, \eta)) \right] \Delta s \right) + \right. \\ &\quad \left. \int_a^t \Phi_A(t, \sigma(s)) \mu \left[ f(s, \bar{x}(s, \eta)) - f(s, \bar{\bar{x}}(s, \eta)) \right] \Delta s \right\|. \end{aligned}$$

Keep in mind the conditions  $C_1)$  and  $C_2)$  and if denote  $\sup_t \|f(s, \bar{x}(s, \eta)) - f(s, \bar{\bar{x}}(s, \eta))\| = \rho$ , we obtained

$$\begin{aligned} \|T(\bar{x}(t, \eta)) - T(\bar{\bar{x}}(t, \eta))\| &\leq \sup_t \left\| \Phi_A(t, a) \|Q^+\| \|l\| \mu \times \right. \\ &\quad \left. \sup_t \left\| \int_a^t \Phi_A(t, \sigma(s)) \left[ f(s, \bar{x}(s, \eta)) - f(s, \bar{\bar{x}}(s, \eta)) \right] \Delta s \right\| + \right. \\ &\quad \left. \mu \sup_t \left\| \int_a^t \Phi_A(t, \sigma(s)) \|f(s, \bar{x}(s, \eta)) - f(s, \bar{\bar{x}}(s, \eta))\| \Delta s \right\| \leq \left[ K_2 \|Q^+\| \|l\| \mu K_1 K_3 + \mu K_1 K_3 \right] \rho. \end{aligned}$$

From the continuity of  $f(t, x(t, \eta))$  for  $t \in [a, \sigma(b)]_T$  and  $\eta \in \mathbb{R}^n$  is fulfilled  $\rho \rightarrow 0$  for  $\|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\| \rightarrow 0$ . Then

$$\|T(\bar{x}(t, \eta)) - T(\bar{\bar{x}}(t, \eta))\|_{B[a, \sigma(b)]_T} \rightarrow 0,$$

i.e.  $T(x(t, \eta))$  is continuous operator for  $\|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\| \rightarrow 0$ .

**Step 2.** Next we show that  $T(x(t, \eta))$  represents any bounded subset of  $B[a, \sigma(b)]_T$  in a compact subset also of  $B[a, \sigma(b)]_T$ . To be a set of functions compact, according to the Arzelà-Ascoli theorem [20], is necessary and sufficient the functions of this set are uniformly bounded and equicontinuous.

Let  $\Omega$  is a bounded subset of  $B[a, \sigma(b)]_T$ . Then every function of  $\Omega$  is bounded, i. e. exists a constant  $r_0 \geq 0$ , so there  $\|\bar{x}\|_{B[a, \sigma(b)]_T} = \|\bar{x}(t, \eta)\| \leq r_0$  for  $\bar{x} \in \Omega$  and  $\eta \in \mathbb{R}^n$  satisfying (25). We will that  $\bar{y} = T(\bar{x}(t, \eta))$  is also bounded, i. e. is satisfied  $\|\bar{y}\| = \|T(\bar{x}(t, \eta))\| \leq r_0$ . Then it follow that the set  $T(x(t, \eta))$  is uniformly bounded. Indeed, for  $t \in [a, \sigma(b)]_T$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^n$  and  $\mu \leq \mu_0$

$$\begin{aligned} \|T(\bar{x}(t, \eta))\|_{B[a, \sigma(b)]_T} &= \|\bar{y}\|_{B[a, \sigma(b)]_T} = \|\bar{y}\| \leq \sup_t \{ \|\Phi_A(t, a)\| \|P_Q\| \|\eta\| + \\ &\|\Phi_A(t, a)\| \|Q^+\| \|\tilde{h}(\bar{x}(s, \eta))\| + \int_a^t \|\Phi_A(t, \sigma(s))\| \mu_0 \|f(s, \bar{x}(s, \eta))\| \Delta s \}. \end{aligned}$$

But the conditions  $C_1) \div C_5)$  show that

$$\begin{aligned} \|\tilde{h}(\bar{x}(s, \eta))\| &\leq \|h\| + \|l\| \sup_t \left\| \int_a^t \Phi_A(t, \sigma(s)) \mu_0 f(s, \bar{x}(s, \eta)) \Delta s \right\| \\ &\leq \|h\| + \|l\| \mu_0 (W\psi(r_0) + P). \end{aligned}$$

Keeping in mind the last estimate and condition  $C_6)$  we get

$$\begin{aligned} \|\bar{y}\| &\leq K_2 \|P_Q\| \|\eta\| + K_2 \|Q^+\| \|h\| + \mu_0 \psi(r_0) (W + WK_2 \|Q^+\| \|l\|) + \\ &\mu_0 (P + PK_2 \|Q^+\| \|l\|) = E \|\eta\| + \mu_0 \psi(r_0) E_0 + \mu_0 E_1 + E_2 \leq \|\bar{x}\| \leq r_0. \end{aligned}$$

**Step 3.** We will show that  $T$  for fixed  $\eta \in \mathbb{R}^n$  is equicontinuous operator. For  $t_1, t_2 \in [a, \sigma(b)]_T$  we have

$$\begin{aligned} \|T(\bar{x}(t_1, \eta)) - T(\bar{x}(t_2, \eta))\| &= \|\bar{y}(t_1) - \bar{y}(t_2)\| \leq \\ &\|\Phi_A(t_1, a) - \Phi_A(t_2, a)\| \|P_Q\| \|\eta\| + \|\Phi_A(t_1, a) - \Phi_A(t_2, a)\| \|Q^+\| \|\tilde{h}(\bar{x}(s, \eta))\| + \\ &\left\| \int_a^{t_1} [\Phi_A(t_1, \sigma(s)) - \Phi_A(t_2, \sigma(s))] \mu f(s, \bar{x}(s, \eta)) \Delta s \right\| + \\ &\left| \int_{t_1}^{t_2} \|\Phi_A(t_2, \sigma(s))\| \mu \|f(s, \bar{x}(s, \eta))\| \Delta s \right|. \end{aligned}$$

Since  $\Phi_A(t, a)$  and  $\Phi_A(t, \sigma(b))$  are continuous at  $t \in [a, \sigma(b)]_T$ . Then for each  $\varepsilon > 0$  exists  $\delta = \delta(\varepsilon)$  so that at  $|t_1 - t_2| < \delta$  are fulfilled the inequality

$$\begin{aligned} \|\Phi_A(t_1, a) - \Phi_A(t_2, a)\| &< \frac{\varepsilon}{4}, \quad \|\Phi_A(t_1, \sigma(b)) - \Phi_A(t_2, \sigma(b))\| \leq \frac{\varepsilon}{4}, \\ \left| \int_{t_1}^{t_2} \|\Phi_A(t_2, \sigma(s))\| \mu \|f(s, \bar{x}(s, \eta))\| \Delta s \right| &\leq \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Consequently

$$\|T(\bar{x}(t_1, \eta)) - T(\bar{x}(t_2, \eta))\| < \varepsilon.$$

So according the Arzela-Ascoli theorem follows that  $T: B[a, \sigma(b)]_T \rightarrow B[a, \sigma(b)]_T$  is completely continuous operator for any  $\eta \in \mathbb{R}^n$ , satisfying (25).

**Step 4.** According to the Lere-Schauder theorem (see theorem 8) is to be consider the equation

$$\bar{x}(t, \eta) = \lambda T(\bar{x}(t, \eta)), \lambda \in [0, 1]$$

for  $\eta \in \mathbb{R}^n$ , satisfying (25).

Let  $\bar{x}(t, \eta) = \lambda T(\bar{x}(t, \eta))$  has a solution in  $B[a, \sigma(b)]_T$  for  $\eta \in \mathbb{R}^n$  and  $\lambda \in [0, 1]$ . We will show that  $\|\bar{x}(t, \eta)_{B[a, \sigma(b)]_T}\|$  nonexceed certain positive constant. Indeed

$$\begin{aligned} \|\bar{x}\| &= \|T(\bar{x}(t, \eta))\| \leq \\ &\leq \|\Phi_A(t, a)\| \|P_Q\| \|\eta\| + \|\Phi_A(t, a)\| \|Q^+\| \|\tilde{h}(\bar{x}(s, \eta))\| + \\ &\quad + \sup_t \int_a^t \|\Phi_A(t, \sigma(s))\| \mu \|f(s, \bar{x}(s, \eta))\| \Delta s \leq \\ &\leq E \|\eta\| + K_2 \|Q^+\| [\|h\| + \|l\| \mu(W\psi(\|\bar{x}\|) + P)] + \mu[W\psi(\|\bar{x}\|) + P] \leq \\ &\leq E \|\eta\| + E_2 + \mu E_1 + \mu E_0 \psi(\|\bar{x}\|) \end{aligned}$$

and so

$$\frac{\|\bar{x}\|}{E \|\eta\| + E_2 + \mu E_1 + \mu E_0 \psi(\|\bar{x}\|)} \leq 1.$$

We obtained the operator  $T$  is completely continuous in accordance with theorem 8. Moreover if  $\bar{x}(t, \eta)$  is solution of the equation  $\bar{x}(t, \eta) = \lambda T(\bar{x}(t, \eta))$  for any  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^n$ , satisfying (25), and if  $\|\bar{x}\| < M_0$ , then the equation  $\bar{x}(t, \eta) = T(\bar{x}(t, \eta))$  or

$$x(t, \eta) = \Phi_A(t, a) P_Q \eta + \Phi_A(t, a) Q^+ \tilde{h}(x(s, \eta)) + \int_a^t \Phi_A(t, \sigma(s)) \mu f(s, x(s, \eta)) \Delta s$$

also has a solution.

So the theorem is proved.  $\triangleleft$

## REFERENCES

1. Agarwal R., Bohner M., Peterson A. (eds.) Advances in Difference Equations. – Hindawi Publishing Corporation. – Vol. 2006.

2. Agarwal R., Bohner M., O'Regan D. Time Scale Systems On Infinite Intervals // *Nonlinear Analysis* 47 (2001). – P. 837-848.
3. Agarwal R., Bohner M., O'Regan D. Fixed Point Theory and Applications // *Gambridge Tracts in Mathematics*. – Cambridge University Press, 2004. – № 141.
4. Atici F. M., Biles D. C., Lebedinsky A. An application of time scales to economics // *Math. Comput. Modeling* 43 (2006). – P. 718 - 726.
5. Bohner M., Peterson A. Dynamic equations on time scales an introduction with applications. – Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.
6. Bohner M. and Peterson A. (eds.) *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*. – Birkhauser Boston, Massachusetts, 2003.
7. Boichuk A., Samoilenko A. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems. – Utrecht-Boston: VSP, 2004.
8. Campbell S. L. and Mayer C. O. Generalized Inverses of Linear Transformations. – Dover Publications, Inc., New York, 1991.
9. Hilger S. Analysis on measure chains - a unified approach to continuous and disrate calculus // *Results Math*, 18, 1990. – P. 18-56.
10. Hilger S. Ein Ma kettenkalkul nit Anmendung ant Zentrumsmannig – faltigkeinten // Ph.D. thesis, Universitat Wurzburg, 1988.
11. Lakshmikanthan V., Sivasundaram S., Kaymakcalan B. Dynamical system on measure chains // *Mathematics and its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
12. Lloyd N. Degree Theory // *Cambridge Tracts in Mathematics*. – Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne, 1978. – №.73.
13. Moore E. Abstracts // *Bull. Amer. Math. Soc.*, 26, 1920. – P. 394-395.
14. Otero D., Giuliani D. and Sassano M. Temporal Dimension and Transition out of Chaos // *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*, 178, 1991. – P. 280-288.
15. Penrose R. On best approximate solution on linear matrix equations // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 52, 1956. – P. 17-19.
16. Penrose R. A generalize inverse for matrices // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 51, 1955. – P. 406-413.
17. Rao C. R. and Mitra S. H.. Generalized Inverses of Matrices and Applications. –New York: Wiley, 1971.
18. Spedding V. Taming Nature's Numbers // *New Scientist*, July 2003. – P. 28-32.
19. Tisdell C. Existence and Uniqueness to Nonlinear Dynamic Boundary Value Problems // *A Mathematical Journal*, December 2006. – Vol. 8, № 3. – P. 11-23.
20. Trenogin V. A. Functional analysis. – Moscow: Science, 1980 (in Russian).



**Л. И. Каранджулов, Н. Д. Сиракова** (г. София, Болгария)

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПОЧТИ РЕГУЛЯРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ <sup>1</sup>

*В работе применяется метод Пуанкаре к почти регулярным нелинейным краевым задачам при общих краевых условиях. Найдено асимптотическое решение поставленной задачи.*

**1. Введение.** Рассмотрим нелинейную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varphi(t) + \varepsilon F(x, t, \varepsilon, f(t, \varepsilon)), \quad t \in [a, b], \quad (1)$$

с краевым условием

$$l(x) = h, \quad (2)$$

где  $A(t)$  – функциональная матрица,  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $\varphi \in \mathbf{R}^n$ ,  $F \in \mathbf{R}^n$ ,  $f \in \mathbf{R}^p$ ,  $\varepsilon \in \mathbf{R}$  – малый параметр,  $l$  – ограниченный векторный функционал, такой что  $l \in (C[a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ .

Коэффициенты задачи (1), (2) удовлетворяют условиям:

**(У1)**  $A(t)$  –  $(n \times n)$ –матрица, где элементами являются непрерывные функции при  $t \in [a, b]$  и  $\varphi(t)$  –  $n$ -мерная вектор-функция из класса  $C([a, b])$ ;

**(У2)**  $n$ -мерная вектор-функция  $F(x, t, \varepsilon, f(t, \varepsilon))$  имеет непрерывные частные производные по всем аргументам до  $(n+2)$ -го порядка в области  $G = D_x \times [a, b] \times [0, \bar{\varepsilon}] \times D_f$ , где  $D_x \subset \mathbf{R}^n$  – окрестность решения  $x^{(0)}(t)$  вырожденной задачи (1), (2) ( $\varepsilon = 0$ )

$$\frac{dx^{(0)}}{dt} = A(t)x^{(0)} + \varphi(t), \quad l(x^{(0)}) = h, \quad t \in [a, b], \quad (3)$$

$D_f \subset \mathbf{R}^p$  – ограниченная и замкнутая область,  $0 < \bar{\varepsilon} \ll 1$ . Функция  $f = f(t, \varepsilon)$  – гладкая в области  $G_1 = [a, b] \times (0, \bar{\varepsilon}]$  и значениях принадлежащих  $D_f$ .

Предполагаем, что в (1) функция  $f(t, \varepsilon)$  сингулярная (например,  $f = f(\exp(-t/\varepsilon), \sin(t/\varepsilon))$ ). Это показывает, что рассматриваем почти регулярную краевую задачу. В [2] рассматриваются почти регулярные задачи Коши.

В работе [3] доказано существование и единственность решения задачи (1), (2) в виде равномерно сходящегося степенного ряда по степеням  $\varepsilon$ . В [3]

Работа выполнена при финансовой поддержке НИС в Софийском техническом университете, договор № 112 пд 029-11.

© Л. И. Каранджулов, Н. Д. Сиракова, 2011

вводится дополнительный параметр и, таким образом, метод Пуанкаре распространяется на класс краевых задач, содержащих сингулярные функции. Результаты из [3] применены в [1] для систем вида (1) с интегральными краевыми условиями. В настоящей работе доказывается асимптотичность решения, полученного в [3].

Если  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , то под нормой вектора понимаем  $\|x\| = \max_{i=1, n} |x_i|$ , а под нормой матрицы  $A = (a_{ij})$  понимаем  $\|A\| = \max_{i=1, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ . Под нормой линейного оператора  $l(\psi)$  понимаем  $\|l(\psi)\| \leq b_1 \|\psi\|$ ,  $b_1 > 0$ .

**2. Вспомогательные результаты.** Вместо краевой задачи (1), (2) рассмотрим задачу с двумя малыми параметрами [2]

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= A(t)z + \varphi(t) + \varepsilon F(z, t, \varepsilon, f(t, \mu)), \quad t \in [a, b], \\ l(z) &= h, \end{aligned} \quad (4)$$

Задача (4) – регулярно возмущенная краевая задача относительно  $\varepsilon$ . Рассматриваем случай, когда в области  $G$  функция  $F$  аналитическая и имеет вид

$$F(z, t, \varepsilon, f(t, \mu)) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t, \mu) z^{k+1} \varepsilon^k, \quad (5)$$

где  $B_k(t, \mu)$  –  $(n \times n)$  – матрицы с непрерывными элементами на множестве  $G_1$ . В [3] решение задачи (3) построено в виде

$$z(t, \varepsilon, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)}(t, \mu) \varepsilon^k. \quad (6)$$

Тогда решение (1), (2) примет вид

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)}(t, \varepsilon) \varepsilon^k. \quad (7)$$

Подставляем (6) в (5) и получаем

$$\begin{aligned} F\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)}(t, \mu) \varepsilon^k, t, \varepsilon, f(t, \mu)\right) &= \\ = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t, \mu, z^{(0)}(t, \mu), \dots, z^{(k)}(t, \mu)) \varepsilon^k &= \sum_{k=0}^{\infty} F^k(t, \mu) \varepsilon^k, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} F^k(t, \mu) &= F_k(t, \mu, z^{(0)}(t, \mu), \dots, z^{(k)}(t, \mu)) = B_0(t, \mu) z^{(k)} + g_k(t, \mu, z^{(0)}, \dots, z^{(k-1)}), \\ k &\geq 0, \quad g_0 \equiv 0. \end{aligned}$$

Пусть  $U(t, s)$  матрица Коши системы  $\dot{z} = A(t)z$ . Тогда решение задачи  $\dot{z} = A(t)z$ ,  $z(a) = \xi$  имеет вид  $z(t) = U(t, a)\xi$ . Введем  $(n \times n)$  – матрицу  $D = l(U(\cdot, a))$ .

**Теорема 1. [3]** Пусть  $\text{rank } D = n$ . На множестве  $G_1$  существуют единственные непрерывно дифференцируемые функции  $z^{(k)}(t, \mu)$ ,  $k \geq 0$ , удовлетворяющие краевой задаче

$$\begin{aligned}\dot{z}^{(0)} &= A(t)z^{(0)} + \varphi(t), \quad l(z^{(0)}) = h, \\ \dot{z}^{(k)} &= A(t)z^{(k)} + F_{k-1}(t, \mu, z^{(0)}, \dots, z^{(k-1)}), \quad l(z^{(k)}) = 0, \quad k \geq 1.\end{aligned}\quad (9)$$

**Теорема 2. [3]** Существует  $\varepsilon^* > 0$  такое, что ряд (6) сходится равномерно на множестве  $G_2 = \{(t, \varepsilon, \mu) | a \leq t \leq b, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^*, 0 < \mu \leq \varepsilon^*\}$  к решению краевой задачи (4).

В теореме 2 доказывается, что на множестве  $G_3 = [a, b] \times (0, \varepsilon^*]$  функции  $z^{(k)}(t, \mu)$  удовлетворяют неравенства

$$\|z^{(k)}(t, \mu)\| \leq C, \quad k \geq 0. \quad (10)$$

**3. Основные результаты.** Введем обозначения частичных сумм рядов (6), (7) и функции  $H_n$ :

$$\begin{aligned}X_n(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^n z^{(k)}(t, \varepsilon) \varepsilon^k, \quad Z_n(t, \varepsilon, \mu) = \sum_{k=0}^n z^{(k)}(t, \mu) \varepsilon^k, \\ H_n(u, t, \varepsilon, \mu) &= \varepsilon F(u + Z_n, t, \varepsilon, f) - \sum_{k=1}^n F_{k-1}(t, \mu, z^{(0)}, \dots, z^{(k-1)}) \varepsilon^k.\end{aligned}\quad (11)$$

**Лемма 3.** Существует постоянная  $\varepsilon_1, 0 < \varepsilon_1 \leq \bar{\varepsilon}$  такая, что на множестве  $G_4 = \{(t, \varepsilon, \mu) | a \leq t \leq b, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1, 0 < \mu \leq \varepsilon_1\}$  функция  $H_n(0, t, \varepsilon, \mu)$  удовлетворяет неравенству

$$\|H_n(0, t, \varepsilon, \mu)\| \leq C \varepsilon^{n+1}, \quad C > 0. \quad (12)$$

**Доказательство.** Неравенство доказывается по индукции. При помощи теоремы 2, (8) и вывод, что функции  $F_n(z^{(0)}, \dots, z^{(n-1)})$  полиномы по  $z^{(0)}, \dots, z^{(n-1)}$ , получаем последовательно

$$\begin{aligned}\|H_0(0, t, \varepsilon, \mu)\| &= \|\varepsilon F(Z_0, t, \varepsilon, f)\| = \varepsilon \|F(z^{(0)}, t, \varepsilon, f)\| = \varepsilon \|F_0(z^{(0)})\| = \varepsilon \|B_0 z^{(0)}\| \leq C_0 \varepsilon; \\ \|H_1(0, t, \varepsilon, \mu)\| &= \|\varepsilon F(Z_1, t, \varepsilon, f) - F_0(t, \mu, z^{(0)}) \varepsilon\| \\ &= \varepsilon \|F(z^{(0)} + z^{(1)} \varepsilon, t, \varepsilon, f) - F_0(t, \mu, z^{(0)})\| = \left\| \sum_{k=0}^1 F_k(z^{(0)}, z^{(1)}) \varepsilon^k - F_0(z^{(0)}) \right\| \varepsilon \\ &= \|F_0(z^{(0)}) + F_1(z^{(0)}, z^{(1)}) - F_0(z^{(0)})\| \varepsilon = \|F_1(z^{(0)}, z^{(1)})\| \varepsilon^2 \leq C_1 \varepsilon^2; \\ \|H_n(0, t, \varepsilon, \mu)\| &\leq \dots \leq \|F_n(z^{(0)}, \dots, z^{(n-1)})\| \varepsilon^{n+1} \leq C_n \varepsilon^{n+1} \leq C \varepsilon^{n+1},\end{aligned}$$

где  $C = \max_k C_k, k = \overline{0, n}$ .  $\triangleleft$

Через  $D_x$  в (У2) обозначили окрестность вырожденного решения  $z^{(0)}$  на множестве  $G_1$ . Тогда ряд (6) и его частичные суммы тоже принадлежат этой окрестности. Следовательно, если  $\delta > 0$  и  $\|z^{(0)}\| < \delta$ , то и  $\|z\| \leq \rho < \delta$ .

**Лемма 4.** Существуют  $0 < \bar{\delta} < \delta$  и  $0 < \varepsilon_1 \leq \bar{\varepsilon}$  такие, что при  $\|\bar{u}\| \leq \bar{\delta}$  и  $\|\bar{\bar{u}}\| \leq \bar{\delta} \quad t \in [a, b], 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1, 0 < \mu \leq \varepsilon_1$  функция  $H_n(u, t, \varepsilon, \mu)$  удовлетворяет неравенству

$$\|\Delta H_n\| = \|H_n(\bar{u}, t, \varepsilon, \mu) - H_n(\bar{\bar{u}}, t, \varepsilon, \mu)\| \leq C \varepsilon \|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|.$$

**Доказательство.** Имеем представление

$$\begin{aligned}\Delta H_n &= H_n(\bar{u}, t, \varepsilon, \mu) - H_n(\bar{\bar{u}}, t, \varepsilon, \mu) = \\ &= \varepsilon \int_0^1 F_x(Z_n + \theta(\bar{u} - \bar{\bar{u}}) + \bar{\bar{u}}, t, \varepsilon, f) d\theta (\bar{u} - \bar{\bar{u}}).\end{aligned}$$

Имея ввиду, что  $\|u + Z_n\| \leq \|u\| + \|Z_n\| \leq \bar{\delta} + \rho \leq \delta$ , получаем

$$\|\Delta H_n\| \leq \varepsilon \int_0^1 \|F_x(Z_n + \theta(\bar{u} - \bar{\bar{u}}) + \bar{\bar{u}}, t, \varepsilon, f)\| d\theta \|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|.$$

Но  $F_x$  непрерывная функция на множестве  $G$  (см. (У2)). Тогда существует постоянная  $\bar{C} > 0$  такая, что выполнено неравенство

$$\begin{aligned}\|F_x(Z_n + \theta(\bar{u} - \bar{\bar{u}}) + \bar{\bar{u}}, t, \varepsilon, f)\| &\leq \bar{C}, \text{ где } x = Z_n + \theta(\bar{u} - \bar{\bar{u}}) + \bar{\bar{u}} \text{ и} \\ \|x\| &\leq \|Z_n\| + \theta \|\bar{u}\| + (1 - \theta) \|\bar{\bar{u}}\| \leq \rho + \theta \bar{\delta} + (1 - \theta) \bar{\delta} = \rho + \bar{\delta} \leq \delta.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\Delta H_n\| \leq \bar{C} \varepsilon \|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|. \quad \triangleleft$$

**Теорема 5.** Пусть выполняются условия (У1), (У2) и  $\text{rank } D = n$ . Тогда найдутся постоянные  $\varepsilon^* > 0$ ,  $C^* > 0$  такие, что решение задачи (1), (2) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)\| \leq C^* \varepsilon^{n+1}$$

при  $t \in [a, b]$  и  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon^*$ .

**Доказательство.** Пусть

$$u(t, \varepsilon, \mu) = z(t, \varepsilon, \mu) - Z_n(t, \varepsilon, \mu). \quad (13)$$

Докажем, что  $\|u(t, \varepsilon, \mu)\| \leq C^* \varepsilon^{n+1}$ .

Подставляя (13) в (4) получаем, что остаточный член  $u(t, \varepsilon, \mu)$  ряда (6) удовлетворяет задаче

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= A(t)u + H_n(u, t, \varepsilon, \mu), \\ l(u) &= 0,\end{aligned} \quad (14)$$

где  $H_n(u, t, \varepsilon, \mu)$  это функция из (11), которая удовлетворяет леммам 3 и 4.

Пусть  $U(t, a)$  — матрица Коши системы  $\frac{du}{dt} = A(t)u$ . Тогда дифференциальное уравнение из (14) эквивалентно уравнению

$$u(t, \varepsilon, \mu) = U(t, a)\eta + \int_a^t U(t, s)H_n(u, s, \varepsilon, \mu)ds, \quad \eta \in \mathbf{R}^n. \quad (15)$$

Подставляем (15) в краевое условие из (14) и для определения постоянного вектора  $\eta$  получаем алгебраическую систему

$$D\eta = b(u, \varepsilon, \mu), \quad (16)$$

где  $b(u, \varepsilon, \mu) = -l(\int_a^{(\cdot)} U(\cdot, s)H_n(u, s, \varepsilon, \mu)ds)$ .

Система (16) имеет решение ( $\det D \neq 0$ )  $\eta = D^{-1}b(u, \varepsilon, \mu)$ , которое подставляем в (15). Для  $u$  получаем следующее интегральное уравнение

$$u(t, \varepsilon, \mu) = U(t, a)D^{-1}b(u, \varepsilon, \mu) + \int_a^t U(t, s)H_n(u(s, \varepsilon, \mu), s, \varepsilon, \mu)ds. \quad (17)$$

Для интегрального уравнения (17) применим метод последовательных приближений

$$u_0(t, \varepsilon, \mu) = 0,$$

$$u_k(t, \varepsilon, \mu) = U(t, a)D^{-1}b(u_{k-1}, \varepsilon, \mu) + \int_a^t U(t, s)H_n(u_{k-1}(s, \varepsilon, \mu), s, \varepsilon, \mu)ds, \quad k \geq 1.$$

Найдутся постоянные  $b_i > 0, i = 1, 2, 3$ , такие что выполнено  $\|l(\psi)\| \leq b_1 \|\psi\|, \|U(t, s)\| \leq b_2, \|D^{-1}\| \leq b_3$ . Из свойства функции  $H_n(u, t, \varepsilon, \mu)$  (лемма 3 и лемма 4) получаем

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_0\| &= \|U(t, a)D^{-1}b(u_0, \varepsilon, \mu) + \int_a^t U(t, s)H_n(u_0(s, \varepsilon, \mu), s, \varepsilon, \mu)ds\| \leq \\ &\|U(t, a)\| \|D^{-1}\| b_1 \sum_{t_k \in [a, b]} \int_a^{t_k} U(t_k, s)H_n(0, s, \varepsilon, \mu)ds + \\ &\int_a^t \|U(t, s)\| \|H_n(0, s, \varepsilon, \mu)\| ds \leq b_2 b_3 b_1 b_2 b_4 (b-a) C \varepsilon^{n+1} + \\ &b_2 (b-a) C \varepsilon^{n+1} = b_2 [b_1 b_2 b_3 b_4 + 1] C (b-a) \varepsilon^{n+1} = \bar{C} \varepsilon^{n+1}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\|u_1 - u_0\| \leq \frac{\nu}{2}$  при  $t \in [a, b], \varepsilon \in (0, \varepsilon_1], \mu \in (0, \varepsilon_1]$  и  $\nu = 2\bar{C}\varepsilon^{n+1}$ , где  $\bar{C} = b_2 [b_1 b_2 b_3 b_4 + 1] C (b-a)$ .

При помощи леммы 4 получаем

$$\|u_2 - u_1\| \leq b_2 [b_1 b_2 b_3 b_4 + 1] C (b-a) \varepsilon \|u_1 - u_0\| \leq \bar{C} \varepsilon \|u_1 - u_0\|.$$

Найдется постоянная  $0 < \varepsilon_2 \ll 1$ , такая что при  $\varepsilon \leq \varepsilon_2 = \frac{1}{2\bar{C}}$  получаем

$$\|u_2 - u_1\| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\nu}{2}.$$

Предположим, что выполнено неравенство

$$\|u_k - u_{k-1}\| \leq \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{\nu}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|u_{k+1} - u_k\| &\leq b_2 [b_1 b_2 b_3 b_4 + 1] (b-a) \|H_n(u_k, s, \varepsilon, \mu) - H_n(u_{k-1}, s, \varepsilon, \mu)\| \leq \\ &b_2 [b_1 b_2 b_3 b_4 + 1] (b-a) C \varepsilon \|u_k - u_{k-1}\| \leq \bar{C} \varepsilon (\bar{C} \varepsilon)^{k-1} \frac{\nu}{2} \leq \\ &(\bar{C} \varepsilon)^k \frac{\nu}{2} \leq \frac{1}{2^k} \frac{\nu}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|u_k - u_{k-1}\| \leq \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{\nu}{2} \quad \forall k \geq 1, \forall t \in [a, b], \varepsilon \in (0, \varepsilon_2], \|u_k\| \leq \delta, \|u_{k-1}\| \leq \delta, \mu \in (0, \varepsilon_2] .$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|u_k(t, \varepsilon, \mu)\| &\leq \|u_k - u_{k-1}\| + \|u_{k-1} - u_{k-2}\| + \dots + \|u_2 - u_1\| + \|u_1 - u_0\| \leq \\ &\frac{1}{2^{k-1}} \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2^{k-2}} \frac{\nu}{2} + \dots + \frac{1}{2} \frac{\nu}{2} + \frac{\nu}{2} = \frac{\nu}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) \leq \\ &2 \cdot \frac{\nu}{2} = \nu, \end{aligned}$$

т. е.  $\|u_k(t, \varepsilon, \mu)\| \leq \nu = C^* \varepsilon^{n+1}$  на множестве  $t \in [a, b], \varepsilon \in (0, \varepsilon^*], \mu \in (0, \varepsilon^*]$  и  $C^* = 2\bar{C}, 0 < \varepsilon^* < \varepsilon_2$ .

Вышеизложенное показывает, что последовательность из последовательных приближений  $u_k(t, \varepsilon, \mu)$  сходится равномерно к решению  $u(t, \varepsilon, \mu)$  задачи (14), т. е. решение задачи (14) существует и справедливо неравенству

$$\|u(t, \varepsilon, \mu)\| \leq C^* \varepsilon^{n+1}, \quad t \in [a, b], \varepsilon \in (0, \varepsilon^*], \mu \in (0, \varepsilon^*]. \quad (18)$$

Из (13) и (18) следует, что

$$\|z(t, \varepsilon, \mu) - Z_n(t, \varepsilon, \mu)\| \leq C^* \varepsilon^{n+1},$$

которое показывает, что

$$\|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)\| \leq C^* \varepsilon^{n+1}.$$

Теорема доказана.  $\triangleleft$

**Замечание 6.** Случай, когда  $\text{rank } D < n$  представляет самостоятельный интерес.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Karandzhulov L. I. and Sirakova N. D. Boundary-Value Problems with Integral Conditions // CP1184 Applications of Mathematics in Engineering and Economics, Edited by G.Venkov and V. Pasheva. – Sozopol, American Institute of Physics, 978-0-7354-0750-3, 2011.
2. Kuzmina R. P. Asymptotic methods for ordinary differential equations // Hluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston, 2000.
3. Sirakova N. D. and Karandzhulov L. I. Boundary-Value Problems for Almost Regular and Weakly Perturbed Nonlinear Systems // Mathematical analysis, Differential equations and their applications. – Proceedings Bulgarian-Turkish-Ukrainian scientific conference, Sunny Beach, September 15-20, 2010, Edited by A.Andreev and L.Karandzhulov, Academic Publishing House “Prof. Marin Drinov” ISBN 978-954-322-454-8, Sofia, 2011.

**В. Н. Ковальногов, Р. В. Федоров, А. В. Королев** (г. Ульяновск)

## **ВЛИЯНИЕ ПРОДОЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПЛЕНОЧНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ОБТЕКАЕМОЙ, ВЫСОКОСКОРОСТНЫМ ДИСЕРСТНЫМ ПОТОКОМ**

*Приведены результаты численного исследования влияния продольного градиента давления на эффективность газовой завесы в высокоскоростном дисперсном потоке. На основе численного моделирования установлено, что наличие инерционного выпадения конденсированных частиц на стенку, в некоторых случаях может приводить к разрушению низкотемпературной завесы. В то же время отсутствие инерционного выпадения конденсированных частиц на стенку не значительно влияет на эффективности пленочного охлаждения.*

Пленочное охлаждение поверхности – способ тепловой защиты, при котором охлаждающее вещество (газообразное или жидкое) вдувается в высокотемпературный поток газа через щель или проницаемый (перфорированный или пористый) участок поверхности и охлаждает не только область вдува охладителя, но и расположенный за ней участок поверхности за счет создания около него тонкого слоя относительно холодной завесы (плёнки).

В подавляющем большинстве работ (например, [1-3]) по исследованию и расчету эффективности пленочного охлаждения влияние факторов, обусловленных аэродинамическим и тепловым воздействием конденсированных частиц в дисперсном потоке, не рассматривается. В отдельных работах [4-8] влияние указанных факторов хотя и анализируется, но в основном применительно к дозвуковому течению. В то же время особенности развития завесы в сверхзвуковых потоках могут оказаться столь существенными, что приводят к парадоксальным на первый взгляд явлениям. Так, академик А.И. Леонтьев теоретически предсказал и подтвердил [9] экспериментально парадокс, проявляющийся в том, что на адиабатном участке поверхности, обтекаемой сверхзвуковым потоком, достижима температура, меньшая температуры охладителя на проницаемом участке формирования завесы.

Целенаправленный поиск условий, в которых реализуются подобные парадоксы и содержатся резервы резкого повышения эффективности пленочного охлаждения, сдерживается отсутствием теории и математических моделей, обеспечивающих достоверное и точное прогнозирование эффективности пленочного охлаждения с учетом отмеченных особенностей.

Система уравнений, описывающих движение и теплообмен дисперсного

потока, представляется отражающими влияние частиц уравнениями пограничного слоя для несущей среды, содержащей внутренние источники теплоты и количества движения.

Систему уравнений для пограничного слоя представим в виде:

– дифференциальное уравнение энергии:

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial \tau} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial y} \left[ r^n (\lambda + \lambda_T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + (\mu + \mu_T) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{dp}{dx} + q_v \quad (1)$$

– дифференциальное уравнение движения:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial y} \left[ r^n (\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{dp}{dx} + s_v; \quad (2)$$

– дифференциальное уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{1}{r^n} \left[ \frac{\partial (\rho u r^n)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v r^n)}{\partial y} \right] = 0, \quad (3)$$

– уравнение состояния:

$$\rho = p / (RT). \quad (4)$$

где  $\mu$  – динамический коэффициент вязкости;  $\rho$  – плотность;  $c_p$  – удельная изобарная теплоемкость;  $R$  – газовая постоянная;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $p$  – давление потока;  $u$  – продольная составляющая скорости;  $v$  – поперечная составляющая скорости;  $T$  – термодинамическая температура потока;  $x$  – продольная координата;  $y$  – поперечная координата;  $\lambda_T$  – коэффициент турбулентного переноса теплоты;  $\mu_T$  – коэффициент турбулентного переноса количества движения;  $\tau$  – время;  $n$  – параметр, численно равный 1 для осесимметричного и 0 для плоского пограничного слоя;  $s_v$  – член, характеризующий интенсивность внутренних источников количества движения;  $q_v$  – член, характеризующий интенсивность внутренних источников теплоты.

Зависимости теплофизических свойств воздуха от температуры  $T$  в диапазоне ее изменения аппроксимированы функциями:

$$\mu/\mu_0 = (T/T_0)^{NM}; c_p/c_{p0} = (T/T_0)^{NC}; \lambda/\lambda_0 = (T/T_0)^{NL}, \quad (5)$$

где  $\mu$  – динамический коэффициент вязкости;  $c_p$  – удельная изобарная теплоемкость;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности.

Интенсивность внутренних источников теплоты  $q_v$  и количества движения  $s_v$  применительно к дисперсному пограничному слою:



$$s_v = \frac{0,75\rho_s\rho c_{fs}}{\rho_\epsilon d_s} |u_s - u|(u_s - u), \quad (6)$$

$$q_v = \frac{6\alpha_s\rho_s}{\rho_\epsilon d_s} (T_s - T), \quad (7)$$

где  $\alpha_s$ ,  $c_{fs}$  – коэффициент теплоотдачи и коэффициент сопротивления конденсированных частиц дисперсной среды;  $\rho_s$  – плотность конденсированной фазы (масса конденсированных частиц, в единице объема среды);  $\rho_\epsilon$  – плотность вещества частиц;  $u_s$ ,  $T_s$  – скорость и температура частиц.

Для определения параметров конденсированной фазы  $\rho_s$ ,  $u_s$ ,  $T_s$  осуществляется расчет траекторий и параметров частиц нескольких выделенных фракций в заданном поле несущей среды (методом последовательных приближений). В число этих фракций включается представительная фракция со среднемассовым диаметром частиц  $d_{sm}$ . Температура  $T_{sm}$  и скорость  $u_{sm}$  частиц представительной фракции используются для расчета комплексов  $A$  и  $B$ :

$$A = q_v / (T_{sm} - T); B = s_v / (u_{sm} - u). \quad (8)$$

Комплексы  $A$  и  $B$  изменяются (по толщине пограничного слоя, в разных итерациях при уточнении поля течения несущей среды) значительно слабее величин  $q_v$  и  $s_v$ . Поэтому найденные в предыдущем приближении значения комплексов  $A$  и  $B$  усредняются по анализируемому сечению пограничного слоя, и эти усредненные значения используются для определения локальных параметров  $q_v$  и  $s_v$  по выражениям:

$$q_v = a(T_{sm} - T); s_v = b(u_{sm} - u), \quad (9)$$

где  $a$ ,  $b$  – усредненные по толщине пограничного слоя значения комплексов  $A$  и  $B$ .

Профили температуры  $T_{sm}$  и скорости  $u_{sm}$  частиц представительной фракции в сечениях пограничного слоя аппроксимируются зависимостями:

$$u_{sm} = u_{sm\infty} \left[ \varphi_u + (1 - \varphi_u) \frac{u}{u_\infty} \right]; T_{sm} = T_{sm\infty} \left[ \varphi_T + (1 - \varphi_T) \frac{T}{T_\infty} \right]. \quad (10)$$

где  $\varphi_u$ ,  $\varphi_T$  – коэффициенты, сохраняющие постоянные значения в анализируемом сечении пограничного слоя. Коэффициенты  $\varphi_u$  и  $\varphi_T$  могут изменяться в диапазоне от 0 до 1 и зависят в основном от толщины пограничного слоя, размеров частиц и скорости их поперечного перемещения. Чем больше скорость поперечного перемещения частицы и ее диаметр и чем меньше толщина пограничного слоя, тем ближе к 1 значения этих коэффициентов. В тех областях, где скорость направленного поперечного перемещения частиц равна 0 (инерционное выпадение частиц на стенку

отсутствует), коэффициенты  $\varphi_u$  и  $\varphi_T$  принимают значения, близкие к 0. Расчетное исследование в настоящей работе выполнено для условий  $\varphi_u = \varphi_T = \varphi_s$ , где параметр  $\varphi_s$  определяет характер относительного движения фаз (наличие или отсутствие инерционного выпадения конденсированных частиц на стенку).

После определения численных значений искомых коэффициентов появляется возможность рассчитывать внутренние источники  $q_v$  и  $s_v$  в процессе интегрирования уравнений пограничного слоя с помощью выражений (8) – (10), а не автономно методом последовательных приближений. Значения этих коэффициентов зависят от структуры пограничного слоя значительно слабее величин  $q_v$  и  $s_v$ , поэтому достигается высокая скорость сходимости решения.

Начальные условия:

$$\tau = 0 : u = u_0(x, y); T = T_0(x, y); p = p_0(x); \quad (11)$$

Граничные условия на поверхности стенки и на внешней границе пограничного слоя формируются одинаково при расчете как температуры  $T_r$ , так и температуры  $T_{ad\ w}$ :

$$y = 0 : u = 0; v = 0; \frac{\partial T}{\partial y} = 0; y = \infty : \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (12)$$

Граничные условия в исходном сечении пограничного слоя при расчете температуры  $T_r$  записываются в виде:

$$x = 0, y > 0 : u = u_0; T = T_0. \quad (13)$$

Граничные условия в исходном сечении завесы при расчете температуры  $T_{ad\ w}$  имеют вид:

$$x = 0, y > 0 : u = u(y); T = T(y). \quad (14)$$

Граничные условия при наличии завесы задаются в виде:

$$x = 0 \dots l, y = 0; u = 0; v = v_w(x); T = T_w(x), \quad (15)$$

где значения  $v_w$  и  $T_w$  полагаются известными.

Граничные условия за завесой задаются в виде:

$$x = l \dots \infty, y = 0; u = 0; v = 0; \partial T / \partial y = 0. \quad (16)$$

Вид функций  $u(y)$  и  $T(y)$ , а также способ их определения зависят от способа создания завесы. Для завесы, создаваемой путем вдува охладителя через тангенциальную щель высотой  $s$ , условие (14) преобразуется к виду:

$$x = 0 : 0 < y < s : u = u_{охл}; T = T_{охл}; s \leq y : u = u_0; T = T_0, \quad (17)$$

где  $T_0$ ,  $u_0$  – значения термодинамической температуры и скорости потока в исходном сечении за пределами пограничного слоя.

Для газовой завесы, формирующейся на проницаемой (пористой) вставке, и тепловой завесы, формирующейся на охлаждаемом участке стенки, функции  $u(y)$  и  $T(y)$  определяются в результате численного интегрирования системы

уравнений пограничного слоя на соответствующем участке формирования завесы (на проницаемой вставке или на охлаждаемом участке стенки).

В качестве основы моделирования турбулентности принимается модифицированная модель пути смешения.

Отличительной особенностью модели, используемой в настоящей работе, является учет изменения турбулентного числа Прандтля  $Pr_T$  по толщине пограничного слоя с помощью выражения [12]:

$$Pr_T = \frac{\text{ae}(1 - \exp(-\eta/26))}{0,44 \cdot (1 - \exp(-\eta/34))}. \quad (25)$$

Аналитическому решению система дифференциальных уравнений пограничного слоя (1) – (4) не поддается, поэтому для ее интегрирования применяют численные методы. Анализ различных разностных схем для решения системы уравнений пограничного слоя показывает, что наиболее эффективной является неявная шеститочечная схема.

Для составления неявной шеститочечной схемы на координатной плоскости  $x, y$  выбираются основная и две вспомогательные сетки.

Координаты узлов основной сетки  $x_i, y_j$  определяются соотношениями

$$x_i = i\Delta x; \quad y_j = j\Delta y. \quad (26)$$

Координаты узлов вспомогательных сеток  $x_i, y_{j+\frac{1}{2}}$  и  $x_{i+\frac{1}{2}}, y_j$  рассчитываются по выражениям

$$x_i = i\Delta x; \quad y_{j+\frac{1}{2}} = \left(j + \frac{1}{2}\right)\Delta y; \quad (27)$$

$$x_{i+\frac{1}{2}} = \left(i + \frac{1}{2}\right)\Delta x; \quad y_j = j\Delta y. \quad (28)$$

где  $i, j$  – целые числа (0, 1, 2, ...);  $\Delta x, \Delta y$  – шаги сетки вдоль координат  $x$  и  $y$  соответственно (в общем случае могут быть переменными по толщине пограничного слоя и от сечения к сечению).

Любое из уравнений вида (1), (2), а также уравнение для диффузионного пограничного слоя, пограничного слоя для кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации можно представить в единой форме:

$$a \frac{\partial f}{\partial \tau} + b \frac{\partial f}{\partial x} + c \frac{\partial f}{\partial y} = d \frac{\partial}{\partial y} \left( m \frac{\partial f}{\partial y} \right) + gf + h \quad (29)$$

где  $f$  – функция, которой может быть придан смысл любой из величин: скорости  $u$ , температуры  $T$ , кинетической энергии турбулентности  $e$ , скорости ее диссипации  $\varepsilon$  и т. п.;  $a, b, c, d, m, g, h$  – коэффициенты, которым может быть придан смысл коэффициентов в соответствующих уравнениях.

Используя метод разностной аппроксимации производных применительно к уравнениям (1) – (3), получаем их разностную схему. Так разностный аналог (разностная схема) уравнения вида (29) имеет вид

$$\begin{aligned}
 & a_{i-1/2,j} \frac{f_{i-1,j} - f'_{i-1,j} + f_{i,j} - f'_{i,j}}{2\Delta\tau} + b_{i-1/2,j} \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{x_i - x_{i-1}} + \\
 & + c_{i-1/2,j} \frac{s(f_{i,j+1} - f_{i,j-1}) + (1-s)(f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1})}{y_{j+1} - y_{j-1}} = \\
 & = \frac{2d_{i-1/2,j}}{y_{j+1} - y_{j-1}} \left[ m_{i-1/2,j+1/2} \frac{s(f_{i,j+1} - f_{i,j}) + (1-s)(f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j})}{y_{j+1} - y_j} - \right. \\
 & \left. - m_{i-1/2,j-1/2} \frac{s(f_{i,j} - f_{i,j-1}) + (1-s)(f_{i-1,j} - f_{i-1,j-1})}{y_j - y_{j-1}} \right] + \\
 & + g_{i-1/2,j} \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{2} + h_{i-1/2,j},
 \end{aligned} \tag{30}$$

где  $s$  – параметр усреднения, выбираемый из диапазона  $0,5 \dots 1,0$ .

Разностный аналог уравнения неразрывности (3) представим в виде

$$\begin{aligned}
 (\rho v)_{i-1/2,j} = & \frac{1}{r_{i-1/2,j}^n} \left\{ (\rho v)_{i-1/2,j-1} r_{i-1/2,j-1}^n - \right. \\
 & - \frac{y_j - y_{j-1}}{2(x_i - x_{i-1})} \left[ (\rho u)_{i,j} r_{i,j}^n - (\rho u)_{i-1,j} r_{i-1,j}^n + (\rho u)_{i,j-1} r_{i,j-1}^n - \right. \\
 & \left. \left. - (\rho u)_{i-1,j-1} r_{i-1,j-1}^n \right] - \frac{r_{i-1/2,j-1/2}^n (y_j - y_{j-1})}{4\Delta\tau} (\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j} + \rho_{i,j-1} + \right. \\
 & \left. + \rho_{i-1,j-1} - \rho'_{i,j} - \rho'_{i-1,j} - \rho'_{i,j-1} - \rho'_{i-1,j-1}) \right\}.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Разностное уравнение (30) представим в более компактной форме

$$\alpha_j f_{i,j-1} + \beta_j f_{i,j} + \gamma_j f_{i,j+1} = \delta_j, \tag{32}$$

где коэффициенты  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j$  определяются из условия тождественности выражений (30), (32).

$$\alpha_j = - \frac{s}{y_{j+1} - y_{j-1}} \left( c_{i-1/2,j} + \frac{2d_{i-1/2,j} m_{i-1/2,j-1/2}}{y_j - y_{j-1}} \right); \tag{33}$$

$$\beta_j = \frac{a_{i-1/2,j}}{2\Delta\tau} + \frac{b_{i-1/2,j}}{x_i - x_{i-1}} + \tag{34}$$

$$+ \frac{2s d_{i-1/2,j}}{y_{j+1} - y_{j-1}} \left( \frac{m_{i-1/2,j+1/2}}{y_{j+1} - y_j} + \frac{m_{i-1/2,j-1/2}}{y_j - y_{j-1}} \right) - \frac{g_{i-1/2,j}}{2};$$

$$\gamma_j = \frac{s}{y_{j+1} - y_{j-1}} \left( c_{i-1/2,j} - \frac{2d_{i-1/2,j} m_{i-1/2,j+1/2}}{y_{j+1} - y_j} \right); \quad (35)$$

$$\delta_j = \frac{a_{i-1/2,j}}{2\Delta\tau} (f'_{i,j} + f'_{i-1,j}) +$$

$$+ \frac{(1-s)f_{i-1,j-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} \left( c_{i-1/2,j} + \frac{2d_{i-1/2,j} m_{i-1/2,j-1/2}}{y_j - y_{j-1}} \right) +$$

$$f_{i-1,j} \left[ \frac{b_{i-1/2,j}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{2(1-s) d_{i-1/2,j}}{y_{j+1} - y_{j-1}} \left( \frac{m_{i-1/2,j+1/2}}{y_{j+1} - y_j} + \frac{m_{i-1/2,j-1/2}}{y_j - y_{j-1}} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{g_{i-1/2,j}}{2} - \frac{a_{i-1/2,j}}{2\Delta\tau} \right] - \frac{(1-s)f_{i-1,j+1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} \left( c_{i-1/2,j} - \frac{2d_{i-1/2,j} m_{i-1/2,j+1/2}}{y_{j+1} - y_j} \right) +$$

$$+ h_{i-1/2,j}. \quad (36)$$

Система алгебраических уравнений (32) совместно с уравнениями (31), а также с уравнениями, определяющими значения коэффициентов турбулентного переноса  $\mu_T, \lambda_T$  (для турбулентного режима течения), и выражениями, определяющими зависимость теплофизических свойств  $\rho, \mu, \lambda, c_p$  от параметров состояния, решается методом прогонки. При этом решение уравнений (32) ищется в форме

$$f_{i,j} = A_j f_{i,j+1} + B_j \quad (37)$$

где  $A_j, B_j$  – прогоночные коэффициенты.

Из выражения (37) следует

$$f_{i,j-1} = A_{j-1} f_{i,j} + B_{j-1} \quad (38)$$

Подставив в уравнение (32) вместо величины  $f_{i,j-1}$  ее значение, выраженное зависимостью (37), получим

$$\alpha_j (A_{j-1} f_{i,j} + B_{j-1}) + \beta_j f_{i,j} + \gamma_j f_{i,j+1} = \delta_j \quad (39)$$

Из условия тождественности выражений (37), (39) получаются соотношения для определения прогоночных коэффициентов:

$$A_j = -\frac{\gamma_j}{\alpha_j A_{j-1} + \beta_j}; \quad B_j = \frac{\delta_j - \alpha_j B_{j-1}}{\alpha_j A_{j-1} + \beta_j} \quad (40)$$

Особенности численного интегрирования системы уравнений пограничного слоя при исследовании эффективности завесы обусловлены тем, что в пристенной области существенно различны поперечные градиенты скорости и температуры (рис. 1) [11].

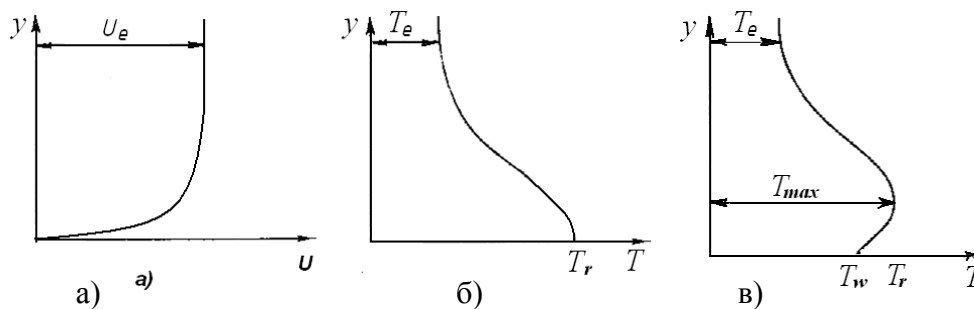


Рис. 1. Распределение скорости (а), температуры (б) в пограничном слое при больших скоростях потока в случае теплоизолированной стенки и температуры в пограничном слое при больших скоростях потока при охлаждении стенки (в)

Большие градиенты продольной скорости вблизи стенки на теплоизолированном участке требуют использования мелкой сетки, чтобы уменьшить погрешность аппроксимации дифференциальных операторов разностными, а малые градиенты температуры одновременно требуют использования крупной сетки, чтобы уменьшить погрешности округления при вычислении производных по поперечной координате. Такие же противоречивые требования к размерам сетки имеют место применительно к двум соседним участкам: проницаемому участку формирования завесы и адиабатному участку.

Математическая модель совместно с численным методом были реализованы на языке программирования Си одноименным кодом «Astra» согласно блок-схеме. Программный код зарегистрирован в реестре программ для ЭВМ под №2011613213 с названием «Программа для расчета эффективности пленочного охлаждения поверхности, обтекаемой высокоскоростным потоком с воздействиями».

В результате решения системы дифференциальных уравнений совместно с начальными и граничными условиями находим профили скорости и температуры во всех точках расчетных сечений пограничного слоя. Коэффициент восстановления температуры  $r$  находится согласно формуле (41). Эффективность пленочного охлаждения поверхности находим по выражению:

$$\theta = (T_r - T_{ad_w}) / (T_r - T_{w_0}), \quad (41)$$

где  $T_r$  – температура теплоизолированной поверхности при отсутствии завесы (температура “восстановления” потока);  $T_{ad_w}$  – то же при наличии завесы;  $T_{w_0}$  – температура поверхности в начальном сечении защищаемого участка поверхности (начальное сечение защищаемого участка совпадает с конечным сечением проницаемого участка, на котором осуществляется вдув охладителя и формирование низкотемпературной завесы).

Эффективность  $\theta$  определяется по результатам двух расчетов структуры пограничного слоя несущей среды. В первом расчете, который выполняется для условия отсутствия завесы, определяются значения температуры  $T_r$  в интересующих сечениях дисперсного потока. В этом расчете на всей поверхности стенки задается условие теплоизоляции ( $\partial T / \partial y = 0$ ). По

результатам второго расчета, который выполняется при наличии завесы, в тех же сечениях определяются значения температуры  $T_{ad_w}$ , а также температура  $T_{w_0}$ . Во втором расчете условие теплоизоляции задается только за пределами участка формирования завесы. На проницаемом участке формирования завесы (пористой вставке) на поверхности стенки задается значение поперечной скорости  $v_0$  охладителя (вдуваемого вещества) и температура  $T_w$ .

Адекватность модели турбулентного дисперсного пограничного слоя проверялась путем сопоставления расчетов коэффициентов теплоотдачи дисперсного потока в соплах с опытными данными. Результаты сопоставления, приведенные в работе [13], свидетельствуют о том, что предлагаемая методика в целом адекватно отражает особенности обменных процессов в дисперсном пограничном слое.

Достоверность предлагаемой методики расчета эффективности завесы в высокоскоростном потоке проверялась путем сопоставления результатов численных расчетов, выполненных для анализируемых условий, но при отсутствии частиц в потоке воздуха, с расчетом по методике [1]. Выражение (41) для расчета эффективности завесы  $\theta$  в однородном сверхзвуковом турбулентном потоке для рассматриваемых условий может быть представлено в форме:

$$\theta = \left[ 1 + \frac{0,254 \cdot \psi \cdot Re_{\Delta x}}{(Re_{T1}^{**})^{1,25}} \right]^{-0,8} = \left[ 1 + 4,26 \cdot 10^{-6} \cdot Re_{\Delta x} \right]^{-0,8}, \quad (42)$$

где  $Re_{\Delta x}$  – число Рейнольдса по продольной координате, отсчитываемой от начала адиабатного участка;  $Re_{T1}^{**}$  – число Рейнольдса, построенное по толщине потери энергии пограничного слоя и подсчитанное в конечном сечении участка формирования завесы;  $\psi$  – поправочный множитель, отражающий влияние неизотермичности течения, сжимаемости среды и наличия вязкого подслоя конечной толщины.

Результаты сопоставления, приведенные на рис. 2 свидетельствуют об удовлетворительном (в пределах суммарной погрешности) согласовании расчетов по предлагаемой методике и методике [1].

Расчетное исследование с использованием модифицированных модели и алгоритма выполнено применительно к пластине длиной 2 м, обтекаемой турбулентным дисперсным потоком (несущая среда – воздух) с учетом зависимости теплофизических свойств несущей среды от температуры. Скорость потока за пределами пограничного слоя при расчетах принималась изменяющейся по длине пластины. Температура  $T^*$  и давление  $p^*$  заторможенного потока в расчетах полагались постоянными ( $T^*=500$  К;  $p^*=0,1$  МПа). Формирование пограничного слоя начиналось от передней кромки пластины, при этом на участке длиной 0,2 м моделировался вдув охладителя (воздуха). Относительное значение поперечной скорости

охлаждателя  $\bar{v}_0 = v_0 / u_\infty$ , где  $u_\infty$  – скорость за пределами пограничного слоя, на участке формирования завесы задавалось постоянным и равным 0,0008, а температура поверхности  $T_w$  на этом участке принималась равной 300 К.

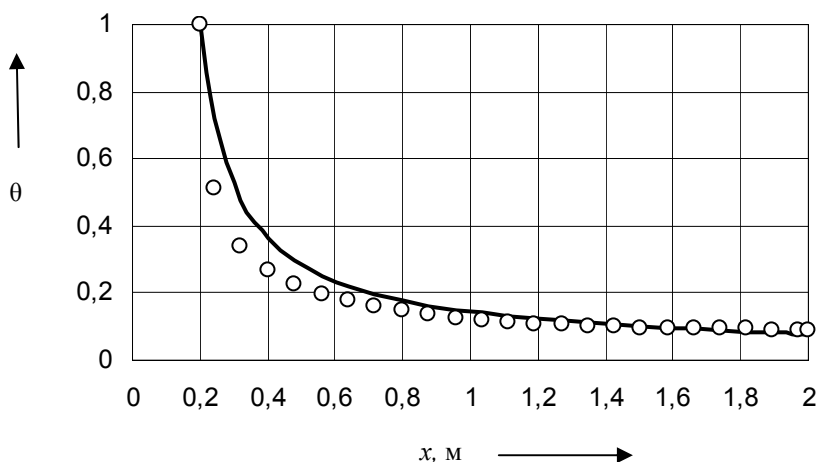


Рис. 2 Распределение эффективности пленочного охлаждения:  
○ – расчет по выражению (41); линия – расчет по выражению (42).

Результаты исследования влияния продольного градиента давления на эффективность пленочного охлаждения поверхности, обтекаемой высокоскоростным дисперсным потоком в условиях инерционного выпадения частиц на стенку представлены на рис. 3, 4. На рис. 3 показано изменение по длине пластины адиабатной температуры стенки для разных условий течения.

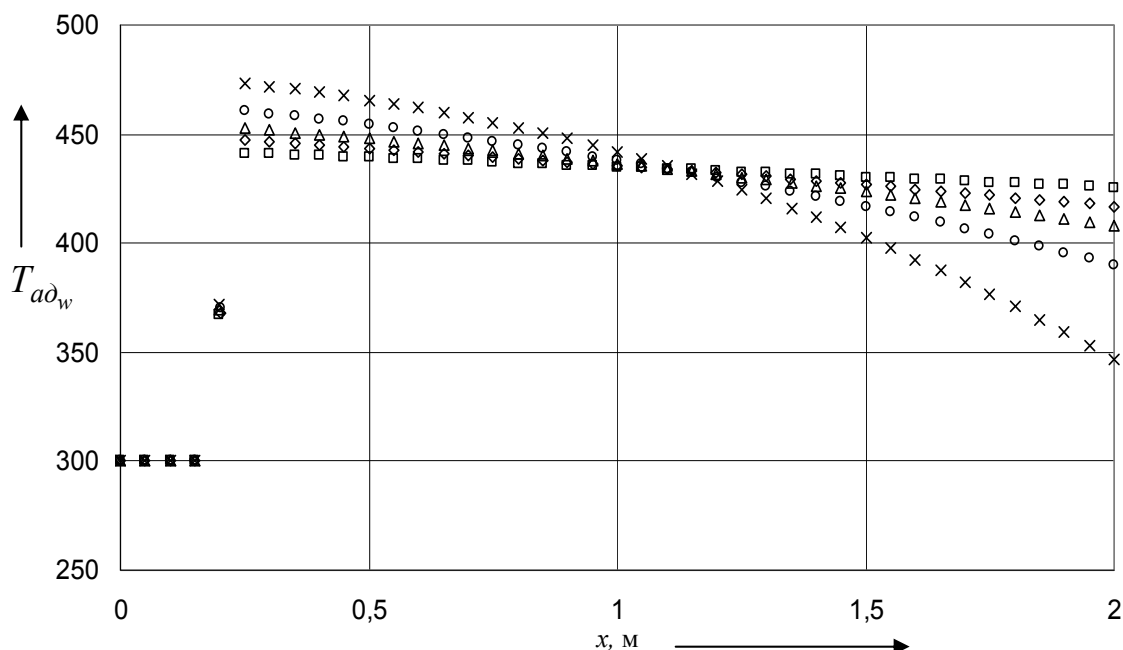


Рис. 3. Распределение по длине пластины адиабатной температуры стенки:  
□ –  $K=0,1$ ; ◇ –  $K=0,2$ ; Δ –  $K=0,3$ ; ○ –  $K=0,5$ ; × –  $K=1$

На рис. 4 показано изменение эффективности пленочного охлаждения по длине пластины для различных условий.



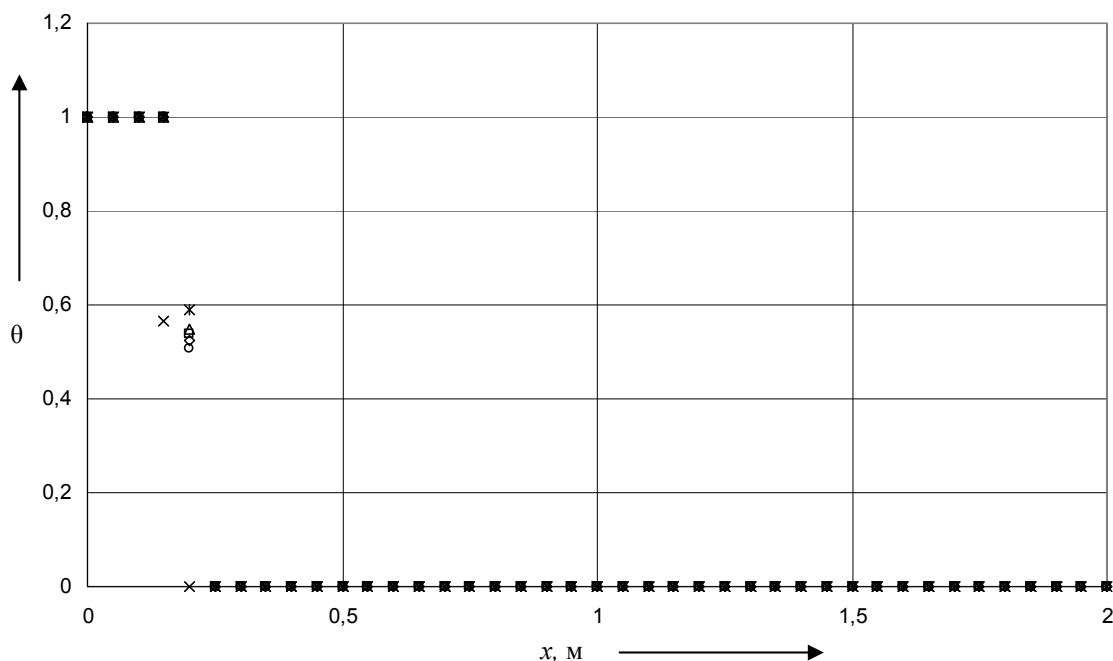


Рис. 4. Распределение по длине пластины эффективности завесы:  
 $\square$  –  $K=0,1$ ;  $\diamond$  –  $K=0,2$ ;  $\Delta$  –  $K=0,3$ ;  $\circ$  –  $K=0,5$ ;  $\times$  –  $K=1$

Проводя анализ полученных данных, мы видим, что наличие конденсированных частиц в сверхзвуковом потоке с наличием инерционного выпадения на стенку приводит к разрушению завесы.

Результаты исследования влияния продольного градиента давления на эффективность пленочного охлаждения при отсутствии инерционного выпадения частиц представлены на рис. 5, 6. На рис. 5 показано изменение по длине пластины адиабатной температуры стенки для разных условий течения.

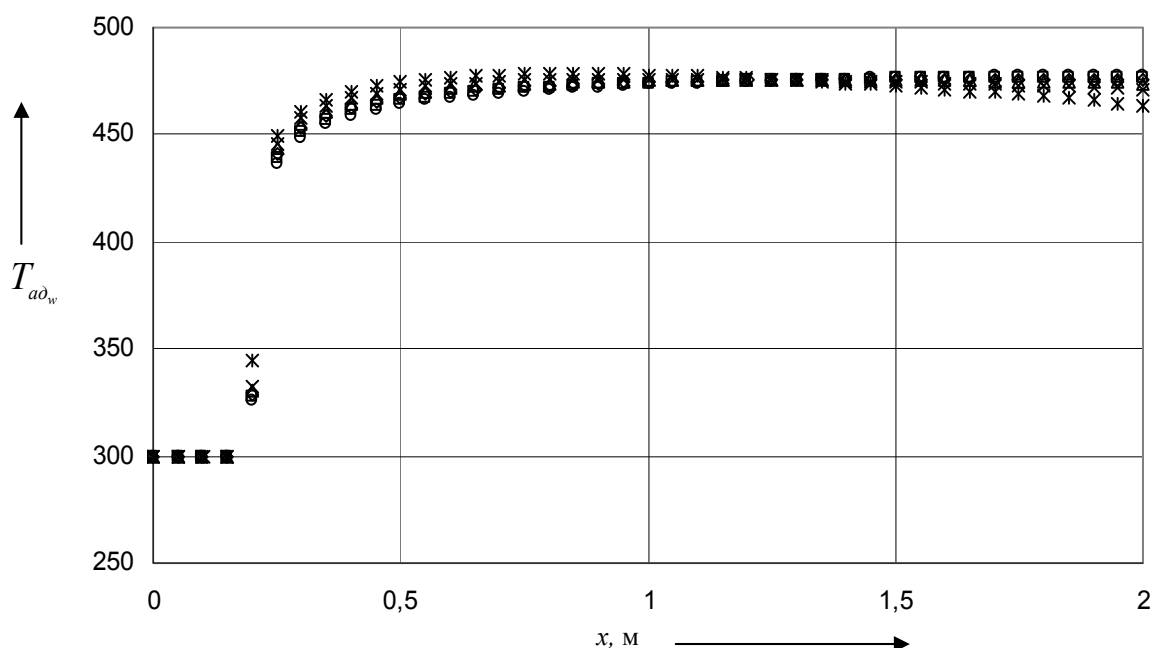


Рис. 5. Распределение по длине пластины адиабатной температуры стенки:  
 $\square$  –  $K=0,1$ ;  $\diamond$  –  $K=0,2$ ;  $\Delta$  –  $K=0,3$ ;  $\circ$  –  $K=0,5$ ;  $\times$  –  $K=1$

На рис. 6 показано изменение эффективности пленочного охлаждения по длине пластины для различных условий.

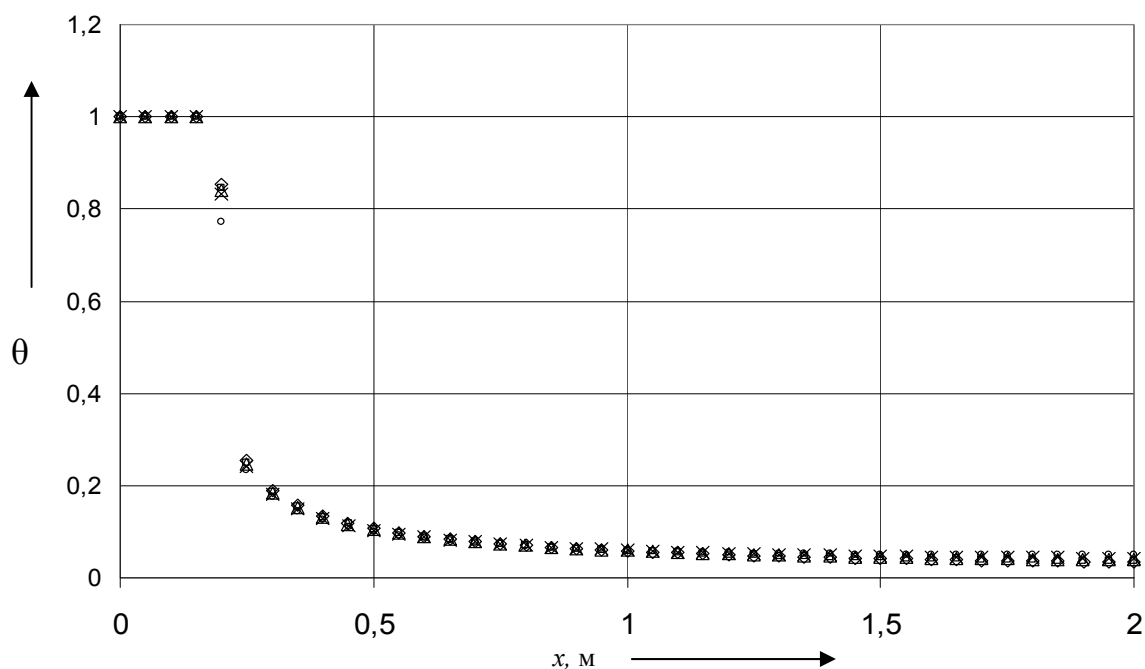


Рис. 6. Распределение по длине пластины эффективности завесы:  
 $\square$  –  $K=0,1$ ;  $\diamond$  –  $K=0,2$ ;  $\Delta$  –  $K=0,3$ ;  $\circ$  –  $K=0,5$ ;  $\times$  –  $K=1$

Проводя анализ полученных данных, мы видим, что наличие конденсированных частиц в высокоскоростном потоке, при отсутствии инерционного выпадения частиц, приводит к незначительному увеличению эффективности завесы  $\theta$ . Это объясняется тем, что наличие частиц в высокоскоростном потоке уменьшают коэффициент восстановления и, как следствие, понижают температуру  $T_{ad_w}$ . А это в свою очередь приводит к увеличению эффективности завесы (см. формула (41)).

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Волчков Э. П. Пристенные газовые завесы. – Новосибирск: Наука, 1983. 239 с.
2. Репухов В. М. Теория тепловой защиты стенки вдувом газа. – Киев: Наукова думка, 1980. – 296 с.
3. Исаев С. И., Кожин И. А., Кофанов В. И. и др. Теория тепломассообмена / Под ред. А. И. Леонтьева. – М.: Высшая школа, 1979. – 495 с.
4. Ковальногов Н. Н., Куканов Н. И. Теплоотдача потока рабочего тела и эффективность завесы в элементах энергетических установок на твердом топливе // Научно-технический калейдоскоп. Энергетика и транспорт, 1999. – Вып. 1. – С. 11–16.

5. Ковальногов Н. Н., Куканов Н. И. Эффективность низкотемпературной пристенной завесы в турбулентном дисперсном потоке в условиях направленного поперечного перемещения конденсированных частиц в пограничном слое // Труды 4-го Минского международного форума по тепло- и массообмену. – Минск: Изд-во Ин-та тепло- и массообмена, 2000. – Т 6. – С. 38–43.

6. Ковальногов Н. Н. Пограничный слой в потоке газозвеси: Теплоотдача, сопротивление, эффективность завесы // Проблемы промышленной теплотехники: Материалы 2-й Международной конференции, Киев, 28 мая – 2 июня 2001 г. – Киев: Изд-во Ин-та технической теплофизики, 2001. – С. 16-22.

7. Ковальногов Н. Н., Магазинник Л. М. Эффективность пристенной завесы в высокоскоростном турбулентном дисперсном потоке // Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики: Тез. докл. 2-й науч. школы-конференции, Алушта, 20–26 сент. 2004 г. – Киев: Изд-во НАН Украины, 2004. – С. 58-61.

8. Ковальногов Н. Н., Магазинник Л. М. Расчет теплоотдачи дисперсного потока и эффективности завесы в элементах проточной части энергетических установок на твердом топливе // Труды Академэнерго, 2007. – № 3. – С. 62-68.

9. Леонтьев А. И., Лущик В. Г., Якубенко А. Е. Особенности теплообмена на проницаемой поверхности // Труды 5-й Российской национальной конференции по теплообмену. – М.: Изд-во МЭИ, 2010. – Т. 2. – С. 154–157.

10. Ковальногов Н. Н. Пограничный слой в потоках с интенсивными воздействиями. – Ульяновск: Изд-во УлГТУ, 1996. – 246 с.

11. Ковальногов Н. Н., Федоров Р. В. Эффективность газовой завесы в сверхзвуковом дисперсном потоке в условиях инерционного выпадения частиц на защищаемую поверхность // Известия вузов. Авиационная техника, 2011. – № 1. – С. 13-16.

12. Романенко П. Н. Тепломассообмен и трение при градиентном течении жидкостей. – М.: Энергия, 1971. – 568 с.

13. Ковальногов Н. Н., Магазинник Л. М., Федоров Р. В., Королев А. В. Численный анализ коэффициента восстановления температуры на основе математической модели с изменяющимся турбулентным числом Прандтля // Вестник Ульяновского государственного технического университета, 2008. – № 1. – С. 51–54.

14. Щукин В. К., Ковальногов Н. Н., Филин В. А. и др. Теплоотдача газозвеси в соплах // Изв. вузов. Авиационная техника, 1979. – № 3. – С. 61-66.

**Tsvetanka Kovacheva** (Varna, Bulgaria)

## RISK FACTORS ANALYSIS AFFECTING THE INSURANCE COMPANY'S ACTIVITIES

*In the paper are described the asset models for long term financial planning purposes. Risk factors that affect the insurance company's activities results have been selected economic variables: real interest rate and inflation rate. Using modified clustering method is constructed the scenario tree by simulated scenarios of the choosing variables. The method is realized and calculations are performed using computer algebra system (SAS).*

*Keywords: scenarios, scenario fan, scenario trees, modeling, cluster analysis*

### 1. Introduction

Multi-stage portfolio optimization or dynamic financial analysis management problems usually use the models that involve decision stages and uncertainty. These models are based on a stochastic process describing the uncertain environment.

Using the models and their time discretization, one can simulate arbitrarily many paths (scenarios) with associative probabilities using the scenario generation methods. An optimization of the scenario tree and finding the best paths is the goal of the financial risk management.

The structure of the paper is following: Section 2 presents some basic notions and terminology using in the stochastic processes represented and the model for long-term financial planning purposes and its discrete model. In Section 3 the Ward clustering method is shown. In Section 4 presents the simulation results of an example using the system Statistical Analysis System SAS. Section 5 concludes the paper.

### 2. Model description

Let a stochastic process  $(\nu_t)$ ,  $t = \overline{0, T}$  be given ( $\nu_0 = x_0 = \text{const}$  represents today's value) [3]. The distribution of this process may be the result of estimation based on a given model. The process must be approximated by discrete stochastic process  $(\bar{\nu}_t)$ ,  $t = \overline{0, T}$ . It takes only a finitely number of values and is as close as possible to the initial process  $(\nu_t)$ ,  $t = \overline{0, T}$  and has a predetermined structure as a tree at the same time. Let  $S_t$  be the finite state space of  $\bar{\nu}_t$ , that  $p(\bar{\nu}_t \in S_t) = 1$ . If  $x \in S_t$ , let  $b(x, t)$  be the branching factor of  $x$ , i.e.  $b(x, t) = \#\{y : p(\bar{\nu}_{t+1} = y | \bar{\nu}_t = x)\} > 0$ .

The process  $(\bar{v}_t)$ ,  $t = \overline{0, T}$  can be represented as a tree [8]. The initial root of the tree is  $(x_0, 0)$  and the nodes  $(x, t)$  and  $(y, t+1)$  are connected by an arc, if  $p(\bar{v}_t = x, \bar{v}_{t+1} = y) > 0$ . The structure of the tree is determined by the vector  $B = (b_0, b_1, \dots, b_{T-1})$ , where  $b_t$  denotes the number of successors per node in stage  $t$ . The branching factors may be chosen beforehand and independent of  $x$ . Let  $N = (n_0, n_1, \dots, n_T)$  be the vector of the total number of nodes in each stage ( $n_0 = 1$ ).

In the paper the original stochastic process is presented by HMT two-factor model for real interest rate and inflation.

### 2.1. Time discrete form of a real short rate model

The two-factor model is defined by two stochastic equations governing the changes in the real short rate is defined by the following two stochastic equations [1,4]

$$\begin{cases} dr_1(t) = \alpha_{r_1} \cdot (r_2(t) - r_1(t)) \cdot dt + \sigma_{r_1} \cdot dZ_{r_1}(t), \\ dr_2(t) = \alpha_{r_2} \cdot (\mu_r - r_2(t)) \cdot dt + \sigma_{r_2} \cdot dZ_{r_2}(t), \end{cases} \quad (1)$$

where  $r_1(t)$ ,  $r_2(t)$  – the real short and the mean reversion level for the real short rate at time  $t$ ;  $\alpha_{r_1}$ ,  $\alpha_{r_2}$  – autoregressive parameter for the real short rate and for the real short rate mean reversion process;  $\sigma_{r_1}$ ,  $\sigma_{r_2}$  – annualized volatility (standard deviation) of the real short rate and for the real short rate mean reversion level;  $\mu_r$  – mean reversion level for  $r_2(t)$ ;  $dZ_{r_1}(t)$ ,  $dZ_{r_2}(t)$  – the shock to the real short rate process and to the real short rate mean reversion process which are distributed normally;  $b_{r_1}$ ,  $b_{r_2}$  – lower bound for the real short rate  $r_1(t)$  and for the real short rate mean reversion level  $r_2(t)$ ;  $g_r$  – control parameter of term premium in real bond prices.

The analytic expressions in (1) can be used to derive the real interest rate  $r_1(t)$  and  $r_2(t)$  at any time. They are the continuous-time equivalents of two first-order autoregressive time-series processes. The real interest rates have a normal distribution. The inconvenience of the model is the possibility to obtain the negative real rates. The two processes  $Z_1(t)$  and  $Z_2(t)$  are Brownian motions with instantaneous correlation  $\rho$ .

The equations (1) allow calculating an expected path for future short rates that is naturally related to current forward rates. Zero-coupon bond at time  $t$  that pays one unit in real terms (i.e. protected from inflation) at time  $T$  is given by the following pricing equation

$$P_r(t, T) = e^{[A(T-t) - B_1(T-t)r_1(t) - B_2(T-t)r_2(t)]} \quad (2)$$

$$\text{where } B_1(s) = \frac{1 - e^{\alpha_{r_1} \cdot s}}{\alpha_{r_1}}; \quad B_2(s) = \frac{\alpha_{r_1}}{\alpha_{r_1} - \alpha_{r_2}} \cdot \left( \frac{1 - e^{\alpha_{r_2} \cdot s}}{\alpha_{r_2}} - \frac{1 - e^{\alpha_{r_1} \cdot s}}{\alpha_{r_1}} \right);$$

$$A(s) = (B_1(s) - s) \left( \mu - \frac{\sigma_{r_1}^2}{2\alpha_{r_1}^2} \right) + B_2(s) \cdot \mu - \frac{\sigma_{r_1}^2 \cdot B_1^2(s)}{4\alpha_{r_1}} + \frac{\sigma_{r_2}^2}{2} \left[ \frac{s}{\alpha_{r_2}^s} - 2 \cdot \frac{(B_2(s) + B_1(s))}{\alpha_{r_2}^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(\alpha_{r_1} - \alpha_{r_2})^2} \cdot \frac{(1 - e^{2\alpha_{r_1} \cdot s})}{2\alpha_{r_1}} - \frac{2\alpha_{r_1}}{\alpha_{r_2} \cdot (\alpha_{r_1} - \alpha_{r_2})^2} \cdot \frac{(1 - e^{-(\alpha_{r_1} + \alpha_{r_2}) \cdot s})}{(\alpha_{r_1} + \alpha_{r_2})} + \frac{\alpha_{r_1}^2}{\alpha_{r_2}^2 \cdot (\alpha_{r_1} - \alpha_{r_2})^2} \cdot \frac{(1 - e^{-2\alpha_{r_2} \cdot s})}{2\alpha_{r_2}} \right]$$

The  $A(s), B_1(s), B_2(s)$  are the functions of the parameters for real interest rate movements.

After obtained prices for real discount bonds, it is then possible to calculate also the continuously compounded yield at time  $t$  for maturity  $T$

$$R_r(t, T) = -\log(P_r(t, T)) / (T - t) \quad (3)$$

The continuous process can be approximated by the discrete one using intervals, such as monthly. In [8] the discrete procedure is considered in detail. It includes a standard Brownian motion, which is presented by  $\varepsilon_{1t}$  and  $\varepsilon_{2t}$  in the discrete case and  $g_r = 0$ . The discrete model is

$$\begin{cases} r_{1,t+1} = (1 - \alpha_{k1} \Delta t) \cdot r_{1t} + \alpha_{k1} \cdot r_{2t} \cdot \Delta t + \sigma_{r1} \cdot \varepsilon_{1t} \\ r_{2,t+1} = \alpha_{k2} \cdot \mu_r \cdot \Delta t + (1 - \alpha_{k2} \cdot \Delta t) \cdot r_{2t} + \sigma_{r2} \cdot \varepsilon_{2t} \end{cases} \quad (4)$$

From (4) the discrete samples can be obtained, which represent scenarios over the time period.

## 2.2. Time discrete form of inflation model

The equations governing the path of the short-term inflation rate are [4]

$$\begin{aligned} dq_1(t) &= \alpha_{q1} \cdot (q_2(t) - q_1(t)) \cdot dt + \sigma_{q1} \cdot dZ_{q1}(t) \\ dq_2(t) &= \alpha_{q2} \cdot (\mu_q - q_2(t)) \cdot dt + \sigma_{q2} \cdot dZ_{q2}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

where  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$  – instantaneous rate of inflation and the mean reversion level for the instantaneous inflation rate at time  $t$ ;  $\alpha_{q1}$ ,  $\alpha_{q2}$  – the autoregressive parameter for the inflation rate process and for the inflation rate mean reversion process;  $\sigma_{q1}$ ,  $\sigma_{q2}$  – annualized volatility (standard deviation) of the instantaneous inflation rate and of the inflation rate mean;  $\mu_q$  – the mean reversion level for  $q_2(t)$ ;  $g_r$  – a parameter to control the inflation risk premium in nominal bonds relative to indexed bonds;  $dZ_{q1}(t)$ ,  $dZ_{q2}(t)$  – shock to the inflation rate process and to the inflation rate mean reversion process which is distributed  $N(g_q dt, dt)$ ;  $b_{q1}$ ,  $b_{q2}$  – lower bound for the inflation rate  $q_1(t)$  and for long-term inflation expectations  $q_2(t)$ ;  $g_q$  – control parameter of term inflation risk premium in real bond prices.

The analytic expressions in (5) can be used to derive the inflation rates term structure at any time given the values of  $q_1(t)$  and  $q_2(t)$ . Analogy the inflation rates normally distributed. The model allows the possibility of negative inflation rates.

The system (5) allows calculating an expected path for future short inflation rates that is naturally related to current forward inflation rates (with an adjustment for any assumed risk premium).

Inflation expectations at time  $t$  that pays one unit in real terms (i.e. protected from inflation) at time  $T$  is given by the following pricing equation

$$P_q(t, T) = e^{[A.(T-t) - B_1.q_1(t) - B_2(t).q_2(t)]} \quad (6)$$

$$\text{where } B_1(s) = \frac{1 - e^{\alpha_{r_1}.s}}{\alpha_{r_1}}; \quad B_2(s) = \frac{\alpha_{r_1}}{\alpha_{r_1} - \alpha_{r_2}} \cdot \left( \frac{1 - e^{\alpha_{r_2}.s}}{\alpha_{r_2}} - \frac{1 - e^{\alpha_{r_1}.s}}{\alpha_{r_1}} \right);$$

$$A(s) = (B_1(s) - s) \left( \mu - \frac{\sigma_{r_1}^2}{2.\alpha_{r_1}^2} \right) + B_2(s) \cdot \mu - \frac{\sigma_{r_1}^2.B_1^2(s)}{4.\alpha_{r_1}} + \frac{\sigma_{r_2}^2}{2} \cdot \left[ \frac{s}{\alpha_{r_2}^2} - 2 \cdot \frac{(B_2(s) + B_1(s))}{\alpha_{r_2}^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\alpha_{r_1} - \alpha_{r_2})^2} \cdot \frac{(1 - e^{2.\alpha_{r_1}.s})}{2.\alpha_{r_1}} - \frac{2.\alpha_{r_1}}{\alpha_{r_2} \cdot (\alpha_{r_1} - \alpha_{r_2})^2} \cdot \frac{(1 - e^{-(\alpha_{r_1} + \alpha_{r_2}).s})}{(\alpha_{r_1} + \alpha_{r_2})} + \frac{\alpha_{r_1}^2}{\alpha_{r_2} \cdot (\alpha_{r_1} - \alpha_{r_2})^2} \cdot \frac{(1 - e^{-2.\alpha_{r_2}.s})}{2.\alpha_{r_2}} \right].$$

The  $A(s), B_1(s), B_2(s)$  are the functions of the parameters for inflation movements.

The continuously compounded yield at time  $t$  for maturity  $T$  is

$$P_q(t, T) = -\log(P_q(t, T)) / (T - t). \quad (7)$$

The continuous process can be approximated the discrete using the intervals, such as monthly. The model includes Brownian motion, so

$$\begin{cases} \Delta q_{1t} = \alpha_{k1} \cdot (q_{2t} - q_{1t}) \cdot \Delta t + \sigma_{q1} \cdot \varepsilon_{1t}, \\ \Delta q_{2t} = \alpha_{k2} \cdot (\mu_q - q_{2t}) \cdot \Delta t + \sigma_{q2} \cdot \varepsilon_{2t}. \end{cases} \quad (8)$$

But  $\Delta q_{1t} = q_{1,t+1} - q_{1t}$  and  $\Delta q_{2t} = q_{2,t+1} - q_{2t}$ , then

$$\begin{cases} q_{1,t+1} = q_{1t} + \alpha_{k1} \cdot (q_{2t} - q_{1t}) \cdot \Delta t + \sigma_{q1} \cdot \varepsilon_{1t} = (1 - \alpha_{q1} \Delta t) q_{1t} + \alpha_{q1} q_{2t} \Delta t + \sigma_{q1} \cdot \varepsilon_{1t}, \\ q_{2,t+1} = q_{2t} + \alpha_{k2} \cdot (\mu_q - q_{2t}) \cdot \Delta t + \sigma_{q2} \cdot \varepsilon_{2t} = \alpha_{q2} \mu_q \Delta t + (1 - \alpha_{q2} \Delta t) q_{2t} + \sigma_{q2} \cdot \varepsilon_{2t}. \end{cases} \quad (9)$$

### 2.3. Nominal interest rate

Combining a term structure of real interest rate and inflation expectations it is possible to derive a term structure of nominal interest rates

$$P_{nom}(t, T) = P_{r_1}(t, T) \cdot P_{q_1}(t, T). \quad (10)$$

### 3. Clustering method

In the present paper the *Ward agglomerative hierarchical method* or *minimum variance method* [4,5,7,8] is modified to be used for clustering the nodes of the simulated scenario fan in given time moments.

The hierarchical grouping procedure is the following [8]. A root node with  $N$  scenarios is created at starting point (today's value). For each time period the

scenario values are grouped into desired number of clusters  $K$  using the smallest increase of the Error of Sum of Squares (ESS)

$$ESS_t = \sum_{i=1}^n (v_t^i)^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n v_t^i \right)^2, \quad t = \overline{1, T}. \quad (11)$$

The centers of the clusters are used as nodes with respective probability and standard deviation of the constructed scenario tree. The procedure stops when  $t=T$ .

#### 4. Simulation results

The calculations were implemented in the Statistical Analysis System (SAS) [9,10].

The simulation process generates the set of scenarios (scenario fan) for the interest rate during time horizon  $T$  on the base of discrete HMT stochastic asset model (4) includes two basic steps associated with construction of:

1) *scenario fan* – the long time period ( $T=10$  years or 120 months with one month time increment) and the larger number of scenarios are determined to simulate  $N=1000$  scenarios that form the scenario fan with an initial root node  $\overline{v}_0^1 = \dots = \overline{v}_0^N = 5\%$  (Figure 2). It consists a 120 000 nodes.

2) *scenario tree* (ST) – a ST from the scenario fan by the proposed clustering method is modeled. At first the spacing of the tree's nodes in the time dimension is selected at different decision moments  $t=2, 4, 6, 8, 10$ . The number of decision moments in the trees determines the number of stages. The branching scheme of ST depends on the number of clusters. In clustering process the number of clusters is chosen to  $K=3$ . The branching factors are chosen the same in each node  $b_0 = b_2 = \dots = b_8 = 3$ , i.e. the structure of tree is homogenous.

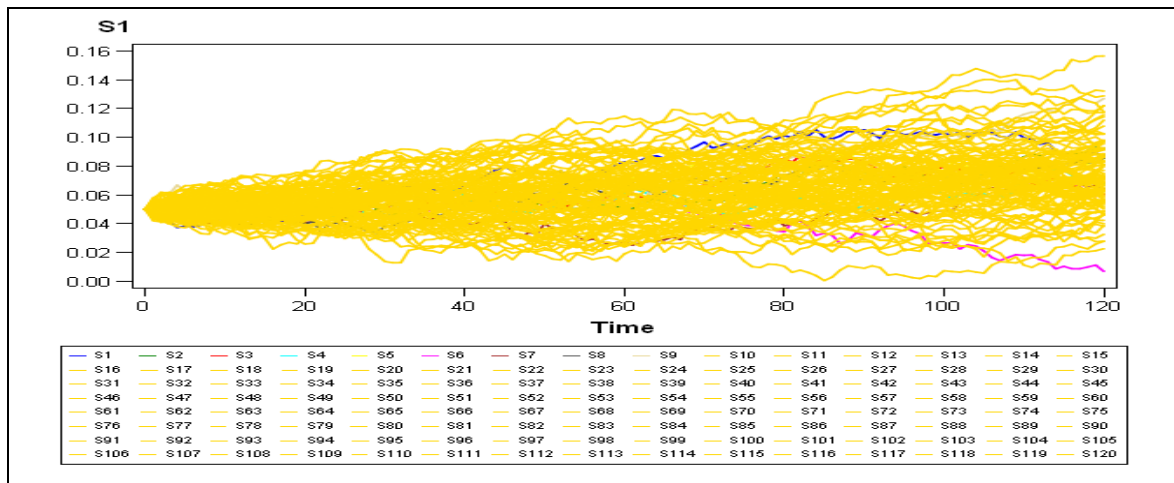


Figure 1 Scenario fan



Table 1 Characteristics of scenario fan

| Statistical characteristics<br>Decision moments | Time moments, in years |         |         |         |         |
|-------------------------------------------------|------------------------|---------|---------|---------|---------|
|                                                 | $t=2$                  | $t=4$   | $t=6$   | $t=8$   | $t=10$  |
| mean                                            | 0.05365                | 0.05777 | 0.06264 | 0.06844 | 0.07224 |
| dispersion                                      | 0.01177                | 0.01706 | 0.02091 | 0.02348 | 0.02600 |

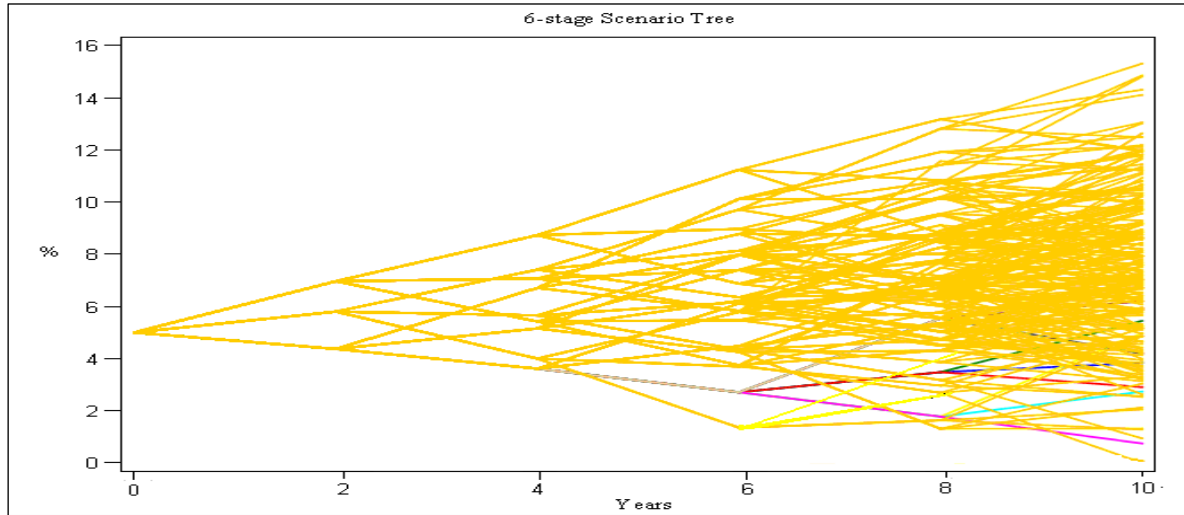


Figure 3. 6-stage ST with 3 branches from each node

Table 2. Characteristics of Scenario Trees with K=3

|                |              | Decision moments, in Years |         |         |         |         |         |
|----------------|--------------|----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
|                |              | characteristic             | $t=2$   | $t=4$   | $t=6$   | $t=8$   | $t=10$  |
| Scenario trees | 2-stage tree | mean                       | -       | -       | -       | -       | 0.07224 |
|                |              | dispersion                 | -       | -       | -       | -       | 0.02600 |
|                | 3-stage tree | mean                       | 0.05063 | -       | -       | -       | 0.06829 |
|                |              | dispersion                 | 0.01101 | -       | -       | -       | 0.02431 |
|                | 4-stage tree | mean                       | 0.05063 | 0.05453 | -       | -       | 0.06711 |
|                |              | dispersion                 | 0.01101 | 0.01738 | -       | -       | 0.02419 |
|                | 5-stage tree | mean                       | 0.05063 | 0.05453 | 0.05922 | -       | 0.06889 |
|                |              | dispersion                 | 0.01101 | 0.01738 | 0.01952 | -       | 0.02268 |
|                | 6-stage tree | mean                       | 0.05063 | 0.05453 | 0.05922 | 0.06886 | 0.07261 |
|                |              | dispersion                 | 0.01101 | 0.01738 | 0.01952 | 0.02111 | 0.02213 |

By clustering the given scenarios with Ward method consecutively the scenario fan is approximated to the following five scenario trees (STs) with different decision moments: 2-stage ST with  $t=10$ ; 3-stage ST with  $t=2, 10$ ; 4-stage ST with  $t=2, 4, 10$ ; 5-stage ST with  $t=2, 4, 6, 10$ ; 6-stage ST with  $t=2, 4, 6, 8, 10$  (Figure 3). The sizes of the received STs is less than the scenario fan size. For example the

constructed 6-stage ST consists  $b_0.b_2.b_4.b_6.b_8 = 3^5 = 243$  scenarios and  $n_0 + n_2 + n_4 + n_6 + n_8 + n_{10} = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 364$  nodes.

The generated STs are evaluated by calculating some statistical characteristics of the interest rate. The mean value and the dispersion at five time moments ( $t=2, 4, 6, 8$  and 10 years) are determined. For the scenario fan they are given in Table 1 and for the STs with  $K=3$  – in Table 2. The comparison of the tables with statistical characteristics of the scenario fan and STs shows that they are saved.

## 5. Conclusions

In the paper the multistage scenario tree generation method has been presented. The modifying cluster method of Ward simplifies calculations of the interest rates prognosis, because the size of the constructed ST is much smaller than scenario fan one. The simulated asset returns can be used in constructing investment portfolio.

## REFERENCES

1. Brigo D., F. Mercurio *Interest Rate Models - Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit*, Springer Finance, 2001.
2. Cripe, F., Hayne, R. Hollar, K. Kadison, J., Ludwig, S., McFarlane, L., Morgan, S., Nichols, R. *Dynamic Financial Analysis Handbook*, CAS Forum, 1996.
3. Dupacova J., Consigli, G. and Wallace, S.W. *Scenarios for multistage stochastic programs*. Annals of Operation Research, v.100, 2000, 25-53.
4. Hibbert J., P.Mowbray, C.Turnbull. *A Stochastic Asset Model & Calibration for Long-Term Financial Planning Purposes*, Technical Report, Barrie&Hibbert Limited, 2001, 1-76.
5. JJohnson R., W. Wichern *Applied Multivariate Statistical Analysis*, 6th Edition, Prentice-Hall, 2007.
6. Kaufmann R., A. Gagmer, R. Klett *Introduction to dynamic financial analysis*, Astin Bulletin 31(1), 2001, 217-253.
7. Kovacheva Ts. *Cluster analysis*, Information Technologies and Control, Sofia, 3, 2004, 24-29.
8. Kovacheva Ts. *Hierarchical clustering of the simulated data paths*, MASSEE International Congress on Mathematics - MICOM 2009, Ohrid, Republic of Macedonia, 16 – 20 September 2009 (in print).
9. SAS <http://www.sas.com>
10. Statistical Analysis with SAS/STAT® Software  
<http://www.sas.com/technologies/analytics/statistics/stat/index.html>

*Д. В. Кондратов, И. В. Плаксина* (г. Саратов)

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ГИДРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ТРУБЫ КОЛЬЦЕВОГО ПРОФИЛЯ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ГАРМОНИЧЕСКОГО ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ

*Дана постановка задачи гидроупругости для трубы кольцевого профиля с геометрически нерегулярной внешней оболочки, свободно опираемой на концах трубы и абсолютно жестким внутренним цилиндром.*

Современные конструкции, используемые в различных отраслях техники, могут быть описаны моделью, которая состоит из двух цилиндрических оболочек, вложенных друг в друга, между которыми расположена жидкость. Примерами использования модели с двумя цилиндрическими оболочками можно считать двигатели внутреннего сгорания, поплавковые приборы навигации, жидкостные ракетные двигатели, телескопические шасси, силовые цилиндры с полым плунжером [1-5]. Следует отметить, что в такой модели жидкость между оболочками может служить как для демпфирования собственных колебаний оболочек, так и для охлаждения этих оболочек. Кроме того, внешняя оболочка может быть геометрически нерегулярной, а внутренняя – абсолютно жесткой.

Рассмотрим механическую систему, представленную на рис. 1.

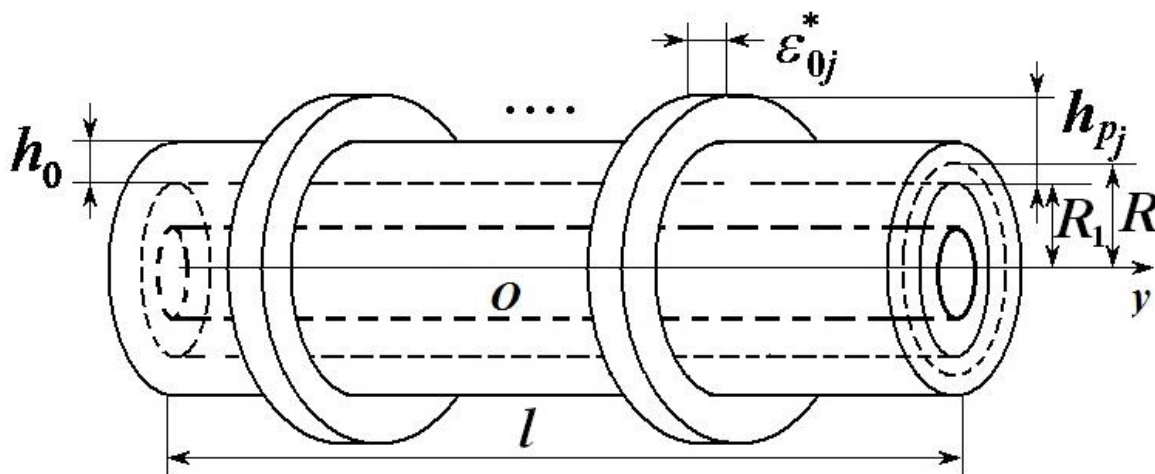


Рис. 1

Рассматривается ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе кольцевого сечения, образованного поверхностями соосных

цилиндрических оболочек, причем внешняя оболочка является упругой геометрически нерегулярной, а внутренняя оболочка является абсолютно жестким цилиндром. Внутренний  $R_1$  и срединной поверхности  $R$  радиусы внешней оболочки, а также внешний радиус  $R_2$  внутренней оболочки значительно больше ширины  $\delta = R_1 - R_2$  цилиндрической щели кольцевого сечения. Толщина внешней  $h_0 = 2(R - R_1)$  оболочки значительно меньше радиуса срединной поверхности  $R$ . Длины оболочек  $l$  – одинаковы, а упругие перемещения внешней оболочки значительно меньше ширины  $\delta$  цилиндрической щели. Течение происходит под действием переменного по времени перепада давления. Перемещение внутренней оболочки относительно внешней на защемленных торцах отсутствует. Механическая система считается термостабилизированной

Систему координат  $O_1x_1y_1z_1$  свяжем с основанием, к которому крепиться рассматриваемая механическая система. Ее центр  $O_1$  расположен в геометрическом центре соосных оболочек в невозмущенном состоянии. Положим, что перемещения вдоль оси  $O_1y_1$  отсутствуют. Введем в рассмотрение необходимую далее цилиндрическую систему координат  $r, \theta, y$  ( $\bar{n}_r, \bar{n}_\theta, \bar{j}$  – орты цилиндрической системы), полюс которой совпадает с началом координат  $O_1x_1y_1z_1$ , направления осей  $Oy$ ,  $O_1y_1$  цилиндрической и декартовой систем координат совпадают (Рис. 2)

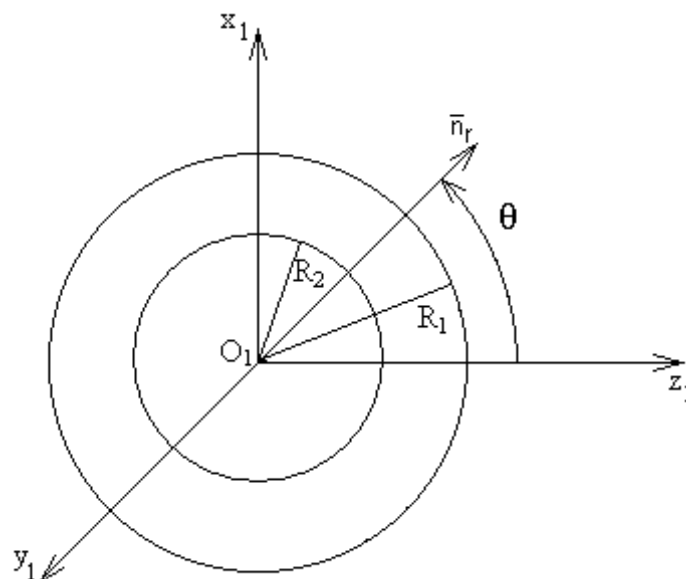


Рис. 2

Течение жидкости между оболочками осесимметричное и описывается уравнениями Навье-Стокса, которые в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\frac{\partial V_k}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_k}{\partial r} + V_y \frac{\partial V_k}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial k} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_k}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_k}{\partial y^2} - \chi \frac{V_r}{r^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0.$$

Здесь  $k = r$  или  $y$ ;  $\chi = 1$  при  $k = r$ ,  $\chi = 0$  при  $k = y$ ;  $V_y, V_r$  – компоненты вектора скорости жидкости в цилиндрической системе координат  $(\bar{n}_r, \bar{j})$ , начало  $O$  которой находится в центре внутренней оболочки;  $p$  – давление жидкости;  $\rho$  – плотность жидкости;  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости;  $y$  – координата вдоль оси симметрии  $Oy$ ;  $r$  – расстояние от оси  $Oy$ ;  $t$  – время.

Граничные условия представляют собой условия прилипания жидкости к поверхностям оболочек и условия для давления на концах механической системы:

$$V_r = \partial u_3 / \partial t, \quad V_y = -\partial u_1 / \partial t \quad \text{при } r = R_2 + \delta + u_3;$$

$$V_r = 0, \quad V_y = 0 \quad \text{при } r = R_2;$$

$$p = p^+ \quad \text{при } y = l/2, \quad p = p^- \quad \text{при } y = -l/2, \quad (2)$$

где  $u_3$  – прогиб внешней оболочки, положительный в сторону противоположную центру кривизны;  $u_1$  – продольное перемещение оболочек, положительное в сторону противоположную оси  $Oy$ .

В случае осесимметричной деформации ребристой оболочки уравнения динамики для введенной в рассмотрение цилиндрической системы координат, полученной исходя из вариационного интегрального принципа Гамильтона, имеют вид:

$$\frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \left[ \frac{\partial u_1}{\partial y} - \mu_0 \frac{u_3}{R} \right] \left( 1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{yj} \right) - \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} h_0 \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{yj} \right) =$$

$$= h_0 \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \left( 1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{yj} \right) - q_s, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{Eh_0^3}{12(1-\mu_0^2)} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \left[ 1 + \sum_{j=1}^n k_{3j} \Delta \Gamma_{yj} \right] + \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial y} - \mu_0 \frac{u_3}{R} \right] h_0 \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{yj} \right) + \\ & + \frac{1}{R} \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \left\{ \left[ \frac{u_3}{R} - \mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] \left( 1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{yj} \right) - \mu_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} h_0 \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{yj} \right\} = \\ & = -h_0 \rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \left( 1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{yj} \right) + q_n. \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta \Gamma_{yj} = \Gamma(y - y_j) - \Gamma(y - y_j - \varepsilon_{0j}^*)$ ,  $\Gamma(y)$  – единичная функции Хевисайда по продольной координате  $y$ ;  $y_j$  – точка появления ребра по продольной координате;  $\mu_0$  – коэффициент Пуассона материала оболочки;  $E$  – модуль Юнга материала оболочки;  $\rho_0$  – плотность материала оболочки.

Поверхностная нагрузка определяется напряжением со стороны жидкости

$$\begin{aligned} q_s &= - \left[ p_{ry} \cos(\bar{n}, \bar{n}_r) + p_{yy} \cos(\bar{n}, \bar{j}) \right] \Big|_{r=R_1+u_3}, \\ q_n &= - \left[ p_{rr} \cos(\bar{n}, \bar{n}_r) + p_{ry} \cos(\bar{n}, \bar{j}) \right] \Big|_{r=R_1+u_3}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\bar{n}$  – единичный вектор нормали к срединной поверхности оболочки;  $\bar{s}$  – единичный вектор в продольном направлении в срединной поверхности оболочки, противоположный единичному вектору  $\bar{j}$ ;  $\bar{n}_r, \bar{j}$  – единичные векторы введенной цилиндрической системы координат.

$$\begin{aligned} k_{1j} &= \left( 1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) \frac{h_{pj}}{h_0}, \quad k_{2j} = \left( 1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) \frac{h_{pj}^2}{2h_0^2}, \\ k_{3j} &= \left( 1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) \left( 4 - 2 \frac{h_0}{h_{pj}} + \frac{h_0^2}{h_{pj}^2} \right) \frac{h_{pj}^3}{h_0^3}. \end{aligned}$$

$$p_{rr} = -p + 2\nu\rho \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad p_{ry} = \nu\rho \left( \frac{\partial V_r}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial r} \right), \quad p_{yy} = -p + 2\nu\rho \frac{\partial V_y}{\partial y},$$

$$\cos(\bar{n}, \bar{n}_r) = \frac{R_1 + u_3}{|\bar{N}|}, \quad \cos(\bar{n}, \bar{j}) = -\frac{R_1 + u_3}{|\bar{N}|} \frac{\partial u_3}{\partial y}, \quad |\bar{N}| = (R_1 + u_3) \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial y} \right)^2}.$$

Граничные условия уравнений представляют собой условия свободного

(шарнирного) опирания

$$u_3 = 0 \text{ при } y = \pm \frac{l}{2}, \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = \pm \frac{l}{2}, \quad (5)$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \pm \frac{l}{2}.$$

Таким образом, получим связанную задачу гидроупругости для трубы кольцевого профиля с геометрически нерегулярной внешней оболочки свободно опираемой на концах трубы и абсолютно жестким внутренним цилиндром.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Башта Т. М. Машиностроительная гидравлика / Башта Т. М. – М.: Машгиз, 1963. – 696 с.
2. Могилевич Л. И. Динамика гироскопов с цилиндрическим поплавковым подвесом./ Андрейченко К. П., Могилевич Л. И. – Саратов: Изд-во. Сарат. ун-та, 1987. – 160 с.
3. Могилевич Л. И. Прикладная гидроупругость в машино- и приборостроении/ Могилевич Л. И., Попов В. С. – Саратов: ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ», 2003. – 156 с.
4. Симдянкин А. А. Контактное-силовое взаимодействие деталей цилиндрично-поршневой группы / Симдянкин А. А.– Саратов: ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ», 2003. – 144 с.
5. Кондратов Д. В., Могилевич Л. И. Математическое моделирование процессов взаимодействия двух цилиндрических оболочек со слоем жидкости между ними при свободном торцевом истечении в условия вибрации / Д. В. Кондратов, Л. И. Могилевич // Вестник Саратовского государственного технического университета, 2007. – №3 (26). – Вып.1. – С. 22–31.

**А. В. Кочулимов, В. Л. Леонтьев** (г. Ульяновск)

## СМЕШАННЫЙ ВАРИАЦИОННО-СЕТОЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

*Рассматривается вариационно-сеточный метод (ВСМ), связанный со смешанным вариационным принципом теории теплопроводности и с использованием ортогональных финитных функций на треугольных сетках. Приводятся результаты решений ряда краевых задач теплопроводности, в том числе для областей с криволинейными границами.*

*Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК №П1122, ГК № П2230.*

Рассматривается ВСМ теории теплопроводности, основанный на применении предлагаемого здесь смешанного вариационного принципа и непрерывных кусочно-билинейных ортогональных финитных функций (ОФФ), связанных с треугольными сетками. ВСМ основан на условии стационарности функционала:

$$R(T, \bar{G}) = \int_S [T \operatorname{div} \bar{G} + (\bar{G} - \operatorname{grad} T) \bullet \bar{G}] dS + \\ + \int_{\gamma_1} (T - 2T_\gamma) G_n d\gamma - \int_{\gamma_2} (G_n - 2G_{n\gamma}) T d\gamma,$$

где  $S$  – двумерная область;  $\gamma_1, \gamma_2$  – части ее границы, объединение которых составляет всю границу  $\gamma$ ;  $T$  – температура точек области  $S$ ,  $\bar{G}$  – градиент температуры;  $G_n = \bar{G} \bullet \bar{n}$  – проекция вектора  $\bar{G}$  на внешнюю нормаль  $\bar{n}$  к границе области  $S$ ;  $T_\gamma$  и  $G_{n\gamma}$  – заданные соответственно на  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  значения  $T$  и  $G_n$ ;  $\bullet$  – знак скалярного произведения.

Условие стационарности функционала  $R(T, \bar{G})$  записывается в следующем виде:

$$\delta R / 2 = \int_S [\operatorname{div} \bar{G} \delta T + (\bar{G} - \operatorname{grad} T) \bullet \delta \bar{G}] dS + \\ + \int_{\gamma_1} (T - T_\gamma) \delta G_n d\gamma - \int_{\gamma_2} (G_n - G_{n\gamma}) \delta T d\gamma = 0, \quad (1)$$

и равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{G} = 0, \\ \bar{G} - \operatorname{grad} T = 0 \end{cases} \quad (S)$$



и краевым условиям

$$T = T_\gamma(\gamma_1), \quad G_n = G_{n_\gamma}(\gamma_2)$$

в силу произвольности и взаимной независимости вариаций температуры и градиента температуры. Применение смешанного вариационного принципа позволяет за счет того, что приближенные решения для температуры и для ее градиента разыскиваются и варьируются одновременно и независимо друг от друга, избавиться от операции численного дифференцирования при построении приближенного решения для градиента по предварительно найденному приближенному решению для температуры. За счет этого гладкость приближенных решений для температуры и для ее градиента (потока тепла) одинакова, а их точность – одного порядка. Анализ не только скалярного температурного поля, но и векторного поля потока тепла, является важным элементом исследования многих тепловых процессов. Применение ОФФ приводит к тому, что объем арифметических операций, необходимых для реализации алгоритма метода, примерно такой же, как в численном методе, в котором на этапе решения системы линейных алгебраических уравнений находится основное приближенное решение – для температуры, а решение для градиента формируется численным дифференцированием.

В области  $S$  строится сетка, содержащая  $N$  узлов, расположенных в вершинах треугольников и в серединах сторон треугольников. Подстановка в (1) линейных комбинаций

$$\tilde{T} = \sum_{i=1}^N T_i \varphi_i, \quad \tilde{G}_{(k)} = \sum_{i=1}^N G_{(k)i} \varphi_i \quad (k=1, 2), \quad (2)$$

в которых  $T_i$ ,  $G_{(k)i}$  – неизвестные постоянные коэффициенты, аппроксимирующих точные решения двумерными ОФФ  $\varphi_i(x, y)$  [1, стр.63], приводит к глобальной системе сеточных линейных алгебраических уравнений, из которой определяются неизвестные коэффициенты. Линейные комбинации  $\tilde{T}$ ,  $\tilde{G}_{(1)}$ ,  $\tilde{G}_{(2)}$  – приближенные аппроксимации температуры  $T$  и компонент вектора  $\bar{G}$  градиента температуры.

Проведены расчеты на ЭВМ с помощью комплекса программ, реализующего алгоритм данного ВСМ.

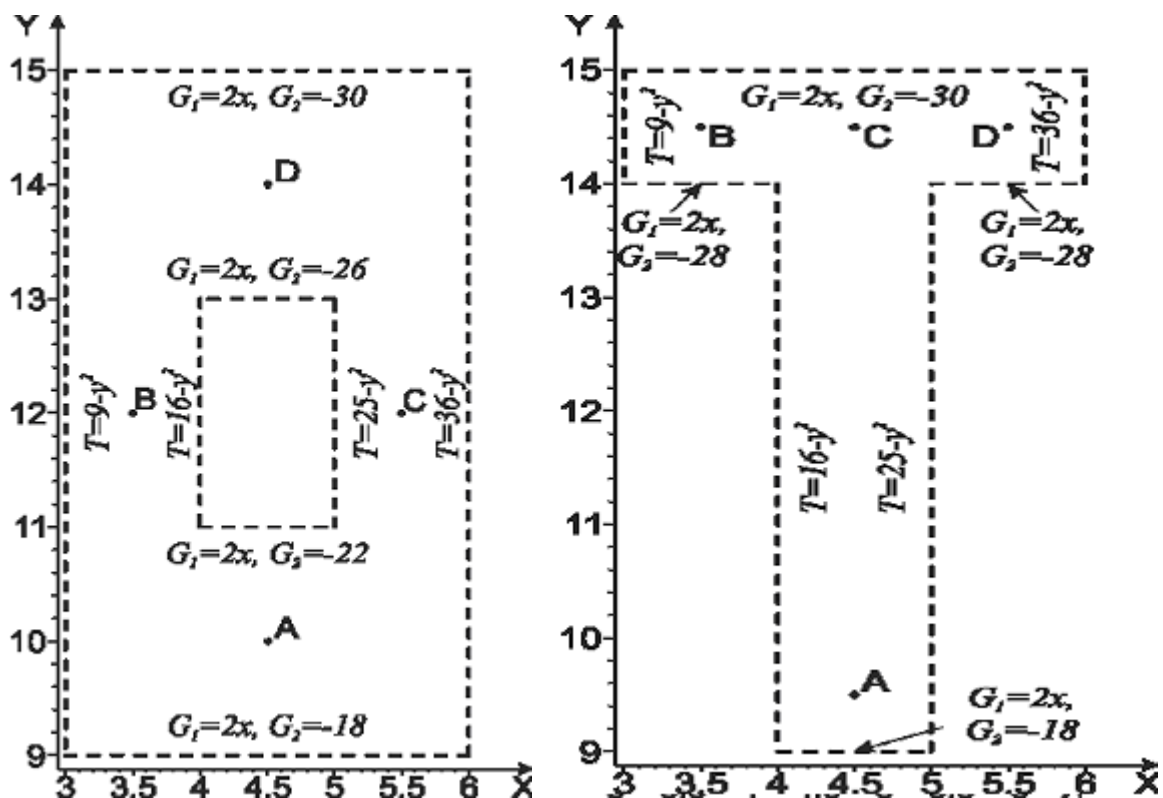


Рис.1. Прямоугольная область с вырезом и T-образная область

В задаче о распределении температуры на прямоугольной области с одним прямоугольным вырезом (рис.1) граничные условия:

$$\begin{aligned}
 &T = 9 - y^2, \text{ при } x = 3; \quad T = 36 - y^2, \text{ при } x = 6; \\
 &G_1 = 2x, \quad G_2 = -18, \text{ при } y = 9; \quad G_1 = 2x, \quad G_2 = -30, \text{ при } y = 15; \\
 &T = 16 - y^2, \text{ при } x = 4; \quad T = 25 - y^2, \text{ при } x = 5; \\
 &G_1 = 2x, \quad G_2 = -22, \text{ при } y = 11; \quad G_1 = 2x, \quad G_2 = -26, \text{ при } y = 13;
 \end{aligned}$$

выполнялись заранее в каждом узле границы. По условиям задачи требовалось найти не только значения температуры  $T$ , но и значения ее градиента  $\bar{G}$ , определяющего поток тепла. Предложенный здесь ВСМ позволяет за счет финитности базисных функций рациональным образом учитывать неоднородность и анизотропию материала конструкции. На рисунках 2–5 приводятся величины относительных отклонений  $\varepsilon$  приближенных решений от известного решения в зависимости от густоты (количества узлов) сеток, построенных в прямоугольной области с вырезом (рис.1), для различных точек этой области.

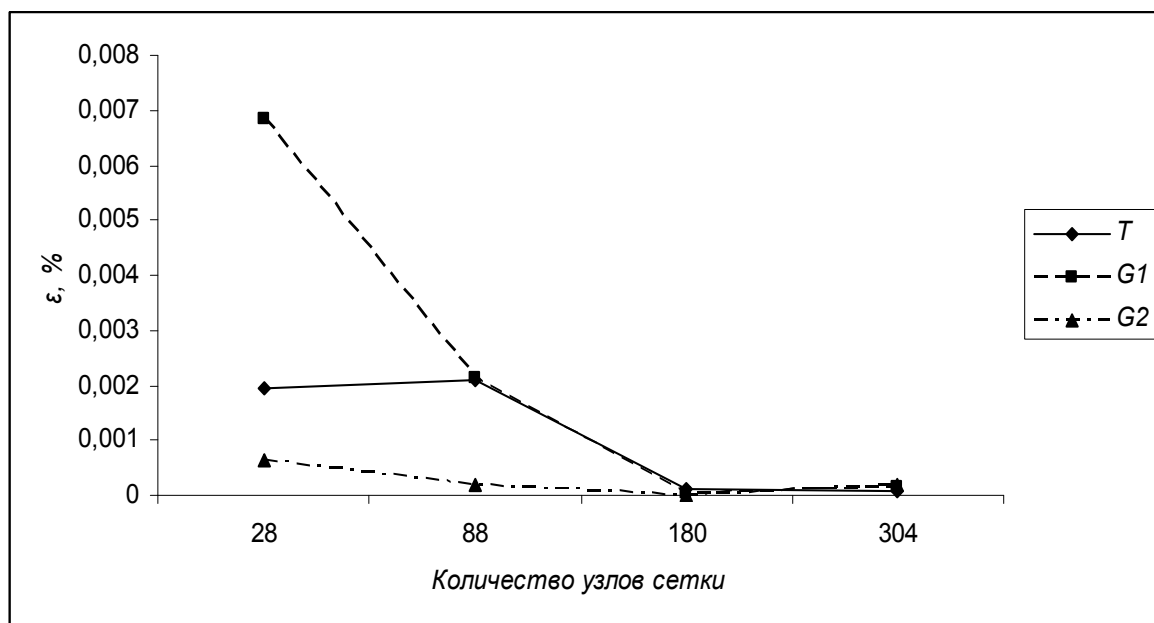


Рис. 2. Зависимость относительных погрешностей решений для  $T$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  в точке  $A(4,5; 10)$  от числа узлов.

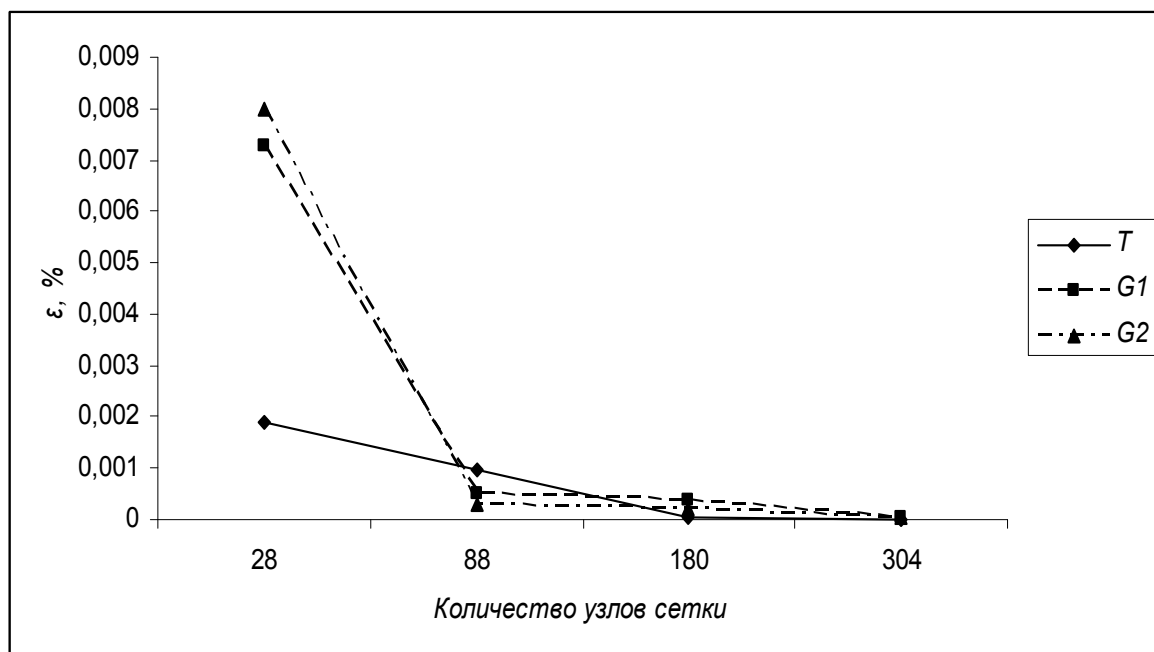


Рис. 3. Зависимость относительных погрешностей решений для  $T$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  в точке  $B(3,5; 12)$  от числа узлов.

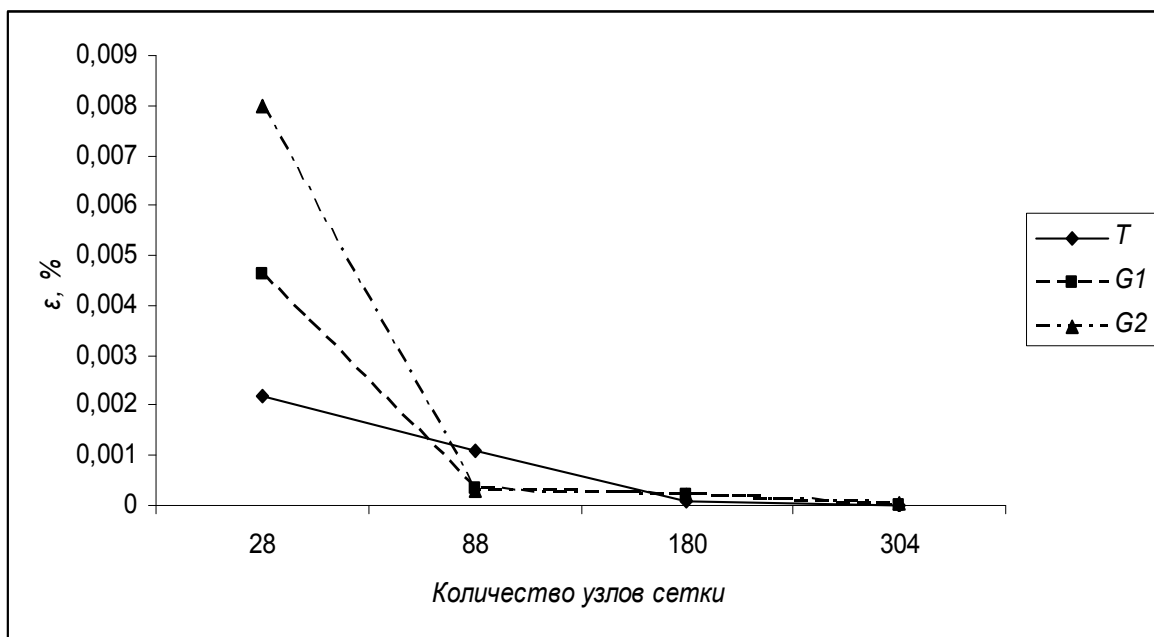


Рис. 4. Зависимость относительных погрешностей решений для  $T$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  в точке  $C (5,5; 12)$  от числа узлов.

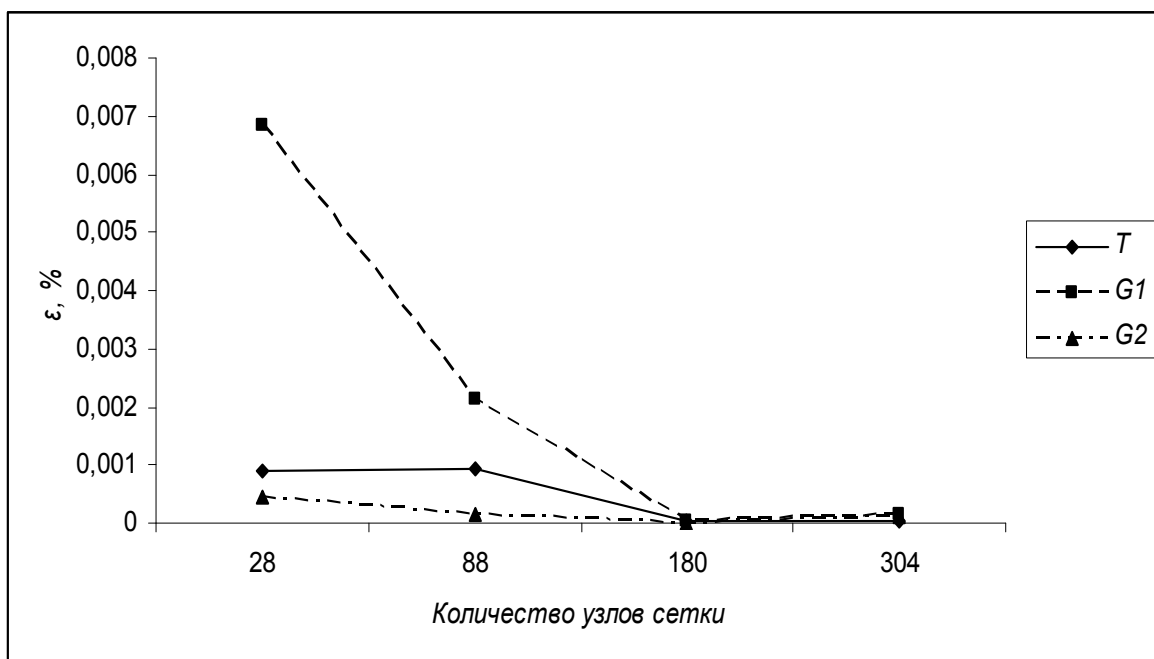


Рис. 5. Зависимость относительных погрешностей решений для  $T$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  в точке  $D (4,5; 14)$  от числа узлов.

В задаче о стационарном распределении температуры в Т-образной области (рис. 1) граничные условия:

$$T = 9 - y^2, \text{ при } x = 3; \quad T = 16 - y^2, \text{ при } x = 4;$$

$$T = 25 - y^2, \text{ при } x = 5; \quad T = 36 - y^2, \text{ при } x = 6;$$

$$G_1 = 2x, \quad G_2 = -18, \text{ при } y = 9; \quad G_1 = 2x, \quad G_2 = -28, \text{ при } y = 14;$$

$$G_1 = 2x, \quad G_2 = -30, \text{ при } y = 15;$$

выполнялись заранее в каждом узле границы. В таблице 1 приводятся величины относительных отклонений  $\varepsilon$  полученных для температуры и градиента температуры приближенных решений от известного решения в зависимости от густоты (количества узлов) сетки для различных точек области.

**Таблица 1.**

*Точность приближенных решений*

| Точки         | Количество узлов сетки | $\varepsilon(\tilde{T}),\%$ | $\varepsilon(\tilde{G}_1),\%$ | $\varepsilon(\tilde{G}_2),\%$ |
|---------------|------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| А (4,5; 9,5)  | 165                    | 0,000009763                 | 0,000490966                   | 0,000305266                   |
|               | 246                    | 0,000182678                 | 0,000182087                   | 0,000045855                   |
|               | 343                    | 0,000167100                 | 0,000032753                   | 0,000023146                   |
|               | 585                    | 0,000015633                 | 0,000051653                   | 0,000121977                   |
| В (3,5; 14,5) | 165                    | 0,000012541                 | 0,000314664                   | 0,000116454                   |
|               | 246                    | 0,000108315                 | 0,000271570                   | 0,000040377                   |
|               | 343                    | 0,000052586                 | 0,000280630                   | 0,000079237                   |
|               | 585                    | 0,000008984                 | 0,000047267                   | 0,000038602                   |
| С (4,5; 14,5) | 165                    | 0,000007047                 | 0,000051789                   | 0,000166872                   |
|               | 246                    | 0,000004924                 | 0,000089333                   | 0,000029937                   |
|               | 343                    | 0,000087488                 | 0,000316409                   | 0,000008538                   |
|               | 585                    | 0,000011059                 | 0,000061432                   | 0,000020352                   |
| D (5,5; 14,5) | 165                    | 0,000026088                 | 0,000298718                   | 0,000245903                   |
|               | 246                    | 0,000118162                 | 0,000008489                   | 0,000110646                   |
|               | 343                    | 0,000050416                 | 0,000085494                   | 0,000099014                   |
|               | 585                    | 0,000015732                 | 0,000075178                   | 0,000051020                   |

В задаче о распределении температуры в прямоугольной области с Т-образным вырезом (рис. 6), граничные условия:

$$\begin{aligned}
 &T = x^2 - 100, \text{ при } y = 10; \quad T = x^2 - 256, \text{ при } y = 16; \\
 &G_1 = 2, \quad G_2 = -2y, \text{ при } x = 1; \quad G_1 = 14, \quad G_2 = -2y, \text{ при } x = 7 \\
 &T = 9 - y^2, \text{ при } x = 3; \quad T = 16 - y^2, \text{ при } x = 4; \\
 &T = 25 - y^2, \text{ при } x = 5; \quad T = 36 - y^2, \text{ при } x = 6; \\
 &G_1 = 2x, \quad G_2 = -24, \text{ при } y = 12; \quad G_1 = 2x, \quad G_2 = -28, \text{ при } y = 14; \\
 &G_1 = 2x, \quad G_2 = -30, \text{ при } y = 15
 \end{aligned}$$

выполнялись заранее в каждом узле границы как главные условия.

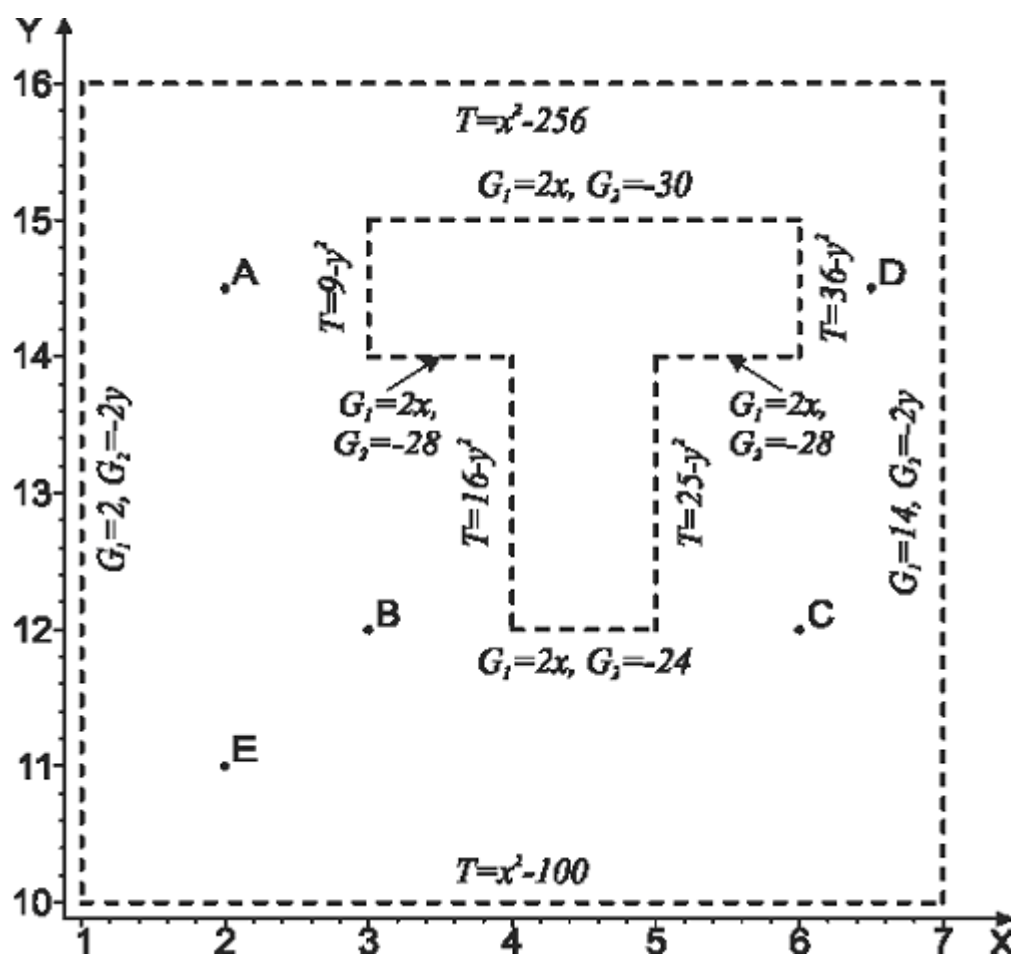


Рис. 6. Прямоугольная область с T-образным вырезом

В таблице 2 приводятся величины относительных отклонений  $\varepsilon$  полученных приближенных решений от известного решения в зависимости от густоты (количества узлов) сетки для различных точек области (рис.6).

Таблица 2.

Точность приближенных решений

| Точки       | Количество узлов сетки | $\varepsilon(\tilde{T}),\%$ | $\varepsilon(\tilde{G}_1),\%$ | $\varepsilon(\tilde{G}_2),\%$ |
|-------------|------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| A (2; 14,5) | 160                    | 0,000046827                 | 0,008254640                   | 0,001092172                   |
|             | 333                    | 0,000095524                 | 0,003050052                   | 0,000225365                   |
|             | 568                    | 0,000020493                 | 0,001569571                   | 0,000166134                   |
|             | 865                    | 0,000019803                 | 0,001255836                   | 0,000033304                   |
| B (3; 12)   | 160                    | 0,000373284                 | 0,002561938                   | 0,001767916                   |
|             | 333                    | 0,000230943                 | 0,001142274                   | 0,001142747                   |
|             | 568                    | 0,000061844                 | 0,001029537                   | 0,000323898                   |
|             | 865                    | 0,000089332                 | 0,000381872                   | 0,000370085                   |

|               |     |             |             |             |
|---------------|-----|-------------|-------------|-------------|
| C (6; 12)     | 160 | 0,000628490 | 0,000884510 | 0,001430922 |
|               | 333 | 0,000190757 | 0,000088116 | 0,000539912 |
|               | 568 | 0,000120707 | 0,000191076 | 0,000324209 |
|               | 865 | 0,000107470 | 0,000051573 | 0,000217265 |
| D (6,5; 14,5) | 160 | 0,000519415 | 0,004460777 | 0,000421591 |
|               | 333 | 0,000071723 | 0,001835401 | 0,000391605 |
|               | 568 | 0,000041317 | 0,000965513 | 0,000065303 |
|               | 865 | 0,000040629 | 0,000553324 | 0,000070723 |
| E (2; 11)     | 160 | 0,000626192 | 0,002132174 | 0,001193000 |
|               | 333 | 0,000242566 | 0,000380749 | 0,000744083 |
|               | 568 | 0,000099875 | 0,000356522 | 0,000403978 |
|               | 865 | 0,000095227 | 0,000224475 | 0,000264902 |

Решены также задачи о распределении скалярного поля температуры и векторного поля градиента температуры для областей с криволинейными границами – для круга без вырезов и для кольца с граничными условиями, поставленными на температуру и на градиент температуры (на различных участках границы). Результаты всех расчетов показали, что численный метод исследования математических моделей процессов теплопроводности дает приближенные решения не только для температуры, но и для ее градиента, одного порядка точности и одинаковой гладкости. По качеству приближенного решения для градиента температуры метод значительно превосходит классический метод решения краевых задач, основанный на вариационном принципе Лагранжа для одного функционального аргумента – температуры. В последнем методе после получения приближенного решения для температуры проводится его дифференцирование по  $x$  и по  $y$ , что приводит к снижению гладкости приближенного решения для градиента по сравнению с приближенным решением для температуры и в случае кусочно-билинейных финитных базисных функций порождает разрывы первого рода в приближенном решении для градиента температуры на границах конечных элементов. По сравнению с другим численным методом, также основанным на предложенном смешанном вариационном принципе, исследуемый численный метод дает существенное снижение требуемого объема оперативной памяти, снижает необходимое для получения приближенных решений число арифметических операций до уровня числа таких операций в методе, связанном с вариационным принципом Лагранжа.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Леонтьев В. Л. Ортогональные финитные функции и численные методы. – Ульяновск : УлГУ, 2003. – 178 с.

*Е. В. Котова, В. А. Кудинов, М. С. Тимофеев* (г. Самара)

## **ТЕПЛООБМЕН В ПЛАСТИНЕ С ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛОТЫ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ВТОРОГО РОДА**

*Для получения приближенных аналитических решений, эффективных в области малых значений временной координаты, известны методы, в которых исходное дифференциальное уравнение сводится к интегралу теплового баланса (интегральные методы теплового баланса). Эти методы позволяют получать простые по форме аналитические решения сложнейших линейных и нелинейных задач теплопроводности. Однако их существенным недостатком является низкая точность получаемых решений. В настоящей работе для решения этой проблемы вводятся дополнительные граничные условия, позволяющие в ряде случаев получать решения практически с заданной степенью точности.*

Получение аналитических решений задач теплопроводности с внутренними источниками теплоты при граничных условиях второго рода является сложной математической проблемой. Имеющиеся точные аналитические решения [1] представляются громоздкими функциональными рядами, содержащими несколько бесконечных сумм. Такие решения плохо сходятся в окрестностях малых значений временной и пространственной переменных, то есть в области их изменения, где для многих (и особенно быстропротекающих) процессов анализ закономерностей изменения температуры представляет наибольший интерес. Исследования, приведенные в [2], показывают, что для сходимости точного аналитического решения в диапазоне чисел  $10^{-12} \leq Fo \leq 10^{-7}$  необходимо использовать от 1000 ( $Fo = 10^{-7}$ ) до пятисот тысяч ( $Fo = 10^{-12}$ ) членов ряда. Подобные решения малоприменимы для инженерных приложений, и особенно в случаях, когда решение температурной задачи является промежуточной стадией исследования каких – либо других задач (например, задач термоупругости обратных задач и др.). В связи с чем, разработка более простых, хотя бы и приближенных аналитических решений, имеющих достаточную для инженерных приложений точность, является актуальной проблемой.

Рассмотрим использование интегрального метода теплового баланса применительно к решению задачи теплопроводности для бесконечной пластины с внутренним источником теплоты при симметричных граничных условиях второго рода. Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид



$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\omega}{c\gamma} \quad (\tau > 0; 0 \leq x \leq \delta); \quad (1)$$

$$T(\xi, 0) = T_0; \quad (2)$$

$$\nu = -\lambda \partial T(0, \tau) / \partial x; \quad (3)$$

$$\partial T(\delta, \tau) / \partial x = 0, \quad (4)$$

где  $T$  (К) – температура;  $x$  (м) – координата;  $\tau$  (с) – время;  $a$  (м<sup>2</sup>/с) – коэффициент температуропроводности;  $\nu$  (Вт/м<sup>2</sup>) – тепловой поток;  $\omega$  (Вт/м<sup>3</sup>) – удельная мощность внутреннего источника теплоты;  $c$  (Дж/кг·К) – удельная изохорная теплоемкость;  $\gamma$  (кг/м<sup>3</sup>) – плотность;  $T_0$  (К) – начальная температура;  $\delta$  (м) – половина толщины пластины;  $\lambda$  (Вт/м·К) – коэффициент теплопроводности.

Для приведения задачи (1) – (4) к безразмерному виду введем следующие безразмерные переменные и параметры

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_{cp} - T_0}; \quad Fo = \frac{a\tau}{\delta^2}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad Ki = \frac{\nu\delta}{\lambda(T_{cp} - T_0)}; \quad Po = \frac{\omega\delta^2}{\lambda(T_{cp} - T_0)},$$

где  $\Theta(\xi, Fo)$  – относительная избыточная температура;  $Fo$  – число Фурье;  $\xi$  – безразмерная координата;  $Ki$  – критерий Кирпичева;  $Po$  – критерий Померанцева;  $T_{cp}$  – температура среды.

С учетом принятых обозначений задача (1) – (4) принимает вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + Po \quad (Fo > 0; 0 \leq \xi \leq 1); \quad (5)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad (6)$$

$$-\partial \Theta(0, Fo) / \partial \xi = Ki; \quad (7)$$

$$\partial \Theta(1, Fo) / \partial \xi = 0. \quad (8)$$

С целью упрощения процесса получения аналитического решения задачи (5) – (8) процесс теплообмена разделим на две стадии по времени:  $0 \leq Fo \leq Fo_1$  и  $Fo_1 \leq Fo < \infty$ . Для этого введем движущуюся во времени границу (фронт температурного возмущения), разделяющую область  $0 \leq \xi \leq 1$  на две подобласти  $0 \leq \xi \leq q_1(Fo)$  и  $q_1(Fo) \leq \xi \leq 1$ , где  $q_1(Fo)$  – функция, определяющая продвижение границы раздела во времени (рис. 1). При этом в области, расположенной за фронтом теплового возмущения, температура изменяется лишь под действием внутреннего источника теплоты. Первая стадия процесса заканчивается при достижении движущейся границей центра пластины ( $\xi = 1$ ), то есть когда  $Fo = Fo_1$ . Во второй стадии процесса изменение температуры происходит по всему объему тела ( $0 \leq \xi \leq 1$ ). Здесь вводится в рассмотрение дополнительная искомая функция  $q_2(Fo) = \Theta(1, Fo)$ ,

характеризующая изменение температуры во времени в центре пластины [2, 3].

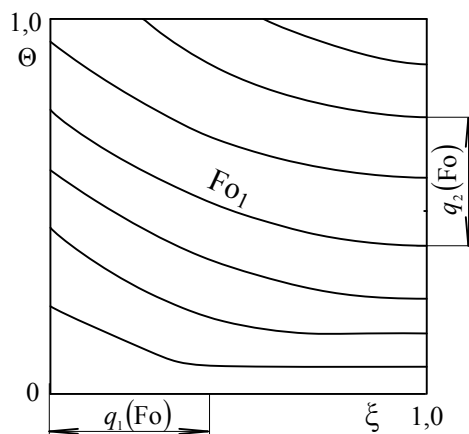


Рис. 1. Расчетная схема теплообмена

Разделение процесса теплопроводности на два взаимосвязанных процесса позволяет существенно упростить последовательность получения решения задачи, так как в данном случае на каждой стадии оказывается возможным применение метода аппроксимационного представления приближенного решения с определением любого числа его слагаемых. При определении неизвестных коэффициентов решения возникает необходимость использования дополнительных граничных условий [2, 3].

Математическая постановка задачи для первой стадии процесса имеет вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + Po \quad (0 \leq Fo \leq Fo_1; \quad 0 \leq \xi \leq q_1(Fo)); \quad (9)$$

$$-\partial \Theta(0, Fo) / \partial \xi = Ki; \quad (10)$$

$$\Theta(q_1, Fo) = PoFo; \quad (11)$$

$$\partial \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi = 0. \quad (12)$$

Отметим, что задача (9) – (12) не содержит начального условия вида (6). Это связано с тем, что на первой стадии процесса задача (9) – (12) за пределами фронта температурного возмущения вообще не определена, а температура непосредственно на фронте будет

$$\Theta(q_1, Fo) = \int_0^{Fo} Po dFo = PoFo, \quad (13)$$

и, следовательно, должно выполняться граничное условие (11).

Ввиду того, что за пределами фронта температурного возмущения температурные градиенты отсутствуют, то непосредственно на фронте должно также выполняться граничное условие отсутствия теплообмена вида (12). Кроме того, в задаче (9) – (12) отсутствует граничное условие вида (8), так как оно не влияет на процесс теплообмена в первой его стадии.

Потребуем, чтобы искомое решение удовлетворяло не исходному уравнению (9), а осредненному по толщине термического слоя, т. е.

$$\int_0^{q_1} \left[ \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} \partial \xi - Po \right] \partial \xi = \int_0^{q_1} \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} d\xi.$$

Определяя интегралы, получаем

$$\int_0^{q_1} \frac{\Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} \partial \xi - Po q_1 = \frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi} - \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi}.$$

С учетом (12), находим

$$\int_0^{q_1} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} \partial \xi - Po q_1 = - \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi}. \quad (14)$$

Подставляя (10) в (14), приходим к следующего вида интегралу теплового баланса

$$\int_0^{q_1} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} \partial \xi = Ki + Po q_1. \quad (15)$$

Решение задачи (9) – (12) разыскивается в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^n a_k(q_1) \xi^k, \quad (16)$$

где  $a_k(q_1)$  – неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий (10) – (12) (при  $n = 2$ ). После их нахождения соотношение (16) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = PoFo + Ki(0,5q_1 - \xi + 0,5\xi^2/q_1). \quad (17)$$

Подставляя (17) в (15), относительно неизвестной функции  $q_1(Fo)$  приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению.

$$q_1(Fo)dq_1(Fo) = 3dFo. \quad (18)$$

Интегрируя уравнение (18), при начальном условии  $q_1(0) = 0$  получаем (при  $Ki = Po = 1$ )

$$q_1(Fo) = \sqrt{6Fo}. \quad (19)$$

Положив в (19)  $q_1(Fo_1) = 1$ , находим время окончания первой стадии процесса  $Fo_1 = 0,2$ .

Соотношения (17), (19) представляют решение задачи (9) – (12) в первом приближении. Результаты расчетов по формуле (17) даны на рис. 2.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что соотношение (17) точно удовлетворяет граничным условиям (10) – (12) и интегралу теплового баланса (15). Уравнение (9), как это следует из (15), в данном случае удовлетворяется лишь в среднем.

Повышение точности решения связано с увеличением числа членов ряда (16). Появляющиеся при этом неизвестные коэффициенты находятся из дополнительных граничных условий. Для их получения продифференцируем

уравнение (9) по переменной  $\xi$ , а граничные условия (10) – (12) по переменной  $Fo$  [2 – 4]

$$\frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo \partial \xi} = \frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^3}; \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi \partial Fo} = 0; \quad (21)$$

$$\frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial Fo} = Po; \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi \partial Fo} = 0. \quad (23)$$

Сравнивая (20) и (21), применительно к точке  $\xi = 0$  получаем первое дополнительное граничное условие

$$\partial^3 \Theta(0, Fo) / \partial \xi^3 = 0. \quad (24)$$

Сравнивая уравнение (9) и соотношение (22), применительно к точке  $\xi = q_1(Fo)$  получаем второе дополнительное граничное условие

$$\partial^2 \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi^2 = 0. \quad (25)$$

Сравнивая (20) и (23), применительно к точке  $\xi = q_1(Fo)$  получаем третье дополнительное граничное условие

$$\partial^3 \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi^3 = 0. \quad (26)$$

Дополнительные граничные условия (24) – (26) будут использованы ниже для получения решения задачи (9) – (12) во втором приближении.

Для получения последующих дополнительных граничных условий необходимо продифференцировать соотношение (20) один раз и дважды по переменной  $\xi$ , а соотношения (24) – (26) – один раз по переменной  $Fo$ . Сравнивая получающиеся при этом соотношения, получаем следующие три дополнительные граничные условия

$$\frac{\partial^5 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^5} = 0; \quad (27)$$

$$\frac{\partial^4 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi^4} = 0; \quad (28)$$

$$\frac{\partial^5 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi^5} = 0. \quad (29)$$

Дополнительные граничные условия (27) – (29) могут быть использованы для получения решения задачи (9) - (12) в третьем приближении. Отметим, что в каждом приближении необходимо использовать три дополнительных граничных условия (одно – при  $\xi = 0$  и два – при  $\xi = q_1(Fo)$ ). Использование

меньшего их количества не приводит к заметному повышению точности в каждом последующем приближении по сравнению с предыдущим.

Таким образом, многократно дифференцируя уравнение (9) по переменной  $\xi$ , а основные и дополнительные граничные условия по переменной  $Fo$ , можно получить какое угодно число дополнительных граничных условий. Их физический смысл – выполнение уравнения (9) и производных от него различного порядка в точке  $\xi = 0$  и на фронте температурного возмущения  $\xi = q_1(Fo)$ . Ввиду того, что область изменения  $q_1(Fo)$  охватывает весь диапазон изменения пространственной переменной, то, следовательно, чем большее число дополнительных граничных условий будет использовано, тем лучше будет выполняться дифференциальное уравнение (9) внутри рассматриваемой области.

Во втором приближении, используя основные (10) – (12) и дополнительные (24) – (26) граничные условия, можно определить уже шесть неизвестных коэффициентов  $a_k(q_1)$  ( $k = \overline{0,5}$ ) из (16). Подставляя (16) во все перечисленные граничные условия, относительно  $a_k(q_1)$  будем иметь систему шести цепочных алгебраических линейных уравнений, из которой все неизвестные коэффициенты легко могут быть определены. Подставляя найденные из решения этой системы коэффициенты  $a_k(q_1)$  ( $k = \overline{0,5}$ ) в (16), получаем

$$\Theta(\xi, Fo) = Ki \left( \frac{q_1}{10} + \frac{Po}{Ki} Fo - \xi + \frac{\xi^2}{q_1} - \frac{1}{2} \frac{\xi^4}{q_1^3} + \frac{1}{5} \frac{\xi^5}{q_1^4} \right). \quad (30)$$

Подставляя (30) в (15), находим

$$q_1(Fo) dq_1(Fo) = 7,5 dFo. \quad (31)$$

Отметим, что дифференциальные уравнения относительно  $q_1(Fo)$  в первом и втором приближениях отличаются лишь коэффициентом в первом слагаемом левой части этих уравнений.

Решение уравнения (31) имеет вид ( $Po = Ki = 1$ )

$$q_1(Fo) = \sqrt{15Fo}. \quad (32)$$

Время окончания первой стадии процесса, определяемого из условия  $q_1(Fo_1) = 1$ , в данном случае будет  $Fo_1 = 0,067$ .

Графики движения фронта температурного возмущения по координате  $\xi$  во времени, полученные по формулам (19), (32), приведены на рис. 4.

Анализ невязки уравнения (9), изменение которой дано на рис. 5, позволяет заключить, что в диапазоне  $0,01 \leq Fo \leq Fo_1$  ее величина не превышает  $\varepsilon = 0,2$ .

Отметим, что время  $Fo_1$  достижения фронтом температурного возмущения координаты  $\xi = 1$  в каждом последующем приближении

уменьшается. И в пределе при  $n \rightarrow \infty$   $Fo_1 \rightarrow 0$ , что полностью согласуется с условием бесконечной скорости распространения теплового возмущения, лежащем в основе вывода параболического уравнения теплопроводности (9).

Соотношения (30), (32) представляют решение задачи (9) – (12) во втором приближении. Результаты расчетов по формуле (30) даны на рис. 2, 3.

Вторая стадия теплового процесса, соответствующая времени  $Fo \geq Fo_1$ , характеризуется изменением температуры уже по всему сечению пластины вплоть до наступления стационарного состояния. Для этой стадии понятие фронта температурного возмущения теряет смысл, и в качестве дополнительной искомой функции принимается функция  $q_2(Fo) = \Theta(1, Fo)$ , характеризующая изменение температуры от времени в центре пластины (рис. 1).

Математическая постановка задачи в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + Po \quad (Fo \geq Fo_1; \quad 0 \leq \xi \leq 1); \quad (33)$$

$$-\partial \Theta(0, Fo)/\partial \xi = Ki; \quad (34)$$

$$\Theta(1, Fo) = q_2(Fo); \quad (35)$$

$$\partial \Theta(1, Fo)/\partial \xi = 0. \quad (36)$$

Начальным условием задачи (33) – (36) в первом приближении будет соотношение (17) при  $Fo = Fo_1$  и, следовательно,  $q_1(Fo_1) = 1$ . Соотношение (17) при этом примет вид

$$\Theta(\xi, Fo_1) = PoFo_1 + Ki(0,5 - \xi + 0,5\xi^2). \quad (37)$$

Однако в специальном выполнении начального условия (37) нет необходимости ввиду того, что при  $Fo = Fo_1$ ,  $q_2(Fo_1) = PoFo_1$  (что следует соотношения (37) при  $\xi = 1$ ) и математические постановки задач (9) – (12) и (33) – (36) в этом случае полностью совпадают. Таким путем происходит плавный переход от первой стадии процесса ко второй без необходимости выполнения начального условия (37), так как решение задачи (33) – (36) в конечном итоге будет удовлетворять этому условию.

Интеграл теплового баланса в данном случае будет

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial Fo} \Theta(\xi, Fo) d\xi = Ki + Po. \quad (38)$$

Решение задачи (33) – (36) принимается в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^n b_k(q_2) \xi^k, \quad (39)$$

где  $b_k(q_2)$  – неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий (34) – (36). Подставляя (39) в (34) – (36), относительно коэффициентов  $b_k(q_2)$  ( $k = \overline{0,2}$ ) получаем систему трех цепочных алгебраических линейных уравнений. После нахождения  $b_k(q_2)$  соотношение (39) приводится к виду

$$\Theta(\xi, Fo) = Ki \left( \frac{1}{2} + \frac{q_2}{Ki} - \xi + \frac{\xi^2}{2} \right). \quad (40)$$

Подставляя (40) в (38), относительно неизвестной функции  $q_2(Fo)$  получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d q_2}{d Fo} = Po + Ki. \quad (41)$$

Интегрируя уравнение (41), при начальном условии  $q_2(Fo_1) = PoFo_1$  находим

$$q_2(Fo) = (Po + Ki)Fo - Fo_1Ki. \quad (42)$$

Соотношения (40), (42) представляют решение задачи (33) – (36) в первом приближении. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что граничные условия (34) – (36), начальное условие (37) и интеграл теплового баланса решением (40) удовлетворяются точно. Уравнение (33) в данном случае удовлетворяется лишь в первом приближении.

Результаты расчетов по формуле (40) даны на рис. 3.

Для повышения точности решения следует увеличивать число членов ряда (39), что связано с необходимостью использования дополнительных граничных условий, которые находятся аналогично тому, как были найдены дополнительные граничные условия для первой стадии процесса. И, в частности, для получения решения задачи (33) – (36) во втором приближении дополнительные граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3} = 0; \quad \frac{\partial q_2(Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^2} + Po; \quad \frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^3} = 0. \quad (43)$$

Подставляя (39) в основные (34) – (36) и дополнительные (43) граничные условия, относительно неизвестных коэффициентов  $b_k(q_2)$  ( $k = \overline{0,5}$ ) получим систему шести цепочных алгебраических линейных уравнений. После определения из решения этой системы неизвестных коэффициентов  $b_k(q_2)$  соотношение (39) принимает вид

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, Fo) = & \frac{3}{10} Ki - \frac{7}{40} Po + \frac{q'_2}{5} + q_2 - Ki\xi + \left( Ki + \frac{5}{12} Po - \frac{q'_2}{2} \right) \xi^2 + \\ & + \left( -\frac{Ki}{2} - \frac{3}{8} Po + \frac{q'_2}{2} \right) \xi^4 + \left( \frac{Ki}{5} + \frac{2}{15} Po - \frac{q'_2}{5} \right) \xi^5, \end{aligned} \quad (44)$$

где  $q'_2(Fo) = \frac{\partial q_2(Fo)}{\partial Fo}$ .

Подставляя (44) в (38), относительно неизвестной функции  $q_2(Fo)$  получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{10} \frac{d^2 q_2(Fo)}{d Fo^2} + \frac{d q_2(Fo)}{d Fo} = Po + Ki. \quad (45)$$

Начальные условия для функции  $q_2(Fo)$  будут

$$q_2(Fo_1) = PoFo_1 ; \quad \frac{d q_2(Fo_1)}{d Fo} = Po, \quad (46)$$

где  $Fo_1 = 0,09428$  – время окончания первой стадии во втором приближении.

Интегрируя уравнение (45), при  $Po = Ki = 1$  находим

$$q_2(Fo) = 2Fo + C_1 + C_2 \exp(-10Fo), \quad (47)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – константы интегрирования, определяемые из начальных условий (46). Формулы для них имеют вид

$$C_1 = -0,1 - Fo_1; \quad C_2 = 0,1 \exp(10Fo_1). \quad (48)$$

Подставляя (48) в (47), с учетом известного значения  $Fo_1$  находим

$$q_2(Fo) = 2Fo - 0,163 + 0,187761 \exp(-10Fo). \quad (49)$$

Соотношения (44), (49) представляют решение задачи (33) – (36) во втором приближении (при  $Po = Ki = 1$ ).

Результаты расчетов по формуле (44) даны на рис. 3. Их анализ позволяет заключить, что отличие решений в первом (по формуле (40)) и втором приближениях не превышает 8%.

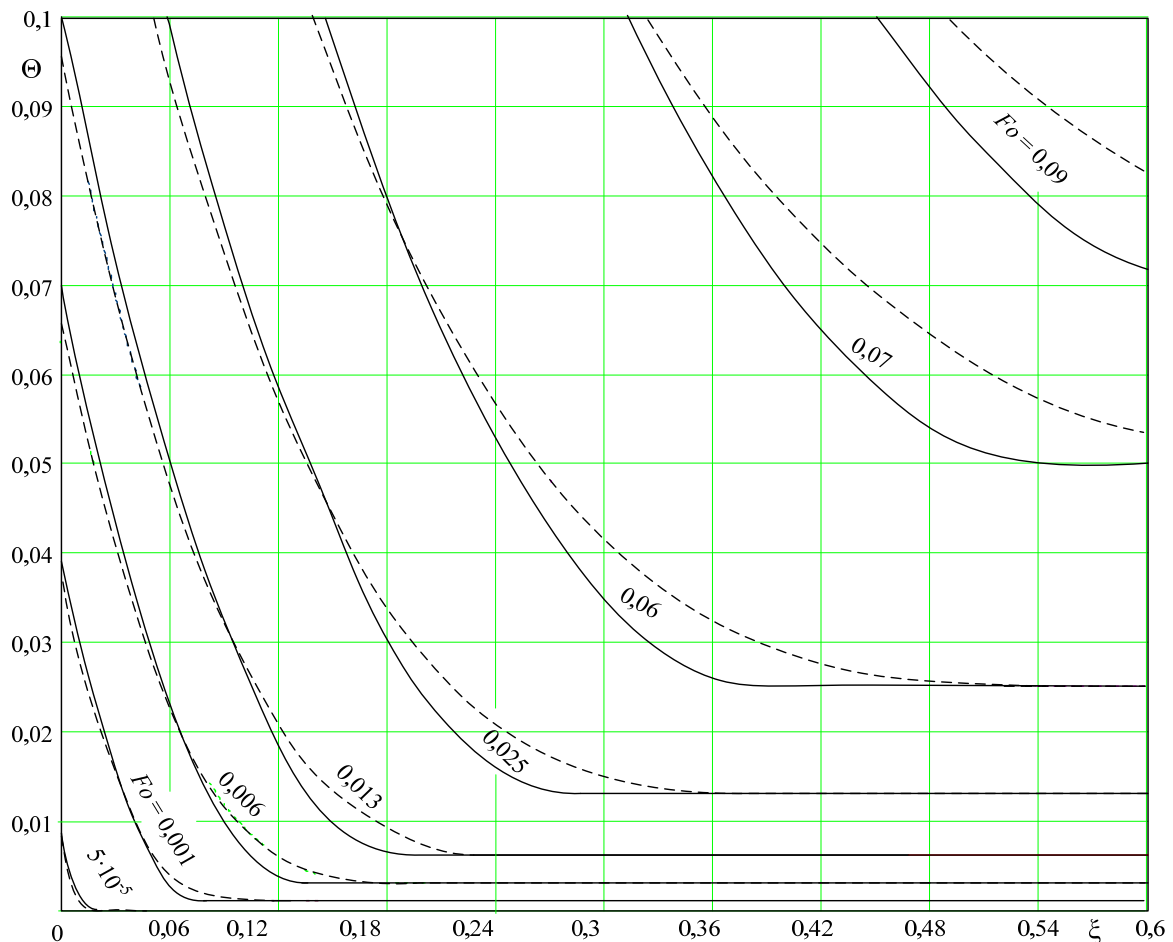


Рис. 2. Изменение температуры в пластине с внутренним источником теплоты ( $Po = Ki = 1$ ). — — — — по формуле (17); — — — — по формуле (30).



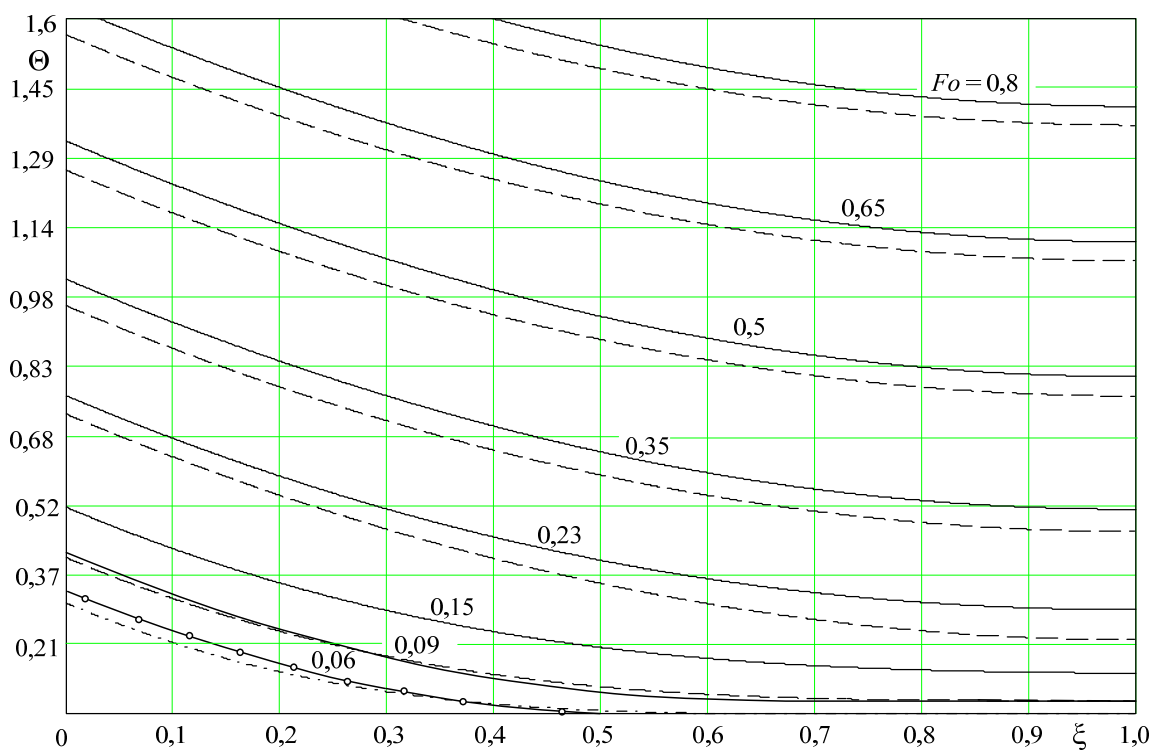


Рис. 3. Изменение температуры в пластине с внутренним источником теплоты ( $Po = Ki = 1$ ). — по формуле (42); — — — — по формуле (44); —○— по формуле (17); - · - · - по формуле (30).

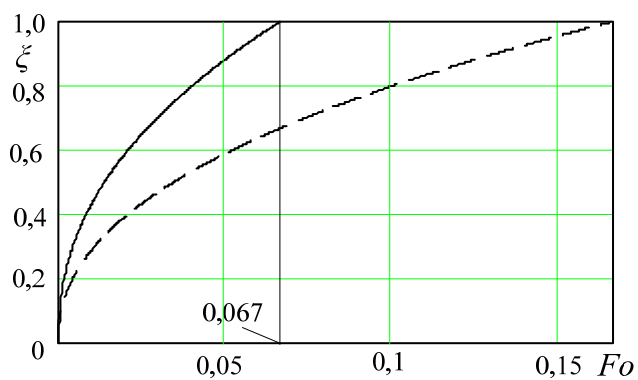


Рис. 4. Перемещение фронта температурного возмущения  $q_1(Fo)$  по координате  $\xi$  во времени  $Fo$ . — — — — по формуле (19); — по формуле (32).

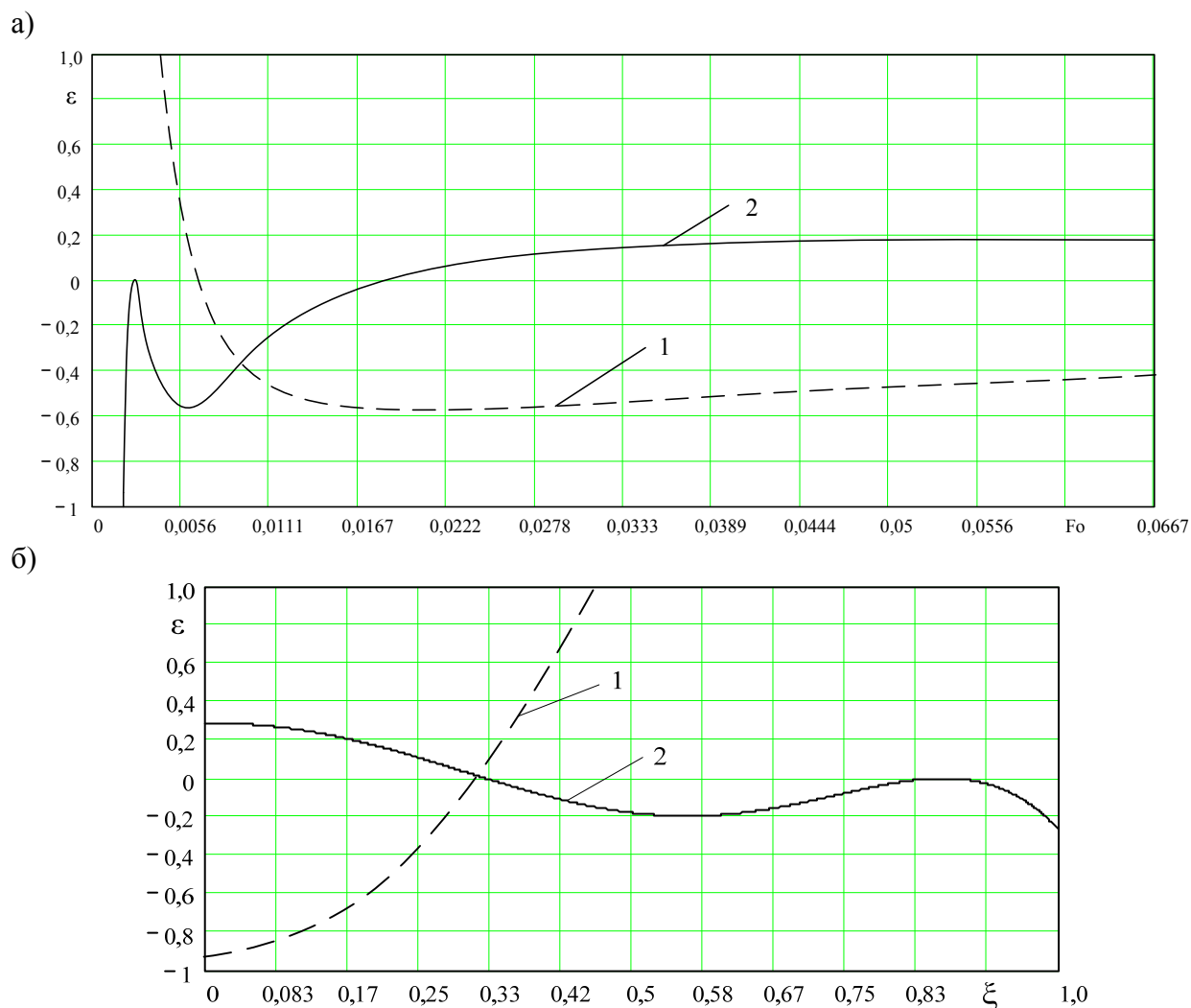


Рис. 5. Изменение невязки уравнения (9) а – по времени ( $\zeta = 0,2$ ), б – по координате ( $Fo = 0,05$ ). 1 – первое приближение; 2 – второе приближение.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600с.
2. Кудинов В. А., Карташов Э. М., Стефанюк Е. В. Техническая термодинамика и теплопередача. – М.: Издательство Юрайт, 2011. – 560 с.
3. Кудинов В. А., Кудинов И. В. Методы решения параболических и гидравлических уравнений теплопроводности. – М.: Книжный дом «Либроком», 2012. – 280 с.
4. Кудинов И. В., Стефанюк Е. В., Ларгина Е. В. Построение приближенных аналитических решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений на основе использования дополнительных граничных условий // Вестник СамГТУ. Сер. Физ. – мат. науки. – Самара, 2009. – №1(18). – С. 122-133.

**П. С. Красильников** (г. Москва)

## **О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ МАЯТНИКА ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ НА ВИБРИРУЮЩЕМ ОСНОВАНИИ**

*Описана обобщенная схема усреднения системы с несколькими малыми независимыми параметрами: получены уравнения первого и второго приближений, оценка точности приближения и величина асимптотически большого интервала времени. Рассмотрена задача о колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании при больших частотах вибраций и малых амплитудах гармонических колебаний длины маятника и точки его подвеса. Получены усредненные уравнения первого и второго приближений, описаны бифуркации стационарных режимов в уравнениях первого приближения, а также во втором приближении при резонансе 1:2. Описана одна из возможных перестроек фазового портрета в окрестности резонанса 1:2 на основе численного исследования. Показано, что изменение параметра резонансной расстройки от нуля до величины первого порядка малости по малому параметру ведет к стабилизации верхнего положения равновесия через расщепление сепаратрисы для резонансного случая, сопровождающееся появлением стохастической паутины в окрестности этого равновесия, ее локализации, последующего стягивания в точку равновесия и формирования новой зоны колебаний.*

**1. Введение. Усреднение стандартной системы.** Число малых параметров во многих прикладных задачах может быть достаточно большим, как, например, в задаче о движении планет солнечной системы, в задачах динамики авиационных систем и космических аппаратов разного назначения. Поскольку методы теории возмущений разработаны для случая одного малого параметра, используют редукцию, сводящую исходную задачу к случаю одного параметра. Так, если число малых параметров  $\varepsilon_j$  равно трем, полагают, к примеру,  $\varepsilon_1 = k_1 \varepsilon_3$ ,  $\varepsilon_2 = k_2 \varepsilon_3$ , считая  $\varepsilon_3$  независимой величиной, а  $k_1$  и  $k_2$  – свободными параметрами, порядка единицы (можно рассмотреть также любое двухпараметрическое семейство кривых, покрывающее трехмерное пространство параметров  $\varepsilon_j$ ). Уравнения движения содержат  $k_1$  и  $k_2$  как дополнительные величины, меняя которые непрерывным образом можно исследовать влияние малых параметров на характер движения системы, применяя классические методы теории возмущений.

Однако существует класс задач, для которых редукция малоэффективна, так как ведет к семейству укороченных уравнений, когда переход из одной области фазового пространства в другую сопряжен с вопросами стыковки

решений этих уравнений. При редукции невозможно исследовать бифуркации решений усредненных уравнений, за исключением частного случая, когда семейство кривых редукции покрывает бифуркационную поверхность.

Приведем описание метода усреднения для случая, когда система дифференциальных уравнений содержит  $m$  малых параметров  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ . Без ограничения общности полагаем, что все малые параметры принимают положительные значения. Будем также считать, что уравнения приведены к стандартному виду

$$\dot{x} = \sum_{|\gamma|=1} \varepsilon^\gamma X_\gamma(x, t) + \sum_{|\nu|=2} \varepsilon^\nu X_\nu(x, t) + \dots, \quad x \in R^n, \quad \gamma \in \Omega_\gamma, \quad \nu \in \Omega_\nu. \quad (1.1)$$

Введены следующие обозначения:  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ ,  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$  – векторные строки с целочисленными неотрицательными компонентами,  $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_m$ ,  $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_m$  ( $|\gamma| = 1$  и  $|\nu| = 2$  – первый и второй порядки малости соответствующих форм, зависящих от  $\varepsilon_j$ ),  $\varepsilon^\gamma = \varepsilon_1^{\gamma_1} \dots \varepsilon_m^{\gamma_m}$ ,  $\varepsilon^\nu = \varepsilon_1^{\nu_1} \dots \varepsilon_m^{\nu_m}$  – символические обозначения произведения степеней малых параметров (первого и второго порядка малости соответственно),  $X_\gamma(x, t)$ ,  $X_\nu(x, t)$  – векторные функции фазовой переменной  $x$  и времени  $t$ . Суммирование ведется по всем значениям  $\gamma$  и  $\nu$  из областей  $\Omega_\gamma$  и  $\Omega_\nu$ . Таким образом, в правой части уравнения (1.1) выписаны линейные и квадратичные (по малым параметрам  $\varepsilon_j$ ) члены, в то время как члены более высокого порядка малости представлены многоточием.

Для примера, рассмотрим случай  $m = 3$ ,  $x \in R^1$ , когда уравнение (1.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} = & \varepsilon_1 X_{100}(x, t) + \varepsilon_3 X_{001}(x, t) + \varepsilon_1^2 X_{200}(x, t) + \varepsilon_2^2 X_{020}(x, t) + \\ & + \varepsilon_1 \varepsilon_2 X_{110}(x, t) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 X_{011}(x, t) + \dots \end{aligned}$$

Векторы  $\nu$  и  $\gamma$  пробегают множество значений  $\Omega_\nu = \{200, 020, 110, 011\}$  и  $\Omega_\gamma = \{100, 001\}$  соответственно; эти множества не содержат значений 010, 002, и 101, так как члены правой части, отвечающие им, отсутствуют.

Ищем замену переменных  $x \rightarrow y$  в виде обобщенного ряда Крылова – Боголюбова

$$x = y + \sum_{|\gamma|=1} \varepsilon^\gamma u_\gamma(y, t) + \sum_{|\nu|=2} \varepsilon^\nu u_\nu(y, t) + \dots \quad (1.2)$$

при условии, что преобразованные уравнения имеют автономный вид

$$\dot{y} = \sum_{|\gamma|=1} \varepsilon^\gamma Y_\gamma(y) + \sum_{|\nu|=2} \varepsilon^\nu Y_\nu(y) + \dots \quad (1.3)$$

Заметим, что в равенствах (1.2) и (1.3), в отличие от уравнения (1.1), вектора  $\gamma$  и  $\nu$  могут принимать значения, не принадлежащие множествам  $\Omega_\gamma$ ,  $\Omega_\nu$ . В сравнении с классическим случаем одного малого параметра [1, 2] число неизвестных функций  $u_k(x, t)$  (так же как и функций  $Y_k(y)$ ) резко возрастает, поэтому возрастает и объем вычислений. Тем не менее, построение обобщенных рядов решений не ведет к принципиальным осложнениям, но имеет специфику, связанную с оценкой точности приближения и построения асимптотически больших промежутков времени.

Дифференцируем по времени равенство (1.2):

$$\begin{aligned} \dot{x} = & \sum_{|\gamma|=1} \varepsilon^\gamma \left( Y_\gamma(y) + \frac{\partial u_\gamma(y, t)}{\partial t} \right) + \sum_{|\nu|=2} \varepsilon^\nu \left( Y_\nu(y) + \frac{\partial u_\nu(y, t)}{\partial t} \right) + \\ & + \sum_{|\nu_*|=2} \varepsilon^{\nu_*} \left( \sum_{|\gamma|=1} \frac{\partial u_\gamma(y, t)}{\partial y} Y_{\nu_*-\gamma}(y) \right) + \dots \end{aligned}$$

Было использовано равенство

$$\left( \sum_{|\gamma_1|=1} \varepsilon^{\gamma_1} \frac{\partial u_{\gamma_1}}{\partial y} \right) \left( \sum_{|\gamma_2|=1} \varepsilon^{\gamma_2} Y_{\gamma_2} \right) = \sum_{|\nu_*|=2} \varepsilon^{\nu_*} \sum_{|\gamma|=1} \frac{\partial u_\gamma}{\partial y} Y_{\nu_*-\gamma}$$

следующее из формулы Коши перемножения рядов и равенства  $\gamma_1 + \gamma_2 = \nu_*$ . Суммирование ведется по всем векторам  $\nu_*$ , допускающим разложение на слагаемые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

Отметим, что в формулах, содержащих индекс  $\nu_*$ , суммирование по  $\gamma$  (при фиксированном  $\nu_*$ ) ведется по всем векторам  $\gamma$ , для которых существует дополнительный вектор  $\gamma_\alpha$ , такой, что  $\gamma + \gamma_\alpha = \nu_*$ . Если формулы содержат члены  $\varepsilon^\gamma X_\gamma(y, t)$  и их производные, то необходимо потребовать выполнения дополнительного условия  $\gamma \in \Omega_\gamma$ , так как уравнение (1.1) накладывает указанные ограничения на члены  $\varepsilon^\gamma X_\gamma(y, t)$  и их производные. Это замечание касается также выражений вида  $\varepsilon^\nu X_\nu(y, t)$ , для которых  $\nu \in \Omega_\nu$ .

Выражение для  $\dot{x}$  представляет собой левую часть уравнения (1.1) в новых переменных. Получим выражение для правой части. Для этого подставим вместо  $x$  выражение (1.2) и разложим правую часть в ряд в окрестности точки  $x = y$ :

$$\begin{aligned} & \sum'_{|\gamma|=1} \varepsilon^\gamma X_\gamma \left( y + \sum_{|\gamma|=1} \varepsilon^\gamma u_\gamma(y, t) + \dots, t \right) + \\ & + \sum'_{|\nu|=2} \varepsilon^\nu X_\nu \left( y + \sum_{|\gamma|=1} \varepsilon^\gamma u_\gamma(y, t) + \dots, t \right) + \dots = \end{aligned}$$

$$= \sum'_{|\gamma|=1} \varepsilon^\gamma X_\gamma(y, t) + \sum_{|\nu^*|=2} \varepsilon^{\nu^*} \sum_{|\gamma|=1} \left( \frac{\partial X_\gamma}{\partial x} \right)_0 u_{\nu^*-\gamma} + \sum'_{|\nu|=2} \varepsilon^\nu X_\nu(y, t) + \dots$$

Штрих у знака суммы означает, что суммирование ведется по векторам  $\gamma$  или  $\nu$ , удовлетворяющим условиям  $|\gamma|=1$ ,  $\gamma \in \Omega_\gamma$  и  $|\nu|=2$ ,  $\nu \in \Omega_\nu$ . Нулевой индекс означает, что выражение вычисляется при  $\varepsilon = 0$ .

Приравнявая левую часть правой, получим, после отождествления коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра, систему уравнений первого и второго приближения относительно  $u_\gamma(y, t)$ ,  $Y_\gamma(y, t)$  и  $u_\nu(y, t)$ ,  $Y_\nu(y, t)$  соответственно:

$$\varepsilon^\gamma : Y_\gamma(y) + \frac{\partial u_\gamma(y, t)}{\partial t} = X_\gamma(y, t), \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^\nu : Y_\nu(y) + \frac{\partial u_\nu(y, t)}{\partial t} &= X_\nu(y, t) + \sum'_{|\gamma|=1} \left( \frac{\partial X_\gamma}{\partial x} \right)_0 u_{\nu-\gamma}(y, t) - \\ &- \sum_{|\gamma|=1} \frac{\partial u_\gamma(y, t)}{\partial y} Y_{\nu-\gamma}(y). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Заметим, что в этих равенствах векторы  $\gamma$  и  $\nu$  могут принимать произвольные значения, но с некоторыми оговорками. Так, правая часть уравнения (1.4) формальна записана для любых  $\gamma$ , но реально она отлична от нуля только при  $\gamma \in \Omega_\gamma$ . При вычислении членов правой части уравнения (1.5) необходимо учитывать, что функция  $X_\nu(y, t)$  отлична от нуля только в случае  $\nu \in \Omega_\nu$ , суммирование по  $\gamma$  ведется для любых фиксированных значений  $\nu$ , но при условии, что  $\nu = \gamma + \gamma_\alpha$ . При этом для первой суммы вектор  $\gamma$  обязан принадлежать множеству  $\Omega_\gamma$ , в то время как для второй суммы таких ограничений нет.

Если векторная функция  $X_\gamma(y, t)$  зависит от времени почти периодически равномерно по  $y$  и представима рядом Фурье, то искомую функцию  $u_\gamma(y, t)$  запишем в виде

$$\begin{aligned} u_\gamma(y, t) &= \int_0^t \tilde{X}_\gamma(y, t) dt + \Lambda_\gamma(y), \quad \tilde{X}_\gamma \\ &= X_\gamma(y, t) - \bar{X}_\gamma(y) = \sum_m X_\gamma^{(m)}(y) e^{i\lambda_m t}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $\Lambda_\gamma(y)$  – начальная функция,  $\{\lambda_m\} (m=1, 2, \dots)$  – спектр функции  $X_\gamma(y, t)$ .

Таким образом,

$$Y_\gamma(y) = \bar{X}_\gamma(y),$$

где

$$\bar{X}_\gamma(y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_\gamma(y, t) dt. \quad (1.7)$$

Аналогично поступаем с уравнением (1.5): раскладываем его правую часть в ряд Фурье по явно входящему времени, приравнивая осциллирующую часть ряда частной производной по времени от функции  $u_\gamma(y, t)$ . Будем иметь:

$$Y_\nu(y) = X_\nu(y, t) + \sum'_{|\gamma|=1} \left( \frac{\partial X_\gamma}{\partial x} \right)_0 u_{\nu-\gamma}(y, t) - \sum_{|\gamma|=1} \frac{\partial u_\gamma(y, t)}{\partial y} Y_{\nu-\gamma}(y). \quad (1.8)$$

Итак, первое приближение имеет вид

$$\dot{y} = \sum'_{|\gamma|=1} \varepsilon^\gamma \bar{X}_\gamma(y). \quad (1.9)$$

Второе приближение включает в себя члены второго порядка малости, что ведет к увеличению точности приближения. Уравнения второго приближения имеют вид

$$\dot{y} = \sum'_{|\gamma|=1} \varepsilon^\gamma \bar{X}_\gamma(y) + \sum_{|\nu|=2} \varepsilon^\nu Y_\nu(y) \quad (1.10)$$

при условии, что векторная функция  $Y_\nu(y)$  вычисляется по формуле (1.8).

Возвращаясь к исходным переменным  $x$ , запишем приближенные решения уравнений (1.1). Первое приближение к искомому решению имеет вид

$$x = y(t, \varepsilon),$$

где  $y(t, \varepsilon)$  – решение уравнений (1.9). Второе приближение к искомому решению можно представить в форме

$$x = y(t, \varepsilon) + \sum_{|\gamma|=1} \varepsilon^\gamma u_\gamma(y(t, \varepsilon), t), \quad (1.11)$$

считая, что функция  $u_\gamma(y, t)$  вычислена ранее на этапе исследования первого приближения. Здесь  $y(t, \varepsilon)$  – решение уравнений (1.10).

## 2. Точность приближения. Обобщенная теорема Боголюбова.

Проблема точности приближения является центральной в методе усреднения. Она неразрывно связана с вопросом о величине интервала времени, на котором проводится сравнение решений усредненной и строгой систем дифференциальных уравнений. В классическом случае одного малого параметра точность  $k$ -го приближения есть  $\varepsilon^k$  ( $k$  – максимальный порядок удерживаемых членов правой части), а промежуток времени – величина порядка  $1/\varepsilon$ , так как характерным временем для системы уравнений в стандартной по Боголюбову форме является величина  $\varepsilon t \sim 1$ .

Иное дело, когда уравнения (1.1) содержат несколько параметров. Здесь нет единого характерного размера времени, нет априорной ясности относительно точности приближения, так как порядок малости функции, зависящей от нескольких параметров и времени, не определен. Восполним этот пробел, считая интервал сравнения  $T^*$  асимптотически большим, т.е. имеющим вид  $T^* = L / \alpha(\varepsilon)$  при условии, что  $\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$ , когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Известно, что скалярная функция  $q(\varepsilon)$  имеет  $k$ -й порядок малости по  $\varepsilon$ , если выполняется предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-k} q(\varepsilon) = A, \quad 0 < |A| < \infty, \quad A = \text{const}, \quad \varepsilon > 0.$$

*Следствие* [3]. Если  $q(\varepsilon) = O(\varepsilon^k)$ , то для любого сколь угодно малого  $\delta > 0$  существуют постоянные  $A_1(\delta) > 0$ ,  $A_2(\delta) > 0$ , такие, что при  $0 < \varepsilon \leq \delta$  функция  $q(\varepsilon)$  удовлетворяет условию полосы

$$A_1(\delta) \varepsilon^k \leq |q(\varepsilon)| \leq A_2(\delta) \varepsilon^k.$$

Обобщим этот результат на случай векторной функции, зависящей от  $m$  малых параметров и времени. Для этого введем дополнительные вектор  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_m)$  с положительными компонентами  $\delta_j$  и вектор  $s = (s_1, \dots, s_m)$  с целочисленными неотрицательными аргументами  $s_j$ .

*Определение 1* Функцию  $q(t, \varepsilon)$  будем называть функцией  $k$ -го порядка малости по  $\varepsilon$  на интервале времени  $[0, L / \alpha(\varepsilon)]$ , если для любого малого  $\delta$  с положительными компонентами  $\delta_j > 0$  существуют постоянные  $A_1(\delta) \geq 0$ ,  $A_2(\delta) > 0$  и две формы  $k$ -го порядка

$$F_1(\varepsilon) = \sum_{|s|=k} \alpha_s \varepsilon^s, \quad F_2(\varepsilon) = \sum_{|s|=k} \beta_s \varepsilon^s$$

положительно определенные в положительном конусе  $\{\varepsilon : \varepsilon_j > 0, j = 1, 2, \dots, m\}$ , такие, что выполняется условие полосы

$$A_1(\delta) F_1(\varepsilon) \leq \|q(t, \varepsilon)\| \leq A_2(\delta) F_2(\varepsilon) \quad (2.1)$$

когда

$$t \in [0, L / \alpha(\varepsilon)], \quad 0 < \varepsilon_j \leq \delta_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Функцию  $q(t, \varepsilon)$ , удовлетворяющую определению 1, будем называть  $O$ -большой  $k$ -го порядка малости по  $\varepsilon$  на интервале времени  $[0, L / \alpha(\varepsilon)]$  и обозначать как  $O_k(\varepsilon)$ .

Справедливо также следующее утверждение.

*Лемма.* Предположим, что функция  $q(t, \varepsilon)$  такова, что существует отличный от нуля, ограниченный и равномерный по  $t$  предел



$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{q(\varepsilon, t)}{F_2(\varepsilon)} = A(t), \quad |A(t)| \leq M, \quad t \in [0, L / \alpha(\varepsilon)].$$

Тогда  $q(t, \varepsilon)$  – величина  $k$ -го порядка малости на промежутке времени  $[0, L / \alpha(\varepsilon)]$ .

Предположим, что функции  $X_\gamma(x, t) (|\gamma| = 1, \gamma \in \Omega_\gamma)$ , входящие в правую часть уравнений (1.1) в составе формы, линейной по  $\varepsilon_j$ , определены в некоторой открытой связной области  $D'$  переменной  $x$ , когда  $t \in [0, \infty)$ . Будем считать, что функции  $X_\gamma(x, t)$  удовлетворяют в некоторой подобласти  $D \times [0, \infty)$ ,  $D \in D'$  следующим условиям:

- 1) условию непрерывности по  $t$ ;
- 2) условию Липшица по  $x$  с независимыми от  $x$  и  $t$  константами  $\lambda_\gamma$ :

$$\|X_\gamma(x^{(1)}, t) - X_\gamma(x^{(2)}, t)\| \leq \lambda_\gamma \|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \quad \gamma \in \Omega_\gamma;$$

- 3) условию равномерного ограничения в области  $D \times [0, \infty)$ , т. е.

$$\|X_\gamma(x, t)\| \leq M_\gamma, \quad \gamma \in \Omega_\gamma$$

и в дополнение к этим условиям

- 4) условию равномерной по  $u \in D$  ограниченности интегралов

$$\sup_{t \in R} \left\| \int_0^t [X_\gamma(u, t) - \bar{X}_\gamma(u)] dt \right\| = \Lambda_\gamma < \infty, \quad \gamma \in \Omega_\gamma$$

в случае почти периодической зависимости функций  $X_\gamma(x, t)$  от времени;

- 5) условию существования равномерных по  $u \in D$  пределов (1.7), если функции  $X_\gamma(x, t)$  зависят от  $t$  произвольным образом.

Заметим, что условие 4 эквивалентно, в силу теоремы Бора, условию почти периодичности интеграла от функции  $X_\gamma(u, t) - \bar{X}_\gamma(u)$ . Оно выполняется для квазипериодической функции  $X_\gamma(u, t)$ , если ее ряд Фурье содержит конечное число членов и отсутствуют резонансы. В более общем случае, когда ряд Фурье функции  $X_\gamma(u, t)$  содержит бесконечное число членов, поведение интеграла существенно зависит от условий сходимости ряда

$$\sum_m \frac{X_\gamma^{(m)}(u)}{i\lambda_m} e^{i\lambda_m t}.$$

Так, если этот ряд сходится равномерно по  $u$  и  $t$ , то интеграл равномерно ограничен. Неравномерная сходимость по  $t$  дает примеры неограниченного роста интеграла [4–6]. Из работ Гильдена следует также, что интеграл от скалярной функции  $f(\omega_1 t, \omega_2 t)$ ,  $2\pi$  - периодической по каждому аргументу

$\varphi_j = \omega_j t$  и с нулевым средним, есть функция квазипериодическая (следовательно ограниченная) для почти всех иррациональных значений  $\alpha = \omega_1 / \omega_2$ . Случай расходимости ряда мало изучен.

Введем обозначения:

$$\sum_M = \sum'_{|\gamma|=1} \varepsilon^\gamma M_\gamma, \quad \sum_\Lambda = \sum'_{|\gamma|=1} \varepsilon^\gamma \Lambda_\gamma, \quad L_\Lambda = L \sum'_{|\gamma|=1} \lambda_\gamma, \quad L_M = L \sum'_{|\gamma|=1} M_\gamma,$$

$\Delta(t, \varepsilon) = \|x(t, \varepsilon) - u(t, \varepsilon)\|$  – ошибка точности приближения,  $\varepsilon^*$  – вектор, компоненты которого есть малые параметры  $\varepsilon_j$ , входящие в первое приближение уравнений (1.1).

**Обобщенная теорема Боголюбова.** Если для дифференциальных уравнений (1.1) выполнены условия 1 – 3, тогда для любых наперед заданных  $L > 0$ ,  $\rho > 0$  можно найти положительное скалярное число  $\varepsilon_0(L, \rho)$  такое, что если  $u = u(t)$  – решение задачи Коши для усредненных уравнений

$$\dot{u} = \sum'_{|\gamma|=1} \varepsilon^\gamma \bar{X}_\gamma(u), \quad u(0) = u_0,$$

определенное в интервале  $0 \leq t < \infty$  и принадлежащее области  $D$  вместе со своей  $\rho$  - окрестностью, то для всякого  $\varepsilon$ ,  $\|\varepsilon\| < \varepsilon_0$  и при любом  $t$  из асимптотически большого интервала времени

$$0 \leq t \leq L / \alpha(\varepsilon), \quad \alpha(\varepsilon) = \|\varepsilon^*\| \quad (2.2)$$

справедливы следующие оценки точности приближения:

1°.  $X_\gamma(x, t)$ ,  $\gamma \in \Omega_\gamma - T$  - периодические функции времени  $t$ , тогда

$$\Delta(t, \varepsilon) \leq T \Sigma_M (L_\Lambda + 2) \exp L_\Lambda; \quad (2.3)$$

2°.  $X_\gamma(x, t)$ ,  $\gamma \in \Omega_\gamma$  – почти периодические функции  $t$ , равномерные по  $x$  и при этом выполняется условие 4, тогда для любого сколь угодно малого  $\mu$

$$\Delta(t, \varepsilon) \leq [\tau(\mu) \Sigma_M (L_\Lambda + 2) + \Sigma_\Lambda] \exp L_\Lambda, \quad (2.4)$$

где  $\tau(\mu)$  – общий  $\mu$ - почти период функций  $X_\gamma(x, t)$ ;

3°.  $X_\gamma(x, t)$ ,  $\gamma \in \Omega_\gamma$  – произвольные функции времени и выполняется условие 5, тогда

$$\Delta(t, \varepsilon) \leq 2\sqrt{L_\Lambda L_M} \sqrt{2\delta(\varepsilon)} \exp L_\Lambda \quad (2.5)$$

где

$$\delta(\varepsilon) = \sup_{u \in D} \left[ \sup_{0 \leq t \leq L/\alpha(\varepsilon)} \left\| \sum'_{|\gamma|=1} \varepsilon^\gamma \int_0^t (X_\gamma(u, \tau) - \bar{X}_\gamma(u)) d\tau \right\| \right]; \quad \delta(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Неравенства (2.3), (2.5) представляют собой обобщение известных оценок классического случая одного малого параметра [7]. Оценка (2.4)

неизвестна, докажем ее для классического случая, так как обобщение на случай  $m$  малых параметров очевидно.

Фиксируем  $\mu$ . Пусть  $t_* = L^* / \varepsilon$  – момент пересечения фазовой кривой границы области  $D$ ,  $\tau(\mu)$  – общий почти период функций  $X_\gamma(x, t)$ . Известна следующая оценка точности приближения [7]:

$$\|x(t, \varepsilon) - u(t, \varepsilon)\| \leq C e^{\varepsilon \lambda t} \leq C e^{\lambda L^*},$$

где  $x(t, \varepsilon)$  и  $u(t, \varepsilon)$  – решения строгих и усредненных уравнений соответственно,

$$C = \sup_{t \in [0, L/\varepsilon]} \varepsilon \left\| \int_0^t \tilde{X}(u(t, \varepsilon), t) dt \right\|, \quad \tilde{X}(u(t, \varepsilon), t) = X(u(t, \varepsilon), t) - \bar{X}(u(t, \varepsilon)).$$

Разобьем текущий промежуток времени  $[0, t]$  на интервалы длины  $\tau(\mu)$ . Пусть  $N$  – число интервалов, целиком укладывающихся на отрезке  $[0, t]$ . Имеем

$$\begin{aligned} \left\| \varepsilon \int_0^t \tilde{X}(u(t, \varepsilon), t) dt \right\| &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^N \int_{(i-1)\tau(\mu)}^{i\tau(\mu)} \left\| \tilde{X}(u(t, \varepsilon), t) - \tilde{X}(u_i, t) \right\| dt + \\ &+ \varepsilon \left\| \sum_{i=1}^N \int_{(i-1)\tau(\mu)}^{i\tau(\mu)} \tilde{X}(u_i, t) dt \right\| + 2\varepsilon M \tau(\mu). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь  $u_i = u((i-1)\tau(\mu))$ , при этом

$$\left\| \tilde{X}(u(t, \varepsilon), t) - \tilde{X}(u_i, t) \right\| \leq 2\lambda \|u(t, \varepsilon) - u_i\|. \quad (2.7)$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{u} = \varepsilon \bar{X}(u), \quad u((i-1)\tau) = u_i.$$

Тогда

$$\|u(t, \varepsilon) - u_i\| \leq \varepsilon \int_{(i-1)\tau}^t \|\bar{X}(u)\| d\tau \leq \varepsilon M [t - (i-1)\tau], \quad (2.8)$$

поэтому

$$\varepsilon \sum_{i=1}^N \left\| \int_{(i-1)\tau(\mu)}^{i\tau(\mu)} \tilde{X}(u, t) dt \right\| \leq \lambda M \varepsilon^2 \tau^2(\mu) N \approx \varepsilon \lambda M \tau(\mu) L^*, \quad (2.9)$$

поскольку  $N\tau(\mu) \approx L^* / \varepsilon$ .

Второе слагаемое правой части неравенства (2.6) допускает, в силу условия 4, оценку

$$\varepsilon \left\| \sum_{i=1}^N \int_{(i-1)\tau(\mu)}^{i\tau(\mu)} \tilde{X}(u_i, t) dt \right\| = \varepsilon \left\| \int_0^{N\tau(\mu)} \tilde{X}(u(\xi), t) dt \right\| < \varepsilon \Lambda.$$

Здесь  $u(\xi)$  – кусочно-непрерывная функция  $\xi$ :

$$u(\xi) = \begin{cases} u_i, & (i-1)\tau(\mu) \leq \xi < i\tau(\mu), \\ u_{i+1}, & \xi = i\tau(\mu). \end{cases} \quad (i=1, \dots, N)$$

Отсюда следует неравенство

$$\|x(t, \varepsilon) - u(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon \left[ (\lambda L^* + 2) M \tau(\mu) + \Lambda \right] e^{\lambda L^*},$$

когда  $0 \leq t \leq L^* / \varepsilon$ . Несложно видеть, что в этой формуле можно заменить  $L^*$  на сколь угодно большое  $L$ , если  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , где

$$\varepsilon_0 = \rho \left[ (\lambda L + 2) M \tau(\mu) + \Lambda \right]^{-1} e^{-\lambda L}.$$

В случае  $m$  независимых малых параметров имеем неравенство

$$\|x(t, \varepsilon) - u(t, \varepsilon)\| \leq \left[ \tau(\mu) \Sigma_M (\Sigma_\lambda L / \alpha(\varepsilon) + 2) + \Sigma_\Lambda \right] \exp(\Sigma_\lambda L / \alpha(\varepsilon)),$$

где  $\Sigma_\lambda = \sum'_{|\gamma|=1} \varepsilon^\gamma \lambda_\gamma$ . Полагая  $\alpha(\varepsilon) = \|\varepsilon^*\|$ , будем иметь

$$\Sigma_\lambda \frac{L}{\alpha(\varepsilon)} \leq L \sum'_{|\gamma|=1} \lambda_\gamma.$$

Отсюда следует оценка точности (2.4).

Таким образом, обобщенная теорема Боголюбова гарантирует, что для периодического и почти периодического случаев на асимптотически большом интервале времени (2.2) точность приближения имеет, в силу определения 1, величину первого порядка малости по  $\varepsilon$ . Было показано [8], что построение функции  $\alpha(\varepsilon)$  на основе физических соображений не всегда корректно, поэтому следует выбирать функцию  $\alpha(\varepsilon)$  в виде  $\|\varepsilon^*\|$ .

Отметим, что вдоль разных кривых пространства малых параметров величина точности первого приближения и величина асимптотического интервала времени могут сильно меняться. Так, для случая двух независимых параметров  $\varepsilon$  и  $\mu$  точность аппроксимации вдоль кривой  $\varepsilon = \varepsilon, \mu = \varepsilon^2$  достигает величин порядка  $\varepsilon$ , и резко падает до величины порядка  $\sqrt{\varepsilon}$  на кривой  $\varepsilon = \varepsilon, \mu = \sqrt{\varepsilon}$ . Асимптотические интервалы времени имеют на этих кривых порядки  $1/\varepsilon$  и  $1/\sqrt{\varepsilon}$  соответственно.

### 3. Маятник переменной длины на вибрирующем основании.

Рассмотрим задачу о колебаниях математического маятника переменной длины на вибрирующем основании. Как известно, вибрация оказывает сильное влияние на динамику маятника постоянной длины, стабилизируя его верхнее положение равновесия при большей частоте вибрации [9–10]. В работах [11, 12] получены также некоторые условия устойчивости верхнего положения равновесия для маятника переменной длины. Заметим, что

маятниковые модели находят приложения в вопросах исследования волновых движений жидкости в топливных баках ракетносителей [13].

*Постановка задачи. Уравнения движения.* Предположим, что точка подвеса маятника совершает гармонические колебания вдоль вертикальной оси  $y$ :  $y = a \sin \omega t$ . В подвижных осях, связанных с вибрирующим основанием, уравнение колебаний маятника имеет вид

$$\frac{d}{dt}(l^2(t)\dot{\varphi}) = -l(t)(g + a_e)\sin \varphi; \quad l(t) = l_0 \left( 1 + \frac{b}{l_0} \cos \nu t \right), \quad a_e = -a\omega^2 \sin \omega t.$$

Здесь  $l(t)$  – длина маятника, меняющаяся со временем по гармоническому закону,  $l_0$  – среднее значение длины маятника,  $a_e$  – переносное ускорение.

Введем три малых параметра  $\gamma, \varepsilon, \mu$  и новое время  $\tau$  по формулам

$$\varepsilon = \frac{a}{l_0}, \quad \mu = \frac{b}{l_0}, \quad \gamma = \frac{\omega_0}{\omega}, \quad \tau = l_0^2 \omega \int_0^t \frac{dt}{l^2(t)}.$$

Здесь  $\omega_0 = \sqrt{g/l_0}$  – частота собственных колебаний. Таким образом, частота вибраций  $\omega$  считается большой, в то время как амплитуды колебаний точки подвеса маятника и его длины – достаточно малыми.

Перейдем к новому времени  $\tau$  и разложим правую часть полученного уравнения в ряд по малым параметрам. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi'' = & -\left(1 + 3\mu \cos \tilde{\nu} \tau - 6\mu^2 \sin^2 \tilde{\nu} \tau + 3\mu^2 \cos \tilde{\nu} \tau\right) \times \\ & \times \left(-\varepsilon \sin \tau - 2\varepsilon \mu \tilde{\nu}^{-1} \cos \tau \sin \tilde{\nu} \tau + \gamma^2\right) \sin \varphi + \dots; \quad \tilde{\nu} = \nu / \omega. \end{aligned}$$

Штрихом обозначена производная по  $\tau$ .

Чтобы привести уравнение колебаний к стандартной системе, воспользуемся нелинейной заменой переменных [1]

$$\varphi = \theta - \varepsilon \sin \tau \sin \theta, \quad \varphi' = \varepsilon \Omega - \varepsilon \cos \tau \sin \theta.$$

Преобразованные уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \theta' &= \varepsilon \Omega + \varepsilon^2 \Omega \sin \tau \cos \theta + \dots, \\ \Omega' &= \varepsilon \xi_{100} + \mu \xi_{010} + \gamma \xi_{001} + \varepsilon^2 \xi_{200} + \varepsilon \mu \xi_{110} + \mu^2 \xi_{020} + \\ &+ \mu \gamma \xi_{011} + \gamma^2 \xi_{002} + \dots, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_{100} &= (\Omega \cos \tau - \sin^2 \tau \sin \theta) \cos \theta, \quad \xi_{010} = (2\tilde{\nu}^{-1} \cos \tau \sin \tilde{\nu} \tau + 3 \sin \tau \cos \tilde{\nu} \tau) \sin \theta, \\ \xi_{001} &= -\lambda \sin \theta, \quad \xi_{200} = (\Omega \cos \tau \cos^2 \theta - \sin^2 \tau \sin^3 \theta) \sin \tau, \quad \xi_{110} = -\xi_{010} \cos \theta \sin \tau, \\ \xi_{020} &= \left[ 3 \sin \tau (\cos^2 \tilde{\nu} \tau - 2 \sin^2 \tilde{\nu} \tau) + 3\tilde{\nu}^{-1} \cos \tau \sin 2\tilde{\nu} \tau \right] \sin \theta, \quad \xi_{011} = -3\lambda \cos \tilde{\nu} \tau \sin \theta, \\ \xi_{002} &= \cos \theta \sin \theta \sin \tau. \end{aligned}$$

Параметр  $\lambda = \gamma / \varepsilon$  принимает значения порядка единицы, если область исследований ограничить неравенством  $\gamma \leq k\varepsilon$ , так как в этом случае  $\lambda$  удовлетворяет условию полосы

$$0 \leq \frac{\gamma}{\varepsilon} \leq k.$$

*Уравнения первого приближения метода усреднения.* Получим усредненные уравнения колебаний маятника, полагая  $x = (\theta, \Omega)^T$ . Приведем систему уравнений (3.2) к виду (1.1)

$$\begin{aligned} \dot{x} = & \varepsilon X_{100} + \mu X_{010} + \gamma X_{001} + \varepsilon^2 X_{200} + \varepsilon\mu X_{110} + \mu^2 X_{020} + \\ & + \mu\gamma X_{011} + \gamma^2 X_{002} + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь

$$X_{100} = \begin{Bmatrix} \Omega \\ \xi_{100} \end{Bmatrix}, \quad X_{200} = \begin{Bmatrix} \Omega \sin \tau \cos \theta \\ \xi_{200} \end{Bmatrix}, \quad X_{\zeta} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \xi_{\zeta} \end{Bmatrix}, \quad \zeta = 010, 001, 110, 011, 020, 002.$$

Усредненные уравнения первого приближения имеют вид

$$\theta'' + \varepsilon^2 \left( \lambda^2 + \frac{1}{2} \cos \theta \right) \sin \theta = 0, \quad \Omega' = -\frac{1}{2} \varepsilon \cos \theta \sin \theta - \gamma \lambda \sin \theta. \quad (3.4)$$

Они совпадают с усредненными уравнениями классического случая (параметр  $\mu$  не входит в систему (3.4)).

Известно [1, 10], что при  $\lambda > 1/\sqrt{2}$  равновесие  $\theta = \pi$  неустойчиво, а при  $\lambda < 1/\sqrt{2}$  оно становится устойчивым и в его окрестности появляются два неустойчивых равновесия

$$\theta_{1,2} = \pi \mp \arccos 2\lambda^2.$$

Бифуркационная поверхность имеет вид  $\gamma = \varepsilon / \sqrt{2}$  и представляет собой линейчатую поверхность в трехмерном пространстве малых параметров  $\varepsilon, \mu, \gamma$ , поэтому использовалась [1] классическая схема усреднения, основанная на линейной редукции к одному параметру.

В исходных переменных  $\varphi, \varphi'$  стационарному значению  $\theta = \pi$  отвечает верхнее положение равновесия маятника  $\varphi = \pi, \varphi' = 0$ , в то время как равновесиям  $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$  соответствуют периодические движения вида

$$\varphi_j = \theta_j - \varepsilon \sin \omega t \sin \theta_j, \quad \varphi'_j = -\varepsilon \cos \omega t \sin \theta_j; \quad j = 1, 2. \quad (3.5)$$

Таким образом, стабилизация верхнего положения равновесия маятника происходит через бифуркацию стационарной точки  $\varphi = \pi, \varphi' = 0$  при  $\lambda = 1/\sqrt{2}$ , сопровождающуюся появлением двух неустойчивых периодических движений (3.5).

Принимая во внимание, что  $\lambda = \omega_0 l_0 / (a\omega)$ , приходим также к выводу, что стабилизация равновесия наблюдается при достаточно больших значениях  $\omega$ , удовлетворяющих неравенству

$$\omega > \sqrt{2}\omega_0 l_0 / a.$$

Отметим, что параметр  $\mu$  не влияет на устойчивость равновесия в первом приближении метода усреднения, однако во втором приближении его влияние существенно.

*Уравнения второго приближения метода усреднения. Нерезонансный случай.* Перейдем теперь к построению и анализу второго приближения. Согласно формулам (1.10), (1.11) во втором приближении имеем

$$x = y + \varepsilon u_{100}(y, \tau) + \mu u_{010}(y, \tau) + \gamma u_{001}(y, \tau), \quad (3.6)$$

где вектор  $y$  должен быть определен из следующей системы уравнений:

$$y' = \varepsilon Y_{100} + \mu Y_{010} + \gamma Y_{001} + \varepsilon^2 Y_{200} + \mu^2 Y_{020} + \varepsilon \mu Y_{110} + \varepsilon \gamma Y_{101} + \mu \gamma Y_{011} + \gamma^2 Y_{002}.$$

Здесь приняты обозначения

$$Y_\alpha = \bar{X}_\alpha, \quad Y_{200} = \bar{X}_{200} + \bar{U}_{100}, \quad Y_{020} = \bar{X}_{020} + \bar{U}_{010}, \quad Y_{002} = \bar{X}_{002} + \bar{U}_{001},$$

$$U_\alpha = \left( \frac{\partial X_\alpha}{\partial x} \right)_0 u_\alpha - \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} \bar{X}_\alpha, \quad \alpha = 100, 010, 001.$$

Выражения для  $Y_\nu$ ,  $\nu = 110, 101, 011$  вычисляются по формулам (1.8), при этом для каждого  $\nu$  ведется суммирование по двум значениям индекса  $\gamma$ :  $\gamma = 100, 010$  если  $\nu = 110$ ,  $\gamma = 100, 001$  в случае  $\nu = 101$ ,  $\gamma = 010, 001$  при  $\nu = 011$ .

Вычисления показывают, что

$$\bar{X}_{200} = \bar{X}_{020} = \bar{X}_{002} = \bar{X}_{011} = \bar{X}_{101} = 0,$$

при этом среднее от функции  $X_{110}$  терпит разрыв, если  $\nu = 2\omega$ . Таким образом, при  $\nu = 2\omega$  в системе имеет место параметрический резонанс.

Для начала рассмотрим нерезонансный случай  $\nu \neq 2\omega$ . Вычисления, произведенные на основе формул (1.8), показывают, что все векторные функции  $Y_\nu(y)$  равны нулю:

$$Y_{200} = Y_{020} = Y_{002} = Y_{110} = Y_{101} = Y_{011} = 0.$$

Поэтому усредненные уравнения второго приближения совпадают с уравнениями первого приближения (3.4). Следовательно, предыдущие выводы остаются в силе, уточняются лишь значения переменной  $\Omega_j$ , отвечающие стационарным решениям  $\theta = \theta_j$ ,  $\Omega = 0$  уравнений (3.4). Так, если  $k \neq 1$ , на основе формул (1.6), (3.6) имеем

$$\Omega_j = \varepsilon \frac{1}{8} \sin 2\tau \sin 2\theta_j + \mu \left( \frac{3k-2}{2k(k-1)} \cos(k-1)\tau - \frac{3k+2}{2k(k+1)} \cos(k+1)\tau \right) \sin \theta_j, \\ j = 1, 2$$

В случае  $k = 1$  выражение для  $\Omega$  меняется:

$$\Omega_j = \varepsilon \frac{1}{8} \sin 2\tau \sin 2\theta_j + \mu \left( \frac{5}{2} \sin^2 \tau - \frac{5}{4} \right) \sin \theta_j.$$

Уравнения второго приближения в окрестности резонанса. Исследование колебаний при строгом резонансе  $\nu = 2\omega$ . Будем считать, что резонансное равенство выполняется приближенно:  $\nu / \omega - 2 = \Delta$ , где  $\Delta$  - малая величина первого порядка малости, т. е.  $\Delta = \varepsilon a$ , где  $a$  - постоянная величина порядка единицы.

Введем дополнительную медленную переменную  $\psi$ , удовлетворяющую равенству

$$(\nu / \omega)\tau = \psi + 2\tau.$$

Получим, после усреднения, уравнения второго приближения, описывающие колебания в окрестности резонанса  $\nu = 2\omega$ :

$$\begin{cases} \theta' = \varepsilon \Omega, \\ \Omega' = -\frac{\varepsilon}{2} \sin \theta \cos \theta - \gamma \lambda \sin \theta + \varepsilon \mu \cos \psi \cos \theta \sin \theta, \\ \psi' = \Delta. \end{cases}$$

Отсюда явствует, что

$$\theta'' + \varepsilon^2 (\lambda^2 + (1/2 - \mu \cos \Delta \tau) \cos \theta) \sin \theta = 0. \quad (3.7)$$

В случае строгого выполнения резонансного соотношения  $\nu = 2\omega$  параметр  $\Delta$  равен нулю, поэтому уравнение (3.7) принимает автономный вид

$$\theta'' + \varepsilon^2 (\lambda^2 + (1/2 - \mu) \cos \theta) \sin \theta = 0. \quad (3.8)$$

Исследуем уравнение (3.8). Имеем два типа стационарных движений, описываемых равенствами

$$1) \sin \theta = 0, \quad 2) \cos \theta = -\lambda^2 / (1/2 - \mu), \quad |\lambda^2 / (1/2 - \mu)| \leq 1.$$

Второй тип равновесий зависит от параметра  $\mu$ , что приводит к появлению новых эффектов в поведении системы. Так, если  $\mu$  меняется в пределах

$$\mu_- < \mu < \mu_+; \quad \mu_{\pm} = 1/2 \pm \lambda^2,$$

то преобладает первый тип равновесий, полностью подавляя второй. При этом равновесие  $\theta = 0$  устойчиво, а  $\theta = \pi$  неустойчиво.

Ситуация меняется, как только  $\mu$  достигает граничных значений этого интервала. Появляется сложное равновесие, состоящее из решения  $\theta = \pi$  семейства 2 и решения  $\theta = \pi$  семейства 1, если  $\mu = \mu_-$ . Дальнейшее уменьшение  $\mu$  вплоть до нуля ведет к появлению двух неустойчивых равновесий



$$\theta_{1,2} = \pi \mp \arccos\left(\frac{\lambda^2}{1/2 - \mu}\right)$$

в окрестности устойчивой точки  $\theta = \pi$ . Следовательно, при  $\mu = \mu_-$  наблюдается бифуркация равновесия  $\theta = \pi$ , сродни бифуркации, описанной выше, а резонансные колебания маятника при  $\mu < \mu_-$  подобны нерезонансным в случае  $\lambda^2 < 1/2$ .

Если  $\mu = \mu_+$ , то появляется сложное равновесие  $\theta = 0$ . Оно распадается на два устойчивых равновесия

$$\theta_{1,2} = \pm \arccos\left(-\frac{\lambda^2}{1/2 - \mu}\right)$$

в окрестности неустойчивого равновесия  $\theta = 0$ , если  $\mu > \mu_+$ .

Из сравнения с результатами предыдущих исследований следует, что область устойчивости  $\lambda^2 < 1/2$  верхнего положения равновесия  $\theta = \pi$  нерезонансного случая сохраняется при резонансе, если только  $\mu < \mu_-$ . В противном случае верхнее положение равновесия неустойчиво. Кроме того, нижнее положение равновесия неустойчиво при  $\mu > \mu_+$ . Таким образом, резонансные периодические колебания длины  $l(t)$  маятника оказывают дестабилизирующее влияние на верхнее и нижнее состояния равновесий.

В переменных  $\varphi, \varphi'$  равновесиям  $\theta_1, \theta_2$  отвечают периодические колебания вида

$$\varphi_j = \theta_j - \varepsilon \sin \tau \sin \theta_j, \quad \varphi'_j = \varepsilon \Omega_j - \varepsilon \cos \tau \sin \theta_j,$$

где

$$\tau = \omega t - \mu \sin 2\omega t, \quad \Omega_j = \varepsilon \frac{1}{8} \sin 2\tau \sin 2\theta_j + \mu \left( \cos \tau - \frac{4}{3} \cos 3\tau \right) \sin \theta_j.$$

Отметим, что бифуркационное равенство

$$\mu = 1/2 \pm (\gamma / \varepsilon)^2$$

описывает двумерную поверхность в трехмерном пространстве малых параметров  $\varepsilon, \mu, \gamma$ . Поверхность не является линейчатой, поэтому ее невозможно получить, если использовать метод усреднения, основанный на линейных редукциях задачи к одному параметру. Такую поверхность нельзя предвидеть заранее, поэтому любая попытка ее построения с помощью нелинейной редукции несостоятельна.

*Исследование колебаний в окрестности резонанса  $\nu = 2\omega$ .* В заключение рассмотрим вкратце случай, близкий к резонансу ( $\Delta \neq 0$ ). Уравнение (3.7), описывающее околорезонансные колебания, содержит медленно меняющийся параметр  $\psi = \Delta \tau$ . В этом случае колебания маятника близки к нерезонансным, если  $\Delta \sim \varepsilon$ . Это непосредственно следует из

уравнения (3.7): после усреднения по "быстрому" времени  $\Delta\tau$  получим уравнение (3.4).

В случае  $\Delta \sim \varepsilon^2$  такое усреднение не проходит. Следует различать пять случаев:

$$\begin{aligned} &1) \mu_- < \mu < \mu_+, \lambda^2 < \frac{1}{2}; \quad 2) 0 < \mu < \mu_+, \lambda^2 > \frac{1}{2}; \\ &3) \mu < \mu_-, \lambda^2 < \frac{1}{2}; \quad 4) \mu > \mu_+, \lambda^2 < \frac{1}{2}; \quad 5) \mu > \mu_+, \lambda^2 > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Наиболее просто исследуются случаи 2 и 3, так как в этих случаях резонансные и нерезонансные колебания подобны, и изменение  $\Delta$  ведет к малому сдвигу стационарных точек  $\theta_1, \theta_2$  по оси  $\theta$ .

Более сложная эволюция колебаний наблюдается в оставшихся случаях. В случае 1 имеем переход от строго резонансного случая, при котором движение маятника подобно колебаниям обычного математического маятника, к нерезонансному, когда его колебания имеют более сложный характер из-за присутствия двух неустойчивых равновесий в окрестности  $\theta = \pi$ .

Перестройка фазового портрета при непрерывном увеличении  $\Delta$  от величин порядка  $\varepsilon^n (n \geq 2)$  до  $\varepsilon$  происходит через расщепление сепаратрисы, появление хаотической зоны колебаний в окрестности равновесия  $\theta = \pi, \theta' = 0$  и в окрестности сепаратрисы, последующей эволюции этой зоны. Поведение фазовых кривых хаотического слоя крайне сложное. Оно существенно зависит от величины параметра  $\Delta$ , от точности задания начальных условий. Не претендуя на абсолютную достоверность изложения, дадим приближенное описание перестройки колебаний, основанное на численных расчетах, которые проводились для разных значений  $\Delta$  и разных начальных условий.

Рассмотрим случай 1. Точность представления чисел с плавающей точкой – двадцать значащих цифр, ошибка метода –  $10^{-14}$ . Фиксируем следующие значения параметров:  $\varepsilon = 0.1, \lambda^2 = 0.4, \mu = 0.4$ . При  $\Delta = 10^{-4}$  фазовый портрет колебаний изображен в верхней части фигуры 1 (здесь и ниже не показаны траектории, отвечающие чисто вращательным движениям и, ввиду симметрии, представлена только область  $\theta' \geq 0$ ).

Фазовый портрет колебаний практически совпадает с фазовым портретом математического маятника. Ширина хаотического слоя мала, и ее не видно в масштабе фигуры. Увеличение  $\Delta$  ведет к появлению сложной сетки петель траекторий в окрестности точки  $\theta = \pi$  и в окрестности сепаратрисы (см. случай  $\Delta = 0.0359$ ; хаотический слой вблизи сепаратрисы не показан). При дальнейшем увеличении  $\Delta$  ширина хаотического слоя вблизи  $\theta = \pi$  возрастает до величин порядка 0.02 ( $\Delta = 0.104$ ), при этом фазовая точка,

совершая колебания в окрестности точки  $\theta = \pi$ , покидает ее с течением времени. Начиная со значения параметра  $\Delta = 0.11$  колебания в окрестности  $\theta = \pi$  замедляются настолько, что фазовая точка принадлежит окрестности  $\theta = \pi$  во все время движения, образуя густую сеть траекторий. Этому случаю отвечает значение  $\Delta = 0.11$ , причем представлены также дополнительные кривые, начальные данные для которых приближены к значениям  $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_2$  соответственно ( $\theta_1 = 2.4981$ ,  $\theta_2 = 3.7851$  дополнительные положения равновесия нерезонансного случая). Видно, что эти кривые образуют зоны колебаний вблизи точек  $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_2$ , покидая их с течением времени.

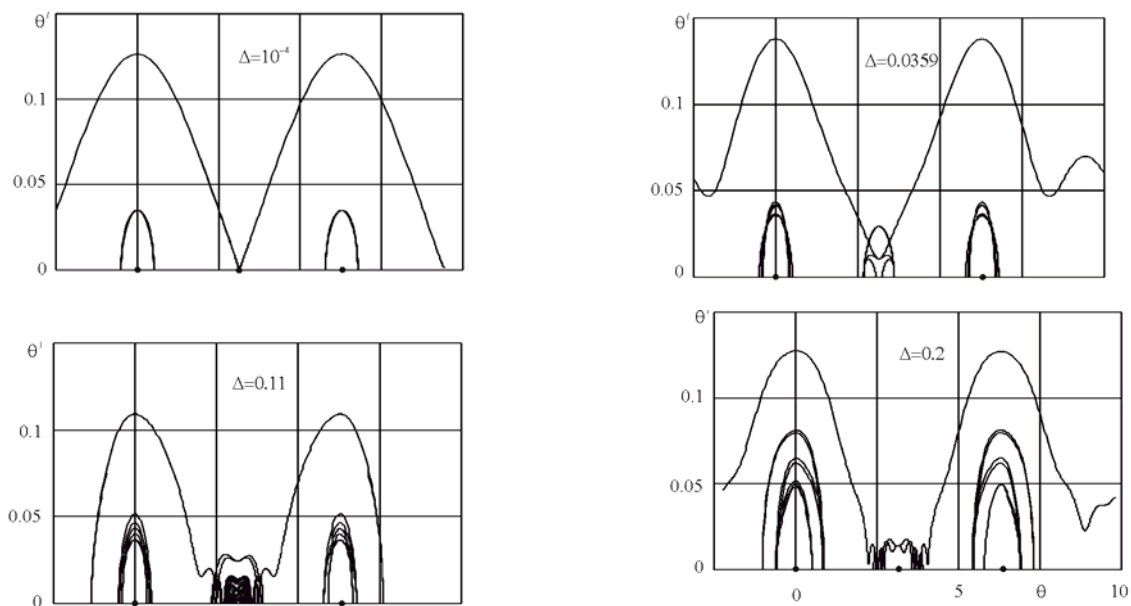


Рис.1

Дальнейшее увеличение  $\Delta$  ведет к резкому уменьшению зоны хаотических колебаний в окрестности точки  $\theta = \pi$ : уже при  $\Delta = 0.112$  размер этой зоны имеет порядок  $10^{-7}$ , а при  $\Delta = 0.113$  размеры ее настолько малы, что она практически не отличима от геометрической точки  $\theta = \pi$ ,  $\theta' = 0$  (эффект стягивания хаотической паутины в точку). Нижняя часть фигуры 1 соответствует случаю  $\Delta = 0.2$ . Наблюдается новая зона колебаний в окрестности устойчивого равновесия  $\theta = \pi$ ,  $\theta' = 0$  и имеются траектории, подобные гетероклиническим, соединяющим неустойчивые «равновесия»  $\theta = \theta_1$ ,  $\theta = \theta_2$ . Эти «равновесия» представляют собой малые зоны колебаний, которые фазовые кривые быстро покидают, сделав несколько оборотов вокруг точек  $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_2$ . Таким образом, фазовый портрет колебаний принимает вид, похожий на фазовый портрет в нерезонансном случае, при котором равновесие  $\theta = \pi$  устойчиво, а близлежащие равновесия  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  неустойчивы.

Уточнение этих результатов можно получить на основе построения асимптотического приближения решений уравнений (3.2) для случая немалых значений  $\Delta$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1963. – 410 с.
2. Волосов В. М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук, 1962. – Т. 17, Вып. 6(108). – С. 3-126.
3. Красильников П. С. Метод усреднения как процедура выделения главных членов в рядах решений // Теоретическая механика. Сб. науч.-метод. статей. – М.: Изд-во МГУ, 2009. – С. 56-68.
4. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 392 с.
5. Poincaré H. Sur les series trigonometriques // Comptes Rendus. Acad. Sci., 1885. – V. 101, № 2. – P. 1131-1134.
6. Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. – Москва; Ижевск: РХД, 2000. – 255 с.
7. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. – М.: Наука, 1988. – 326 с.
8. Красильников П. С. Об усреднении дифференциальных уравнений с двумя независимыми малыми параметрами // Докл. РАН, 2011. – Т. 436, № 3. – С. 332-335.
9. Jeffereys H., B. S. Methods of Mathematical Physics. – Cambridge: Univ. Press, 1950. – 708 p.
10. Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физ. наук, 1951. – Т. 44, Вып. 1. – С. 7-20.
11. Стрижак Т. Г. Методы исследования динамических систем типа “Маятник” // Алма-Ата: Наука, 1981. – 253 с.
12. Вершинин Б. А., Литвин-Седой М. З. Об устойчивости маятника переменной длины при движении точки опоры // Изв. АН СССР. МТТ, 1973. – № 1. – С. 40-42.
13. Рабинович Б. И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1975. – 416 с.

Э. М. Красинская, А. Я. Красинский (г. Москва)

## **ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ НЕИЗОЛИРОВАННЫХ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ГОЛОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ**

*Для неизоллированных установившихся движений механических систем дается дальнейшее развитие метода [1-17] решения задач устойчивости и стабилизации, основанного на использовании векторно-матричных уравнений возмущенного движения с явным видом линейных и нелинейных членов в форме, делающей возможным комплексное применение принципа сведения теории критических случаев [18-20], методов аналитической механики голономных и неголономных систем [21,22], теорем о влиянии структуры сил на устойчивость движения [23-25], теории оптимальной стабилизации [26], теории управления при неполной информации [27,28] и качественной теории оптимальных процессов [29].*

### **1. Введение**

Огромные достижения в области микроэлектроники, информационных технологий, а также в приводной технике (в частности, создание высокомоментных электроприводов с ранее не достижимыми массогабаритными характеристиками) приводят ко все более широкому распространению управляемых механических и, особенно, мехатронных систем. Как известно, мехатронным является любое устройство, основная функция которого осуществляется за счет целенаправленного механического движения под действием управления, формируемого на основе обработки в реальном времени текущей измерительной информации.

В современных системах этого класса, имеющих в своем составе микроконтроллеры, оказывается возможной реализация в режиме реального времени алгоритмов управления практически любой сложности. Высокая конкуренция приводит к необходимости создания таких типов мехатронных систем, которые в наибольшей степени могли бы использовать особенности именно данной конкретной системы для уменьшения числа исполнительных устройств и сокращения объема измерительной информации, превращая эти особенности в преимущества перед другими возможными вариантами конструкций.

Этим обусловлено то, что многие проблемы динамики сложных систем, исследование которых ранее могло представлять только абстрактно-теоретический интерес (таких, как общие задачи устойчивости и стабилизации стационарных движений неголономных систем), превратились в задачи

актуальной технической практики (напр., задача стабилизации стационарного движения робота на твердых колесах с дифференциальным приводом). Таким образом, потребности современной технической практики приводят к необходимости создания теоретически строго обоснованных и эффективных при практическом применении приемов для возможно более полного использования свойств собственных (без приложения дополнительных воздействий) движений (режимов работы) объекта.

В этой связи особую актуальность приобретает рассмотрение свойств устойчивости неизолированных движений с целью наиболее выгодного использования этих свойств для обеспечения их стабилизации: именно устойчивость желаемого режима функционирования определяет работоспособность управляемой системы. Кроме того, как раз неизолированные установившиеся движения (положения равновесия и стационарные движения) служат рабочими режимами подавляющего большинства современных технических устройств, причем не только чисто механических. Очевидно, что и для мехатронных систем (с самой совершенной структурой и аппаратным исполнением системы управления) изучение динамики механической составляющей системы, как ее важнейшей части совершенно необходимо. Прежде всего это связано с тем, что пользователь имеет дело, в первую очередь, именно с механической составляющей мехатронной системы и именно эта составляющая в решающей степени определяет конкурентноспособность изделия), и, кроме того, разработанные при этом методы оказываются весьма полезными и для изучения динамики других компонент мехатронных систем (в частности, электроприводов).

Как известно, в задачах устойчивости неизолированных движений (решений) нелинейных дифференциальных уравнений характеристическое уравнение системы первого приближения имеет по крайней мере столько корней с нулевыми действительными частями, какова размерность соответствующего многообразия, т.е. их устойчивость без приложения управления возможна лишь в критических случаях, причем простейшим случаем устойчивости для таких движений является особый случай критического случая при числе корней характеристического уравнения на мнимой оси, равном размерности соответствующего многообразия. Асимптотическая устойчивость этих собственных движений невозможна, но, вместе с тем, неизолированные движения обладают свойством известной (условной) неасимптотической устойчивости по части переменных.

*Замечание 1.1.* Все корни с нулевыми действительными частями, возникающие вследствие неизолированности исследуемого движения, в зависимости от типа системы, можно разделить на две категории. К первой из них отнесем те из них (напр., в задачах устойчивости и стабилизации стационарных движений голономных систем), для которых имеется

возможность их перемещения в правую полуплоскость за счет приложения линейных стабилизирующих управлений. Для корней второй категории (напр., в задачах устойчивости положений равновесия неголономных систем с однородными связями) нулевые действительные части не могут быть изменены каким бы то ни было стабилизирующим воздействием.

*Замечание 1.2.* В задачах устойчивости положений равновесия и стационарных движений неголономных систем (не только с однородными связями) могут возникнуть более сложные ситуации с корнями на мнимой оси, когда приложением управляющих воздействий от части таких корней возможно избавиться. Для стабилизации таких движений неголономных систем можно применять способ, при котором за счет приложения стабилизирующих управлений в правую часть перемещается максимально возможное число корней характеристического уравнения (именно такой способ стабилизации предлагается в большинстве публикаций). В таком случае вопрос об устойчивости исследуемого движения для замкнутой системы может быть сведен к особенному случаю без анализа нелинейных членов уравнений возмущенного движения; такой случай устойчивости является простейшим из возможных для установившихся движений неголономных систем. Вместе с тем размерность стабилизирующего воздействия и, соответственно, количество исполнительных устройств (при неполной информации – и, вообще говоря, количество датчиков измерительной информации) при решении задачи стабилизации этим методом могут оказаться неоправданно большими по сравнению с минимально необходимыми. Дело в том, что в достаточно многих случаях оказывается возможным свести задачу устойчивости для замкнутой системы к особенному случаю (естественно, с большим числом корней на мнимой оси и тщательным анализом нелинейных членов) и при действии управления существенно меньшей размерности, уменьшая, тем самым, количество исполнительных устройств и датчиков информации.

В данной работе для установившихся движений голономных и неголономных механических систем дано развитие метода [1-17] исследования устойчивости и стабилизации (до неасимптотической устойчивости по отношению ко всем координатам и скоростям) с возможно более полным использованием свойства неасимптотической устойчивости собственных движений по части переменных.

Очевидно, рассмотрение проблем такого рода связано со сложными аналитическими преобразованиями и подробным анализом структуры нелинейных членов уравнений возмущенного движения. Это приводит к тому, что для сложных многомерных систем исследование подобных задач устойчивости и стабилизации при использовании скалярной формы уравнений движения оказывается либо невозможным, либо становится весьма

громоздким и трудоемким. Гораздо более подходящими здесь являются векторно-матричные уравнения движения.

*Замечание 1.3.* Векторно-матричные уравнения возмущенного движения широко применяются [1-17,23-25,30-33, 34,35] для рассмотрения задач устойчивости и стабилизации движений сложных механических систем. Следует обратить внимание на то, что систематическое применение такой формы уравнений для исследования динамики неголономных систем началось [1-3] уже достаточно давно (ср. [30-33]). В разрабатываемом методе, в отличие от [23-25,30-35] уравнения имеют форму, которая позволяет подробно анализировать структуру линейных и нелинейных членов уравнений возмущенного движения после проведения замен теории критических случаев. Поэтому использование полученных уравнений в [1-17] не ограничено (ср. [23-25]) только определением расположения корней характеристического уравнения или лишь исследованием управляемости и наблюдаемости (ср. [30]), но и с позиций теории критических случаев [18-20] проводится анализ структуры нелинейных членов. Поскольку разрабатываемый метод ориентирован на автоматизацию процесса исследования динамики сложных систем возможно более широкого класса, для описания системы были изначально выбраны, в отличие от, например, [33], переменные Лагранжа, Рауса или Гамильтона. Выбор этих переменных обусловлен тем, что при их использовании применяются достаточно общие и хорошо отработанные процедуры.

*Замечание 1.4.* Заметим, что рассмотрение вопросов управляемости и наблюдаемости для неголономных систем было начато [4] задолго до [30], причем для рассмотрения динамики неголономных систем применялись не только переменные Лагранжа [1,3,4], но и переменные Рауса [2-6,8-12], а позднее [13-16] и Гамильтона.

*Замечание 1.5.* Следует особо подчеркнуть, что постановки рассматриваемых здесь задач стабилизации, аналогично рассматриваемым в [2-17], существенно отличаются от известных (напр.,[30]): здесь требуется при возможно более полном использовании свойства неасимптотической (условной) устойчивости собственных движений системы обеспечить только неасимптотическую устойчивость исследуемого движения. При этом действует линейное управление возможно меньшей размерности и как можно более простой структуры, причем еще в [7] была поставлена и с использованием [29] исследована (для неголономных систем - см. [8-12,16], а также [36-37]) задача о минимальной размерности вектора измерений, обеспечивающего получение оценок фазового вектора для формирования такого управления (ср. [30]). Коэффициенты стабилизирующего управления и идентификатора определяются из решения методом Н.Н.Красовского [26] соответствующих линейно-квадратичных задач для выделяемых линейных подсистем [7] возможно меньших размерностей.



## 2.Общее описание метода

Разрабатываемый метод основан на систематическом применении векторно-матричных уравнений движения в форме, допускающей после проведения аналитических преобразований теории критических случаев анализ линейных и нелинейных членов и ориентированной на рассмотрение сложных многомерных механических систем с геометрическими и линейными дифференциальными (интегрируемыми и неинтегрируемыми) однородными и неоднородными связями. Исследование проводится при следующих достаточно общих предположениях:

1. Кинетическая энергия, кроме квадратичных по скоростям членов может иметь также линейные по скоростям и свободный от скоростей члены, причем матрица коэффициентов квадратичной по скоростям формы в кинетической энергии определено-положительна.

2. На систему могут действовать произвольные потенциальные и непотенциальные обобщенные силы, при этом предполагается, что коэффициенты кинетической энергии, уравнений связей (если таковые имеются) и обобщенные силы в некоторой открытой области фазового пространства являются аналитическими функциями.

*Алгоритм метода* содержит такие основные этапы:

1. Вектор координат (это не всегда обобщенные координаты, поскольку метод допускает применение и для систем с избыточными координатами) разбивается на несколько векторов (их количество в голономных системах – до четырех, в неголономных – до пяти) в соответствии с различным характером зависимости кинетической и потенциальной энергий, коэффициентов уравнений связей, непотенциальных обобщенных сил. В случае неголономных систем разбиение определяется еще и типом связей (Чаплыгина [21,22, 34,35] или нет). Выделение этих векторов может быть связано [13], кроме того, с разной степенью точности математической модели по отношению к различным степеням свободы, а также с тем обстоятельством, что не по всем циклическим координатам будут прикладываться [7] управления, причем для неголономных систем [9-12, 16,17,36-38] координаты могут быть циклическими в смысле различных определений [34,35].

2. Далее проводится соответствующее разделение матриц коэффициентов кинетической энергии, коэффициентов в уравнениях связей, векторов обобщенных сил, и составляются полные дифференциальные векторно-матричные уравнения движения. При этом в соответствии с природой рассматриваемой задачи при одном и том же выборе обобщенных координат эти уравнения могут составляться в переменных Лагранжа, Рауса или Гамильтона [2, 9-12,15-17,36-38]. Каждый из этих типов переменных, не обладая такими свойствами, которые могли бы сделать для всех классов задач именно его использование более предпочтительным, имеет такие особенности,

которые для определенных классов задач надо уметь превратить в преимущества.

3. Затем, применяя разработанную ранее [1-17, 36-38] методику, из получаемых векторно-матричных уравнений движения выводятся уравнения, определяющие многообразие установившихся движений и его размерность.

4. Для выбранной конкретной точки этого многообразия (т.е. для определенного невозмущенного движения) дается строгая математическая постановка конкретной задачи устойчивости или стабилизации: устойчивость какого именно движения по отношению к каким переменным рассматривается или стабилизация какого конкретного движения до какой (асимптотической или неасимптотической, условной или безусловной) устойчивости по отношению к каким переменным должна быть обеспечена за счет приложения какого линейного управления по каким конкретно переменным (а в задачах стабилизации движений конкретных систем - за счет какого конкретного исполнительного устройства это стабилизирующее воздействие реализуется; в [7,10-12] таким устройством являлся маховик).

Далее составляются уравнения возмущенного движения с выделенным линейным приближением и явной формой нелинейных членов.

5. С использованием принципа сведения [18-20] и результатов о влиянии структуры сил [23-25,34-35] сведением к соответствующему особенному случаю при возможно меньшем числе корней характеристического уравнения в левой полуплоскости находятся достаточные условия устойчивости, сформулированные в исходных переменных, причем выделяются асимптотически устойчивые переменные.

6. Поскольку, как отмечено в замечании 1.5, рассматриваемые в данной работе постановки задач стабилизации требуют обеспечения только неасимптотической устойчивости исследуемого движения, исходя из структуры уравнений возмущенного движения выделяется линейная управляемая подсистема, асимптотическая устойчивость по переменным которой обеспечивает, согласно принципу сведения, неасимптотическую устойчивость в полной нелинейной системе, замкнутой линейным управлением, найденным для выделенной управляемой подсистемы.

Коэффициенты стабилизирующего управления, а при неполной информации – и идентификатора определяются из решения методом Н. Н. Красовского [26] соответствующих линейно-квадратичных задач для выделяемых линейных подсистем возможно меньших размерностей. С использованием [29] получены оценки минимальных размерностей вектора управления и измерения, при которых выполняются достаточные условия разрешимости задачи предлагаемым методом.

*Замечание 2.1.* В случае скалярного воздействия стабилизирующее управление может быть найдено [7] также и применением процедуры принципа максимума [26]. Применяя полученный в [26] этой процедурой

результат для системы третьего порядка с одним скалярным управлением, можно получить в аналитическом виде не только общее решение задачи стабилизации стационарных движений голономных систем с одной позиционной и несколькими циклическими координатами, но и построить [10] субоптимальное [39] управление для задач стабилизации движений систем, в которых управляемая подсистема состоит из трех уравнений. Отметим, что аналитическая форма общего решения при применении принципа максимума может быть получена за счет аналитического вида корней характеристического уравнения. А такие формулы имеют место и для уравнений четвертого порядка. Используя аналитические формулы общего алгебраического уравнения четвертой степени, можно получить [17] в аналитическом виде решение задач стабилизации стационарных движений систем, в которых управляемая подсистема состоит из четырех уравнений.

### 3. Применение к голономным системам

Сначала разберем поэтапно применение метода к сравнительно простому классу систем, допускающих многообразие неизолированных установившихся движений: в переменных Рауса рассмотрим механическую систему, стесненную нестационарными геометрическими связями, положение которой определяется обобщенными координатами  $q_1, \dots, q_n$ . При этом кинетическая энергия системы имеет вид (предполагается, что  $T$  явно от времени не зависит)

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad T_2 = \frac{1}{2} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad T_1 = d_j(q) \dot{q}_j, \quad T_0 = T_0(q), \quad q' = (q_1, \dots, q_n).$$

Штрих сверху означает транспонирование; по повторяющимся индексам проводится суммирование; будем считать, что индексы меняются следующим образом:

$$i, j = 1, \dots, n, \quad \rho, \nu = 1, \dots, k, \quad r, s = k + 1, \dots, n, \\ r, s = k + 1, \dots, k + m, \quad \omega, \varepsilon = k + m + 1, \dots, n.$$

Пусть система находится под действием потенциальных сил с энергией  $\tilde{I}(q)$  и непотенциальных обобщенных сил  $Q_i(q, \dot{q})$ . Предположим, что в некоторой открытой области фазового пространства  $\alpha_{ij}(q)$ ,  $d_j(q)$ ,  $T_0(q)$ , потенциальная энергия  $P(q)$  и непотенциальные обобщенные силы  $Q_i(q, \dot{q})$  являются аналитическими функциями своих аргументов, причем  $T_2$  – определенно-положительная функция скоростей. Обратим внимание на то, что до сих пор никаких предположений о наличии циклических координат не делалось.

1. *Разбиение вектора координат.* Ограничимся самым простым разбиением – в соответствии с алгоритмом метода вводим только два вектора (хотя в программных реализациях [40,41] метода заложено разбиение на пять компонент) и матрицы:

$$\alpha' = (q_1, \dots, q_k), \quad \beta' = (q_{k+1}, \dots, q_n), \quad \alpha'_1 = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k),$$

$$a_1(q) = \|a_{\rho\nu}(q)\|, \quad a_{12}(q) = \|a_{\rho s}(q)\| = a'_{21}(q),$$

$$a_2(q) = \|a_{rs}(q)\|, \quad d'_\alpha = \|d_1(q), \dots, d_k(q)\|, \quad d'_\beta = \|d_{k+1}(q), \dots, d_n(q)\|.$$

Как ранее отмечалось, разбиение вектора  $q$  на векторы  $\alpha$  и  $\beta$  в конкретных задачах проводится в соответствие с различным характером зависимости коэффициентов кинетической энергии, потенциальной энергии и непотенциальных обобщенных сил от обобщенных координат. Поскольку в данном разделе разбираются общие процедуры метода, пока это разбиение проведено формально.

2. *Уравнения движения системы.* Примем за переменные, характеризующие состояние системы, переменные Рауса:

$$\alpha, \alpha_1, \beta, p = \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} = a_{21}\dot{\alpha}_1 + a_2\dot{\beta} + d_\beta.$$

Введем функцию Рауса и запишем уравнения движения:

$$R = T - \dot{I} - p'\dot{\beta} = \frac{1}{2}\alpha_1'a^*\alpha_1 + (d'_\alpha - d'_\beta\gamma' + p'\gamma')\alpha_1 - \frac{1}{2}(p' - d'_\beta)b(p - d_\beta) + T_0 - \dot{I},$$

$$\dot{\alpha} = \alpha_1,$$

$$a^*\dot{\alpha}_1 = -\alpha_1'(a_{(\alpha)}^* - a_{(\beta)}^*\gamma' - \frac{1}{2}a_{[\alpha]}^*)\alpha_1 - \alpha_1'\left[(a_{(\beta)}^*b(p - d_\beta) + \frac{\partial d_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{\partial d_\alpha}{\partial \beta}\gamma' - \gamma'\frac{\partial d_\beta}{\partial \alpha} + \right. \\ \left. + \gamma\frac{\partial d_\beta}{\partial \beta}\gamma' + (\gamma'_{(\alpha)})'(p - d_\beta) - \gamma\gamma'_{(\beta)}(p - d_\beta) - d_{\alpha[\alpha]} + \gamma d_{\beta[\alpha]} - \gamma_{[\alpha]}(p - d_\beta)\right] - \\ - \left[\frac{\partial d_\alpha}{\partial \beta}b - \gamma\frac{\partial d_\beta}{\partial \beta}b - d'_\beta(\gamma'_{(\beta)}b + b(\gamma'_{(\beta)})) - (d_{\beta[\alpha]})'b - d'_\beta b_{[\alpha]}\right]p - \\ - \gamma'\dot{p} - p'\left(\gamma_{(\beta)}b + \frac{1}{2}b_{[\alpha]}\right)p + \frac{\partial d_\alpha}{\partial \beta}bd_\beta - \gamma\frac{\partial d_\beta}{\partial \beta}bd_\beta - d'_\beta\gamma'_{(\beta)}bd_\beta - \\ - (d_{\beta[\alpha]})'bd_\beta - \frac{1}{2}d'_\beta b_{[\alpha]}d_\beta + \frac{\partial T_0}{\partial \alpha} - \dot{I}_\alpha + Q_\alpha(q, \alpha_1, \beta), \quad (3.1)$$

$$\dot{\beta} = -\gamma'\alpha_1 + b(p - d_\beta),$$

$$\dot{p} = \frac{1}{2}\alpha_1'a_{[\beta]}^*\alpha_1 + \alpha_1'(d_{\alpha[\beta]} - \gamma d_{\beta[\beta]} + \gamma_{[\beta]}(p - d_\beta) + (d'_{\beta[\beta]}b + d'_\beta b_{[\beta]})p - \\ - \frac{1}{2}(p' - d'_\beta)b_{[\beta]}(p - d_\beta) - d'_{\beta[\beta]}bd_\beta + \frac{\partial T_0}{\partial \beta} - \dot{I}_\beta + Q_\beta(q, \alpha_1, p).$$

Здесь

$$b(q) = a_2^{-1}(q), \quad a^\bullet(q) = a_1(q) - \gamma(q)a_{21}(q),$$

$$\gamma(q) = a_{12}(q)b(q), \quad \dot{I}_\alpha = \frac{\partial \dot{I}}{\partial \alpha}, \quad \dot{I}_\beta = \frac{\partial \dot{I}}{\partial \beta},$$

$$Q'_\alpha = (Q_1, \dots, Q_k), \quad Q'_\beta = (Q_{k+1}, \dots, Q_n),$$

$X_{(q)}, X_{[q]}$  для произвольной матрицы  $X_{(q)} = \|x_{ij}(q)\|$  означает соответственно «векторы» с матричными компонентами  $\left\| \frac{\partial x_{iv}}{\partial q_j} \right\|, \left\| \frac{\partial x_{ij}}{\partial q_v} \right\|$  где  $v$  – номер компоненты «вектора»;

$X'_{(\alpha)}, (X_{(\alpha)})'$  – «векторы» соответственно с компонентами  $\left\| \frac{\partial x_{vi}}{\partial q_j} \right\|, \left( \left\| \frac{\partial x_{vj}}{\partial q_j} \right\| \right)'$ .

Отметим еще раз, что уравнения (3.1) получены в общем случае, без предположения о наличии циклических координат. Таким образом, здесь использование переменных Рауса отлично от традиционного, при котором предполагается наличие циклических координат. Такая форма уравнений движения может оказаться выгодной, в частности, с позиций теории критических случаев, когда для выделения критических переменных уравнения возмущенного движения в нормальной форме следует привести к специальному виду: уравнения относительно  $\beta, p$  уже приведены к нормальной форме.

3. Уравнения, определяющие многообразие установившихся движений и его размерность. Чтобы продемонстрировать применение разрабатываемого метода к простейшей ситуации неизолированных установившихся движений, предположим теперь, что функция Лагранжа системы не зависит от некоторых обобщенных координат, которые включим в вектор  $\beta$ , причем отсутствуют также и непотенциальные обобщенные силы, отвечающие координатам  $\beta$ . Тогда система допускает циклические интегралы и при определенных начальных условиях может совершать стационарные движения,

$$q_p = \alpha_p^0 = const, \quad p = \delta = const, \quad (3.2)$$

которые определяются уравнением (учитывая, что в стационарном движении  $R_2 = R_1 = 0$ )

$$Q_\alpha(\alpha^0, 0, \delta) - \frac{\partial R_0}{\partial \alpha} = 0. \quad (3.3)$$

$k$  скалярных уравнений (3.3) связывают  $n$  величин  $\alpha^0, \delta$ . Отсюда, в частности, следует, что стационарные движения голономных систем образуют многообразие размерности, не меньшей числа циклических координат [22,34,35]. При этом постоянные циклических интегралов  $\delta$  могут быть выбраны произвольно, а постоянные  $\alpha^0$  определяются из уравнений (3.3).

*Замечание 3.1.* В общем случае (при неасимптотической устойчивости по отношению к циклическим скоростям) стационарное движение неустойчиво

по отношению к циклическим координатам. Следовательно, имеет смысл говорить лишь об устойчивости стационарного движения по отношению к величинам  $\alpha, \alpha_1, p$  или некоторым непрерывным однозначным функциям этих величин. В то же время, благодаря наличию циклических интегралов, очевидна устойчивость движения систем с циклическими координатами по отношению к величинам  $p$ .

*Замечание 3.2.* При действии управлений, обеспечивающих асимптотическую устойчивость невозмущенного стационарного движения по отношению к циклическим скоростям будет достигаться [42] неасимптотическая устойчивость по отношению к циклическим координатам.

*4. Уравнения возмущенного движения.* Для рассмотрения вопроса об устойчивости введем обозначения для возмущений

$$\alpha = \alpha^0 + x, \quad p_u = \delta_u + y_u, \quad p_w = \delta_w + z_w$$

и составим уравнения возмущенного движения в окрестности движения (3.2), выделив в них первое приближение:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x_1, \\ A\dot{x}_1 &= -(G + D)x_1 - (C + P)x - \tilde{A}_1\dot{y} - (H_1 + B_1)y - \tilde{A}_2\dot{z} - \\ &\quad - (H_2 + B_2)z + N(x, x_1, y, z), \\ \dot{y} &= 0, \quad \dot{z} = 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \left\| \{a_{\rho v}^*\}_0 \right\|, \quad W(\alpha, p) = \frac{1}{2}(p - d'_{\beta})b(p - d_{\beta}) - T_o + \tilde{I}, \\ C &= \|c_{vp}\| = \left\| \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial q_v \partial q_{\rho}} \right\}_0 \right\|, \\ H_1 &= \left\| \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial q_v \partial p_u} \right\}_0 \right\| = \left\| \left\{ \frac{\partial}{\partial q_v} [(\delta_v - d_v)b_{uv} + (\delta_w - d_w)b_{uw}] \right\}_0 \right\|, \\ H_2 &= \left\| \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial q_v \partial p_{\varepsilon}} \right\}_0 \right\| = \left\| \left\{ \frac{\partial}{\partial q_v} [(\delta_v - d_v)b_{u\varepsilon} + (\delta_w - d_w)b_{w\varepsilon}] \right\}_0 \right\|, \\ K(\alpha, p) &= \|k_{vp}\| = \left\| \frac{\partial d_v}{\partial q_{\rho}} - \gamma_{vr} \frac{\partial d_r}{\partial q_{\rho}} + \frac{\partial \gamma_{vr}}{\partial q_{\rho}}(p_r - d_r) - \frac{\partial d_{\rho}}{\partial q_v} + \gamma_{\rho r} \frac{\partial d_r}{\partial q_v} - \frac{\partial \gamma_{\rho r}}{\partial q_v}(p_r - d_r) \right\|, \\ G &= \|k_{vp}\|_0, \quad \tilde{A}_1 = \|a_{\rho u}b_{uv} + a_{\rho w}b_{w\varepsilon}\|_0, \quad \tilde{A}_2 = \|a_{\rho u}b_{uw} + a_{\rho w}b_{w\varepsilon}\|_0, \\ -B_1 &= \left\| \left\{ \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial p_1} \right\}_0 \right\|, \quad -B_2 = \left\| \left\{ \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial p_2} \right\}_0 \right\|, \quad -P = \left\| \left\{ \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial \alpha} \right\}_0 \right\|, \quad -D = \left\| \left\{ \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial \alpha_1} \right\}_0 \right\|, \\ p'_1 &= (p_{k+1}, \dots, p_{k+m}), \quad p'_2 = (p_{k+m+1}, \dots, p_n), \\ K^1 &= K(\alpha, p) - G, \quad \tilde{A}^1 = \|a_{\rho u}b_{uv} + a_{\rho w}b_{wv}\| - \tilde{A}_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_* &= a^*(q) - A, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \left\{ \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right\}_0 + Cx + H_1 y + H_2 z + W'^2, \\
Q_\alpha(\alpha, \alpha_1, p) &= \{Q_\alpha\}_0 - Px - Dx_1 - B_1 y - B_2 z + Q'_\alpha{}^2, \\
\Phi(x, x_1, y, z) &= -x'_1 \left( a^*_{(\alpha)} - \frac{1}{2} a^*_{[\alpha]} \right) x_1 - W'^2 - K'^1 x_1 + Q'_\alpha{}^2, \\
Z &= -(G + D)x_1 - (C + P)x - (H_1 + B_1)y - (H_2 + B_2)z, \\
N &= \Phi + AA_*^{-1}(Z + \Phi),
\end{aligned}$$

Знак  $\{\dots\}_0$  означает, что выражение, стоящее в скобках, вычислено на движении (3.2), а верхний индекс после запятой соответствует порядку младших членов в разложении выражения, к которому он относится.

Очевидно, что для существования движения (3.2) должно быть выполнено

$$\left\{ \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right\}_0 + \{Q_\alpha\}_0 = 0.$$

Следует обратить особое внимание, что первое приближение и нелинейные члены получены умножением слева второго уравнения сначала на  $(a^*(\alpha))^{-1}$ , а после этого (для применения результатов о влиянии структуры сил на устойчивость движения) – умножением результата слева на постоянную матрицу  $A = \{a^*(\alpha)\}_0$ .

*Замечание 3.5.* Как известно [22, 34,35], наибольшие трудности при исследовании устойчивости возникают при действии линейных непотенциальных обобщенных позиционных сил. Здесь же матрица  $C + P$  коэффициентов линейных по координатам сил, вообще говоря, несимметрична. Кососимметричная составляющая у нее появится не только при наличии линейных непотенциальных обобщенных сил в векторе  $Q_\alpha$ . Такие члены могут возникнуть также и при действии сил, содержащих циклические скорости. Пусть, например, действуют только силы, линейные по скоростям

$$Q_\alpha(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \alpha) = D_1(\alpha)\dot{\alpha} + D_2(\alpha)\dot{\beta}.$$

После исключения циклических скоростей будем иметь

$$Q_\alpha(\alpha, \alpha_1, p) = (D_1 - D_2\gamma')\alpha_1 + D_2b(p - d_\beta).$$

Выделяя в разложении этого вектора в окрестности движения (3.2) линейные члены, получим

$$\begin{aligned}
Q_\alpha &= \{Q_\alpha\}_0 + \left[ \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (D_2 b) \right\}_0 (\delta - \{d_\beta\}_0) - \{D_2 b\}_0 \left\{ \frac{\partial d_\beta}{\partial \alpha} \right\}_0 \right] x + \\
&+ \{D_1 - D_2\gamma'\}_0 x_1 + \{D_2 b\}_0 y_1 + Q'_\alpha{}^2, \\
y'_1 &= (y', z').
\end{aligned}$$

Как видим, появление кососимметричной составляющей возможно даже при действии линейных по циклическим скоростям сил, если кинетическая энергия зависит от координат.

*Замечание 3.6.* Матрицы коэффициентов линейных членов в уравнениях (4.1) отличны от соответствующих матриц [43-46], причем это отличие обусловлено не только действием потенциальных обобщенных сил  $Q_\alpha$ , но и наличием членов  $T_1, T_0$  в кинетической энергии.

*5. Стабилизация стационарных движений приложением управления по части циклических координат.* Движение (3.2), как уже отмечалось, устойчиво по отношению к возмущениям циклических импульсов. Используя это свойство невозмущенного движения, рассмотрим задачу стабилизации движения (3.2) до устойчивости по отношению к величинам  $x, x_1, y, z$ .

Управляющие воздействия будем прикладывать по возможно меньшей части циклических координат, поскольку для многих прикладных задач достаточно обеспечения неасимптотической устойчивости стабилизируемого движения. Очевидно, что неустойчивость невозмущенного движения может следовать только из уравнений, отвечающих позиционным координатам и их скоростям.

Стабилизировать движение по отношению к возмущениям импульсов в рассматриваемой постановке стабилизации до неасимптотической устойчивости нет необходимости, и соответствующую группу уравнений возмущенного движения вообще можно составить неуправляемой (но не следует забывать об устройствах для реализации управлений).

*Замечание 3.7.* За управляющие воздействия, начиная еще с [47,48], (затем уже в более общей форме и [49]), предлагается выбирать не возмущения циклических импульсов, как в [50,51], а производные от возмущений циклических импульсов, существенно упрощает рассмотрение. При таком подходе уравнения для управляемых импульсов могут рассматриваться как естественным образом возникающий динамический регулятор [41].

Поскольку мы решаем задачу стабилизации приложением управлений лишь по части циклических координат, будем выделять управляемую подсистему возможно меньшей размерности, исходя из структуры уравнений возмущенного движения (учитывая, например, гироскопическую связность и нетривиальность [44,45] по отношению к выбранным в качестве управляемых циклическим координатам, а также простоту реализации управления). Для однозначного определения стабилизирующего управления воспользуемся процедурой [26] решения задачи оптимальной в смысле минимума квадратичного критерия стабилизации.

*Замечание 3.8.* Сокращение размерности задачи управления происходит за счет исключения части уравнений, соответствующих неуправляемым циклическим импульсам, а уравнения для позиционных координат и их



скоростей включаются в управляемую подсистему полностью. Вообще говоря, возможно уменьшение размерности задачи управления и за счет исключения из управляемой подсистемы части уравнений, соответствующих тем позиционным координатам и скоростям, по отношению к которым имеет место устойчивость и без дополнительных управлений. Но выделение такой ситуации приводит в общем случае к трудно обозримым условиям на исходную механическую систему.

*Замечание 3.9.* Для однозначного определения управления можно использовать приведение системы к так называемому каноническому управляемому представлению [52,53], т. е. разбиение исходной системы на ряд подсистем со скалярным управлением. В этих подсистемах выбор коэффициентов управления, отвечающих наперед заданной степени затухания, не представляет принципиальных трудностей. Например, можно воспользоваться удобной процедурой [54].

Итак, будем прикладывать управление по координатам соответствующим импульсам  $p_u$ . Система уравнений возмущенного движения (3.4) в таком случае получит форму

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x_1, \\ A\dot{x}_1 + (D + G)x_1 + (C + P)x + \tilde{A}_1 u + (H_1 + B_1)y + \\ &+ (H_2 + B_2)z + \tilde{A}_2 \dot{z} = N(x, x_1, y, z, u), \\ \dot{y} &= u, \quad \dot{z} = 0,\end{aligned}\tag{3.5}$$

причем теперь

$$Z = -(D + G)x_1 - \tilde{A}_1 u - (C + P)x - (H_1 + B_1)y - (H_2 + B_2)z.$$

Выделим в уравнениях возмущенного движения линейную управляемую подсистему

$$\dot{\xi} = F\xi + \Psi u.\tag{3.6}$$

Здесь

$$\begin{aligned}F &= \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & -A^{-1}(H_1 + B_1) \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ y \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ -A^{-1}\tilde{A}_1 \\ \dot{A}_m \end{pmatrix} \\ F_1 &= \begin{pmatrix} 0 & E_k \\ -A^{-1}(C + P) & -A^{-1}(D + G) \end{pmatrix}, \quad \Psi_1 = \begin{pmatrix} -A^{-1}\tilde{A}_1 \\ -A^{-1}[(D + G)A^{-1}\tilde{A}_1 - H_1 - B_1] \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

**Теорема 3.1.** Для того, чтобы движение (3.2) можно было стабилизировать приложением линейных управлений, действующих только по координатам  $\beta$ , при действии по позиционным координатам потенциальных сил с энергией  $\tilde{I}(q)$  и произвольных непотенциальных позиционных сил  $Q_\alpha(\alpha, \alpha_1, p)$ , достаточно выполнения условия

$$\text{rank}(\Psi_1 \quad F_1 \Psi_1 \quad \dots \quad F_1^{2k-1} \Psi_1) = 2k.\tag{3.7}$$

Стабилизирующее воздействие  $u^0 = M_1x + M_2x_1 + M_3y$  может быть найдено решением задачи оптимальной стабилизации для подсистемы (3.6) и зависит только от переменных, входящих в эту подсистему.

*Доказательство:* При выполнении условия (3.7) существует [26] управление  $u^0 = M_1x + M_2x_1 + M_3y$ , решающее задачу стабилизации нулевого решения подсистемы (3.6) до асимптотической устойчивости по всем ее переменным и доставляющее минимум функционалу

$$I = \int_0^{\infty} [\Omega_1(\xi) + \Omega_2(u)] dt, \quad (3.8)$$

где  $\Omega_1, \Omega_2$  – определено-положительные квадратичные формы. При действии определенного таким образом управления в нелинейной системе (3.4) получим критических случай  $n - m - k$  нулевых корней, отвечающих переменным  $z$ . Для сведения этого случая к особенному при наличии свободно входящих  $z$  (в частности, при  $H_2 + B_2 \neq 0$ ) требуется замена

$$x = \zeta + v(z), \quad x = \eta + w(z), \quad (3.9)$$

где функции  $v(z), w(z)$  определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} (C + P)v + (H_1 + B_1)w + (H_2 + B_2)z &= N_1, \\ M_1v + M_3w &= 0, \\ N_1 &= N(v, 0, w, z). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Вследствие этого управление  $u^0$  стабилизирует движение (3.2.) до асимптотической устойчивости по отношению к позиционным скоростям, и, вообще говоря, до устойчивости по позиционным координатам и циклическим скоростям. При отсутствии свободно входящих  $z$  в уравнениях возмущенного движения (для чего необходимо  $H_2 + B_2 \neq 0$ ) движение (3.2) стабилизируется управлением  $u^0$  до асимптотической устойчивости по позиционным координатам и их скоростям и, возможно, части циклических скоростей, и устойчивости по остальным циклическим скоростям.

Упрощение критерия управляемости (3.7) по сравнению с получающимся формальным применением теоремы Калмана (об управляемости линейных систем) критерием достигается следующим образом. Запишем матрицу управляемости для подсистемы (3.6):

$$W_1 = \begin{pmatrix} \Psi & F\Psi & \dots & F^{2k+m-1}\Psi \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & W_2 \\ \hline -A^{-1}\tilde{A}_1 & \\ \hline E_m & 0 \end{array} \right).$$

Последняя строка ее, кроме первого столбца, вся нулевая. Для того, чтобы  $\text{rank} W_1 = 2k + m$ , достаточно, чтобы ранг коагулированной матрицы  $W_2$  в правом верхнем углу был равен  $2k$ . А для этого достаточно выполнения условия (3.7).

Теорема доказана.

*Замечание 3.10.* В действительном проведении замены (3.9) нет необходимости. Достаточно убедиться в ее существовании, которое следует из теоремы о неявных функциях для системы (3.10).

*Замечание 3.11.* Если управляющие воздействия прикладывать по всему вектору циклических координат, то получим достаточное условие асимптотической стабилизируемости движений (3.2) при действии по позиционным координатам, кроме потенциальных сил, еще дополнительных непотенциальных обобщенных сил

$$Q_\alpha(\alpha, \alpha_1, p).$$

*Замечание 3.12.* По структуре второй строки коагулированной матрицы  $W_2$  видно, что управляемость существенно зависит от вектора непотенциальных обобщенных сил  $Q_\alpha$ . В частности, для гироскопически несвязанных (по выбранной части циклических координат, возмущения импульсов которых входят в управляемую подсистему) систем появляется возможность стабилизации тривиальных (т. е.  $H_1 = 0$ ) [44,45] по этим координатам движений.

При отсутствии таких сил движение (3.2), как и в [44], не стабилизируется никакими линейными управлениями, приложенными по выбранной части циклических координат.

*Следствие 3.1.* Если при  $H_1 = 0$  ранг матрицы  $B_1$  равен числу позиционных координат, то гироскопически несвязная (по управляемым координатам) подсистема всегда управляема (ср. с теоремой 2.1 [52]).

В задачах стабилизации стационарных движений систем с несколькими циклическими координатами возникает вопрос об уменьшении размерности управляющего воздействия. Используя структуру уравнений возмущенного движения и [29], оценим число управляемых циклических импульсов.

*Следствие 3.2.* Минимальное число управляемых циклических импульсов, необходимое для выполнения достаточного условия стабилизируемости (3.7), равно числу нетривиальных инвариантных многочленов матрицы  $F_1$ .

*Замечание 3.13.* Рассматриваемая нами задача существенно отличается от исследованной Л. К. Лиловым [55] задачи на наименьшей размерности вектора управлений, стабилизирующих нулевое решение нелинейной системы (с выделенной линейной частью)

$$\dot{x} = f(x) + \varphi(x, u) = Ax + Bu + \dots$$

до асимптотической устойчивости по первому приближению по отношению ко всем переменным. В нашей задаче с изменением размерности управления изменяется размерность всей управляемой подсистемы, вследствие чего меняются обе матрицы  $F$  и  $\Psi$ , играющие роль матриц  $A$  и  $B$ . В работе [55] при изменении размерности  $u$  изменяется только число столбцов матрицы  $B$ .

Кроме того, у нас матрица  $F$  имеет по крайней мере  $m$  нулевых собственных чисел.

Таким образом, при решении конкретных задач стабилизации проверку критерия (3.7) надо начинать со случая, когда число  $r$  (число нетривиальных многочленов матрицы  $F_1$ ) равно размерности управления. При наличии нескольких циклических координат каждому набору управляемых импульсов соответствует своя матрица  $\Psi$  (т. к. во вторую ее строку входит матрица  $H_1 + B_1$ , и, кроме того, будет изменяться и матрица  $\tilde{A}_1$ ). Если же общее число циклических координат меньше, чем  $r$ , достаточное условие стабилизируемости (3.7) выполнено быть не может.

*Пример 3.1.* В общем случае в задачах большой размерности коэффициенты стабилизирующих воздействий можно определить с помощью ЭВМ. Для объектов же, у которых управляемая подсистема имеет небольшую размерность, задача полностью решается аналитически. Решим в общем виде задачу стабилизации стационарных движений голономных систем с одной позиционной и несколькими циклическими координатами.

Рассмотрим механическую систему, стесненную стационарными связями и находящуюся под действием потенциальных сил, положение которой описывается тремя обобщенными координатами  $q_1, q_2, q_3$ , из которых две, например  $q_2, q_3$  – циклические. При определенных начальных условиях система может совершать стационарные движения

$$q_1 = q_1^0 = \text{const}, \quad p_2 = \delta_2 = \text{const}, \quad p_3 = \delta_3 = \text{const}. \quad (3.11)$$

Для рассматриваемой механической системы матрица  $D + G$  обращается в нуль. За управляемую переменную примем  $q_2$ . Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x_1, \\ \dot{x}_1 &= cx + h_1 r + h_2 f + gu + \hat{O}(x, x_1, r, f, u), \\ \dot{r} &= u, \\ \dot{f} &= 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где  $c, h_1, h_2, g$  – некоторые постоянные. Линейная управляемая подсистема такова:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x_1, \\ \dot{x}_1 &= cx + h_1 r + gu, \\ \dot{r} &= u. \end{aligned} \quad (3.13)$$

В рассматриваемой задаче для определителя матрицы управляемости имеем

$$\det W = h_1^2 - cg^2.$$

В случае  $h_1^2 - cg^2 \neq 0$ , согласно теореме 3.1, нулевое решение системы (3.12) стабилизируется управлением

$$u^0 = v_1 x_1 + v_2 x + v_3 r$$

до асимптотической устойчивости по  $x_1$  и в общем случае устойчивости по  $x, r, f$ .

Заметим теперь, что уравнение управляемой линейной подсистемы (3.13) для голономной механической системы, описываемой одной позиционной и несколькими циклическими координатами (из которых только одна управляема) и находящейся под действием потенциальной силы в окрестности стационарного движения (3.11) совпадает с системой уравнений, рассмотренной в примере ([26], с. 506, (113.15)).

Выбрав критерий качества переходного процесса

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x_1^2 + x^2 + r^2 + u^2) dt$$

и используя формулы (113.17) ([26], для коэффициентов оптимального в смысле минимума этого критерия управления получим

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{g(a_3 + ca_1) - h_1(a_2 + c)}{h_1^2 - cg^2}, \quad a_3 = \sqrt{c^2 + h_1^2}, \\ v_2 &= \frac{gc(a_2 + c) - h_1(a_3 + ca_1)}{h_1^2 - cg^2}, \quad a_1 = 1 + \sqrt{2c + g^2 + 2a_3}, \\ v_1 &= \frac{gh_1(a_2 + c) - h_1^2 a_1 - a_3 g^2}{h_1^2 - cg^2}, \quad a_2 = c^2 + h_1^2 + \sqrt{2c + g^2 + 2a_3}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Формулы (3.14) дают аналитический вид коэффициентов управления, решающего в общем случае задачу стабилизации стационарного движения голономной системы с одной позиционной и несколькими циклическими координатами.

*Замечание 3.14.* В общем случае систем большой размерности применение метода приведет к необходимости численного решения системы нелинейных неоднородных дифференциальных уравнений [26] относительно коэффициентов оптимальной функции Ляпунова, через которые определяются управляющие воздействия. Программные продукты [40,41] содержат модули, позволяющие однозначно находить стабилизирующие воздействия.

### **Заключение.**

В данной работе обсуждены задачи, решение которых стало весьма актуальной проблемой с точки зрения технической практики, приведено краткое описание метода, основанного на комплексном применении принципа сведения теории критических случаев, методов аналитической механики, теории оптимальной стабилизации и теории управления при неполной информации и качественной теории оптимальных процессов, а также показано его применение к задаче стабилизации простейшего класса неизоллированных установившихся движений – стационарных движений голономных систем.

К настоящему времени разрабатываемым методом (в том числе и с использованием его программных реализаций [40,41]) исследованы задачи об устойчивости и стабилизации достаточно большого количества сложных голономных и неголономных систем, причем в том числе и с учетом динамики электропривода и при неполной информации о состоянии (см., напр., [56-61]).

Тем не менее, многие проблемы, особенно относящиеся к динамике связанных систем, причем как с геометрическими, так и с неголономными связями, требуют дальнейшего совершенствования как самого алгоритма разрабатываемого метода, так и автоматизации его применения. Уже полученные в этих направлениях результаты составят содержание следующей нашей публикации.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Красинская-Тюменева Э. М., Красинский А. Я. О влиянии структуры сил на устойчивость положений равновесия неголономных систем // Вопросы выч. и прикл. математики. – Ташкент, 1977. – Вып. 45. – С. 172-186.
2. Красинская Э. М. К стабилизации стационарных движений механических систем // ПММ, 1983. – Т.47, Вып. 2. – С. 302-309.
3. Атажанов Б., Красинская Э. М. К устойчивости стационарных движений неголономных систем // Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук, 1985. – №1. – С. 41-46.
4. Атажанов Б., Красинская Э. М. К устойчивости стационарных движений неголономных систем // Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук, 1985. – №6. – С. 39-43.
5. Красинский А. Я. Об устойчивости и стабилизации положений равновесия неголономных систем // ПММ, 1988. – 52. – С. 194-202.
6. Атажанов Б., Красинская Э. М. О стабилизации стационарных движений неголономных механических систем // ПММ, 1988. – 52, Вып.6. – С. 902-908.
7. Красинский А. Я. О стабилизации установившихся движений систем с циклическими координатами // ПММ, 1992. – 56. – С. 939-950.
8. Красинский А. Я. О применении теории критических случаев к исследованию наблюдаемости в задачах стабилизации // International conference on some topics of mathematics. – Samarkand, Uzbekistan, 1996. – P. 124-125.
9. Красинский А. Я., Атажанов Б. Об одном классе задач стабилизации установившихся движений // Проблемы механики Узбекистана, 1998. – №6. – С. 8-12.
10. Красинский А. Я., Нагевич Я. П. Об общем решении одного класса задач стабилизации до неасимптотической устойчивости // Узбекский математический журнал, 1998. – №3. – С. 27-32.
11. Атажанов Б., Туревский В. Б. О стабилизации равномерных вращений тяжелого гиростата // Узбекский журнал "Проблемы механики", 2000. – №2. – С. 11-13.

12. Атажанов Б., Нагевич Я. П. О стабилизации установившихся движений неголономных систем Чаплыгина // Узбекский журнал "Проблемы механики", 2000. – №4-5. – С. 5-12.

13. Красинский А. Я. Об адаптивной стабилизации установившихся и периодических движений // "Нелинейный динамический анализ"(NDA'2), Второй международный конгресс. Тезисы докл. – Москва, 2002. – С. 122.

14. Красинский А. А. О решении задачи адаптивной стабилизации в переменных Гамильтона // Труды междунар конф. "Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы". – Изд-во "Гилем", Уфа, 2003. – Т.2. – С. 166-171.

15. Красинский А. Я. Об уравнениях возмущенного движения в задачах устойчивости положений равновесия неголономных систем // МВиССО Республики Узбекистан. Известия вузов. Физико-математические науки. – Ташкент, 2003. – № 1-2. – С. 9-23.

16. Красинский А. Я., Атажанов Б., Красинская Э. М., Хайдаров И. К., Умаров А. Т., Юлдашева И. А. Аналитическая механика неголономных систем и устойчивость их движений. – Отчет о научно-иссл. работе. Проект 19/01 ФФИ ГКНТ Узбекистана. Номер гос. регистрации 01.01.0011346. – Ташкент, 2003. – 187 с.

17. Красинский А. Я. Об одном методе исследования устойчивости и стабилизации неизолированных установившихся движений механических систем // Избранные труды VIII Международного семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». – Москва, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2004. – Электронное издание. – С. 97-103. – <http://www.ipu.ru/semin/arhiv/stab04>.

18. Ляпунов А. М. Собрание сочинений. – Изд. АН СССР, Москва - Ленинград, 1956. – Т.2.

19. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. – Москва: Наука, 1952.

20. Каменков Г. В. Избр. труды. – Москва, 1972. – Т.2.

21. Шульгин М. Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании // Труды САГУ. – Ташкент, 1958. – Вып. 144, Кн.18.

22. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. – М.: Наука, 1967.

23. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1971.

24. Hagedorn P. Ueber die Instabilitaet konservativer Systeme mit gyroskopischen Kraefte // Arch. Rat. Mech. Anal, 1975. – 58 (1) – С. 1-9.

25. Huseyin K., Hagedorn P., Teschner W. On the stability of linear conservative gyroscopic systems // ZAMP, November 1983. – 34. – P. 807-815.

26. Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1967. – С. 475-514.

27. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971.

28. Красовский А. А. О наблюдаемости нелинейных процессов // ДАН СССР, 1978. – 242. – С. 1265-1268.

29. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1971.

30. Каленова В. И., Морозов В. М., Шевелева Е. Н. Управляемость и наблюдаемость в задаче стабилизации установившихся движений неголономных механических систем с циклическими координатами // ПММ, 2001. – 65. – С. 915-924.

31. Мартыненко Ю. Г. О матричной форме уравнений неголономной механики // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. – Вып. 23. – С. 9-21.

32. Морозов В. М., Каленова В. И., Шевелева Е. Н. Устойчивость и стабилизация движения одноколесного велосипеда // Изв. РАН. МТТ, 2001. – №4. – С. 49-58.

33. Мартыненко Ю. Г., Зацепин М. Ф. Применение матричных методов для составления уравнений Маджи и Эйлера-Лагранжа неголономных систем // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. – Вып. 25. – С. 86-101.

34. Румянцев В. В., Карапетян А. В. Устойчивость движения неголономных систем. Итоги науки и техники // Общая механика. – М.: ВИНТИ, 1976. – Т.3. – С. 5-42.

35. Карапетян А. В., Румянцев В. В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. – М.: ВИНТИ, 1983. – Т.6. – 129 с.

36. Красинский А. Я., Атажанов Б. О задаче стабилизации установившихся движений неголономных систем С. А. Чаплыгина // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах, 2007. – Вып. 2(28), Т. 13. – С. 74-96.

37. Красинский А. Я., Халиков А. А. Компьютерный анализ задач стабилизации стационарных движений мобильных роботов как неголономных систем // Вестник Московского авиационного института, 2008. – № 2, Т. 15. – С. 66-76.

38. Красинский А. Я., Атажанов Б. Об устойчивости установившихся движений неголономных систем с неоднородными связями // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах, 2009. – Вып. 1(31), Т. 15. – С. 114-143.

39. Кунцевич В. М., Лычак М. М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. – М.: Наука, 1977. – 400 с.

40. Красинский А. Я. Модуль по автоматизации исследования устойчивости нелинейных систем. – Государственное патентное ведомство



Республики Узбекистан, 2007. – Решение об официальной регистрации программ для ЭВМ DGU 20050097.

41. Красинский А. Я., Халиков А. А., Иофе В. В., Каюмова Д. Р. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ №2011615362. Российская Федерация. Программное составление уравнений движения и исследование стабилизации механических движений. 2011. Правообладатель: ГОУ ВПО "Московский государственный университет прикладной биотехнологии". – Заявка № 2011613568; зарегистрирована в Реестре программ для ЭВМ 23 мая 2011 г.

42. Красинский А. Я., Каюмова Д. Р. О влиянии деформируемости колес на динамику робота с дифференциальным приводом // Нелинейная динамика, 2011. – Т.7, №4.

43. Лилов Л. К. О стабилизации стационарных движений механических систем по части переменных // ПММ, 1972. – Т.36, Вып. 6. – С. 977-985.

44. Самсонов В. А. О стабилизируемости установившихся движений систем с псевдоциклическими координатами // ПММ, 1981. – Т. 45, Вып. 3. – С. 512-520.

45. Клоков А. С., Самсонов В. А. О стабилизируемости тривиальных установившихся движений гироскопически связанных систем с псевдоциклическими координатами // ПММ, 1985. – Т. 49, Вып. 2. – С. 199-202.

46. Атанасов В. А., Лилов Л. К. К стабилизируемости установившихся движений систем с псевдоциклическими координатами // ПММ, 1988. – Т. 52, Вып. 5. – С. 713-718.

47. Красинский А. Я. О математическом моделировании в задачах оптимальной стабилизации установившихся движений // Всесоюзн. школа-семинар «Математическое моделирование в науке и технике». Тезисы докл. – Пермь, 1986. – С. 184-185.

48. Красинский А. Я., Ронжин В. В. Об оптимальной стабилизации установившихся движений голономных систем // Всесоюзн. конф. «Метод функций Ляпунова в современной математике». Тезисы докл. – Харьков, 1986. – С. 95.

49. Красинский А. Я., Ронжин В. В. К стабилизации установившихся движений систем с циклическими координатами, ПММ, 1988. – Т.52, Вып.2. – С. 542-548.

50. Румянцев В. В. Об управлении и стабилизации систем с циклическими координатами // ПММ, 1972. – Т.36, Вып.6. – С. 966-976.

51. Лилов Л. К. О стабилизации стационарных движений механических систем по части переменных // ПММ, 1972. – Т.36, Вып. 6. – С. 977-985.

52. Каленова В. И., Морозов В. М., Салмина М. А. К задаче стабилизации установившихся движений систем циклическими координатами // ПММ, 1989. – Т. 53, Вып. 5. – С. 707-713.

53. Maroulles J., Barnett S. Canonical forms for time – invariant linear control systems: A survey with extensions // Int. J. Syst. Sci., 1979. – V.10, №1. – P 33-50.

54. Мироновский Л. А. Аналоговые и гибридные модели динамических систем. – Л.: Ленингр. ин-т авиац. приборостроения, 1985. – 113 с.

55. Красинский А. Я. О математическом моделировании в задачах оптимальной стабилизации установившихся движений // Всесоюзн. Школа-семинар «Математическое моделирование в науке и технике». Тезисы докл. – Пермь, 1986. – С.184-185.

56. Красинский А. Я., Ронжин В. В. Об оптимальной стабилизации установившихся движений голономных систем // Всесоюзн. конф. «Метод функций Ляпунова в современной математике». Тезисы докл. – Харьков, 1986. – С. 95.

57. Красинский А. Я., Ронжин В. В. К стабилизации установившихся движений систем с циклическими координатами // ПММ, 1988. – Т.52, Вып. 2. – С. 542-548.

58. Румянцев В. В. Об управлении и стабилизации систем с циклическими координатами // ПММ, 1972. – Т.36, Вып. 6. – С. 966-976.

59. Лилов Л. К. О стабилизации стационарных движений механических систем по части переменных // ПММ, 1972. – Т.36, Вып. 6. – С. 977-985.

60. Лилов Л. К. Об определении наименьшего числа управлений, стабилизирующих положение равновесия // ПММ, 1970. – Т. 34, Вып. 5. – С. 786-795.

61. Kayumova D., Krasinskiy A. On the application of the analytical mechanics methods to computer modeling of mobile robots dynamics // CCMECH7, 2011, Moscow-Sedlce. – С. 43-44.

62. Красинский А. Я., Каюмова Д. Р. Об управлении одной моделью робота с деформируемыми колесами при неполной информации о состоянии // XV International Conference "Dynamical system modeling and stability investigation". – Kyiv, Ukraine, 2011. – С. 92.

63. Красинский А. Я., Каюмова Д. Р. Математическое и компьютерное моделирование мобильных роботов с деформируемыми колесами. V международная конференция "Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания". – Обнинск, 2011. – С. 72.

64. Krasinskaya E., Krasinskiy A. On the application of the analytical mechanics and nonlinear stability theory for stabilization problems of mechatronic systems // CCMECH7. – Moscow-Sedlce, 2011 – С. 54-55.

65. Красинская Э. М., Красинский А. Я. Применение избыточных координат в задачах устойчивости и стабилизации связанных систем // XV International Conference "Dynamical system modeling and stability investigation". – Kyiv, Ukraine, 2011. – С. 92.

**А. Я. Красинский, Д. Р. Каюмова** (г. Москва)

## ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКИПАЖЕЙ С ДЕФОРМИРУЕМЫМИ КОЛЕСАМИ

*Приводится алгоритм построения математической модели экипажа с деформируемыми колесами. Минимально необходимое число учитываемых модели параметров деформации колеса определяется с помощью метода [1] оценки степени влияния этих параметров на динамику экипажа. Подробно рассмотрено применение данного метода к определению набора учитываемых параметров на примере прямолинейного стационарного движения робота с дифференциальным приводом [2-4]. В качестве модели взаимодействия колеса с опорной плоскостью используется феноменологическая теория качения Н. А. Фуфаева [5].*

### 1. Введение

Исследование динамики колесных экипажей, в частности мобильных роботов, является интересной и актуальной задачей не только аналитической механики, но и технической практики. Во многих работах [2-4] рассматриваются модели колесных роботов без учета деформируемости колес. Однако на практике зачастую используются пневматики, что значительно влияет на характер движения. Так, при качении деформируемых колес возникают такие эффекты, как продольное (рис. 1) и боковое (рис. 2) псевдоскольжения. Основное отличие деформируемого колеса от абсолютно твердого заключается в том, что деформируемое колесо касается плоскости качения некоторым пятном контакта, а не одной точкой.

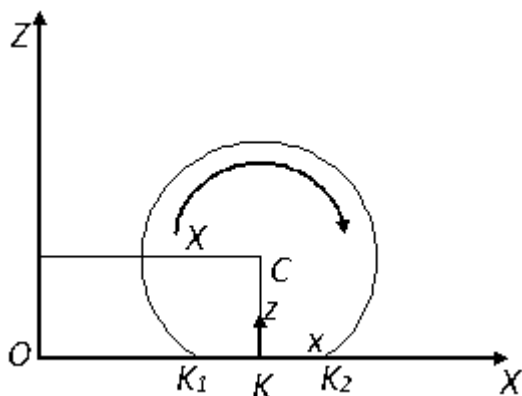


Рис. 1. Продольное псевдоскольжение

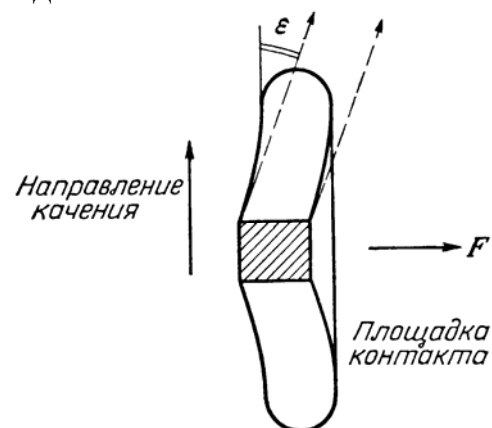


Рис. 2. Увод колеса

К настоящему моменту создано множество теорий, описывающих взаимодействие деформируемого колеса с поверхностью качения. Условно их можно разбить на две группы в зависимости от подхода, использованного при

формулировании определяющих уравнений теории качения. Существуют два подхода – феноменологический и модельный [5]. Преимуществом феноменологических теорий является простота применения: в них не рассматривается внутренняя структура деформируемого колеса и детальный характер взаимодействия колеса с опорной поверхностью. При этом подходе вводятся некоторые гипотезы, описывающие зависимость сил, действующих на колесо со стороны опорной поверхности, от фазовых переменных, т.е. координат, характеризующих положение диска колеса, и их производных по времени. Вводимые гипотезы предполагают использование некоторых экспериментально определяемых констант теории. Если введенные гипотезы неверны, то применение такой теории качения будет давать существенные сбои [5]. К теориям феноменологического подхода относятся модели И. Рокара [6], М. В. Келдыша [7], Г. Пасейки [8] и др.

Модельный подход характеризуется, в первую очередь, детальным описанием взаимодействия колеса с плоскостью. При этом деформируемое колесо моделируется пружинами, стержнями и т. п. Таким образом, модели, полученные при модельном подходе, отличаются большей сложностью по сравнению с феноменологическими теориями. Наибольшие трудности возникают в связи с необходимостью учета кинематики и «памяти» колеса [5]. Тяжелы для решения и вопросы сопряжения деформаций на границах зон скольжения, сцепления и области контакта. Однако такой подход к описанию качения деформируемого колеса избавляет от необходимости вводить различные гипотезы, поскольку получаемая модель подчиняется известным законам механики [5]. К теориям модельного подхода относятся модели Э. Фиалы [9], М. А. Левина [10], Ф. Бёйма [11], В. Г. Вильке [12] и др.

Теории, основанные на модельном подходе, наиболее эффективны для исследования разных режимов качения одиночного колеса: с помощью них можно достаточно точно исследовать влияние различных конструктивных особенностей колеса на его динамику. Теории феноменологического подхода в силу их относительной простоты применения удобно использовать для моделирования динамики различных экипажей.

М. А. Левин и Н. А. Фуфаев показали [5], что синтез модельного и феноменологического подходов позволяет дать относительно простое феноменологическое изложение результатов, достигнутых в рамках модельного исследования. Очевидно [5], что константы феноменологической теории являются одновременно и параметрами деформируемого колеса, и зависят от его конструктивных особенностей. Определение указанных параметров представляет собою сложную проблему, и обычно предполагается, что они находятся из опыта. Модельный подход позволяет [5] установить зависимости между константами теории, поскольку все они выражаются через параметры модели колеса. Таким образом, выбрав какие-либо параметры колеса в качестве базовых и воспользовавшись найденными соотношениями

между константами, можно найти все остальные параметры в результате реализации соответствующего алгоритма в виде компьютерной программы [5]. При этом для применения теории качения нужно знать значения минимально необходимого набора параметров деформируемого колеса.

## **2. Описание алгоритма построения математической модели экипажа с деформируемыми колесами**

Существующие теории качения, с одной стороны, различаются вводимыми моделями сил и моментов, действующих на колесо со стороны опорной плоскости. С другой стороны, эти теории качения учитывают разные наборы параметров деформируемого колеса. Деформируемое колесо описывается большим числом параметров. В связи с этим возникает вопрос, какой минимальный набор параметров деформации достаточен для построения адекватной модели колесного экипажа. Понятно, что при описании динамики разных моделей колесных экипажей на различных видах движения (прямолинейное, криволинейное) наборы необходимых для учета параметров колеса будут отличаться.

В статье [1] рассматривается задача определения минимально необходимого количества параметров деформации шины для адекватного описания динамики колесного экипажа. На основании проведенных исследований сформулируем алгоритм построения математической модели экипажа с деформируемыми колесами:

1. Строится математическая модель экипажа с абсолютно жесткими колесами.

2. Проверяются выполнение критерия управляемости и численная разрешимость задачи стабилизации модели из пункта 1 (невозмущенное движение и набор стабилизируемых фазовых переменных определяется постановкой задачи). Если рассматриваемая система управляема и возможно найти стабилизирующее управление (например, методом Н.Н. Красовского), переходим к пункту 3. Положим, что в случае численной неразрешимости поставленной задачи стабилизации для модели с жесткими колесами построение математической модели экипажа с деформируемыми колесами бессмысленно.

3. Строится математическая модель колесного экипажа с учетом некоторого набора параметров деформаций. Число параметров выбирается насколько возможно минимальным.

4. Проверяется управляемость и численная разрешимость задачи стабилизации модели из пункта 3 для невозмущенного движения и набора стабилизируемых фазовых переменных из пункта 2.

5. Если возможно найти стабилизирующее управление для задачи из пункта 4, тогда набор параметров колеса достаточен для построения адекватной модели экипажа. Случай, когда управление можно построить только для модели с твердыми колесами, означает, что модель экипажа

некорректна и ее необходимо уточнить, расширив набор учитываемых параметров деформации колеса. После этого следует вернуться к пункту 3.

Предложенный алгоритм представляет собой метод для оценки степени влияния параметров колеса на динамику робота. Данный метод удобно использовать при моделировании взаимодействия деформируемого колеса с опорной плоскостью феноменологической теорией Н. А. Фуфаева [5], поскольку эта теория позволяет получить как частные случаи теории различной степени сложности с различными наборами параметров деформации.

С помощью представленного метода можно анализировать влияние таких конструктивных параметров системы, как углы наклона и схождения колеса. Отметим практическое значение алгоритма: с его помощью можно уменьшать число учитываемых параметров деформации колеса, которые при выбранном подходе [13] входят в число фазовых переменных. Таким образом, мы уменьшаем объем измеряемой информации и, следовательно, число датчиков, необходимых для построения стабилизирующего управления.

### 3. Постановка задачи

Рассмотрим применение представленного алгоритма к исследованию прямолинейного стационарного движения робота с дифференциальным приводом [2-4].

Робот с дифференциальным приводом (рис. 3) представляет собой жесткую платформу с двумя независимыми колесами, оси качения которых находятся на одной прямой. Управление роботом осуществляется моментами, создаваемыми независимыми двигателями, находящимися по одному у каждого из активных колес. В постановке [1] платформа робота опирается на шарик, который может крутиться во всех направлениях. Будем предполагать, что колеса катятся без проскальзывания, а влиянием шарика на динамику робота можно пренебречь.

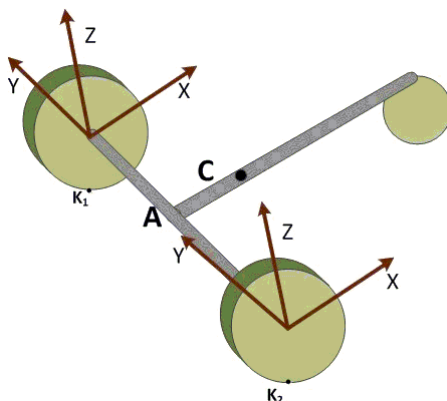


Рис. 3. Робот с дифференциальным приводом

Движение робота описывается следующими координатами:  $x, y$  координаты точки  $A$ , являющейся серединой оси, соединяющей колеса,

углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  собственного вращения соответственного левого и правого колес, углом  $\psi$  между осью  $OX$  и осью симметрии робота. Положительное направление вращения колес соответствует движению робота вперед. Положительное направление угла  $\psi$  – против часовой стрелки. Обозначим  $AC=a$ , расстояние от точки  $A$  до центров колес –  $l$ . Будем считать радиусы  $r_k$  и массы  $m_k$  обоих колес одинаковыми.

Кинетическая энергия рассматриваемой системы имеет вид [3]:

$$\begin{aligned}
 2T = & m \left( (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2a\dot{\psi}(\dot{x} \sin \psi - \dot{y} \cos \psi) + a^2 \dot{\psi}^2 \right) \\
 & + 2m_k \left( (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + l^2 \dot{\psi}^2 \right) + J \dot{\psi}^2 \\
 & + J_{ky} \left( (\dot{\phi}_1 - \dot{\psi} \sin \chi_1)^2 + (\dot{\phi}_2 + \dot{\psi} \sin \chi_2)^2 \right) \\
 & + J_{kz} \left( (\dot{\psi} \cos \chi_1)^2 + (\dot{\psi} \cos \chi_2)^2 \right)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $m_k$  – масса  $k$ -го колеса,  $m$  – масса платформы робота,  $J$  – момент инерции платформы относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс  $C$ ,  $J_{kz}$  – момент инерции  $k$ -го колеса относительно вертикальной оси,  $J_{ky}$  – момент инерции  $k$ -го колеса относительно горизонтальной оси,  $\chi_k$  – угол наклона  $k$ -го колеса от вертикальной прямой. В рассматриваемой постановке задачи за положительное направление угла наклона принято отклонение верхней части колеса в сторону положительного направления оси  $OY$  при движении вдоль оси  $OX$ .

В качестве модели взаимодействия колеса с плоскостью в [1] была выбрана феноменологическая теория Н. А. Фуфаева [5] качения деформируемого колеса. Этот выбор обусловлен, во-первых, тем, что данная теория достаточно просто и полно описывает качение колеса. Так, в ней учитываются все шесть составляющих обобщенной реакции связей (по три составляющих главного вектора и главного момента сил, действующих в области контакта колеса с опорной поверхностью). Для сравнения: в модели И. Рокара учитывается только одна составляющая, в модели М.В. Келдыша – три, Г. Пасейки – пять. Во-вторых, из теории Н.А. Фуфаева можно получать [5], как частные случаи, широко используемые теории качения И. Рокара, М. Келдыша и их обобщения.

В теории Н. А. Фуфаева [5] рассматривается колесо, обод которого снабжен шиной, обладающей упругостью и деформируемостью в радиальном, поперечном и продольном направлениях. Будем называть [5] линию, получаемую пересечением колеса средней плоскостью колеса, средней линией колеса. Для недеформированной шины она является окружностью.

При отклонениях колеса от стационарного движения возникает переменная дополнительная деформация средней линии. Поскольку любая деформация средней линии определяется деформацией шины колеса, вместо рассмотрения довольно сложной картины, связанной с деформацией всей

шины, можно ограничиться изучением поведения средней линии деформируемого колеса. Из-за малости дополнительной деформации шины, обусловленной малыми отклонениями колеса от стационарного качения, эффект этой деформации можно рассматривать как суперпозицию эффектов, вызванных продольной, поперечной и радиальной деформациями колеса в отдельности [5].

#### 4. Применение феноменологической теории Н. А. Фуфаева

Условие отсутствия проскальзывания колес должно выполняться для всех точек средней линии колеса, лежащих в области контакта колеса с опорной плоскостью[5]. На рисунке 4 введены следующие обозначения: 1 – след средней плоскости колеса, 2 – линия качения, 3 – ось площадки контакта,  $O_2$  – центр площадки контакта.

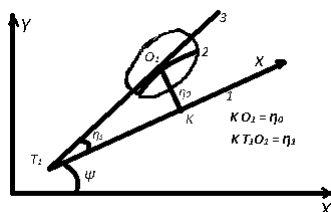


Рис. 4. Продольная деформация колеса

Для вывода кинематических уравнений вводится [5] подвижная система координат  $Kxyz$  с началом в точке  $K$  пересечения линии наибольшего наклона, проведенной в средней плоскости колеса из его центра  $C$ , с опорной плоскостью. Ось  $x$  совпадает со следом колеса и направлена в сторону движения колеса,  $y$  лежит в плоскости качения,  $z$  направлена вверх по вертикали.

Боковое смещение  $H(t, x)$  точки средней линии с координатой  $x$  в момент времени  $t$  представляют [5] в виде разложения в степенной ряд по  $x$  в малой окрестности точки:

$$H(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \eta_n(t) x^n \quad (2)$$

Здесь  $\eta_0(t)$  – боковое смещение той точки средней линии, которая до деформации шины совпадала с точкой  $K$ ;  $\eta_1(t)$  – тангенс угла наклона касательной к линии качения в точке  $O_2$ , т. е. угол скрутки шины относительно обода [5].

Аналогичное  $H(t, x)$  обозначение вводится в [5] для величины продольного смещения точки средней линии –  $\Xi(t, x)$ :

$$\Xi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi_n(t) x^n \quad (3)$$

Здесь  $\xi_0(t)$  – продольное смещение периферии колеса в точке  $K$ .



С учетом введенных обозначений малости [5] угла  $\psi$  запишем уравнения, описывающие отсутствие проскальзывания в поперечном и продольном направлениях:

$$\begin{aligned} v_{Ky} - \psi v_{Kx} + \dot{\eta}_0 - v_{Kx} \eta_1 &= 0 \\ \dot{\psi} + \dot{\eta}_1 - v_{Kx} \eta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_i - v_{Kx} \eta_{i+1} &= 0, \quad i = 2, 3, \dots \\ v_{Kx} - r\dot{\phi} + \dot{\xi}_0 - v_{Kx} \xi_1 &= 0 \\ \dot{\xi}_i - v_{Kx} \xi_{i+1} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $v_{Kx}, v_{Ky}$  – продольная и поперечная составляющие скорости точки  $K$ .

Таким образом, количество учитываемых параметров деформации колеса (как продольных, так и поперечных) определяется числом учитываемых членов разложения в степенной ряд описания средней линии колеса в области контакта. Свобода выбора числа учитываемых параметров деформации ограничивает исследовательские возможности при решении вопроса об устойчивости движения колесного экипажа только теоремами [14] об устойчивости по первому приближению. Это связано с тем, что модель взаимодействия колеса с плоскостью изначально берется неполной, поскольку учитываются не все члены в разложении функций  $H(t, x)$  и  $\Xi(t, x)$ .

Увеличение числа учитываемых параметров деформации не всегда целесообразно. Во-первых, это повышает сложность системы. Во-вторых, параметры колес неодинаково влияют на динамику экипажа.

Как известно, качение абсолютно жесткого диска по плоскости является классической задачей неголономной механики. Учет деформируемости колеса переводит эту задачу в область голономной механики [13]. Величины боковых и продольных смещений пневматика определяются, в первую очередь, конструктивными параметрами колеса (продольной и поперечной жесткостями, шириной колеса и т. п.).

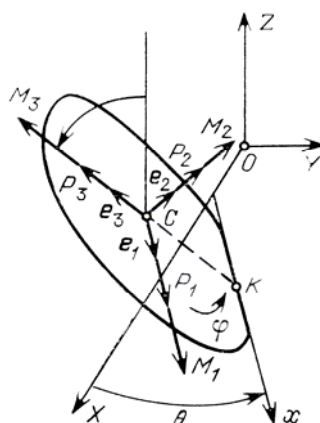


Рис. 5. Компоненты главного вектора и главного момента сил, действующих на колесо со стороны опорной плоскости

Согласно принципу освобожденности, механическую систему будем считать свободной, заменив действие наложенных на нее связей силами реакций этих связей (рис. 5), которые после приведения к центру  $k$ -го колеса равны:

$$\begin{aligned} P_{1k} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_{0k}} & P_{2k} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \eta_{0k}} & P_{3k} &= N_k - c_{zk}(\tau_k - \tau_k^*) \\ M_{1k} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \chi_k} & M_{2k} &= -v_{1k} N_k \xi_{0k} & M_{3k} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \eta_{1k}} \end{aligned} \quad (6)$$

Где  $\Pi$  – потенциальная энергия деформированной части пневматика, которая определяется [5, 15] выражением:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 (c_{yk} \eta_{0k}^2 - 2v_{2k} N_k \eta_{0k} \chi_k + \rho_{2k} N_k \chi_k^2 + c_{tk} \eta_{1k}^2 + c_{xk} \xi_{0k}^2) \quad (7)$$

Здесь  $c_{xk}, c_{yk}, c_{zk}$  – продольная, поперечная и радиальная жесткости  $k$ -го колеса,  $c_{tk}$  – жесткость  $k$ -го колеса на скручивание,  $N_k$  – нагрузка на  $k$ -е колесо,  $v_{1k}, v_{2k}, \rho_{2k}$  – силовые и моментные коэффициенты упругости,  $(\tau_k - \tau_k^*)$  – дополнительная радиальная деформация.

Движение экипажа описывается уравнениями Лагранжа 2-го рода [13]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q + R(q, \dot{q}, \mu) \quad (8)$$

Здесь  $R$  – обобщенные силы реакций кинематических связей, обусловленных деформацией пневматиков,  $\mu$  – параметры деформации колеса. Параметры деформации в такой постановке являются фазовыми переменными, однако уравнения Лагранжа для них не составляются [13]. Замкнем (8) кинематическими уравнениями (4,5) и получим полную систему уравнений относительно вектора фазовых переменных. Отметим, что в ходе проведения исследований, описанных в следующем разделе, были использованы кинематические уравнения криволинейного движения экипажа на баллонных колесах [16, 17].

## 5. Применение алгоритма построения математической модели экипажа с деформируемыми колесами

Показано [1], что для построения адекватной модели робота с дифференциальным приводом при рассмотрении его на прямолинейном стационарном движении достаточно учитывать три параметра деформации колеса  $\eta_0, \eta_1, \xi_0$ . Далее рассмотрим, как применение описанного в разделе 2 данной статьи алгоритма позволяет получить этот результат.

В статье [1] решена задача стабилизации до неасимптотической устойчивости по всем фазовым переменным прямолинейного стационарного движения робота с дифференциальным приводом с жесткими колесами. Таким образом, пункты 1 и 2 алгоритма выполнены.

Перейдем к пункту 3 алгоритма.

Простейшей теорией качения деформируемого колеса является *теория И. Рокара* [6], которая получается при учете только первого уравнения системы (4) кинематических уравнений теории Н. А. Фуфаева. Взаимодействие деформируемого колеса с плоскостью качения в этом случае определяется одним параметром  $\eta_0$  поперечной деформации.

В теории качения Н. А. Фуфаева вводится предположение о том, что масса деформируемой части пневматика считается пренебрежимо малой [5]. Поэтому кинематическая энергия робота при учете деформации колеса сохраняет вид (1).

Потенциальная энергия упрощается[5]:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 (c_{yk} \eta_{0k}^2) \quad (9)$$

Таким образом, из шести составляющих обобщенной реакции связи учитывается только боковая составляющая  $P_2$  главного вектора сил, а выражение виртуальной работы сил и моментов для рассматриваемой системы примет вид:

$$\delta A = \sum_{k=1}^2 (-P_{2k} \sin \psi \delta x_k + P_{2k} \cos \psi \delta y_k) \quad (10)$$

В качестве невозмущенного рассмотрим прямолинейное стационарное движение:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 0,52 \text{ рад} \quad \dot{\psi}_0 = 0 \text{ рад/с} \\ \eta_{0k0} &= 0 \text{ м} \quad \dot{\phi}_{k0} = 2,088 \text{ рад/с} \\ \dot{x}_0 &= 0,866 \frac{\text{м}}{\text{с}} \quad \dot{y}_0 = 0,5 \text{ м/с} \end{aligned} \quad (11)$$

Для него построим уравнения возмущенного движения и выделим первое приближение:

$$\dot{w} = Pw + Qu \quad u = Kw \quad (12)$$

Здесь  $w$  – вектор фазовых переменных,  $u$  – вектор управления.

Перейдем к пункту 4 алгоритма, предложенного в разделе 2: проверим выполнение критерия Калмана [18] управляемости системы.

$$\text{rank}[Q, PQ, \dots, P^{d-1}Q] = d \quad (13)$$

Здесь  $d$  – размерность матрицы  $P$ .

Оказывается, что при нулевых углах наклона колес ранг матрицы управляемости равен 4 при размерности системы 12. Следовательно, не выполнено достаточное условие стабилизируемости.

Итак, согласно пункту 5 алгоритма из раздела 2 модель взаимодействия деформируемого колеса с плоскостью качения является недостаточно полной. Увеличим число учитываемых параметров деформации – будем учитывать

первые два уравнения системы (4). Так, получим как частный случай используемой феноменологической теории [5] *теорию М. В. Келдыша* [7].

Перейдем к пункту 3 нашего алгоритма. Потенциальная энергия при учете дополнительного параметра деформации – угла скрутки шины относительно обода – приобретает вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 (c_{yk} \eta_{0k}^2 - 2v_{2k} N_k \eta_{0k} \chi_k + \rho_{2k} N_k \chi_k^2 + c_{\tau k} \eta_{1k}^2) \quad (14)$$

При этом учитываются три составляющие обобщенной реакции:  $M_{1k}, M_{2k}, P_{2k}$ . Поскольку в рассматриваемой постановке углы наклона являются параметрами системы, а не фазовыми переменными, продольная составляющая  $M_{1k}$  главного момента сил оказывается равной нулю.

Запишем выражение виртуальной работы сил и моментов в области контакта.

$$\delta A = \sum_{k=1}^2 (-P_{2k} \cos \chi_k \sin \psi \delta x_k + P_{2k} \cos \chi_k \cos \psi \delta y_k + M_{2k} \cos \chi_k \delta \psi) \quad (15)$$

К значениям (11) фазовых переменных на прямолинейном стационарном движении добавится:

$$\eta_{1k0} = 0 \text{ рад} \quad (16)$$

Построим для рассматриваемого невозмущенного движения уравнения возмущенного движения и выделим первое приближение (12). Как показывает проверка выполнения критерия (13), при нулевых углах наклона колес достаточное условие стабилизируемости не выполнено: ранг матрицы управляемости равен 4 при размерности системы равной 14. Получается, что учитываемых параметров деформации для рассматриваемой модели робота недостаточно, и мы переходим к рассмотрению следующей модели (возвращаемся к пункту 3 алгоритма из раздела 2 статьи).

Добавим в рассмотрение параметр продольной деформации. Таким образом, будем учитывать первые два уравнения (4) и первое уравнение (5). В этом случае получим [5] *обобщенную теорию М. В. Келдыша*. Потенциальная энергия (7) содержит дополнительное по сравнению с [5] слагаемое [15].

Обобщенные силы  $R$  из (8) имеют вид:

$$\begin{aligned} R_x &= (P_{11} + P_{12}) \cos \psi \\ &\quad - (P_{21} \cos \chi_1 + P_{22} \cos \chi_2 + P_{31} \sin \chi_1 + P_{32} \sin \chi_2) \sin \psi \\ R_y &= (P_{11} + P_{12}) \sin \psi \\ &\quad + (P_{21} \cos \chi_1 + P_{22} \cos \chi_2 + P_{31} \sin \chi_1 + P_{32} \sin \chi_2) \cos \psi \\ R_\psi &= l(P_{12} - P_{11}) - M_{21} \sin \chi_1 + M_{31} \cos \chi_1 - M_{22} \sin \chi_2 + M_{32} \cos \chi_2 \\ R_{\varphi_k} &= M_{2k} - r_k P_{1k} \end{aligned} \quad (17)$$

Составим линеаризованные уравнения возмущенного движения (12). Оказывается, что критерий управляемости (13) выполнен, однако численно [19] разрешить задачу стабилизации методом Н. Н. Красовского [20] не удалось [1]. Это связано с тем, что коэффициенты управления имеют очень большие значения, поскольку имеет место большой разброс значений элементов матрицы  $P$ .

Как показало численное моделирование [1], на прямолинейном стационарном движении угол наклона колес влияет на управляемость робота с дифференциальным приводом, а угол схождения не влияет. Поэтому для улучшения управляемости системы введем ненулевые углы наклона колес. При этом в матрице коэффициентов  $P$  появляются дополнительные ненулевые элементы по сравнению со случаем нулевых углов наклона колес. Это позволяет решить поставленную задачу стабилизации.

Таким образом, согласно введенному в разделе 2 алгоритму для построения адекватной модели робота с дифференциальным приводом на прямолинейном стационарном движении достаточно учитывать три параметра деформации колеса: боковое и продольное смещения точки средней линии колеса, до деформации совпадавшей с точкой  $K$ ; угол скрутки шины относительно обода.

## **7. Выводы.**

1. Описан алгоритм построения математической модели экипажа с деформируемыми колесами. В качестве критерия адекватности модели выбрано выполнение критерия управляемости и численная разрешимость задачи стабилизации. Стабилизирующее управление было найдено методом Н.Н. Красовского.

2. Рассмотрено применение алгоритма к построению модели робота с дифференциальным приводом. Показана необходимость учета трех параметров деформации при исследовании прямолинейного стационарного движения этого робота.

3. Показано влияние угла наклона на управляемость робота.

## **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Красинский А. Я., Каюмова Д. Р. О влиянии деформируемости колес на динамику робота с дифференциальным приводом // Нелинейная динамика, 2011. – Т.7, №4.

2. Буданов В. М., Девянин Е. А. О движении колесных роботов // ПММ, 2003. – Т. 67, Вып. 2. – С.244-255.

3. Мартыненко Ю. Г. Управление движением мобильных колесных роботов // Фундаментальная и прикладная математика, 2005.– Т. 11.– С. 29-80.

4. Павловский В. Е., Евграфов В. В., Павловский В. В., Петровская Н. В. Динамика, моделирование, управление мобильными роботами // Материалы Поспеловских чтений, 2007. <http://posp.raai.org/data/posp2007/SIR/vlpavl.doc>.

5. Левин М. А., Фуфаев Н. А. Теория качения деформируемого колеса. – М.:Наука, 1989. – 269 с.
6. Рокар И. Неустойчивость в механике. Автомобили, самолеты, висячие мосты. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1959. – 287 с.
7. Келдыш М. В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси // Труды ЦАГИ, 1945. – Т.564. – 34 с.
8. Bakker E., Pacejka H. B., Lidner L. A new type model with applications in vehicle dynamics studies // 4<sup>th</sup> Autotechnologies Conference, SAE Paper 890087, 1989. – P 83-95.
9. Fiala E. Seitenkrufte am Rollenden Luftreifen // Z. VDI, 1954. – Vol. 96. – P. 973-979.
10. Левин М. А., Выгонный А. Г. Исследование динамики катящегося самоустанавливающегося колеса // Теоретическая и прикладная механика, 1980. – Т. 7. – С. 21-24.
11. Böhm F. Grundlagender Rolldynamik von Luftreifen // Fahrzeugdynamic Fachtagung, 1988.
12. Вильке В. Г., Кожевников И. Ф. Качение колеса с армированной шиной по плоскости без проскальзывания // ПММ, 2001. – Т.65, Вып. 6. – С. 944-957.
13. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. – М.: Наука, 1967. – 520 с.
14. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 472 с.
15. Отчет о научно-исследовательской работе «Аналитическая механика неголономных систем и устойчивость их движений» / рук. Красинский А. Я. // Проект 19/01 ФФИ ГКНТ Узбекистана. Номер государственной регистрации 01.01.0011346. Ташкент, 2003. – 187 с.
16. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Устойчивость криволинейного движения экипажа на баллонных колесах // ПММ, 1971. – Т.35, Вып.5. – С. 899-907.
17. Тураев Х. Т., Фуфаев Н. А., Мусарский Р. А. Теория движения систем с качением. – Т.: Фан, 1987. – 158 с.
18. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.:УРСС, 2010. – 400 с.
19. Красинский А. Я., Халиков А. А., Иофе В. В., Каюмова Д. Р. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ 011615362. Российская Федерация. Программное составление уравнений движения и исследование стабилизации механических движений, 2011. Правообладатель: ГОУ ВПО «Московский государственный университет прикладной биотехнологии». Заявка №2011613568; зарегистрирована в Реестре программ для ЭВМ 23 мая 2011 г.
20. Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Теория устойчивости движения / Малкин И. Г. – М.: Наука, 1967. – С.475–514.

*С. Д. Красников, Е. Б. Кузнецов* (г. Москва)

## МЕТОД ПРОХОЖДЕНИЯ ТОЧЕК БИФУРКАЦИИ КОРАЗМЕРНОСТИ ТРИ

*С помощью редукции Ляпунова—Шмидта задача сводится к построению пересечения трех поверхностей второго порядка в  $R^4$ . Однородность уравнений, позволяет уменьшить количество переменных. После этого используется метод Левина, который позволяет записать пересечение двух поверхностей второго порядка в параметрическом виде. Эта параметризация используется для подстановки в третье уравнение. Таким образом, задача сводится к решению нелинейного уравнения одной переменной в ограниченной области.*

*Предложен вычислительный алгоритм преодоления точек простой бифуркации коразмерности три.*

### 1. Введение

В общем случае кривая может быть задана соотношением

$$F(x) = 0, \quad (1.1)$$

где  $F: R^{n+1} \rightarrow R^n$  достаточно гладкая функция.

В точке бифуркации  $x_{(0)}$  ранг матрицы Якоби удовлетворяет неравенству

$$\text{rank } F'(x_{(0)}) < n.$$

В качестве основного метода исследования принято преобразование Ляпунова-Шмидта [1], которое позволяет снизить размерность первоначальной задачи в окрестности особой точки до коразмерности вырождения.

Такой подход дает возможность построить уравнение разветвления, анализируя которое, можно найти все ветви решения. Сложность анализа зависит от степени вырождения матрицы Якоби  $F'$ . Ранее уже рассматривался случай вырождения коразмерности один и два ( $\text{rank } F'(x_{(0)}) = n - 1, \text{rank } F'(x_{(0)}) = n - 2$ ). В данной работе изучается более сложный случай, когда  $\text{rank } F'(x_{(0)}) = n - 3$ .

Проблеме продолжения решения в окрестности точки бифуркации посвящено множество работ [2]. Рассмотрим те работы, которые имеют непосредственное отношение к теме данного исследования.

Монография [3] посвящена изложению теории ветвления нелинейных уравнений, в основе которой лежит редукция первоначальной нелинейной задачи к эквивалентной конечномерной задаче – уравнению разветвления.

Получены различные обобщения классических результатов работ А. М. Ляпунова и Э. Шмидта. В рамках данной теории сначала исследуются ветвление периодических решений дифференциальных уравнений и построение решений нелинейных интегральных уравнений. Затем излагается главный результат монографии – общая теория ветвления решений нелинейных уравнений в банаховых пространствах. Рассматриваются некоторые прикладные задачи, возникающие в механике.

Монография [4] посвящена изложению вычислительных аспектов теории бифуркаций и различных методов решения нелинейных уравнений. На примере задачи зависящей от параметра (логистического уравнения), показывается как возникает ветвление на практике. Изучаются локальные методы продолжения. Описываются различные предикторно-корректорные схемы. Особое внимание посвящено корректорам ньютоновского и квазиньютоновского типа. Рассматривается глобальная теория. Излагаются основные результаты теории степеней отображений Брауэра. Гомотопическая инвариантность степени отображения позволяет получить ряд замечательных результатов. К таким результатам относится тест на появление бифуркации и глобальный метод Ньютона. В связи с последним читатель отсылается к работам Смейла и Бранина. Описывается практическая реализация метода движения вдоль кривой множества решений и решение сопутствующих проблем. Вводятся определения простой предельной точки (simple limit point, simple fold). В качестве параметра продолжения предлагается использовать аппроксимации длины дуги (pseudoarclength continuation). Применение метода Ньютона к расширенной системе, приводит к необходимости обращения матрицы специальной структуры. Описание реализации такого обращения определяет алгоритм окаймления (bordering algorithm). В силу структуры расширенной системы алгоритм будет без изменения работать в некоторых сингулярных точках. Исследуются простые сингулярные точки (simple singular point), находятся различные ветви решения в этих точках. Формулируется и доказывается теорема, утверждающая, что при определенных условиях (ноль алгебраически простое собственное значение) якобиан системы продолжения меняет знак в простой сингулярной точке. Также излагается результат, позволяющий свободно проходить простые сингулярные точки, оставаясь на той ветви, которая соответствует гладкому продолжению. Рассматриваются вопросы устойчивости. Далее предлагается пять методов нахождения дополнительной ветви, которая появляется в точке бифуркации. Первый метод заключается в нахождении компонент разложения касательных векторов по специальному базису, для чего необходимо составлять квадратичную форму с приближенными коэффициентами. Второй метод заключается в поиске решения на некотором параллельном подмножестве, удаленном от точки бифуркации в направлении перпендикулярном к касательной, но лежащем на специальной плоскости. Третий метод заключается в непосредственном



применении конструктивной теории Ляпунова-Шмидта. Этот метод позволяет построить уравнения, решая которые получаем вторую ветвь. Четвертый метод заключается в использовании способа аналогичного тому, который применяли Крандалл и Рабинович для доказательства известной теоремы о ветвлении в точке простой бифуркации. В пятом методе используется специальное возмущение правой части, позволяющее избавиться от точки бифуркации и, таким образом, расщепить ветви. Кратко рассматриваются многопараметрические задачи и бифуркации Хопфа.

Работа [5], посвящена различным аспектам применения метода продолжения по длине дуги кривой множества решений. Изложение кратко затрагивает некоторые вопросы нахождения и обработки точек бифуркации. Им целиком посвящен один раздел: "нелинейные задачи на собственные значения, бифуркации". В этом разделе дается определение точки бифуркации и простой точки бифуркации. Используя редукцию Ляпунова-Шмидта, для простой точки бифуркации доказывается вариант теоремы Крандалла-Рабиновича. Данная теорема дает условия при которых две гладкие кривые пересекаются в точке под ненулевым углом. Далее приводится важный результат - ориентация кривой (определитель производной Фреше оператора системы продолжения) меняется при переходе через простую точку бифуркации (результат, по-видимому, впервые был получен М. А. Красносельским). Этот результат особенно важен для численного прохождения кривой и определения точки бифуркации. Отмечается, что в силу результатов Келлера о существовании конуса сходимости с центром в точке бифуркации, при достаточно малом шаге движения вдоль кривой, точка полученная предиктором попадает в этот конус сходимости ньютоновского корректора. Это позволяет проходить точку простой бифуркации с помощью стандартных предикторно-корректорных схем. Кроме того, появляется возможность детектирования специальных типов бифуркаций - смена знака определителя расширенного якобиана системы. Отмечается, что в случае бифуркации Хопфа этот метод неприменим. Для более трудной задачи численного перехода на другую ветвь предлагается возмущать с помощью малого параметра систему уравнений продолжения. Такой подход становится возможным благодаря известной теореме Сарда, утверждающей, что иррегулярности имеют меру нуль. Таким образом, специальным "шевелением" параметров задачи можно избавиться от точек бифуркации, и получить вторую ветвь. Обсуждаются недостатки данного подхода. Предлагаются еще два возможных подхода. Первый заключается в расширении первоначальной системы для непосредственной обработки точки бифуркации. Далее к расширенной системе применяется, например, метод Ньютона. Данный подход получил свое развитие в работах Зейделя и Вебера. Второй подход заключается в построении бифуркационного уравнения, из которого затем определяются касательные к различным ветвям. Этот подход разрабатывался в

работах Келлера и Рейнболдта. Более детально обсуждается лишь первый подход. Описывается алгоритм Алговера и Шветлика являющийся одной из реализаций такого подхода. Далее кратко рассматривается возможность появления кратных бифуркаций при условии, что система демонстрирует определенную симметрию. Краткость изложения компенсируется ссылками на соответствующие результаты.

В статье [6] дается введение в локальную теорию бифуркаций однопараметрических систем около положения равновесия, как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для отображений Пуанкаре. Обсуждаются на элементарном уровне основные аналитические методы локальной теории: 1) редукция к центральному многообразию, 2) теория нормальных форм Пуанкаре-Биркгофа. Рассматриваются вопросы связанные с симметрией нормальных форм. В заключении рассматриваются примеры: бифуркации, возникающие в процессах, описываемых уравнением Гинзбурга-Ландау; бифуркации Хопфа, возникающие в модели трех волн.

Последняя глава монографии [2] посвящена исследованию продолжения решения в особых точках. Предполагается, что решения системы уравнений (1.1) описываются гладкими кривыми  $x = x(\lambda)$ , где  $\lambda$  длина дуги данной кривой. Это позволяет использовать разложение в ряд Тейлора для анализа поведения в особой точке. Предлагается первоначальное пространство  $R^{n+1}$  раскладывать в прямую сумму двух подпространств  $P^r$  и  $A^d$ . Пространство  $A^d$  натянуто на векторы, ортогональные строкам расширенной матрицы Якоби системы  $J_0$  в особой точке  $x_0$ , ранг которой равен  $r$ ,  $d = n + 1 - r$  - показатель вырождения задачи. Это позволяет получить два результата: касательный вектор любой ветви кривой принадлежит пространству  $A^d$ ; анализ первоначальной задачи размерности  $n+1$  эквивалентен анализу другой задачи размерности  $d$ . Эта последняя задача заключается в решении уравнения разветвления. В случае однократного ( $\text{rank } J_0 = n - 1$ ) и двукратного ( $\text{rank } J_0 = n - 2$ ) вырождения проводится построение уравнения разветвления в первом приближении.

В монографии [7] проблема определения напряженно деформированного состояния сводится к проблеме решения системы нелинейных уравнений  $f(x, p) = 0$ , где  $x$  и  $p$  являются дискретными аналогами перемещений и нагрузок. Являясь уравнениями равновесия деформируемого твердого тела, они получаются как частные производные полной потенциальной энергии деформации тела. Отсюда следует, что матрица Якоби левых частей будет симметрична. Для исследования нагруженного состояния предлагается использовать специальный вариант метода продолжения решения по параметру. Такой подход позволяет сохранить симметрию матрицы Якоби за счет некоторого ухудшения обусловленности системы продолжения. Симметрия матрицы Якоби гарантирует наличие базиса составленного из

собственных векторов. В существенно особых точках это дает возможность переходить с основной ветви на бифуркационную. Рассматриваются вопросы связанные с нахождением существенно особых точек и с уточнением решения в особых точках.

В монографии [8] рассматривается абстрактная теория бифуркаций нелинейных фредгольмовых операторов в банаховых (иногда гильбертовых) пространствах. Изложение локальной теории начинается с абстрактной теоремы о неявной функции. Нарушение предположений этой теоремы приводит к возможности появления бифуркации. Далее исследование бесконечномерной задачи сводится к исследованию конечномерной задачи – бифуркационного уравнения. Размерность новой задачи равна размерности вырождения первоначальной задачи. Этот переход осуществляется с использованием известного метода редукции Ляпунова-Шмидта. Переход к новой задаче позволяет получить ряд результатов. В случае специального одномерного вырождения удастся применить теорему о неявной функции к уравнению разветвления. Точки, в которых выполняются все условия этой теоремы, называются "точками переключения" (turning points), "складками" (folds), в некоторых специальных случаях они также известны как "бифуркации седловых точек" (saddle node bifurcation), в отечественной литературе – это предельные точки. Далее исследуется вопрос о бифуркациях с одномерным ядром производной Фреше нелинейного фредгольмового оператора. В данном случае под точкой бифуркации понимается точка  $(x, \lambda_0)$ , в которой пересекаются два решения уравнения  $F(x, \lambda) = 0$ . Вторым результатом, использующий редукцию Ляпунова-Шмидта – теорема Крандалла-Рабиновича, которая дает достаточные условия для существования таких точек. В зависимости от взаимного расположения кривых в окрестности особой точки эти бифуркации называются: переходная (transcritical) (производная параметра задачи  $\lambda$  по длине дуги кривой множества решений не равна нулю), докритическая (subcritical), закритическая (supercritical). В последних двух случаях такие бифуркации известны как "вилки" (pitchfork bifurcation). Полученные ранее результаты позволяют исследовать вопрос об устойчивости эволюционных уравнений общего вида

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda) \quad (1.2)$$

на решениях в окрестности точек бифуркации. Для эволюционного уравнения точка  $(x_0, \lambda_0)$ , в которой  $F(x, \lambda_0) = 0$ , называется точкой равновесия. Принцип исследования устойчивости по первому приближению не применим к точкам равновесия, в которых происходит вырождение производной правой части  $F(x, \lambda)$ . Ясно, что это будут точки бифуркации для  $F(x, \lambda) = 0$ . Однако, этот принцип можно применить к кривым множества решений, проходящим через  $(x_0, \lambda_0)$ . Такой подход можно рассматривать как исследование возмущения

нулевого собственного значения. При условии, что ноль простое собственное значение, в четырех случаях (turning point, transcritical, subcritical, supercritical) исследуется устойчивость возмущения. Результат формулируется в виде "принципа обмена устойчивостью" (principle of exchange of stability). Исследуется вопрос о потере устойчивости эволюционной (1.2) системы при переходе комплексно-сопряженной пары собственных значений через мнимую ось при некотором значении параметра задачи  $\lambda_0$ . Это приводит к формулировке и доказательству теоремы Хопфа для фредгольмовых операторов, действующих в банаховых пространствах. По теореме о неявной функции стационарное решение в этом случае не появляется, однако, по теореме Хопфа при этом значении параметра появляется периодическое решение (бифуркация Хопфа). Устанавливается, что бифуркация Хопфа является двухпараметрической, другим скрытым параметром является период. Рассматривается возможность появления периодических решений в случае системы (1.2) без явного параметра  $\lambda$ . Это требует дополнительных ограничений. К таким ограничениям относится гамильтоновость системы. Это приводит к варианту теоремы Ляпунова о периодических решениях. Далее, для ряда специальных случаев, уточняется теорема Хопфа и теорема Ляпунова. Изучается также "принцип обмена устойчивостью" для бифуркаций Хопфа. Это требует привлечения теории множителей и экспонент Флоке. Далее исследуется вопрос глобального продолжения локальных периодических решений, полученных с использованием теоремы Хопфа, и их устойчивость, делается замечание о их связи с неподвижными точками отображения Пуанкаре эволюционной системы. Изучаются бифуркации удвоения периода и изучается их устойчивость. Подчеркивается, что обычный способ изучения таких бифуркаций - изучение итераций отображений Пуанкаре. В предыдущих разделах монографии бифуркации с одномерным ядром изучались с помощью метода Ляпунова-Шмидта, который приводил к изучению одномерного бифуркационного уравнения. Далее это уравнение решалось, с использованием теоремы о неявной функции. Применимость теоремы гарантировалась специальными условиями, налагаемыми на бифуркационное уравнение. В случае отказа от этих условий, теорема о неявной функции должна заменяться более мощным подходом - методом диаграммы Ньютона. Поэтому диаграмма Ньютона изучается в связи с более сложными случаями ветвления операторов. Используя этот метод, сначала изучаются операторы с простым собственным значением, далее кратко рассматривается ситуация многомерного вырождения. Проводится анализ устойчивости. Аналогичный подход используется для изучения вырожденных бифуркаций Хопфа. Основная идея глобальной теории бифуркаций заключается в том, что о наличии бифуркации можно судить по некоторым косвенным признакам на опорной траектории. Так, например, для задачи продолжения по параметру, этим признаком является смена знака

расширенного якобиана системы. В монографии эта идея обобщается на нелинейные фредгольмовы операторы. Основным инструментом исследования является теория степеней Брауэра, перенесенная на специальные операторы в банаховых пространствах, и известная как теория степеней Лере - Шаудера. Отмечается, что первое применение методов глобальной теории дано в работах М. А. Красносельского. Ряд результатов уточняется для потенциальных операторов. Далее изучаются различные приложения полученных ранее результатов к теории уравнений в частных производных.

## 2. Поведение кривой в точке простой бифуркации

Пусть кривая задана системой (1.1) и функция  $F \in C^3(R^{n+1})$ . Пусть  $a_i$  – линейно независимые векторы принадлежащие  $N(F'(x_0))$ ,  $w_i \in N([F'(x_0)]^T)$ , где  $N(\cdot)$  – пространство нулей соответствующего оператора.

Примем, что в точке  $x_0$  размерность пространства нулей оператора  $F'(x_0)$  будет равна трем:  $\dim N(F'(x_0)) = m + 1$ .

Пусть векторы  $a_i$  – образуют базис в этом пространстве. Ортонормируем и транспонируем линейно независимые строки матрицы  $F'(x_0)$ . Для полученных векторов введем обозначения  $p_1, p_2, \dots, p_{n-m}$ . Очевидно, что любой вектор  $x$  можно представить в виде

$$x = \rho_1 p_1 + \dots + \rho_{n-m} p_{n-m} + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m+1} a_{m+1} \quad (2.1)$$

Рассмотрим функции  $F_{i_k}$ , ( $i_k \in \{1, 2, \dots, n\}, k = 1, 2, \dots, n - m$ ) компоненты градиентов которых образуют в точке  $x_0$  линейно независимые строки матрицы  $F'(x_0)$ . Введем для функций  $F_{i_k}$  обозначения  $F_{i_k} = U_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n - m$ . Пусть  $w_i$  линейно независимые ненулевые векторы такие, что

$$w_i^T F'(x_0) = 0^T, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.2)$$

Существование ненулевых векторов  $w_i$  эквивалентно линейной зависимости строк матрицы  $F'(x_0)$ . Определим функции  $V_i$  следующим образом

$$V_i = w_i^T F, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.3)$$

Из определения этих функции и из равенства (2.2) следует, что

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j}(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n + 1. \quad (2.4)$$

Введем систему уравнений

$$\begin{aligned} U_k(x) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, n - m, \\ V_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Лемма 1. Нахождение решения системы (1.1) эквивалентно нахождению решения системы (2.5).

Определение 1. Точка  $x_0$  называется точкой простой бифуркации коразмерности  $m$  уравнения (1.1), если выполняются следующие условия:

$$1) F(x_0) = 0,$$

$$2) \text{rank } F'(x_0) = n - m$$

3) матрица Гессе функций  $V_i(\alpha)$  в начале координат имеет не равные нулю и не одного знака собственные значения.

Параметризуем кривую параметром  $\lambda$

$$\rho = \rho(\lambda),$$

$$\alpha = \alpha(\lambda).$$

Теорема 1. В точке простой бифуркации  $x_0$  справедливы следующие соотношения

$$\dot{\rho}_i(0) = 0, i = 1, 2, \dots, n - m, \quad (2.6)$$

$$\sum_{k,j=1}^{m+1} a_k^T V_i''(x_0) a_j \dot{\alpha}_k(0) \dot{\alpha}_j(0) = 0. \quad (2.7)$$

### 3.Метод Левина

Метод Левина позволяет выписать в явном виде кривую пересечения двух поверхностей второго порядка.

Предполагаем, что  $P(x_1, x_2, x_3) = 0$  и  $Q(x_1, x_2, x_3) = 0$  две различные квадратичные поверхности. Пусть

$$R(\lambda, x_1, x_2, x_3) := P(x_1, x_2, x_3) - \lambda Q(x_1, x_2, x_3), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Далее будем для краткости писать просто  $R(\lambda)$ , подразумевая  $R(\lambda, x_1, x_2, x_3)$ .

Кроме того, матрицу, связанную с поверхностью второго порядка

$$P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^3 \alpha_{ij} x_i x_j + 2\beta_1 x_1 + 2\beta_2 x_2 + 2\beta_3 x_3 + \beta_4 = 0, \quad (3.1)$$

мы будем обозначать тем же символом  $P$ , что и саму поверхность.

Таким образом, (3.1) можно переписать в матричном виде  $X^T P X = 0$ , где  $X = (x_1, x_2, x_3, 1)^T$  и  $P$  симметричная матрица  $4 \times 4$

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \beta_1 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \beta_2 \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}$$

Подматрицу матрицы  $P$ , соответствующую квадратичной форме будем обозначать символом  $P_u$ .

**Теорема.**  $R(\lambda) = 0$  является либо пустым множеством, либо содержит одну из поверхностей из таблицы 1.

**Таблица 1.**

Параметризация простейших квадратичных поверхностей  
(simple ruled quadrics)

| Квадр.форма                | Каноническое уравнение          | Параметризация                                                                                                                |
|----------------------------|---------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Линия                      | $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 = 0$       | $X(u) = [0, 0, u]$                                                                                                            |
| Простая плоскость          | $x_1 = 0$                       | $X(u, v) = [0, u, v]$                                                                                                         |
| Двойная плоскость          | $a_1x_1^2 = 0$                  | $X(u, v) = [0, u, v]$                                                                                                         |
| Параллельные плоскости     | $a_1x_1^2 = 1$                  | $X(u, v) = [\frac{1}{\sqrt{a_1}}, u, v]$<br>,<br>$X(u, v) = [-\frac{1}{\sqrt{a_1}}, u, v]$                                    |
| Пересекающиеся плоскости   | $a_1x_1^2 - a_2x_2^2 = 0$       | $X(u, v) = [\frac{u}{\sqrt{a_1}}, \frac{u}{\sqrt{a_2}}, v]$ ,<br>$X(u, v) = [\frac{u}{\sqrt{a_1}}, -\frac{u}{\sqrt{a_2}}, v]$ |
| Гиперболический параболоид | $a_1x_1^2 - a_2x_2^2 - x_3 = 0$ | $X(u, v) = [\frac{u+v}{2\sqrt{a_1}}, -\frac{u+v}{2\sqrt{a_2}}, uv]$                                                           |
| Параболический цилиндр     | $a_1x_1^2 - x_2 = 0$            | $X(u, v) = [u, a_1u^2, v]$                                                                                                    |
| Гиперболический цилиндр    | $a_1x_1^2 - a_2x_2^2 = 1$       | $X(u, v) = [\frac{1}{2\sqrt{a_1}}(u + \frac{1}{u}),$<br>$\frac{1}{2\sqrt{a_2}}(u + \frac{1}{u}), v]$                          |

Метод Левина состоит из следующих шагов.

1. Найти простейшую поверхность (таблица 1) в  $R(\lambda) = 0$ . Простейшей поверхности будет соответствовать  $\lambda$ , являющийся корнем уравнения  $\det R_u(\lambda) = 0$ .

2. С помощью линейного преобразования  $T$  привести найденную простейшую поверхность к каноническому виду. Выбрать известную параметризацию  $X(u, v)$  для нее (таблица 1). Подставить в

$$X^T T^{-1} P T X = a(u) v^2 + b(u) v + c(u) = 0.$$

3. Разрешить  $v$  относительно  $u$ , определив область допустимых значений  $u$ . Подставить  $v = v(u)$  в параметризацию для простейшей поверхности

$$X(u) = X(u, v(u)).$$

Таким образом, мы получаем параметризацию пересечения  $P = 0$  и  $Q = 0$ .

4. Вернуться в первоначальное пространство с помощью  $T$ . То есть искомая параметризация имеет вид  $TX(u)$ .

#### 4. Реализация алгоритма продолжения в точке простой бифуркации

Из уравнений (2.7) следует, что решение сводится к нахождению пересечения трех поверхностей второго порядка

$$F_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, i = 1, 2, 3.$$

Кроме того, левая часть каждого уравнения этой системы является однородной функцией.

Метод состоит из следующих шагов:

1. Делаем замену переменных  $x'_i = x_i / x_4$ . Снижается размерность системы.

2. С помощью метода Левина находим пересечение 2-ух квадратичных форм в параметрическом виде.

3. Подставляем найденную параметризацию в третье уравнение. Таким образом, задача сводится к необходимости решать одно уравнение одной переменной.

#### 5. Тестовый пример работы программы прохождения точек бифуркации коразмерности три

Рассмотрим функцию  $F : R^4 \rightarrow R^3$  вида

$$F(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 2t^2 \\ x^2 + y^2 - t^2 \\ x^2 - t^2 \end{pmatrix}.$$

Нас интересует множество решений уравнения (1.1) с этой функцией. Учитывая, что функция однородная, программа уменьшает количество переменных

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 2 \\ x^2 + y^2 - 1 \\ x^2 - 1 \end{pmatrix}.$$



Далее ищется кривая пересечения первых двух уравнений системы по методу Левина. Определяется вспомогательная поверхность

$$R(\lambda) = (x^2 + y^2 + z^2 - 2) + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Строится матрица поверхности

$$R = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2+\lambda \end{pmatrix}.$$

Вычисляется определитель квадратичной формы

$$\det R_u(\lambda) = (1+\lambda)^2.$$

Находится корень уравнения

$$\lambda = -1.$$

Строится простейшая поверхность

$$z^2 - 1 = 0.$$

Выбирается параметризация для нее из таблицы (см. табл. 1)

$$X = (u, v, \pm 1).$$

Подставляется параметризация в первое уравнение

$$u^2 + v^2 - 1 = 0.$$

Находится  $v$  как функция  $u$

$$v = \pm \sqrt{1 - u^2}.$$

Таким образом, программа получает параметризацию кривой пересечения двух поверхностей

$$X = (u, \pm \sqrt{1 - u^2}, \pm 1).$$

Далее результат подставляется в третье уравнение  $x^2 - 1 = 0$ . Получаем

$$X = (1, 0, \pm 1).$$

В качестве результата программа возвращает искомое пересечение трех поверхностей

$$Y = (t, 0, \pm t, t).$$

## 6. Заключение

Приводятся условия, позволяющие продолжать численное решение в точках бифуркации кривых, заданных в  $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве системой  $n$  уравнений, ранг матрицы Якоби которой равен  $n - 3$ . Разработаны алгоритмы, реализующие процесс дискретного продолжения решения по параметру и нахождения всех ветвей в точке простой бифуркации коразмерности три. Проведены строгие доказательства всех теорем, каждый алгоритм математически обоснован. Полученные результаты дополняют или улучшают известные положения других авторов [4],[5],[7]. Предложен новый алгоритм расчета ошибок касательных векторов в точках простой бифуркации

коразмерности  $m$ . Приведен пример, демонстрирующий работу разработанной программы, нахождения продолжения в точке бифуркации коразмерности три. Полученные результаты с успехом можно применять в задачах вычислительной математики, механики, математической физики. Полученные научные результаты сопоставимы с лучшими мировыми достижениями в данной области.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Треногин В. А. Функциональный анализ. – М.: Физматлит, 2002.
2. Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. – М.: Эдиториал УРСС, 1999.
3. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969.
4. Keller H. B. Lectures on numerical methods in bifurcation problems. – Berlin: Springer, 1987.
5. Allgower E. L., Georg K. Numerical Continuation Methods: An Introduction // Series in Computational Mathematics, V. 13., Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag, 1990.
6. Crawford J. D. Introduction to bifurcation theory // Reviews of Modern Physics, 1991. – V. 63, № 4. – P. 991-1037.
7. Григолюк Э. И., Лопаницын Е. А. Конечные прогибы, устойчивость и закритическое поведение тонких пологих оболочек. – М.: Изд-во МАМИ, 2004.
8. Kielhofer H. Bifurcation Theory: An Introduction with Applications to PDEs // Appl. Math. Sciences 156. – New York: Springer-Verlag, 2004.
9. Crandall M. G., Rabinowitz P. H. Bifurcation from simple eigenvalues // J. Funct. Anal., 1971. – V.8. – P. 321-340.
10. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. – М.: Мир, 1998.
11. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т.1. – СПб.: Изд-во "Лань", 1997.
12. Decker D. W., Keller H.B. Path following near bifurcation // СРАМ, 1981. – V. XXXIV. – P. 149-175.
13. Trenogin V. A. Computation of one-parametric families of solutions of nonlinear equations // Proc. of the Second ISAAK Congress, 2000. – V.1. – P. 727-735.
14. Кузнецов Е. Б. Наилучшая параметризация при построении кривой итерационным методом // Докл. РАН, 2004. – Т. 396, № 6. – С. 746-748.
15. Levin J. A parametric algorithm for drawing pictures of solid objects composed of quadric surfaces // Communications of the ACM, 1976. – 19(10). – P. 555–563.

**Е. Б. Кузнецов** (г. Москва)

## **К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ<sup>1</sup>**

*Рассматривается задача квазистатического деформирования тел из упругопластического материала в геометрически линейной постановке. После дискретизации уравнений методом конечных элементов по пространственной переменной задача определения равновесных конфигураций сводится к интегрированию системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В предельном состоянии тела из идеального упругопластического материала задача становится сингулярной. В качестве регуляризации применяется метод продолжения решения по наилучшему параметру, что позволяет находить решение задачи в предельных состояниях тел. Численное решение тестовой задачи об определении предельных нагрузок и равновесных конфигураций стержня из идеального упругопластического материала подтверждает эффективность предложенного подхода.*

*Рассматривается также задача квазистатического деформирования прямолинейного стержня из идеального упругопластического материала в геометрически нелинейной постановке.*

*Ключевые слова: предельное состояние, метод продолжения, наилучший параметр, конечный элемент*

### **Введение**

Многие задачи, возникающие в прикладной и вычислительной математике, в частности в механике деформируемого твердого тела, а так же при проектировании изделий авиационной и ракетнокосмической техники, сводятся к исследованию квазистатического деформирования тел из идеального упругопластического материала [1-3]. В этом случае при некотором значении внешних сил достигаются предельные состояния – равновесные конфигурации, в которых деформации обращаются в бесконечность. Соответствующая нагрузка называется предельной.

Универсальным и эффективным методом решения задач по упругопластическому деформированию тел произвольной геометрии является метод конечных элементов (МКЭ) [4-7]. После дискретизации исходной системы дифференциальных уравнений МКЭ проблема определения равновесных конфигураций тела сводится к пошаговому интегрированию начальной задачи для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которая в предельном состоянии тела из идеального

---

© Е. Б. Кузнецов, 2011

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 10-08-00013) и целевой программы Министерства образования и науки РФ 2.1.1/5267.

упругопластического материала является сингулярной. В стандартных программах пошагового интегрирования системы ОДУ в качестве параметра деформирования используется внешняя нагрузка. В этом случае в окрестности предельной нагрузки для определения равновесных конфигураций необходимо применять мелкие шаги по нагрузке. При этом итерационные процессы уточнения решения сходятся очень медленно или даже расходятся. Для преодоления этих трудностей при определении равновесных конфигураций в окрестности предельной нагрузки разумно применить наилучшую параметризацию [8, 9], согласно которой наилучшим параметром деформирования будет длина дуги интегральной кривой задачи. Этот параметр использовался в работах [1, 7, 10]. Здесь обращается внимание на еще один более эффективный способ применения этого параметра.

### 1. Регуляризация одномерной задачи

Рассмотрим модельную задачу, при решении которой продемонстрируем те трудности, которые возникают в задачах о деформировании тел из идеального упругопластического материала в предельном состоянии, и приведем один из алгоритмов регуляризации.

Изучим одноосное однородное деформирование прямолинейного стержня с площадью поперечного сечения  $A$ , один конец которого зашкреплен, а к другому приложена растягивающая или сжимающая продольная сила  $P$ , см. [1]. Материал стержня является упругопластическим с билинейной диаграммой одноосного растяжения, представленной на рисунке 1, где по оси абсцисс откладывается деформация  $\varepsilon$ , а по оси ординат – продольное напряжение  $\sigma$ .

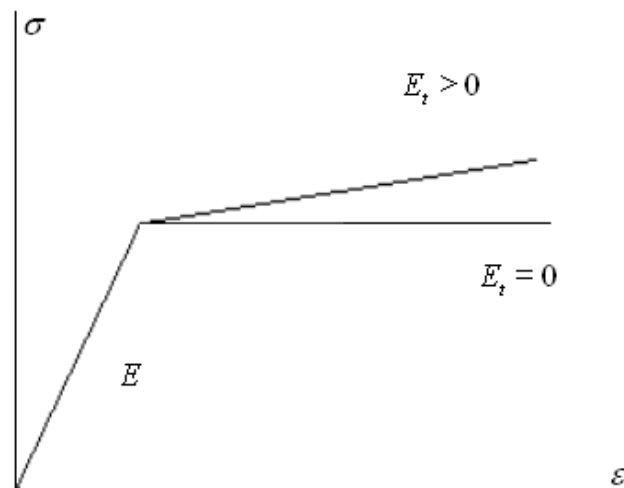


Рис. 1.

Начальное значение предела текучести обозначается через  $\sigma_y^0 > 0$ .  $E > 0$  – модуль Юнга,  $E_t \geq 0$  – касательный модуль Юнга. При использовании теории пластического течения с изотропным упрочнением определяющее соотношение материала стержня может быть записано в виде

$$\dot{\sigma} = b \dot{\varepsilon}, \quad (1.1)$$

где

$$b = \begin{cases} E, & |\sigma| < \sigma_y \quad \cup \quad |\sigma| = \sigma_y, \quad \sigma \dot{\varepsilon} \leq 0, \\ E_t, & |\sigma| = \sigma_y, \quad \sigma \dot{\varepsilon} > 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Здесь  $\sigma_y = \max_{0 \leq \tau \leq t} \{|\sigma(\tau)|, \sigma_y^0\}$  – текущее значение предела текучести;  $t$  – монотонно возрастающий параметр дифференцирования (с начальным значением  $t = 0$ ), точка обозначает производную по  $t$ .

Уравнение равновесия в скоростях можно записать в виде

$$\dot{\sigma} = \frac{\dot{P}}{A}. \quad (1.3)$$

Из (1.1) и (1.3) получаем, принимая во внимание (1.2), нелинейное ОДУ

$$k \dot{\varepsilon} = \dot{P}, \quad (1.4)$$

которое следует решать с начальным условием

$$\varepsilon(0) = 0. \quad (1.5)$$

В уравнении (1.4) введен касательный коэффициент жесткости (аналог касательной матрицы жесткости [4])

$$k(\sigma, \dot{\varepsilon}) = bA.$$

Начальная задача (1.4), (1.5) описывает деформирование стержня из упругопластического материала. Причем уравнение (1.4) является аналогом системы уравнений, которая получается при дискретизации МКЭ дифференциальных уравнений, описывающих деформирование тела из упругопластического материала.

Очевидно, что равновесные конфигурации стержня определяются интегрированием начальной задачи (1.4), (1.5). Причем при монотонном пластическом деформировании стержня равновесные конфигурации в плоскости  $(\varepsilon, \sigma)$  соответствуют диаграмме одноосного деформирования, приведенной на рисунке.

Разрешимость же задачи (1.4), (1.5) зависит от значения касательного модуля  $E_t$ .

Если  $E_t > 0$  (упругопластический материал с упрочнением), то задача (1.4), (1.5) регулярна как при упругом ( $k = EA$ ), так и при упругопластическом ( $k = E_t A$ ) деформировании. Решение задачи единственно и предельные состояния не достигаются.

Если  $E_t = 0$  (идеальный упругопластический материал), то задача (1.4), (1.5) регулярна при упругом ( $k = EA$ ) и сингулярна при упругопластическом ( $k = 0$ ) деформировании. В последнем случае при  $\dot{P} \neq 0$  решение не существует, а при  $\dot{P} = 0$  решение существует, но не единственно. Предельное состояние стержня достигается при  $P_{lim} = \sigma_y^0 A$ .

Для стержня из упругопластического материала с упрочнением задачу (1.4), (1.5) можно решать, используя в качестве параметра деформирования силу  $P(\dot{P}=1)$ . Для стержня из идеального упругопластического материала при деформировании за пределом упругости силу  $P$  в качестве параметра деформирования использовать нельзя, так как при  $\dot{P}=1$  решение задачи (1.4), (1.5) не существует. Таким образом, стандартный алгоритм решения задачи о деформировании упругопластического тела с заданной внешней силой для определения равновесных конфигураций в предельном состоянии использовать нельзя.

Чтобы начальную задачу (1.4), (1.5) решить каким-нибудь численным методом, уравнение (1.4) предварительно следует представить в нормальной форме Коши, т. е. разрешить относительно производной  $\dot{\varepsilon}$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{P}}{k}. \quad (1.6)$$

Видно, что в предельном состоянии правая часть уравнения (1.6) теряет смысл, так как  $k = 0$ .

В монографиях [8,9] показано, что параметр нагрузки  $P$  не всегда является удачным при решении задачи и можно поставить вопрос о выборе наилучшего, в некотором смысле параметра. Доказано, что если решать задачу при помощи метода продолжения по параметру, то наилучшим параметром, доставляющим наилучшую обусловленность соответствующей линейной системе уравнений продолжения, будет длина дуги интегральной кривой задачи.

Преобразуем задачу (1.6), (1.5) к наилучшему параметру – аргументу, обозначив его через  $\lambda$ . Предварительно в уравнении (1.6) дифференцирование по переменной  $t$  заменим на дифференцирование по переменной  $\lambda$ , тогда уравнение (1.6) примет вид

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{1}{k} \frac{dP}{d\lambda}. \quad (1.7)$$

Учитывая смысл параметра  $\lambda$ , как элемента длины дуги, имеем еще одно уравнение

$$\left(\frac{d\varepsilon}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dP}{d\lambda}\right)^2 = 1. \quad (1.8)$$

Разрешая систему уравнений (1.7), (1.8) относительно производных, получаем уравнения, записанные в нормальной форме Коши

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{d\lambda} &= \pm \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \\ \frac{dP}{d\lambda} &= \pm \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Если длину дуги  $\lambda$  отсчитывать от начальной точки задачи (1.6), (1.5) и нагружение стержня производить из недеформированного состояния, то начальные условия для системы уравнений (1.9) примут вид

$$\varepsilon(0) = 0, \quad P(0) = 0. \quad (1.10)$$

Таким образом, получена начальная задача (1.9), (1.10), преобразованная к наилучшему аргументу, правая часть которой уже не теряет смысл и при значении  $k = 0$ , поэтому эту задачу можно проинтегрировать любым численным методом решения начальных задач для ОДУ.

Знак плюс или минус в системе (1.9) выбирается в зависимости от направления движения вдоль интегральной кривой задачи.

В [8,9] отмечаются некоторые свойства преобразованной начальной задачи (1.9), (1.10). В частности доказывается, что правая часть преобразованной задачи имеет наименьшую квадратичную норму, которая, как видно из системы (1.9), равна единице, поэтому задача (1.9), (1.10) может быть проинтегрирована даже в сингулярном случае, когда касательный коэффициент жесткости  $k$  равен нулю.

Задача (1.9), (1.10) интегрировалась методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности в случае идеального упругопластического материала при следующих значениях механических констант [1]:  $E = 1$  ГПа,  $E_t = 0$ ,  $\sigma_y^0 = 10$  МПа. Диаграмма одноосного растяжения воспроизводится при численном решении с высокой точностью.

## 2. Регуляризация системы конечноэлементных уравнений

Предложенная выше процедура регуляризации одномерной задачи положена в основу численного алгоритма решения задачи о деформировании тел из идеального упругопластического материала в предельных состояниях.

Система уравнений квазистатического деформирования упругопластического тела после дискретизации МКЭ по пространственным переменным запишется в виде [1,4-6]

$$K\dot{U} = \dot{R}. \quad (2.1)$$

Здесь  $K = \|k_{ij}\|$  – симметричная касательная матрица жесткости порядка  $n$ ;  $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$  – вектор узловых перемещений;  $R$  – вектор внешних сил. Остальные обозначения совпадают с принятыми ранее. Систему ОДУ следует решать при начальных условиях

$$U(0) = U_0. \quad (2.2)$$

В [1] приводятся определяющие соотношения, обобщающие соотношения (1.1), (1.2) для одноосного деформирования стержня на пространственные тела, в силу чего матрица  $K = K(\dot{U})$ , поэтому соотношения (2.1), (2.2) представляют собой начальную задачу для системы нелинейных ОДУ.

Пусть вектор внешних сил  $R$  зависит только от параметра  $P$ , характеризующего интенсивность действия внешних сил:

$$R = PF. \quad (2.3)$$

Здесь вектор  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)^T$  характеризует распределение внешних сил. С учетом (2.3) систему (2.1) можно переписать в виде

$$K\dot{U} = \dot{P}F. \quad (2.4)$$

Предельная нагрузка (параметр  $P$  принимает значение  $P_{lim}$ ) соответствует вырождению матрицы  $K$ . Это возможно только для тела из идеального упругопластического материала. Очевидно, что стандартные алгоритмы интегрирования нелинейной начальной задачи (2.4), (2.2) в окрестности предельных нагрузок работать не будут.

Проведем регуляризацию задачи (2.4), (2.2), используя вышеприведенный алгоритм для одноосного случая. Тогда систему уравнений (2.4), преобразованную к наилучшему аргументу  $\lambda$ , можно записать в виде

$$K \frac{dU}{d\lambda} = \frac{dP}{d\lambda} F. \quad (2.5)$$

Аргумент  $\lambda$ , как элемент длины дуги интегральной кривой задачи (2.4), (2.2), должен удовлетворять равенству

$$\left( \frac{dU}{d\lambda} \right)^T \frac{dU}{d\lambda} + \left( \frac{dP}{d\lambda} \right)^2 = 1. \quad (2.6)$$

Решение системы линейных уравнений (2.5), полученное при помощи правила Крамера, будет иметь вид

$$\frac{du_i}{d\lambda} = \frac{\Delta_i}{\Delta} \frac{dP}{d\lambda}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.7)$$

Здесь  $\Delta$  – определитель матрицы  $K$ ;  $\Delta_i$  – определитель, получаемый из определителя  $\Delta$ , после замены в нем  $i$ -го столбца вектор-столбцом  $F$ .

Принимая во внимание равенства (2.7), система уравнений (2.5), (2.6) может быть разрешена относительно производных и мы получаем систему уравнений, преобразованную к наилучшему аргументу

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{d\lambda} &= \pm \frac{\Delta_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 + \Delta^2}}, \\ \frac{dP}{d\lambda} &= \pm \frac{\Delta}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 + \Delta^2}}, \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Если аргумент  $\lambda$  отсчитывать от начальной точки задачи (2.4), (2.2) и нагружение тела происходит из недеформированного состояния, то систему уравнений (2.8) надо интегрировать при следующих начальных условиях



$$U(0) = U_0, \quad P(0) = 0. \quad (2.9)$$

Преобразованная к наилучшему аргументу начальная задача (2.8), (2.9) выгодно отличается от непреобразованной начальной задачи (2.1), (2.2). В самом деле, в вырожденном случае определитель  $\Delta$  касательной матрицы жесткости  $K$  равен нулю, поэтому задачу (2.1), (2.2) невозможно преобразовать к нормальной форме Коши и, следовательно, численно проинтегрировать. Преобразованная задача лишена этого недостатка. Из системы уравнений (2.8) видно, что правые части ее не теряют смысл и в том случае, когда определитель  $\Delta$  обращается в ноль.

Поясним ситуацию, при которой предложенный алгоритм будет работоспособным. Для этого наряду с матрицей жесткости  $K$  введем в рассмотрение расширенную матрицу  $\bar{K}$ , получающуюся, если к матрице  $K$  приписать справа вектор-столбец  $F$ , т.е.  $\bar{K} = (KF)$ . Пусть при некотором значении аргумента матрица  $K$  вырождается и ее ранг становится равным не  $n$ , а  $r < n$ . Такая точка на интегральной кривой задачи называется особой.

Если вектор-столбец  $F$  будет линейно зависимым со столбцами матрицы  $K$ , то ранг расширенной матрицы тоже будет равен  $r$ , т.е.

$$\text{rank}(\bar{K}) = \text{rank}(K) = r.$$

Если вектор-столбец  $F$  будет линейно независимым со столбцами матрицы  $K$ , то ранг расширенной матрицы будет равен  $r + 1$ , т.е.

$$\text{rank}(\bar{K}) = \text{rank}(K) + 1 = r + 1.$$

В нашем случае при достижении предельной нагрузки  $P = P_{lim}$  тела из идеального упругопластического материала матрица  $K$  вырождается и ее ранг становится равным не  $n$ , а  $n - 1$ . Если вектор-столбец  $F$  будет линейно независимым со столбцами матрицы  $K$ , то ранг расширенной матрицы будет равен  $n$ , т.е.

$$\text{rank}(\bar{K}) = \text{rank}(K) + 1 = n.$$

Такая точка на интегральной кривой задачи называется предельной точкой. В этом случае среди определителей  $\Delta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  найдется, по крайней мере, один определитель отличный от нуля и преобразованная задача (2.8), (2.9) может быть успешно проинтегрирована любым численным методом решения начальных задач для ОДУ.

Если вектор-столбец  $F$  будет линейно зависимым со столбцами матрицы  $K$ , то ранг расширенной матрицы будет тоже равен  $n - 1$ , т.е.

$$\text{rank}(\bar{K}) = \text{rank}(K) = n - 1.$$

Такая точка на интегральной кривой задачи называется точкой бифуркации. В этом случае правые части системы ОДУ (2.8) теряют смысл и численно проинтегрировать уже не удастся даже задачу, преобразованную к наилучшему аргументу (2.8), (2.9), однако метод продолжения решения по наилучшему параметру позволяет преодолевать также точки таких типов, но

алгоритм их прохождения является более сложным, см. [11,12]. Следует отметить, что в работе [13] даются рекомендации о наилучшей параметризации многопараметрических задач.

### 3. Численная реализация алгоритма регуляризации

При построении решения задачи о растяжении прямолинейного стержня, изготовленного из идеального упругопластического материала, воспользуемся регуляризацией, предложенной выше.

Система уравнений (2.4), записанная в развернутом виде, может быть представлена следующим образом

$$k \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \dot{P}. \quad (3.1)$$

Здесь  $k$ , введенный ранее касательный коэффициент жесткости. Коэффициенты  $k_{ij}$  вычислялись по формулам [14]

$$k_{ij} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} N_i(x) \frac{dN_j(x)}{dx} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i(x) \frac{dN_j(x)}{dx} dx,$$

где базисные функции  $N_m(x)$  являются кусочно линейными и имеют вид

$$N_m(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}}, & x \in [x_{m-1}, x_m]; \\ \frac{x_{m+1} - x}{x_{m+1} - x_m}, & x \in [x_m, x_{m+1}]; \\ 0, & x < x_{m-1} \cup x > x_{m+1}. \end{cases}$$

Систему ОДУ (3.1) следует решать при начальных условиях

$$u_i(0) = u_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

Начальная задача (3.1), (3.2) для идеального упругопластического стержня является сингулярной при достижении усилием  $P$  предельного значения, так как в этом случае касательный коэффициент жесткости  $k$  принимает нулевое значение. Согласно алгоритму регуляризации преобразуем систему ОДУ (3.1) к наилучшему аргументу  $\lambda$ , переписав ее в виде

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_1/d\lambda \\ du_2/d\lambda \\ \vdots \\ du_n/d\lambda \end{bmatrix} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \frac{dP}{d\lambda}. \quad (3.3)$$

Аргумент  $\lambda$ , как элемент длины дуги интегральной кривой задачи (3.1), (3.2), должен удовлетворять равенству

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{du_i}{d\lambda} \right)^2 + \left( \frac{dP}{d\lambda} \right)^2 = 1. \quad (3.4)$$

Решение системы, линейных относительно производных уравнений (3.3), полученное по правилу Крамера, можно записать в виде

$$\frac{du_i}{d\lambda} = \frac{1}{k} \frac{\Delta_i}{\Delta} \frac{dP}{d\lambda}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

Здесь  $\Delta$  – определитель матрицы системы уравнений (3.3);  $\Delta_i$  – определитель, получаемый из определителя  $\Delta$ , после замены в нем  $i$ -го столбца вектор-столбцом, состоящим из единиц.

Принимая во внимание равенства (3.5), система уравнений (3.3), (3.4) может быть разрешена относительно производных и мы получаем систему уравнений, преобразованную к наилучшему аргументу

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{d\lambda} &= \pm \frac{\Delta_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 + k^2 \Delta^2}}, \\ \frac{dP}{d\lambda} &= \pm \frac{k\Delta}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 + k^2 \Delta^2}}, \\ i &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.6)$$

которую нужно решать при следующих начальных условиях

$$u_i(0) = u_{i0}, \quad P(0) = P_0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

Здесь предполагается, что аргумент  $\lambda$  отсчитывается от начальной точки задачи (3.1), (3.2).

Преобразованная к наилучшему аргументу начальная задача (3.6), (3.7) выгодно оличается от непреобразованной начальной задачи (3.1), (3.2). В самом деле, в вырожденном случае задача (3.1), (3.2) является сингулярной и ее невозможно преобразовать к нормальной форме Коши и, следовательно, численно проинтегрировать. Преобразованная задача лишена этого недостатка. Из системы уравнений (3.6) видно, что правые части ее не теряют смысл и в том случае, когда касательный коэффициент жесткости  $k$  принимает нулевое значение, а значит эта задача может быть с успехом проинтегрирована.

В качестве тестового примера исследуем задачу, рассмотренную в [1], т.е. изучим растяжение прямолинейного стержня длиной 0.1м, квадратного поперечного сечения (сторона квадрата равна 0.01м). Один конец стержня зашпелен, а к свободному концу приложена сила  $P$ . Стержень изготовлен из идеального упругопластического материала с механическими константами

$E = 1 \text{ ГПа}$ ,  $E_t = 0$ ,  $\sigma_y^0 = 10 \text{ МПа}$ . Решение для стержневой (одномерной) модели строится при помощи формы Бубнова - Галеркина МКЭ, при этом стержень вдоль своей оси разбивается на десять элементов, т.е.  $n = 10$ . Начальная задача (3.6), (3.7) с однородными начальными условиями (3.7) интегрируется методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Диаграмма одноосного растяжения воспроизводится при численном решении с высокой точностью.

#### 4. Регуляризация одномерной задачи в геометрически нелинейном случае

Изучим задачу из п. 1 о квазистатическом поведении прямолинейного стержня из идеального упругопластического материала в геометрически нелинейной постановке. Сохраним обозначения, принятые в п. 1. Поведение стержня описывается уравнением (1.4), которое после преобразования к наилучшему аргументу  $\lambda$ , примет вид (1.9). После решения начальной задачи (1.9), (1.10), полученные значения деформации  $\varepsilon$  можно использовать для нахождения перемещений  $u$  точек стержня. Для этого, согласно подхода Лагранжа, можно воспользоваться нелинейным соотношением [15]

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2. \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) является квадратным уравнением относительно производной  $\frac{du}{dx}$ , решая которое получаем следующие значения

$$\frac{du}{dx} = -1 \pm \sqrt{1 + 2\varepsilon}.$$

Знак минус в этом равенстве не соответствует физическому смыслу задачи, поэтому окончательно получаем

$$\frac{du}{dx} = -1 + \sqrt{1 + 2\varepsilon}. \quad (4.2)$$

Учитывая, что в начальный момент стержень имел нулевые перемещения, интегрируя равенство (4.2), получаем

$$u(x) = (-1 + \sqrt{1 + 2\varepsilon})x. \quad (4.3)$$

Если до деформирования стержень имел длину, равную  $l$ , то согласно (4.3), перемещение его свободного конца будет вычисляться по формуле

$$u(l) = (-1 + \sqrt{1 + 2\varepsilon})l.$$

В общем же случае для решения данной задачи следует использовать МКЭ. С учетом нелинейного равенства (4.1), уравнение (1.7) можно записать в виде

$$\left( 1 + \frac{du}{dx} \right) \frac{d}{d\lambda} \frac{du}{dx} = \frac{1}{k} \frac{dP}{d\lambda}. \quad (4.4)$$

После применения к задаче (4.4) по пространственной переменной  $x$  МКЭ, получаем систему уравнений типа (3.3), которая является линейной относительно производных, но коэффициенты ее матрицы являются функциями перемещений. После преобразования к наилучшему аргументу получим начальную задачу, интегрирование которой позволит определить перемещения в физически и геометрически нелинейном случае.

## 5. О способах решения системы параметризованных уравнений

Правило Крамера, используемое для решения параметризованной к наилучшему аргументу системы  $n$  линейных уравнений в предыдущих разделах, требует вычисления  $n+1$  определителя  $n$ -го порядка. Для систем уравнений большой размерности эта задача становится чрезвычайно трудной. Рассмотрим возможные способы преодоления этих трудностей. Применим метод Гаусса для решения системы уравнений (2.5), которая, записанная в развернутой форме, будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_1/d\lambda \\ du_2/d\lambda \\ \vdots \\ du_n/d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \frac{dP}{d\lambda}. \quad (5.1)$$

Пусть определитель системы (5.1) отличен от нуля, тогда эту систему можно решить методом Гаусса и решение представить в форме

$$\frac{du_i}{d\lambda} = k_i \frac{dP}{d\lambda}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.2)$$

где числа  $k_i$  получаются в результате работы алгоритма исключения переменных метода Гаусса.

С учетом смысла параметра  $\lambda$  имеем еще одно уравнение (3.4). Разрешив систему уравнений (5.2), (3.4) относительно производных, получаем систему уравнений, преобразованных к наилучшему аргументу

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{d\lambda} &= \pm \frac{k_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n k_i^2 + 1}}, \\ \frac{dP}{d\lambda} &= \pm \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n k_i^2 + 1}}, \\ i &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.3)$$

которую следует решать при начальных условиях (3.7).

Ситуация изменяется, когда в результате интегрирования задачи (5.3), (3.7) при исследовании проблемы деформирования тела из идеального упругопластического материала, усилие  $P$  достигает предельного значения. В

этом случае матрица системы (5.1) вырождается и ее ранг становится равным  $n-1$ , а ее определитель  $\Delta$  обращается в ноль. Заметим, что информацию об этом выдает сам метод Гаусса решения системы уравнений (5.1).

Из системы уравнений (2.8) следует, что в этом случае производная  $\frac{dP}{d\lambda}$  обращается в ноль и система уравнений (5.1) становится однородной, поэтому для ее решения применим следующий подход.

Пусть базисный минор  $\Delta_B$  матрицы системы (5.1) располагается в верхнем левом углу, т.е. имеет вид

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n-1} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{n-1n-1} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5.4)$$

Тогда последнее уравнение системы (5.1) будет линейно зависимым с вышестоящими уравнениями и его можно отбросить. В качестве базисных переменных следует принять производные  $du_1/d\lambda, du_2/d\lambda, \dots, du_{n-1}/d\lambda$ , а производную  $du_n/d\lambda$  принять за параметрическую переменную. Тогда систему уравнений (5.1) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n-1} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{n-1n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_1/d\lambda \\ du_2/d\lambda \\ \vdots \\ du_{n-1}/d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1n} \\ k_{2n} \\ \vdots \\ k_{n-1n} \end{bmatrix} \frac{du_n}{d\lambda}. \quad (5.5)$$

Определитель этой системы является базисным минором (5.4), поэтому решение системы (5.5), полученное методом Гаусса, может быть записано в виде

$$\frac{du_j}{d\lambda} = r_j \frac{du_n}{d\lambda}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (5.6)$$

В силу того, что  $\frac{dP}{d\lambda} = 0$ , уравнение (3.4), задающее наилучшую параметризацию, примет вид

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{du_j}{d\lambda} \right)^2 + \left( \frac{du_n}{d\lambda} \right)^2 = 1. \quad (5.7)$$

После разрешения системы уравнений (5.6), (5.7) относительно производных, получаем систему уравнений, преобразованную к наилучшему аргументу

$$\begin{aligned}\frac{du_j}{d\lambda} &= \pm \frac{r_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} r_j^2 + 1}}, \\ \frac{du_n}{d\lambda} &= \pm \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} r_j^2 + 1}}, \\ j &= 1, 2, \dots, n-1.\end{aligned}\quad (5.8)$$

При решении системы уравнений (5.8) в качестве начальных условий следует принять решение, которое получилось при интегрировании задачи (5.3), (3.7) в момент вырождения матрицы системы (5.1).

Недостатком предложенного подхода является то обстоятельство, что при вырождении матрицы системы (5.1) необходимо отыскивать базисный минор. Таких миноров может быть много и не понятно какому из них следует отдать предпочтение, поэтому рассмотрим еще один подход, который лишен отмеченного недостатка.

Перепишем систему уравнений (5.1) с учетом равенства (3.4) в виде

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} & f_1 \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} & f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} & f_n \\ u_{1\lambda} & u_{2\lambda} & \dots & u_{n\lambda} & P_\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1\lambda} \\ u_{2\lambda} \\ \vdots \\ u_{n\lambda} \\ P_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Здесь приняты обозначения  $u_{i\lambda} = \frac{du_i}{d\lambda}$ ,  $P_\lambda = \frac{dP}{d\lambda}$ ,  $f_i = -F_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

В силу последнего уравнения система (5.9) является нелинейной. Линеаризуем это уравнение, записав систему в виде

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} & f_1 \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} & f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} & f_n \\ u_{1\lambda}^* & u_{2\lambda}^* & \dots & u_{n\lambda}^* & P_\lambda^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1\lambda} \\ u_{2\lambda} \\ \vdots \\ u_{n\lambda} \\ P_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Здесь звездочкой помечен единичный вектор  $U_\lambda^* = \{u_{1\lambda}^*, u_{2\lambda}^*, \dots, u_{n\lambda}^*, P_\lambda^*\}$  – вектор производных, вычисленный на предыдущем шаге процесса продолжения решения. Вектор  $U_\lambda = \{u_{1\lambda}, u_{2\lambda}, \dots, u_{n\lambda}, P_\lambda\}$  – вектор производных вычисленный на рассматриваемом шаге в результате решения системы (5.10). Как и вектор  $U_\lambda^*$  он направлен по касательной к интегральной кривой задачи, но не является единичным, как это требует последнее уравнение системы (5.9), так как, в силу последнего уравнения системы (5.10), проекция вектора  $U_\lambda$  на

направление единичного вектора  $U_{\lambda}^*$  равна единице. Но его можно сделать единичным, нормировав по формуле

$$U_{\lambda}^* = \frac{U_{\lambda}}{\|U_{\lambda}\|}.$$

Полученный таким образом вектор будет решением на данном шаге исходной системы уравнений (5.9) и его можно использовать в алгоритме интегрирования начальной задачи, см. [8].

При решении системы (5.10) начальное приближение вектора  $U_{\lambda}^*$  выбирается из того условия, чтобы он не был ортогональным к вектору касательной в начальной точке интегральной кривой. Если эта точка не является предельной по переменной  $P_{\lambda}$ , то вектор  $U_{\lambda}^*$  можно принять, например, в виде  $U_{\lambda}^* = \{0, 0, \dots, 0, 1\}$ .

Изложенные алгоритмы успешно применялись при решении с использованием МКЭ задачи п.3 о растяжении прямолинейного стержня, изготовленного из идеального упругопластического материала. При этом диаграмма одноосного растяжения, представленная на рисунке, воспроизводилась при численном решении с высокой точностью.

### **Заключение**

В работе дан алгоритм регуляризации задач о деформировании тел, изготовленных из идеального упругопластического материала в предельных состояниях. В основе подхода лежит метод продолжения решения по наилучшему параметру [8,9], которым является длина дуги интегральной кривой задачи. После преобразования исходной сингулярной задачи к наилучшему параметру, задача становится регулярной и может быть успешно проинтегрирована. При этом, в отличие от алгоритма, предложенного в работе [1], никаких дополнительных итерационных процессов организовывать не требуется.

Автор благодарен студенту Филимонову Д.Г. за помощь при проведении численных расчетов.

### **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Аннин Б. Д., Алехин В. В., Коробейников С. Н. Определение предельных состояний упругопластических тел // Прикладная механика и техническая физика, 2000. – Т. 41, №5. – С. 196-204.
2. Аннин Б. Д. Упругопластическая задача / Б. Д. Аннин, Г. П. Черепанов. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
3. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969.
4. Bathe K.-J. Finite element procedures in engineering analysis. – Englewood Cliffs (New Jersey): Prentice-Hall, 1982.



5. Zienkiewicz O. C. The finite element method / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. – L.: McGraw-Hill, 1991.
6. Коробейников С. Н. Решение двумерных геометрически и физически нелинейных задач методом конечных элементов // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы X Всесоюзной конференции. – Новосибирск: Ин-т теоретич. и прикл. механики СО АН СССР, 1988. – С. 134-140.
7. Голованов А. И. Математические модели нелинейной механики деформируемых сред / А. И. Голованов, Л. У. Султанов. – Казань: Казанский гос. ун-т, 2009.
8. Шалашилин В. И. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация / В. И. Шалашилин, Е. Б. Кузнецов. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. (Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. Parametric Continuation and Optimal Parametrization in Applied Mathematics and Mechanics. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 2003.)
9. Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения и наилучшая параметризация. – М.: МАИ-ПРИНТ, 2010.
10. Bathe K.-J., Dvorkin E. N. On the automatic solution of nonlinear finite element equations // Comput. and Structures. 1983. – V.17, № 5/6. – P. 871-879.
11. Красников С. Д., Кузнецов Е. Б. Параметризация решения в точках бифуркации // Дифференциальные уравнения, 2009. – Т.45, № 8. – С. 1194-1198.
12. Красников С. Д., Кузнецов Е. Б. Численное продолжение решения в точках бифуркации математических моделей // Математическое моделирование, 2009. – Т.21, № 12. – С. 47-58.
13. Кузнецов Е. Б. Многомерная параметризация и численное решение систем нелинейных уравнений // Журнал выч. математ. и математич. физики, 2010. – Т.50. №2. – С. 255-267.
14. Формалев В. Ф. Численные методы / В. Ф. Формалев, Д. Л. Ревизников. – М.: Физматлит, 2004.
15. Новожилов В. В. Теория упругости. – Ленинград: Судпромгиз, 1958.

Д. С. Лавыгин, В. Л. Леонтьев (г. Ульяновск)

## СМЕШАННЫЙ ВАРИАЦИОННО-СЕТОЧНЫЙ МЕТОД, СВЯЗАННЫЙ С ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФИНИТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ, В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ СТЕРЖНЕЙ

*Проводится сравнительный анализ результатов решений задачи об изгибе балки, полученных с помощью четырех вариантов смешанного вариационно-сеточного метода, связанного с функциями Куранта или ортогональными финитными функциями трех видов.*

Применение смешанных вариационно-сеточных методов (ВСМ) совместно с ортогональными финитными функциями (ОФФ) для решения краевых задач теории упругости, теории пластин и оболочек, теории стержней и теории теплопроводности позволяет получать результаты, обладающие уравновешенной точностью и гладкостью [1]. Применение ОФФ устраняет основной недостаток смешанных ВСМ – высокую размерность получаемых сеточных систем уравнений (ССУ). В данной статье проводится тестирование ОФФ различных типов при их использовании в алгоритмах ВСМ на *густых* сетках, а также анализ и сравнение результатов решения задачи этими методами.

*Тестовая задача* – задача об изгибе балки длиной  $l$ , находящейся под действием распределенной поперечной нагрузки  $f$ , жестко защемленной на левом конце и свободной на правом конце. Дифференциальные уравнения, описывающие изменение перерезывающей силы  $Q$ , изгибающего момента  $M$ , прогиба балки  $W$  и угла поворота сечения  $\beta$  вдоль оси балки, имеют вид:

$$EI \frac{d\beta}{dx} - M = 0, \quad \frac{dW}{dx} - \beta = 0, \quad \frac{dM}{dx} + Q = 0, \quad \frac{dQ}{dx} + f = 0, \quad (1)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $I$  – момент инерции сечения.

С учетом граничных условий

$$W(0) = 0, \quad \beta(0) = 0, \quad Q(l) = 0, \quad M(l) = 0, \quad (2)$$

точное решение задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} W &= \frac{f}{2EI} \left( \frac{x^4}{12} + \frac{l^2 x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} \right), & Q &= f(l - x), \\ \beta &= \frac{f}{2EI} \left( \frac{x^3}{3} + l^2 x - lx^2 \right), & M &= \frac{f}{2} (x^2 + l^2 - 2lx). \end{aligned} \quad (3)$$

В рамках тестовой задачи в рассмотрение вводится функционал Рейсснера:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \left( \frac{dM}{dx} + Q \right) \beta + \left( \frac{dQ}{dx} + 2f \right) W - \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{1}{EI} M \right) M - \left( \frac{dW}{dx} - \beta \right) Q \right\} dx,$$

который с учетом краевых условий (2) принимает вид:

$$\tilde{J} = J + \frac{1}{2} (\beta M - WQ)|_{x=0} - \frac{1}{2} (M\beta + WQ)|_{x=l}. \quad (4)$$

Условие стационарности функционала (4):

$$\begin{aligned} \delta \tilde{J} = \int_0^l \left\{ \left( \frac{dM}{dx} + Q \right) \delta \beta + \left( \frac{dQ}{dx} + f \right) \delta W - \left( \frac{d\beta}{dx} - \frac{1}{EI} M \right) \delta M - \right. \\ \left. - \left( \frac{dW}{dx} - \beta \right) \delta Q \right\} dx - \beta \delta M|_{x=0} - W \delta Q|_{x=0} - M \delta \beta|_{x=l} - Q \delta W|_{x=l} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

равносильно краевой задаче (1), (2).

Приближенные решения разыскиваются в виде линейных комбинаций сеточных базисных функций одного из четырех видов:

$$W = \sum_{i=1}^n W_i \varphi_i, \quad Q = \sum_{i=1}^n Q_i \varphi_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^n \beta_i \varphi_i, \quad M = \sum_{i=1}^n M_i \varphi_i, \quad (6)$$

где  $n$  – число узлов сетки,  $\varphi_i$  – сеточные базисные финитные функции,  $W_i, Q_i, \beta_i, M_i$  – неизвестные узловые значения.

Подстановка линейных комбинаций (6) в (5) приводит к ССУ вида:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \delta W_k \left\{ \sum_{i=1}^n Q_i a_{ik} + F_k \right\} = 0, & \sum_{k=1}^n \delta Q_k \left\{ \sum_{i=1}^n W_i a_{ik} - \sum_{i=1}^n \beta_i b_{ik} \right\} = 0, \\ \sum_{k=1}^n \delta \beta_k \left\{ \sum_{i=1}^n M_i a_{ik} + \sum_{i=1}^n Q_i b_{ik} \right\} = 0, & \sum_{k=1}^n \delta M_k \left\{ \sum_{i=1}^n \beta_i a_{ik} - \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^n M_i b_{ik} \right\} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$a_{ik} = \int_0^l \varphi'_i \varphi_k dx, \quad b_{ik} = \int_0^l \varphi_i \varphi_k dx, \quad F_k = \int_0^l f_k \varphi_k dx. \quad (8)$$

Система (7) предназначена для отыскания неизвестных узловых значений.

Применялись четыре вида аппроксимирующих функций: функции Куранта и три вида ОФФ [1]. Функции Куранта имеют вид:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1}) / h_{i-1}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ (x_{i+1} - x) / h_i, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases}$$

где  $h_i = x_{i+1} - x_i$  – шаг сетки.

Использовались ортогональные финитные функции первого типа [1]:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (\sqrt{2}-1)(x_{i-1}-x)/h_{i-1}, & x \in [x_{i-1}, x_{i-1} + h_{i-1}/2], \\ (\sqrt{2}+1)(x-x_{i-1})/h_{i-1} + 1, & x \in [x_{i-1} + h_{i-1}/2, x_i], \\ (\sqrt{2}-1)(x-x_i)/h_i + 1, & x \in [x_i, x_i + h_i/2], \\ (\sqrt{2}+1)(x_{i+1}-x)/h_i, & x \in [x_i + h_i/2, x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases}$$

второго типа [1]:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (x-x_{i-1})/h_{i-1}, & x \in [x_{i-1}, x_{i-1} + 3h_{i-1}/8] \cup \\ & \cup [x_{i-1} + 5h_{i-1}/8, x_i], \\ 1/2 - \sqrt{2} + (8\sqrt{2}-1)(x_{i-1}-x+h_{i-1}/2)/h_{i-1}, & x \in [x_{i-1} + 3h_{i-1}/8, x_{i-1} + h_{i-1}/2], \\ 1/2 - \sqrt{2} + (8\sqrt{2}+1)(x-x_{i-1}-h_{i-1}/2)/h_{i-1}, & x \in [x_{i-1} + h_{i-1}/2, x_{i-1} + 5h_{i-1}/8], \\ (x_{i+1}-x)/h_i, & x \in [x_i, x_i + 3h_i/8] \cup [x_i + 5h_i/8, x_{i+1}], \\ 1/2 + \sqrt{2} + (8\sqrt{2}-1)(x-x_i-h_i/2)/h_i, & x \in [x_i + 3h_i/8, x_i + h_i/2], \\ 1/2 + \sqrt{2} + (8\sqrt{2}+1)(x_i-x-h_i/2)/h_i, & x \in [x_i + h_i/2, x_i + 5h_i/8], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

и третьего типа [1]:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (\sqrt{41}-5)(x_i-x-h_{i-1})/(2h_{i-1}), & x \in [x_{i-1}, x_{i-1} + h_{i-1}/4], \\ 1/2 - (\sqrt{41}-1)(x_i-x-h_{i-1}/2)/(2h_{i-1}), & x \in [x_{i-1} + h_{i-1}/4, x_i - h_{i-1}/4], \\ 1 + (\sqrt{41}-5)(x_i-x)/(2h_{i-1}), & x \in [x_i - h_{i-1}/4, x_i], \\ 1 + (\sqrt{41}-5)(x-x_i)/(2h_i), & x \in [x_i, x_i + h_{i-1}/4], \\ \frac{1}{2} - (\sqrt{41}-1)(x-x_i-h_i/2)/(2h_i), & x \in [x_i + h_{i-1}/4, x_{i+1} - h_{i-1}/4], \\ (\sqrt{41}-5)(x-x_i-h_i)/(2h_i), & x \in [x_{i+1} - h_i/4, x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

Графики всех используемых финитных базисных функций представлены на рисунке 1.

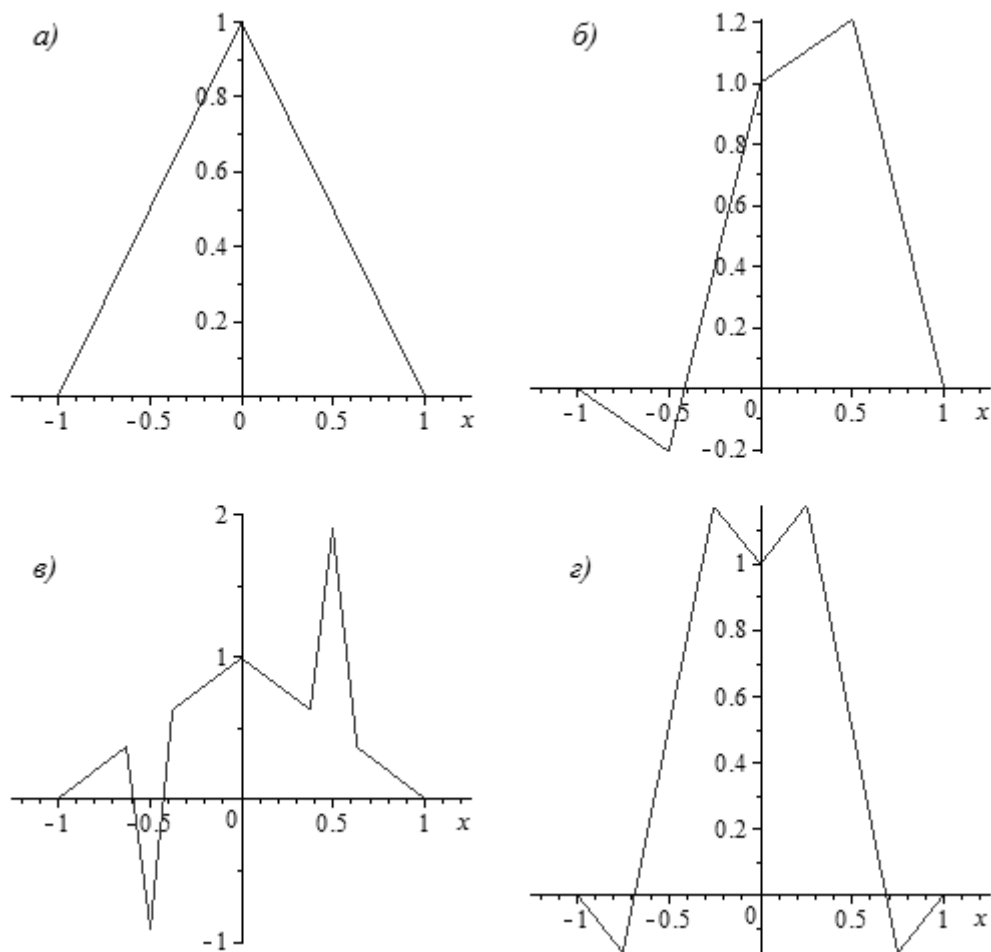


Рис. 1. Графики материнских базисных функций:  
 а) Куранта; б) ОФФ 1 типа; в) ОФФ 2 типа; г) ОФФ 3 типа

Подставляя базисные функции Куранта в  $a_{ik}$ ,  $b_{ik}$  (8), выписывая получающиеся ненулевые коэффициенты для  $k$ -й матричной строки глобальной матрицы, получаем локальную матрицу (4x12):

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc|cccc} \beta_{k-1} & M_{k-1} & Q_{k-1} & W_{k-1} & \beta_k & M_k & Q_k & W_k & \beta_{k+1} & M_{k+1} & Q_{k+1} & W_{k+1} \\ -\frac{h}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{h}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{h}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{h}{6EI} & 0 & 0 & 0 & -\frac{h}{3EI} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{h}{6EI} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{h}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{h}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{h}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right),$$

где  $h$  – шаг равномерной сетки; первая вспомогательная подчеркнутая строка не входит в состав матрицы и показывает соответствие столбцов матрицы компонентам глобальной матрицы узловых неизвестных.

В случае использования ОФФ любого типа  $b_{ik} = 0$  при  $i \neq k$  и число ненулевых элементов разреженной матрицы уменьшается в 1,5 раза:

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc|cccc} \beta_{k-1} & M_{k-1} & Q_{k-1} & W_{k-1} & \beta_k & M_k & Q_k & W_k & \beta_{k+1} & M_{k+1} & Q_{k+1} & W_{k+1} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{zh}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{zh}{3EI} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{zh}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right),$$

где  $z = 3$  для ОФФ первого и второго типов,  $z = 1$  для ОФФ третьего типа. Важно отметить, что несимметричность ОФФ первого и второго типов приведет к различным значениям коэффициентов глобальной системы на граничных узлах и окажет влияние на получаемый результат.

Особенность структуры полученной локальной матрицы состоит в том, что решение соответствующей глобальной ССУ для  $W$  может быть выполнено после процедуры исключения части неизвестных по схеме  $\beta \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow W$ . Полученный результат позволяет вычислить затем остальные узловые неизвестные методом обратной подстановки. Данные особенности были учтены при создании комплекса программ. Основные результаты расчетов представлены в таблице 1.

Таблица 1

| Число узлов             | 1 001   |           |           |           | 10 001    |           |           |           |
|-------------------------|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Тип функций             | Куранта | ОФФ тип 1 | ОФФ тип 2 | ОФФ тип 3 | Куранта   | ОФФ тип 1 | ОФФ тип 2 | ОФФ тип 3 |
| Погрешность $\beta$ , % | 1,3e-04 | 1,0e+00   | 5,0e-01   | 7,0e-04   | 1,3e-06   | 1,0e-01   | 5,0e-02   | 7,0e-06   |
| Погрешность $M$ , %     | 3,3e-05 | 1,0e-01   | 7,0e-02   | 1,0e-04   | 3,3e-07   | 1,0e-02   | 7,0e-03   | 1,0e-06   |
| Погрешность $Q$ , %     | 8,0e-14 | 7,0e-02   | 4,0e-02   | 1,1e-11   | 9,4e-12   | 7,0e-03   | 4,0e-03   | 2,6e-10   |
| Погрешность $W$ , %     | 1,2e-04 | 2,0e+00   | 8,0e-01   | 8,0e-04   | 1,2e-06   | 2,0e-01   | 8,0e-02   | 8,0e-06   |
| Время решения, сек.     | 9,2e-02 | 1,0e-01   | 2,0e-01   | 1,1e-01   | 3,4e-01   | 1,2e-01   | 1,2e-01   | 1,2e-01   |
| Число узлов             | 100 001 |           |           |           | 1 000 001 |           |           |           |
| Тип функций             | Куранта | ОФФ тип 1 | ОФФ тип 2 | ОФФ тип 3 | Куранта   | ОФФ тип 1 | ОФФ тип 2 | ОФФ тип 3 |
| Погрешность $\beta$ , % | 1,4e-08 | 1,0e-02   | 5,0e-03   | 5,5e-08   | 2,2e-09   | 1,0e-03   | 5,0e-04   | 8,3e-07   |
| Погрешность $M$ , %     | 3,7e-09 | 1,0e-03   | 7,0e-04   | 1,0e-08   | 1,6e-09   | 1,0e-04   | 7,0e-05   | 1,1e-08   |

Окончание табл. 1

|                     |         |         |         |         |         |         |         |         |
|---------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Погрешность $Q$ , % | 1,9e-10 | 7,0e-04 | 4,0e-04 | 2,5e-09 | 7,9e-10 | 7,0e-05 | 4,0e-05 | 2,1e-08 |
| Погрешность $W$ , % | 1,2e-08 | 2,0e-02 | 8,0e-03 | 3,2e-08 | 2,0e-09 | 2,0e-03 | 8,0e-04 | 4,5e-07 |
| Время решения, сек. | 2,8e+00 | 1,0e+00 | 1,0e+00 | 1,0E+00 | 3,4e+01 | 9,7e+00 | 9,7e+00 | 9,7e+00 |

Полученные результаты дают возможность сделать следующие выводы. Использование ОФФ всех трех типов в алгоритмах смешанных ВСМ позволяет получать приближенные решения как для кинематических функций (прогиба  $W$  и угла поворота сечения  $\beta$ ), так и для силовых функций (перерезывающей силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ ), высокой точности и одинаковой гладкости. Применение ОФФ третьего типа приводит к решениям, которые по точности превосходят решения, полученные с использованием ОФФ первого и второго типов, на 3 и более порядков, но в свою очередь несколько уступают по точности решениям, полученным с помощью функций Куранта, но не более чем на 1-2 порядка. Для сетки с 10 001 узлом узлов время решения при использовании ОФФ в 2,8 раза меньше, чем в случае с функциями Куранта. С увеличением числа узлов отмечается тенденция к возрастанию такой разницы времен решения.

В классических ВСМ, основанных на вариационном принципе Лагранжа, приближенные решения для  $Q$  и  $M$  имеют существенно более низкий порядок точности и более низкую гладкость по сравнению с  $\beta$  и  $W$  за счет дифференцирования последних. Таблица 1 показывает, что относительная погрешность момента и силы даже ниже, чем относительная погрешность прогиба и угла. Время решения задачи с помощью ВСМ, использующих ОФФ, значительно меньше, чем в случае использования неортогональных финитных функций Куранта.

Постановку задачи построения и сравнения вариационно-сеточных методов, связанных с использованием различных ОФФ, алгоритмы этих ВСМ дал Леонтьев В. Л. Программную реализацию и расчеты выполнил Лавыгин Д. С. Анализ результатов расчетов, тестирование и планирование корректировок программ по результатам их тестирования проводились совместно.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Леонтьев, В. Л. Ортогональные финитные функции и численные методы / В. Л. Леонтьев. – Ульяновск : УлГУ, 2003. – 178 с.

**В. Л. Леонтьев, А. В. Кочулимов** (г. Ульяновск)

## О ПРИМЕНЕНИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФИНИТНЫХ КУСОЧНО\_КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ НА ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ В ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

*Рассматривается вариационно-сеточный метод (ВСМ), связанный со смешанным вариационным принципом теории теплопроводности и с использованием ортогональных финитных функций на треугольных сетках. Приводятся результаты решений ряда краевых задач теплопроводности, в том числе для областей с криволинейными границами.*

*Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК №П1122, ГК № П2230.*

Среди множества методов, применяемых при геометрическом моделировании, в том числе при решении поставленных задач, одним из наиболее широко применяемых и эффективных является метод наименьших квадратов (МНК). Пусть поверхность задана функцией

$$u = u(x, y) \quad (\Omega \subset \nabla^2).$$

Алгоритм МНК в случае линейной аппроксимации состоит в следующем. Выбираются базисные функции  $\varphi_i(x, y)$ . Аппроксимация  $\tilde{u}$  ищется в виде линейной комбинации базисных функций  $\varphi_i(x, y)$  с неизвестными постоянными коэффициентами  $\alpha_i$

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i.$$

Коэффициенты  $\alpha_i$  определяются из системы линейных алгебраических уравнений, которая следует из условия минимума квадратичного функционала

$$J(\tilde{u}) = \int_{\Omega} (u - \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i)^2 d\Omega.$$

Варьируя функционал и приравнявая получившее выражение нулю

$$\delta J(\tilde{u}) = -2 \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N (u \varphi_j - \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i \varphi_j) \delta \alpha_j d\Omega = 0, \quad (1)$$

формируем систему уравнений

$$\int_{\Omega} (u \varphi_j - \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i \varphi_j) d\Omega = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (2)$$



из которой находятся значения  $\alpha_i$ . Такие системы уравнений разрешимы и имеют единственное решение, если функции, входящие в сумму (2.5.2), являются частью базиса и поэтому линейно-независимы. Однако матрица такой системы является, как правило, плохо обусловленной. Например, в случае, когда используются базисные функции  $x^i$ , появляется исключительно плохо обусловленная при  $N > 6$  матрица Гильберта. Классическим выходом отсюда является применение ортонормированных систем базисных функций, например функций Якоби, Чебышева 1-го и 2-го родов, Лежандра, Эрмита, Хаара. Однако применение ортогональных многочленов эффективно улучшает обусловленность только в случае аппроксимации функции одного аргумента или функции двух аргументов в прямоугольной области. Если область определения аппроксимируемой функции имеет криволинейные границы, то этот подход неприменим. Функции Хаара имеют низкую гладкость – содержат разрывы первого рода, и при построении на их основе с помощью тензорных произведений финитных базисных функций двух аргументов оказываются связанными с прямоугольными конечными носителями, что порождает дополнительные погрешности аппроксимации на криволинейной границе. Сплайны, широко применяемые в задачах аппроксимации, не являются ортогональными, для определения коэффициентов аппроксимирующих линейных комбинаций сплайнов приходится решать системы алгебраических уравнений (2), что на густых сетках приводит к значительным затратам машинного времени. Применение непрерывных кусочно-линейных и кусочно-квадратичных ОФФ, имеющих треугольные конечные носители, решает проблему плохой обусловленности за счет финитности и ортогональности функций и позволяет качественно аппроксимировать криволинейную границу области определения функции. Кроме того, ортогональность таких функций значительно снижает объем необходимых для получения результата арифметических операций, выполняемых на ЭВМ. Далее рассматривается использование в качестве базисных функций в МНК построенных на треугольных сетках ОФФ второй степени. В силу ортогональности  $\varphi_i(x, y)$  уравнение (1) можно переписать так:

$$\delta J(u) = -2 \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N (u \varphi_j - \alpha_j \varphi_j^2) \delta \alpha_j d\Omega = 0.$$

Таким образом, для отыскания значений коэффициентов  $\alpha_i$  не требуется решать систему уравнений. Выражения для них в силу линейной независимости вариаций этих коэффициентов имеют следующий вид:

$$\alpha_j = \int_{\Omega} u \varphi_j d\Omega / \int_{\Omega} \varphi_j^2 d\Omega.$$

За счет уменьшения необходимого для получения результата числа арифметических операций ЭВМ снижается время выполнения операций построения геометрической модели поверхности объекта, что является

особенно важным в случае решения задачи в режиме реального времени. При этом снижается объем необходимой оперативной памяти ЭВМ потому, что матрица системы алгебраических уравнений становится диагональной.

При построении аппроксимации поверхности с использованием ОФФ оценка ошибки аппроксимации дается формулой

$$\left\| f^* - \sum_{k=0}^N a_k \varphi_k \right\|^2 = \|f^*\|^2 - \sum_{k=0}^N (f^*, \varphi_k)^2$$

и является по сравнению с неортогональными функциями, в случае их использования в аппроксимации, оптимальной.

В первой задаче в качестве аппроксимируемой поверхности была выбрана седловая поверхность гиперболического типа (рис. 1), заданная уравнением:  $u(x, y) = x^2 - y^2$ .

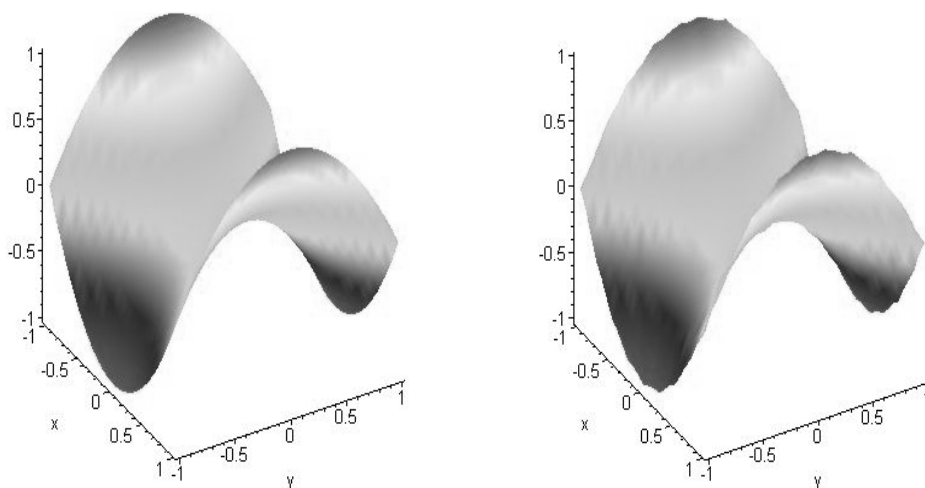


Рис. 1. Аппроксимируемая (слева) и аппроксимирующая поверхности

В качестве базисных функций в МНК выбраны в одном расчете классические финитные функции второй степени, в другом расчете – построенные ортогональные финитные функции второй степени на треугольных сетках различной густоты. На рис. 1 справа изображена аппроксимирующая поверхность, полученная с использованием кусочно-квадратичных ОФФ на треугольной сетке. Был проведен сравнительный анализ времени решения задачи на ЭВМ в зависимости от типа базисных функций. Результаты данного анализа приводятся на рисунке 2.

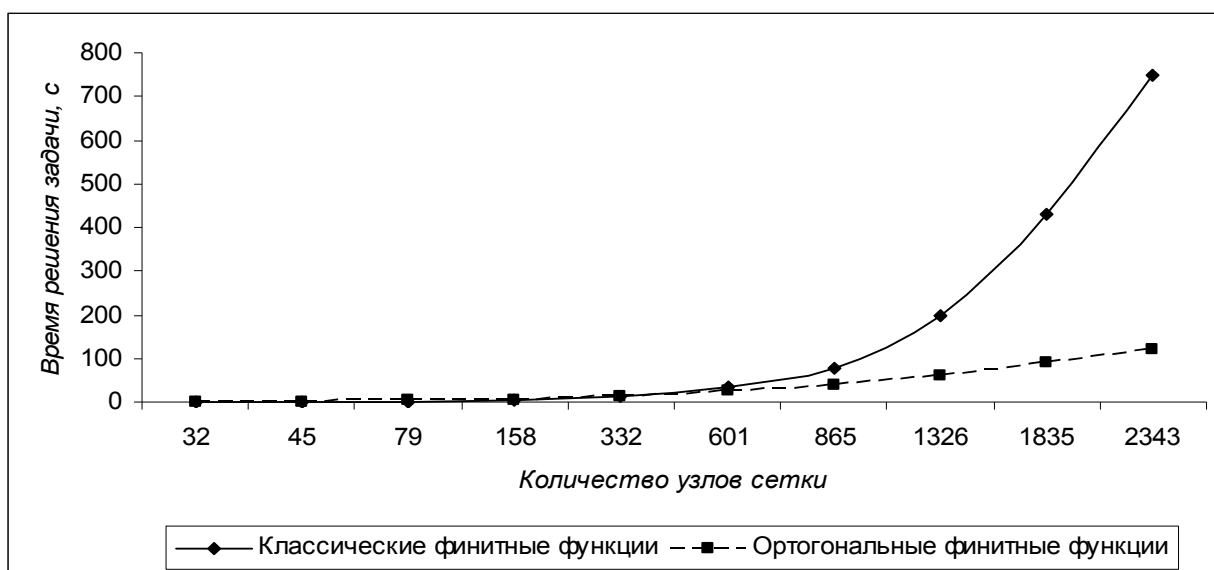


Рис. 2. Графики зависимости времени построения аппроксимации от количества узлов сетки

Во второй задаче аппроксимируемой поверхностью являлась цилиндрическая поверхность параболического типа (рис. 3), заданная уравнением:  $u(x, y) = 1 - x^2$ .

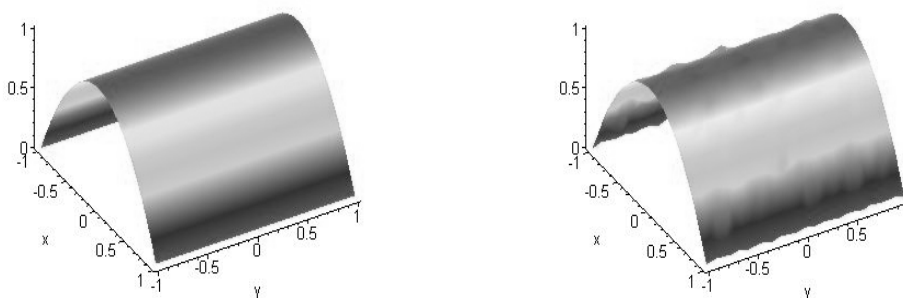


Рис. 3. Аппроксимируемая (слева) и аппроксимирующая поверхности.

Результат геометрического моделирования, связанный с использованием квадратичных ОФФ, показан на рис. 3 (справа). Графики зависимости времени построения аппроксимации от количества узлов сетки незначительно отличаются от соответствующих графиков рис. 2.

В третьей задаче в качестве аппроксимируемой поверхности рассматривалась поверхность (рис. 5), содержащая в качестве своих частей поверхности эллиптического, гиперболического и параболического типов. Поверхность в целом является четвертью верхней половины тора и задана функцией:  $u(x, y) = \sqrt{0,0625 - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 0,75\right)^2}$ , область определения которой – кольцо, имеет криволинейные границы (рис. 4).

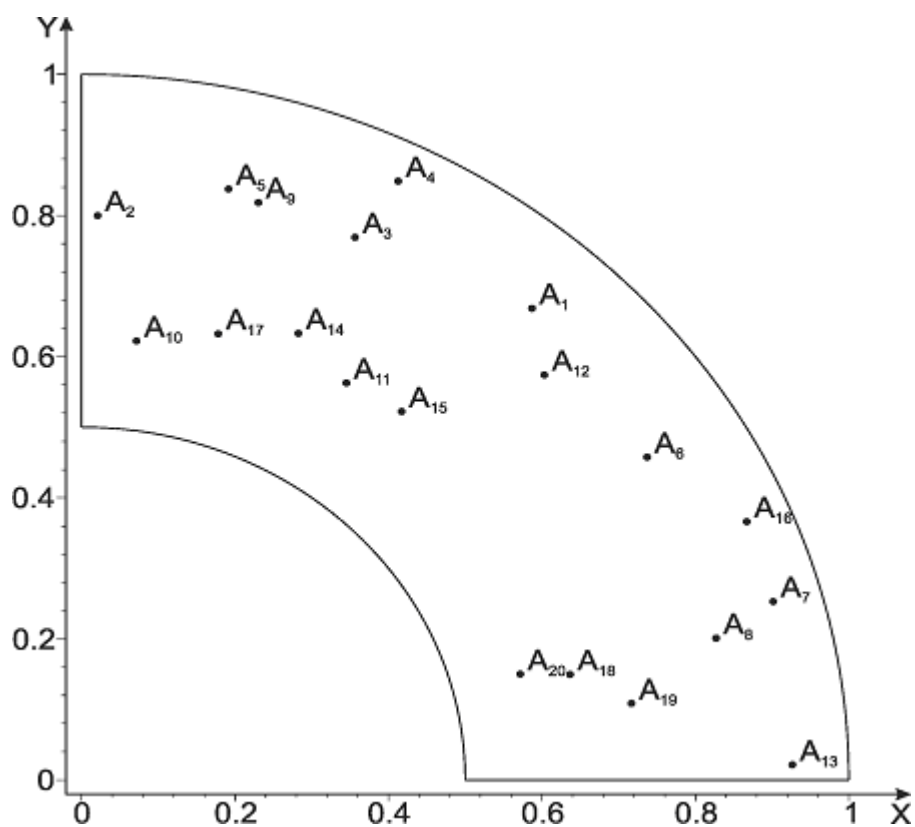


Рис. 4. Область определения функции  $u(x, y)$  и контрольные точки

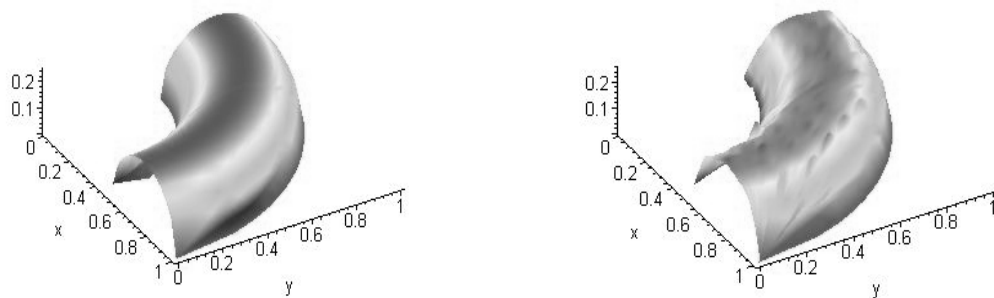


Рис. 5. Аппроксимируемая (слева) и аппроксимирующая поверхности

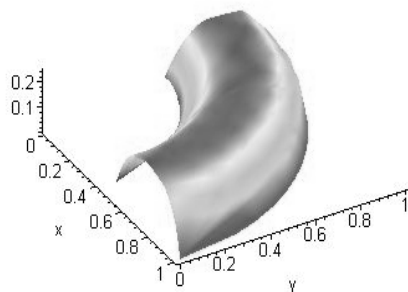


Рис. 6. Аппроксимирующая поверхность со срезанными локальными модифицирующими «пиками»

Результаты расчета показаны на рис. 5 (справа) и на рис. 6 – после удаления функций, модифицирующих классические финитные функции второй степени и делающие их ортогональными. На рис.7 даны графики зависимостей времени затрат ЭВМ на построение аппроксимаций при использовании классических финитных функций и при использовании ОФФ. Так же, как и в предыдущих задачах, в случае сложной поверхности смешанного типа на густых сетках применение ОФФ приводит к значительному сокращению вычислительных затрат.

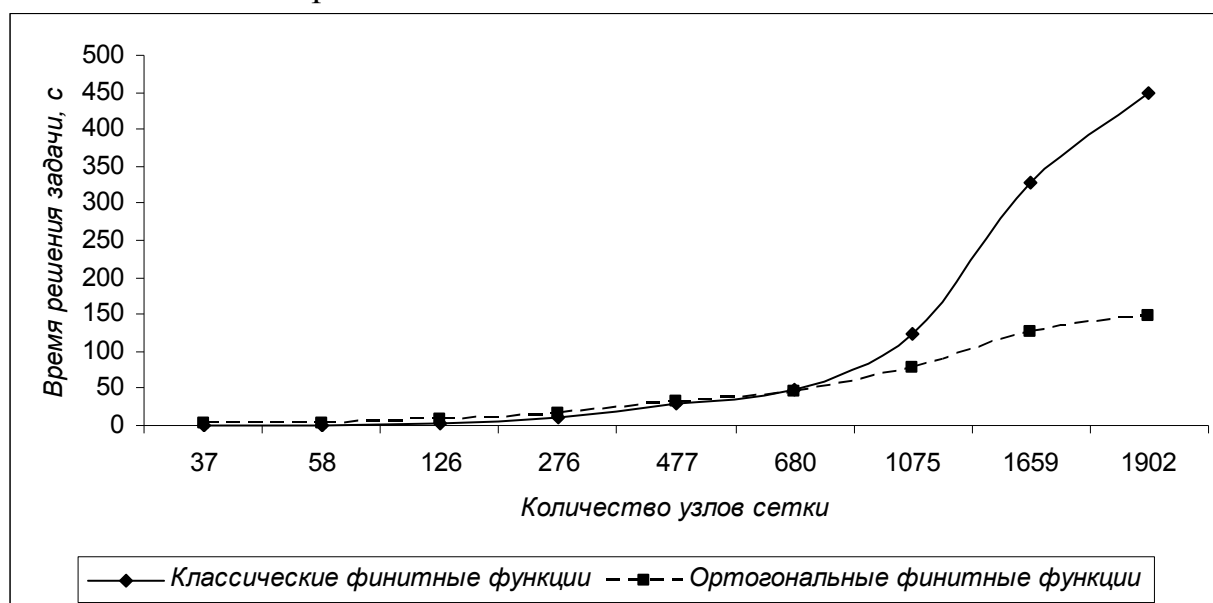


Рис. 7. Графики зависимости времени решения задачи от количества узлов сетки

В таблице 1 приводятся величины ( в %) относительных погрешностей  $\varepsilon$  аппроксимаций в некоторых точках рис. 4 в случае использования ОФФ второй степени или классических финитных функций второй степени в качестве базисных в МНК.

Таблица 1.

Точность аппроксимаций в точках  $A_i$

| Точки                  | Ортогональные     | Классические      |
|------------------------|-------------------|-------------------|
|                        | финитные функции  |                   |
|                        | $\varepsilon, \%$ | $\varepsilon, \%$ |
| $A_1 (0,5871; 0,6684)$ | 0,42554696        | 0,088678515       |
| $A_2 (0,0211; 0,7998)$ | 0,004860797       | 0,002192866       |
| $A_3 (0,3564; 0,7690)$ | 0,011388287       | 0,001062448       |
| $A_4 (0,4126; 0,8487)$ | 0,110194101       | 0,134447374       |
| $A_5 (0,1916; 0,8374)$ | 0,067701433       | 0,030068558       |
| $A_6 (0,7371; 0,4576)$ | 0,113252808       | 0,032071859       |

|                           |             |             |
|---------------------------|-------------|-------------|
| $A_7 (0,9012; 0,2531)$    | 0,081321383 | 0,083011529 |
| $A_8 (0,8270; 0,2012)$    | 0,011032682 | 0,003995422 |
| $A_9 (0,2304; 0,8183)$    | 0,013771344 | 0,004065603 |
| $A_{10} (0,0716; 0,6222)$ | 0,013857504 | 0,016115248 |
| $A_{11} (0,3451; 0,5627)$ | 0,032074341 | 0,007133885 |
| $A_{12} (0,6032; 0,5740)$ | 0,0158899   | 0,001814917 |
| $A_{13} (0,9290; 0,1136)$ | 0,046538552 | 0,077298203 |
| $A_{14} (0,2824; 0,6331)$ | 0,014434541 | 0,001156889 |
| $A_{15} (0,4173; 0,5222)$ | 0,012086063 | 0,006150548 |
| $A_{16} (0,8668; 0,3662)$ | 0,050230057 | 0,099949957 |
| $A_{17} (0,1782; 0,6324)$ | 0,003455436 | 0,001490947 |
| $A_{18} (0,6366; 0,1497)$ | 0,007773152 | 0,003836449 |
| $A_{19} (0,7166; 0,1087)$ | 0,000821503 | 0,000727102 |
| $A_{20} (0,5840; 0,1502)$ | 0,031844363 | 0,011118058 |

Как видно из сравнения графиков на рис. 2, 7, метод работает быстрее в случае использования классических финитных функций на редких сетках (сетках с небольшим числом узлов), на сетках же с большим числом узлов предпочтительнее использовать ортогональные финитные функции второй степени. Полученные данные на редких сетках объясняются тем, что на вычисление интегралов в случае ОФФ затрачивается большее время. Данные, полученные на густых сетках, объясняются тем, что при нахождении коэффициентов линейной комбинации, аппроксимирующей поверхность, в случае ортогональных финитных функций второй степени не требуется проводить решение системы линейных алгебраических уравнений. Данное обстоятельство снижает затраты оперативной памяти ЭВМ на вычисления и позволяет проводить визуализацию геометрических объектов в режиме реального времени. Применение ОФФ на треугольных сетках дает возможность аппроксимировать поверхность, определенную над областью с криволинейной границей, с высокой точностью с минимальными затратами машинного времени.

Использование МНК, как известно, за счет аппроксимации в интегральном смысле позволяет сглаживать локальные дефекты поверхности, вызванные, например, погрешностями измерений, и тем самым снижать влияние случайных ошибок измерений. В задаче сглаживания локального дефекта поверхности с использованием МНК и ОФФ второй степени на треугольных сетках рассматривалась поверхность заданная уравнением:  $u(x, y) = x^2 + y^2$ , с наложенным на нее в окрестности точки с координатами  $x = 0.5, y = 0.5$  локальным дефектом, заданным финитной функцией  $\varepsilon(x, y)$ :

$$\varepsilon(x, y) = \begin{cases} (x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2 - 0,0625^2, & \text{если } (x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2 \leq 0,0625^2, \\ 0, & \text{если } (x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2 \geq 0,0625^2. \end{cases}$$

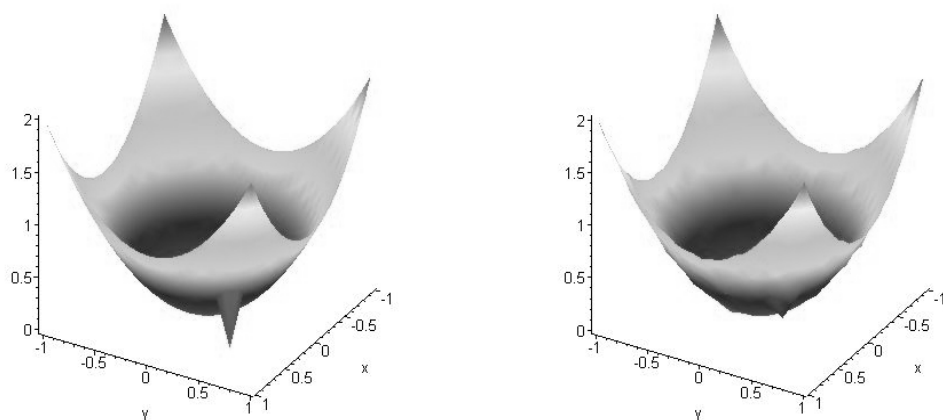


*Рис. 8. Поверхность с локальным дефектом (слева) и поверхность после сглаживания дефекта*

Поверхность со сглаженным локальным дефектом, полученная МНК с использованием ОФФ второй степени на треугольной сетке, представлена на рис. 8 справа.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Леонтьев В. Л. Ортогональные финитные функции и численные методы. – Ульяновск : УлГУ, 2003. – 178 с.

**В. Л. Леонтьев, И. С. Михайлов** (г. Ульяновск)

## О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ НАНООБЪЕКТОВ, О СВЯЗАННЫХ С НИМИ ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМАХ И ИХ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

*Рассматриваются математические модели нанобъектов, связанные с использованием теории многослойных анизотропных оболочек и ортогональных финитных функций. Излагаются основные принципы, заложенные в структуру созданного комплекса программ, предназначенного для построения и исследования математических моделей нанобъектов.*

*Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК №П1122.*

Геометрия многих нанобъектов и число атомов в них позволяют проводить аналогии между ними и оболочками. Например, углеродные нанотрубки представляют собой полые цилиндры, стенки которых состоят из многих атомов углерода. Предлагается проведение математического моделирования нанобъектов на основе теории многослойных анизотропных оболочек. Уравнения равновесия [1] анизотропной многослойной оболочки

$$\begin{aligned} \frac{\partial(BT_1)}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha} T_2 + \frac{\partial(AS_{21})}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta} S_{12} + ABk_1 N_1 &= -ABX, \\ \frac{\partial(AT_2)}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta} T_1 + \frac{\partial(BS_{12})}{\partial\alpha} + \frac{\partial B}{\partial\alpha} S_{21} + ABk_2 N_2 &= -ABY, \\ -(k_1 T_1 + k_2 T_2) + \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial(BN_1)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AN_2)}{\partial\beta} \right) &= -Z, \\ \frac{\partial(BM_1)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AM_{21})}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta} M_{12} - \frac{\partial B}{\partial\alpha} M_2 &= ABN_1, \\ \frac{\partial(AM_2)}{\partial\beta} + \frac{\partial(BM_{12})}{\partial\alpha} + \frac{\partial B}{\partial\alpha} M_{21} - \frac{\partial A}{\partial\beta} M_1 &= ABN_2, \\ S_{12} - S_{21} + M_{12} / R_1 - M_{21} / R_2 &= 0 \end{aligned}$$

и соотношения упругости [1]

$$\begin{aligned} T_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + K_{11}\chi_1 + K_{12}\chi_2, & T_2 &= C_{22}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_1 + K_{22}\chi_2 + K_{12}\chi_1, \\ S &= S_{12} = S_{21} = C_{66}\omega + K_{66}\tau, & M &= M_{12} = M_{21} = D_{66}\tau + K_{66}\omega, \\ M_1 &= D_{11}\chi_1 + D_{12}\chi_2 + K_{11}\varepsilon_1 + K_{12}\varepsilon_2, & M_2 &= D_{22}\chi_2 + D_{12}\varepsilon_1 + K_{22}\varepsilon_2 + K_{12}\varepsilon_1 \end{aligned}$$

позволяют учесть наличие многих слоев в нанотрубке, их взаимодействие и то, что нанотрубка является анизотропным объектом, обладающим в каждой



своей точке различными свойствами упругости в различных направлениях. Здесь  $T_i$ ,  $S_{ij}$ ,  $N_i$  – внутренние силы;  $M_i$ ,  $M_{ij}$  – изгибающие и крутящие моменты;  $\varepsilon_i$ ,  $\chi_i$ ,  $\omega$ ,  $\tau$  – деформации;  $C_{ij}$ ,  $K_{ij}$ ,  $D_{ij}$  – коэффициенты жесткости [1], учитывающие многослойность и свойства анизотропии оболочки;  $A$ ,  $B$  – коэффициенты Ляме криволинейной системы координат  $\alpha, \beta$ ;  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  – компоненты вектора внешней нагрузки;  $k_1$ ,  $k_2$  – главные кривизны, а  $R_1$ ,  $R_2$  – радиусы линий главных кривизн срединной поверхности оболочки. Использование теории анизотропных многослойных оболочек, учитывающей различие свойств нанотрубки по разным направлениям в каждой точке ее срединной поверхности, а также наличие слоев и их взаимодействие, создает дополнительные возможности повышения точности математических моделей нанотрубок. Модификация уравнений равновесия и соотношений упругости анизотропных оболочек связывается в этом случае с дополнительным учетом сил межатомного взаимодействия атомов соседних слоев многослойного нанообъекта, который проводится в интегральных выражениях через компоненты тензора напряжений как внутренних сил  $T_i$ ,  $S_{ij}$ ,  $N_i$ , так и изгибающих, крутящих моментов  $M_i$ ,  $M_{ij}$ .

Математическое моделирование сил межатомного взаимодействия и химических связей в молекулярной механике осуществляется посредством полуэмпирических и эмпирических межатомных потенциалов. Для математического моделирования взаимодействия атомов нанообъектов предлагается использование ортогональных функций с компактными носителями (ОФФ) [2]. Скалярное произведение двух соседних сеточных ОФФ [2, стр.13]

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (\sqrt{2} - 1)(x_{i-1} - x)/h, & x \in [x_{i-1}, x_{i-1} + h/2], \\ (\sqrt{2} + 1)(x - x_{i-1})/h + 1, & x \in [x_{i-1} + h/2, x_i], \\ (\sqrt{2} - 1)(x - x_i)/h + 1, & x \in [x_i, x_i + h/2], \\ (\sqrt{2} + 1)(x_{i+1} - x)/h, & x \in [x_i + h/2, x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

( $x_i$  – узлы сетки,  $h$  – шаг сетки) и  $\varphi_{i+1}(x)$  равно нулю, что соответствует равновесному положению двух соседних атомов в исследуемом нанообъекте. При смещении центра ОФФ  $\varphi_{i+1}(x)$ , соответствующего положению второго атома, от фиксированного  $x_{i+1}$  (положения равновесия второго атома) в направлении центра  $x_i$  ОФФ  $\varphi_i(x)$ , соответствующего положению равновесия первого атома, величина интеграла – скалярного произведения функций  $\varphi_i(x)$  и  $\varphi_{i+1}(x)$ , монотонно возрастает от нулевого значения до величины интеграла функции  $(\varphi_i(x))^2$ , взятого по всей области конечного носителя. При смещении центра ОФФ  $\varphi_{i+1}(x)$  из равновесного положения  $x_{i+1}$  второго атома в направлении от центра  $x_i$  ОФФ  $\varphi_i(x)$  величина интеграла – скалярного

произведения функций  $\varphi_i(x)$  и  $\varphi_{i+1}(x)$ , принимает отрицательные значения, вначале возрастаая по модулю, а затем уменьшаясь по модулю до нулевого значения. Такая зависимость величины интеграла – скалярного произведения функций  $\varphi_i(x)$  и  $\varphi_{i+1}(x)$ , от расстояния между центрами подвижных ОФФ  $\varphi_i(x)$  и  $\varphi_{i+1}(x)$  соответствует известной эмпирической зависимости силы межатомного взаимодействия и поэтому может быть использована для построения математических моделей нанообъектов, в которых каждому отдельному атому соответствует одна подвижная сеточная ОФФ (сама сетка при этом не меняется). Разработан комплекс программ, в котором реализованы численные алгоритмы, лежащие в основе предложенных подходов к моделированию нанообъектов, в том числе алгоритм построения потенциала сил межатомного взаимодействия. Данный комплекс программ является эффективным инструментом моделирования нанообъектов и их исследования.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. – 384 с.
2. Леонтьев В. Л. Ортогональные финитные функции и численные методы. – Ульяновск: УлГУ, 2003. – 178 с.

**В. К. Манжосов, Д. А. Новиков** (г. Ульяновск)

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЦИКЛАХ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

*Рассмотрена обобщенная динамическая схема движения виброударной системы, представленной в виде движущегося вдоль оси  $x$  тела, на которое действует переменное во времени возмущение с разрывами в моменты переключения сил. Представлены результаты моделирования виброударных систем с учетом соударений, разрывных функций силового воздействия на объект при различном характере периодического силового воздействия (знакопеременном, знакопостоянном, пульсирующем)*

Рассмотрена обобщенная динамическая схема движения виброударной системы (рис. 1), представленной в виде движущегося вдоль оси  $x$  тела  $m$ , на которое действует некоторое переменное во времени возмущение с разрывами в моменты переключения сил. При движении объекта происходят его удары с ограничителем, положение которого определяется координатой  $x_c$ .

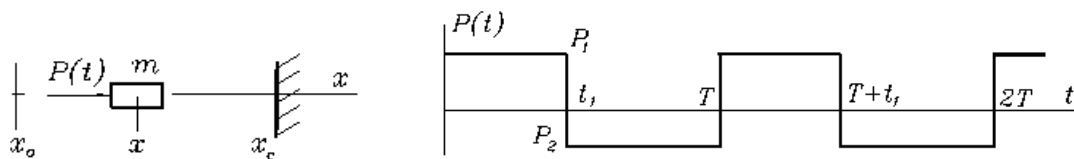


Рис. 1. Схема виброударной системы и диаграмма силы  $P(t)$

Математическая модель виброударной системы описывается уравнениями [1]:

$$m \cdot \ddot{x} = P(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0,$$

$$P(t) = \begin{cases} P_1, & (i-1)T \leq t < (i-1)T + t_1, \\ P_2, & (i-1)T + t_1 \leq t < i \cdot T, \end{cases} \quad i=1, 2, 3, \dots,$$

$$\text{при } x = x_c, \text{ если } \dot{x}^- > 0, \text{ то } \dot{x}^+ = -R \cdot \dot{x}^-,$$

где  $x_0$  – координата массы в начальный момент времени при  $t = t_0$ ;  $\dot{x}_0$  – скорость ударной массы в начальный момент времени;  $x_c$  – координата ограничителя;  $\dot{x}^-$  – скорость ударной массы перед столкновением с ограничителем;  $\dot{x}^+$  – скорость ударной массы после столкновения с ограничителем;  $R$  – коэффициент восстановления скорости при ударе.

Отыскание решений точными методами является весьма трудоемкой процедурой, ограничивающей область их приложений. Особенно

затруднительным становится их использование при необходимости учета дополнительных нелинейных факторов и усложнении характера возмущений. Эта процедура становится практически трудно выполнимой, если необходимо проанализировать переходные процессы в системе и выявить предельные циклы движения динамической системы.

Решение данной проблемы может быть достигнуто при разработке эффективных процедур моделирования данных динамических систем, основанных на использовании адекватных математических моделей, визуализации процесса, представления и качественной обработки результатов моделирования.

Разработан проблемно-ориентированный программный комплекс с принципиально новыми возможностями моделирования виброударных систем [2].

Программный комплекс позволяет при моделировании воспроизвести движение и скорость ударной массы  $m$  (рис. 2, а) с соударениями об ограничитель ( $x_c$  – координата ограничителя) со скоростью  $v^-$  под действием периодического силового воздействия  $P(t)$  с периодом  $T$  с одним переключением силы за период в моменты времени  $(t_1)_i$ .

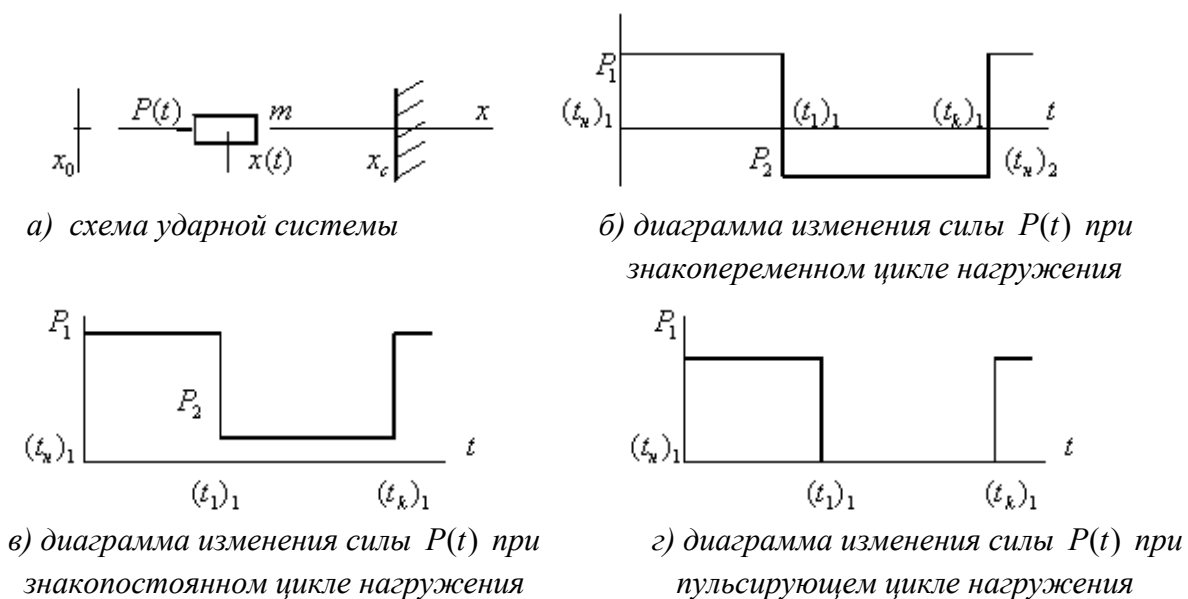


Рис. 2. Схема ударной системы и диаграммы изменения силы  $P(t)$

Перемещение и скорость ударной массы зависят от множества факторов, к числу которых можно отнести закон изменения силы  $P(t)$ , период действия силы  $T$ , время переключения силы за период  $(t_1)_i$ , начальное положение  $x_0$  и начальную скорость  $\dot{x}_0$  ударной массы, коэффициент восстановления  $R$  скорости ударника при ударе об ограничитель. Закон изменения силы  $P(t)$  определяет закон изменения ускорений ударника  $A_i = P_i(t) / m$ .

Рассмотрено влияние этих факторов на параметры движения. В качестве базовых приняты следующие параметры виброударной системы:  $x_0 = -0,5$  м;  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $T = 0,05$  с;  $t_1 = 0,035$  с;  $R = 0,3$ ; ускорение ударника на фазе действия силы  $P_1$  равно  $A_1 = 1000$  м/с<sup>2</sup>, на фазе действия силы  $P_2$  равно  $A_2 = -500$  м/с<sup>2</sup>.

Силовое воздействие  $P(t)$  может быть знакопеременным (рис. 2, б), знакопостоянным (рис. 2, в), пульсирующим (рис. 2, г).

**Знакопеременный цикл силы  $P(t)$ .** Данный тип силы характеризуется изменением знаков сил  $P_1$  и  $P_2$ , действующих на ударную массу. Ударная масса при действии этих сил имеет ускорения  $A_i = P_i / m$ , диаграмма которых воспроизводится при моделировании (рис. 3). Диаграмма  $A_i = A_i(t)$  при  $A_1 = 1000$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = -500$  м/с<sup>2</sup> приведена на рис. 3.

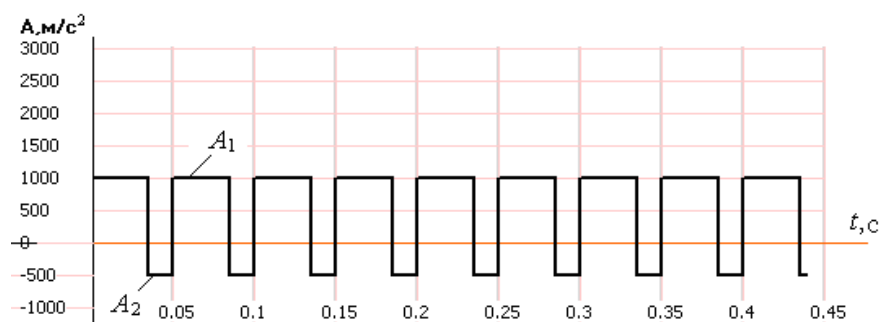


Рис. 3. Диаграмма изменения ускорений  $A_i$  при знакопеременном цикле силы  $P(t)$

На рис. 4 представлены результаты моделирования (диаграммы перемещения  $x$ , скорости  $v$  и ускорения  $A$  ударной массы в зависимости от времени  $t$ ) при следующих параметрах ударной системы:  $x_0 = -0,5$  м;  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $T = 0,05$  с;  $t_1 = 0,035$  с;  $R = 0,3$ ;  $A_1 = 1000$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = -500$  м/с<sup>2</sup>, положение ограничителя  $x_c = 0$ .

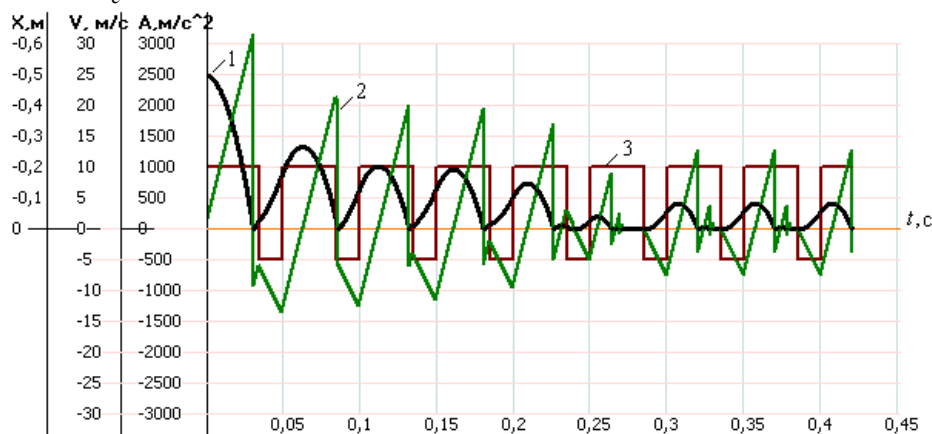


Рис. 4. Диаграммы перемещения  $x$  (диаграмма 1), скорости  $v$  (диаграмма 2) и ускорения  $A$  (диаграмма 3) ударной массы при  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $A_1 = 1000$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = -500$  м/с<sup>2</sup>,  $T = 0,05$  с,  $t_1 = 0,035$  с,  $R = 0,3$

Перемещение ударника начинается с  $x_0 = -0,5$  м, и как только ударник достигает ограничителя  $x = x_c = 0$ , происходит удар массы об ограничитель (диаграмма 2 на рис. 4). В тот же момент ударник приобретает отрицательную скорость в соответствии с условием  $x^+ = -R \cdot x^-$ .

Так как в момент нанесения первого удара не произошло переключения силы (рис. 4), ускорение массы до момента переключения силы остается положительным ( $A_i = A_1$ ) и скорость ударника начинает замедляться при движении от ограничителя.

При  $t = t_1$  происходит переключение силы со значения  $P_1$  на значение  $P_2$ , ускорение массы становится отрицательным ( $A_i = A_2$ ) и скорость ударника начинает увеличиваться при движении от ограничителя до момента времени  $t = T = 0,05$  с.

При  $t = T$  происходит переключение силы со значения  $P_2$  на значение  $P_1$ . Ускорение массы становится положительным ( $A_i = A_1$ ), скорость ударника замедляется до нуля при движении от ограничителя, а затем начинается движение в сторону ограничителя.

Второй удар происходит практически в тот момент, когда происходит переключение силы со значения  $P_1$  на значение  $P_2$ . В тот же момент ударник приобретает отрицательную скорость в соответствии с условием  $x^+ = -R \cdot x^-$  и далее движение ударника можно описывать по той же схеме, что при первом ударе.

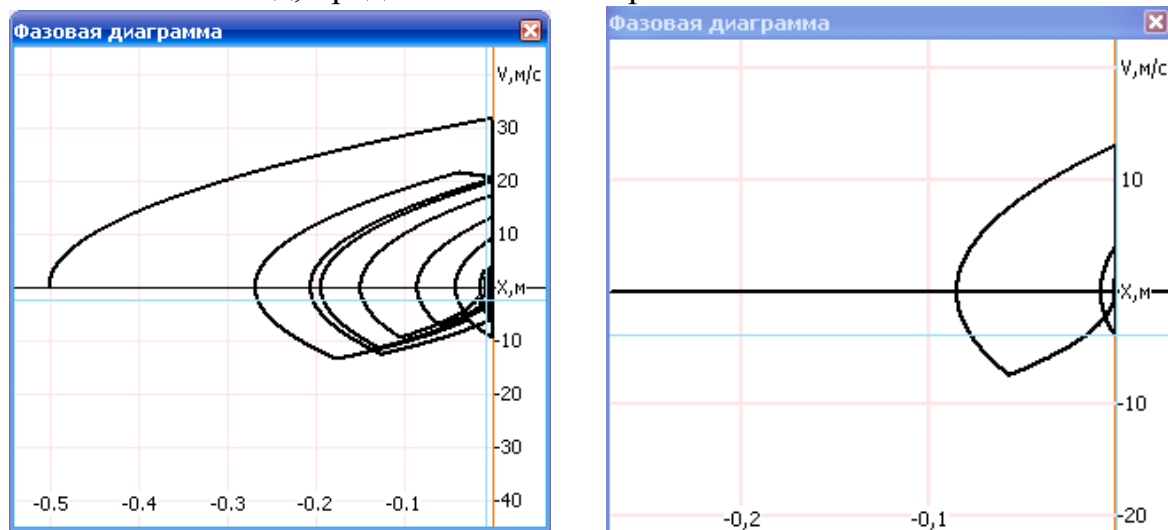
Заметим далее, что третий, четвертый и пятый удары происходят с постепенным смещением момента удара относительно времени переключения силы со значения  $P_1$  на значение  $P_2$ . Когда это смещение значительно, возникает явление дребезга (многократные удары массы об ограничитель с малой предударной скоростью).

Однако явление дребезга для рассматриваемых параметров системы стабилизирует ее движение. Дальнейшее движение ударника приобретает установившийся характер. Следует обратить внимание на то, что в установившемся режиме движения предударная скорость ударника существенно ниже, чем на первых циклах движения.

Рассмотрим диаграмму перемещения ударной массы (диаграмма 1, рис. 4). Движение ударника начинается с положения  $x_0 = -0,5$  м в направлении ограничителя. При каждом ударе движение происходит от ограничителя и в этом движении ударник останавливается, когда скорость его становится равной нулю. Расстояние от ограничителя, которое в этот момент имеет ударник, на первых ударах все сокращается и стабилизируется только при установившемся процессе движения. Размах колебаний ( $x_{\max} - x_{\min}$ ) при

установившемся движении существенно меньше начального расстояния между ударником и ограничителем.

Фазовые диаграммы  $v = v(x)$  переходного процесса и предельного цикла движения имеют вид, представленный на рис. 5.



а) фазовая диаграмма переходного процесса    б) фазовая диаграмма предельного цикла

Рис. 5. Фазовые диаграммы  $v = v(x)$  движения виброударной системы при  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ ,  
 $A_1 = 1000 \text{ м/с}^2$ ,  $A_2 = -500 \text{ м/с}^2$ ,  $T = 0,05 \text{ с}$ ,  $t_1 = 0,035 \text{ с}$ ,  $R = 0,3$

Анализируя диаграммы движения ударника при установившемся режиме движения (рис. 4), обратим внимание на то, что каждый цикл движения начинается с определенного фазового состояния виброударной системы, при котором в моменты времени  $(n-1)T$  на ударную массу действует сила  $P_1$  (соответственно, возникает ускорение  $A_1$ ), а в моменты времени  $(n-1)T + t_1$  на ударную массу действует сила  $P_2$  (соответственно, возникает ускорение  $A_2$ ).

Фазовое состояние системы в моменты времени  $(n-1)T + t_1$  более определенное, так как координата  $x$  и скорость  $v$  в эти моменты равны нулю.

В результате можно прийти к следующему выводу. Если начальное состояние виброударной системы будет таково, что при  $t = 0$  начальные координата  $x_0 = 0$  и скорость  $\dot{x}_0 = 0$ , то при  $A_1 = 1000 \text{ м/с}^2$ ,  $A_2 = -500 \text{ м/с}^2$ ,  $T = 0,05 \text{ с}$ ,  $t_1 = 0,035 \text{ с}$  и фазовом сдвиге  $t_\varphi$  силового воздействия вида

$$P(t) = \begin{cases} P_1, & (n-1)T - t_\varphi \leq t < (n-1)T - t_\varphi + t_1, \\ P_2, & (n-1)T - t_\varphi + t_1 \leq t < n \cdot T - t_\varphi, \end{cases} \quad n=1,2,3,\dots, \quad t \geq 0,$$

при  $t_\varphi = t_1$  можно выйти на установившийся режим движения ударной массы, максимально сократив переходной процесс.

Реализация этого вывода представлена на рис. 6.

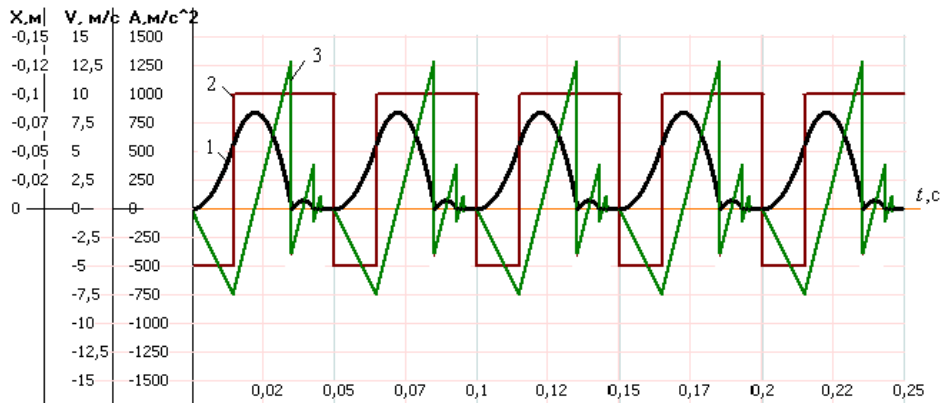


Рис. 6. Диаграммы перемещения  $x$  (диаграмма 1), скорости  $v$  (диаграмма 2) и ускорения  $A$  (диаграмма 3) ударной массы при  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $A_1 = 1000 \text{ м/с}^2$ ,  $A_2 = -500 \text{ м/с}^2$ ,  $T = 0,05 \text{ с}$ ,  $t_1 = 0,035 \text{ с}$ ,  $t_\varphi = t_1$ ,  $R = 0,3$

Движение ударника в начальный момент времени начинается при ускорении  $A_2$  и начальном состоянии  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ . Ударник движется от ограничителя, скорость его отрицательна. В моменты времени  $n \cdot T - t_\varphi$  происходит переключение силы на значение  $P_1$ , ударник движется с ускорением  $A_1$ , направление скорости меняется на противоположное.

Момент удара смещен относительно времени переключения силы со значения  $P_1$  на значение  $P_2$ . В результате возникает явление дребзга. Однако в моменты времени  $n \cdot T - t_\varphi + t_1$ , когда происходит это переключение, фазовое состояние системы возвращается в начальное ( $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ ). В результате каждый последующий цикл движения начинается с прежнего начального фазового состояния.

**Знакопостоянный цикл силы  $P(t)$ .** Данный тип силы характеризуется тем, что силы  $P_1$  и  $P_2$  одного знака. Ударная масса при действии этих сил имеет ускорения  $A_i = P_i / m$ , диаграмма которых воспроизводится при моделировании (рис. 7).

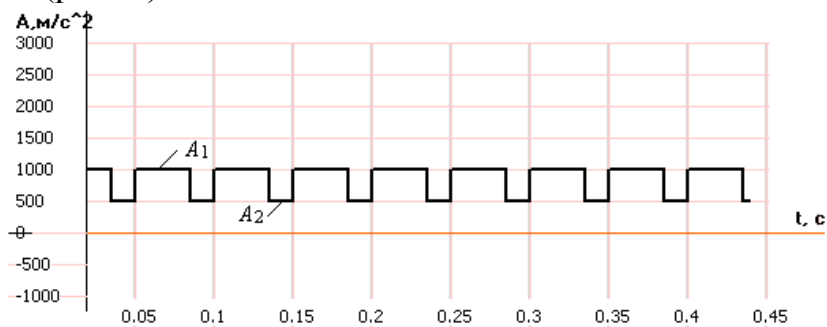


Рис. 7. Диаграмма изменения ускорений при знакопостоянном цикле силы  $P(t)$

На рис. 8 представлены результаты моделирования (диаграммы положения  $x$  и скорости  $v$  ударной массы в зависимости от времени  $t$ ) при



следующих параметрах ударной системы:  $x_0 = -0,5 \text{ м}$ ;  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $T = 0,05 \text{ с}$ ;  $t_1 = 0,035 \text{ с}$ ;  $R = 0,3$ ;  $A_1 = 1000 \text{ м/с}^2$ ,  $A_2 = 500 \text{ м/с}^2$ .

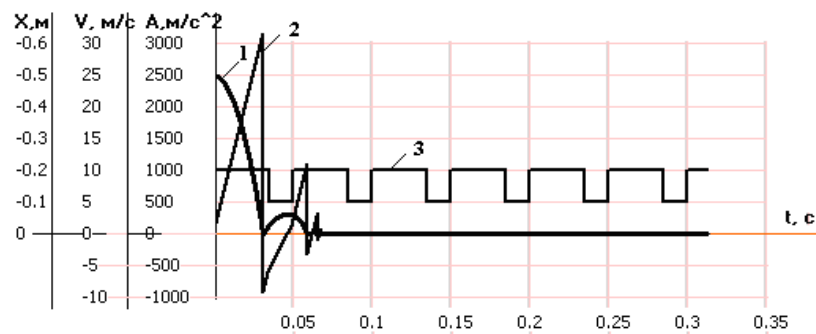


Рис. 8. Диаграммы перемещения  $x$  (диаграмма 1), скорости  $v$  (диаграмма 2) и ускорения (диаграмма 3) ударной массы при  $x_0 = -0,5 \text{ м}$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $A_1 = 1000 \text{ м/с}^2$ ,  $A_2 = 500 \text{ м/с}^2$ ,  $T = 0,05 \text{ с}$ ,  $t_1 = 0,035 \text{ с}$ ,  $R = 0,3$

Перемещение ударника начинается с  $x_0 = -0,5 \text{ м}$ , и как только ударник достигает ограничителя  $x = x_c = 0$ , происходит удар массы об ограничитель (диаграмма 2 на рис. 8). В тот же момент ударник приобретает отрицательную скорость в соответствии с условием  $x^+ = -R \cdot x^-$ .

Так как в момент нанесения первого удара не произошло переключения силы (рис. 8), ускорение массы до момента переключения силы остается положительным и скорость ударника начинает замедляться при движении от ограничителя.

При  $t = t_1$  происходит переключение силы со значения  $P_1$  на значение  $P_2$ , ускорение массы продолжает оставаться положительным и ударник в момент времени  $t = T = 0,05 \text{ с}$  практически останавливается.

При  $t = T = 0,05 \text{ с}$  происходит переключение силы со значения  $P_2$  на значение  $P_1$ . Ударник вновь разгоняется и наносит удар по ограничителю в момент времени  $0,05 < t_{c_2} < 0,05 + t_1$  со скоростью  $\dot{x}^-$  порядка 10 м/с. В тот же момент ударник приобретает отрицательную скорость  $x^+ = -R \cdot x^-$ .

Так как на ударник продолжает действовать сила  $P_1$ , ударник успевает вновь разогнаться и нанести удар по ограничителю.

Возникает явление дребезга, когда скорость ударника стремительно падает до нуля. Ударник залипает у ограничителя. Движение ударника прекращается. Может создаться впечатление, что знакопостоянный цикл изменения силы не обеспечивает периодического движения ударника.

Однако, изменив параметры системы (период силового воздействия  $T = 0,22 \text{ с}$ ; время переключения силы  $t_1 = 0,05 \text{ с}$ ;  $A_1 = 400 \text{ м/с}^2$ ,  $A_2 = 35 \text{ м/с}^2$ ), и при знакопостоянном цикле изменения силы можно добиться периодического

цикла движения. Результаты реализации такого цикла движения представлены на рис. 9.

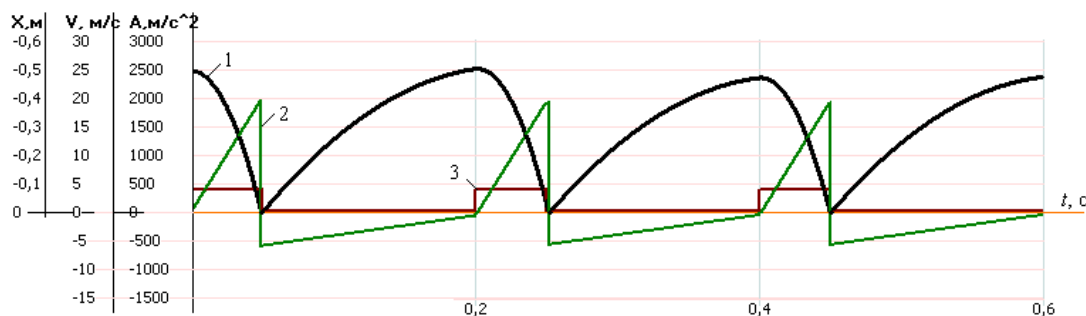


Рис. 9. Диаграммы перемещения  $x$  (диаграмма 1), скорости  $v$  (диаграмма 2) и ускорения  $A$  (диаграмма 3) ударной массы при  $x_0 = -0,5$  м,  $\dot{x}_0 = 0$ ,  
 $A_1 = 400$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = 35$  м/с<sup>2</sup>,  $T = 0,2$  с,  $t_1 = 0,05$  с,  $R = 0,3$

**Пульсирующий цикл силы  $P(t)$ .** Данный тип силы характеризуется тем, что на временных интервалах  $(n-1)T + t_1$  на ударную массу действует сила  $P_1$  (соответственно возникает ускорение  $A_1$ ), а на интервалах  $nT - t_1$  сила  $P_2 = 0$  (соответственно ускорение  $A_2 = 0$ ).

На рис. 10 представлены результаты моделирования (диаграммы положения  $x$  и скорости  $v$  ударной массы в зависимости от времени  $t$ ) при следующих параметрах ударной системы:  $x_0 = -0,5$  м;  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $T = 0,05$  с;  $t_1 = 0,035$  с;  $R = 0,3$ ;  $A_1 = 1000$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = 0$ .

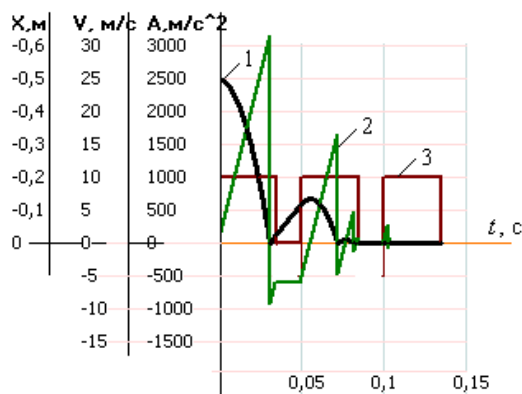


Рис. 10. Диаграммы перемещения  $x$  (диаграмма 1), скорости  $v$  (диаграмма 2) и ускорения  $A$  (диаграмма 3) ударной массы при  $x_0 = -0,5$  м,  $\dot{x}_0 = 0$ ,  
 $A_1 = 1000$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = 0$  м/с<sup>2</sup>,  $T = 0,05$  с,  $t_1 = 0,035$  с,  $R = 0,3$

Перемещение ударника начинается с  $x_0 = -0,5$  м, и как только ударник достигает ограничителя  $x = x_c = 0$ , происходит удар массы об ограничитель (диаграмма 2 на рис. 10). В тот же момент ударник приобретает отрицательную скорость в соответствии с условием  $x^+ = -R \cdot x^-$ .

Так как в момент нанесения первого удара не произошло переключения силы (рис. 10), ускорение массы до момента переключения силы остается положительным и скорость ударника начинает замедляться при движении от ограничителя.

При  $t = t_1$  происходит переключение силы со значения  $P_1$  на значение  $P_2 = 0$ . Ускорение ударника становится равным нулю, скорость ударника, будучи отрицательной, сохраняет постоянное значение до конца периода действия силы  $P(t)$ .

При  $t = T = 0,05$  с происходит переключение силы со значения  $P_2$  на значение  $P_1$ . Ударник вновь разгоняется и наносит удар по ограничителю в момент времени  $0,05 < t_{c_2} < 0,05 + t_1$  со скоростью  $\dot{x}^-$  порядка 17 м/с. В тот же момент ударник приобретает отрицательную скорость в соответствии с условием  $x^+ = -R \cdot x^-$ .

Так как на ударник продолжает действовать сила  $P_1$ , ударник успевает вновь разогнаться и нанести удар по ограничителю. К моменту переключения силы со значения  $P_1$  на значение  $P_2 = 0$  ударник еще не достиг ограничителя, скорость его близка к нулю и сохраняет ее до конца второго цикла ( $t = 2T$ ).

На ударник продолжает действовать сила  $P_1$ , ударник успевает вновь разогнаться и нанести удар по ограничителю. Возникает явление дребезга, когда скорость ударника стремительно падает до нуля. Ударник залипает у ограничителя. Движение ударника прекращается.

Пульсирующий цикл изменения силы при принятых параметрах виброударной системы не обеспечивает периодического движения ударника. Однако, изменив лишь время переключения силы  $t_1 = 0,02$  с, и при пульсирующем цикле изменения силы можно добиться периодического цикла движения. Результаты реализации такого цикла движения представлены на рис. 11.

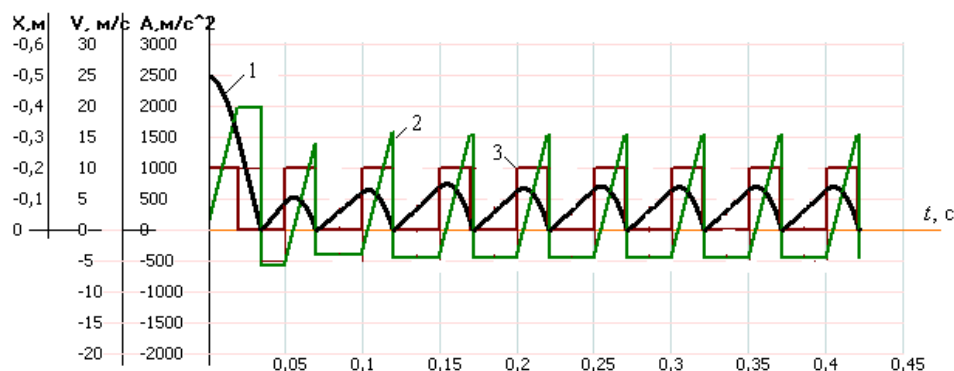


Рис.11. Диаграммы перемещения  $x$  (диаграмма 1), скорости  $v$  (диаграмма 2) и ускорения  $A$  (диаграмма 3) ударной массы при  $x_0 = -0,5$  м,  $\dot{x}_0 = 0$ ,  
 $A_1 = 1000$  м/с<sup>2</sup>,  $A_2 = 0$  м/с<sup>2</sup>,  $T = 0,05$  с,  $t_1 = 0,02$  с,  $R = 0,3$

Заметим, что при данных параметрах системы обеспечивается не только периодический характер движения, но и довольно значительное сокращение длительности переходного процесса.

Таким образом, показано, что периодический характер движения виброударной системы может быть обеспечен при знакопеременном, знакопостоянном и пульсирующем циклах силового воздействия на ударную массу. Необходимо лишь обеспечить определенные соотношения между параметрами системы и параметрами силового воздействия. Нахождение этих соотношений требует специальных исследований.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Манжосов В. К., Новиков Д. А. Моделирование режимов движения ударной системы при периодическом силовом воздействии // Известия Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика, 2010. – Т. 10, Вып. 4. – С. 65 – 71.

2. Манжосов В. К., Новиков Д. А. Проблемно-ориентированный программный комплекс для моделирования движения объекта при ударах о препятствие // Автоматизация процессов управления, 2011. – № 4 (26) – С. 86 – 91.

**В. К. Манжосов, И. А. Новикова** (г. Ульяновск)

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ НА ГРАНИЦЕ СОПРЯЖЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРЫ С УПРУГОЙ ПРОКЛАДКОЙ

*Рассмотрена задача о преобразовании продольной волны деформации на границе разнородных стержней с упругой прокладкой. Изложена процедура численного расчета и результаты моделирования процесса преобразования волны деформации в стержневой системе, определения энергии волны деформации и эффективности переноса энергии волны*

Вопрос о преобразовании волны деформации на границе сопряжения стержней требует решения при анализе технических систем, обеспечивающих передачу продольных волн деформаций к технологической среде по составному волноводу [1, 2]. Если в стержневой системе имеются сопряжения разнородных участков, то на границе сопряжения возникают процессы, связанные с отражением и трансформацией волн [3, 4, 5, 6].

Наиболее изучены эти процессы для границ, когда сопряженные сечения участков имеют одинаковые перемещения и скорости [1, 7, 8], а трансформация волн связана лишь с разной площадью поперечных сечений сопрягаемых участков и различием физико-механических свойств материалов этих участков. Менее изучены процессы преобразования волн деформаций в стержневой системе, имеющей такие сопряжения, когда перемещения сопряженных сечений различны из-за наличия между ними промежуточных деформируемых тел.

В данной работе рассмотрена задача о преобразовании продольной волны деформации на границе сопряжения участков стержневой системы неоднородной структуры с упругой прокладкой, свойства которой моделируются упругим элементом. Схема стержневой системы изображена на рис. 1.

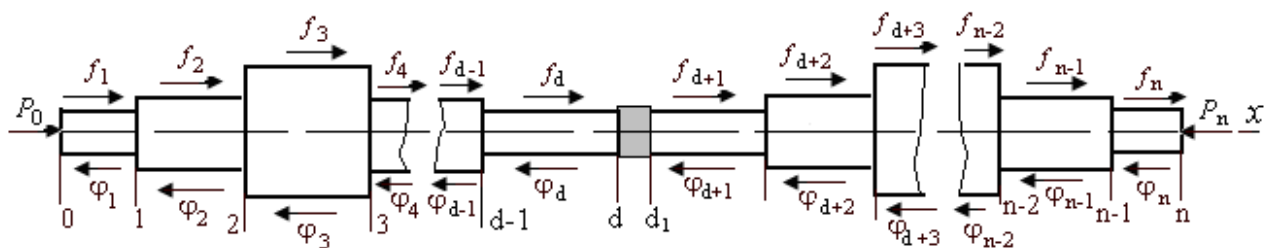


Рис. 1. Схема стержневой системы

Стержневая система представлена множеством последовательно сопряжённых участков (рис. 1). Границы участков стержневой системы обозначены последовательно как  $0, 1, 2, \dots, n$ .

По участкам стержневой системы распространяются прямые  $f_1, f_2, \dots, f_n$  и обратные  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  волны (аргументы функций  $f_1, f_2, \dots, f_n$  и  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  для краткости опущены). В сечениях  $x=0$  и  $x=x_n$  на стержневую систему действуют активная сила  $P_0$  и реакция технологической среды  $P_n$ .

Волновые процессы на участках стержневой системы описываются волновыми уравнениями вида

$$\frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_j^2} \frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j, \quad j=1,2,\dots,n, \quad (1)$$

где  $u_j(x,t)$  – перемещение поперечного сечения  $j$ -го участка, положение которого определяется координатой  $x$ ;  $t$  – время,  $a_j$  – скорость распространения волны в материале  $j$ -го участка,  $E_j$  – модуль упругости 1-го рода материала  $j$ -го участка,  $A_j$  – площадь поперечного сечения  $j$ -го участка,  $x_{j-1}$  и  $x_j$  – координаты границ  $j$ -го участка.

Перемещение произвольного поперечного сечения  $j$ -го участка представляется в виде суммы двух функций

$$u_j(x,t) = f_j(a_j t - x) + \varphi_j(a_j t + x), \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j, \quad (2)$$

где  $f_j(a_j t - x)$  – функция, описывающая параметры прямой волны, распространяющейся по направлению оси  $x$ ;  $\varphi_j(a_j t + x)$  – функция, описывающая параметры обратной волны, распространяющейся в противоположном направлении.

Продольная деформация в поперечных сечениях определяется как

$$\frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x} = -f'_j(a_j t - x) + \varphi'_j(a_j t + x), \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j. \quad (3)$$

Скорости поперечных сечений могут быть определены как

$$\frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t} = a_j f'_j(a_j t - x) + a_j \varphi'_j(a_j t + x), \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j.$$

Уравнения (1) дополнены начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} u_j(x,0) &= u_j(x), & \frac{\partial u_j(x,0)}{\partial t} &= v_j(x), \\ -E_j A_j \frac{\partial u_j(x_j,t)}{\partial x} + E_{j+1} A_{j+1} \frac{\partial u_{j+1}(x_j,t)}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $u_j(x)$  и  $v_j(x)$  – перемещения и скорости поперечных сечений  $j$ -го участка при  $t=0$ ,  $x_j$  – координаты сопряженных сечений  $j$ -го и  $(j+1)$ -го участков.

В сечениях  $x = x_d$  и  $x = x_{d_1}$  два разнородных участка разделены упругим элементом жесткостью  $k$ . На границу  $x = x_d$  со стороны участка  $d$  падает прямая волна, описываемая функцией  $f_d(a_d t - x_d)$ . Со стороны участка  $d + 1$  на границу  $x = x_{d_1}$  падает обратная волна, описываемая функцией  $\varphi_{d+1}(a_{d+1} t + x_{d_1})$ . Граничное условие для сопряженных сечений имеет вид

$$E_{d+1} A_{d+1} \frac{\partial u_{d+1}(x_{d_1}, t)}{\partial x} - k [u_{d+1}(x_{d_1}, t) - u_d(x_d, t)] = 0. \quad (5)$$

В сечении  $x = x_{d_1}$  формируются прямая волна  $f_{d+1}(a_{d+1} t - x_{d_1})$ , распространяющаяся в направлении оси  $x$  по участку  $d + 1$ . В сечении  $x = x_d$  формируется обратная волна  $\varphi_k(a_k t + x_k)$ , распространяющаяся по участку  $k$  в противоположном направлении.

### 1. Структура численного расчета

Функции  $f(at - x)$  и  $\varphi(at + x)$  являются неизвестными и требуют определения в зависимости от заданных начальных и граничных условий рассматриваемой задачи. Они обладают свойствами сохранять свои значения, если приращения  $\Delta x$  и  $\Delta t$  связаны равенством  $\Delta x = a \cdot \Delta t$ :

$$\begin{aligned} f[a(t + \Delta t) - (x + \Delta x)] &= f(at - x), \quad \Delta t = \Delta x / a, \\ \varphi[a(t + \Delta t) + (x - \Delta x)] &= \varphi(at + x), \quad \Delta x = a \cdot \Delta t. \end{aligned}$$

Параметры волн, сформированных на границах стержня, не меняются до тех пор, пока прямая волна  $f(at - x)$  не достигнет соседней справа границы стержня, а обратная волна деформации  $\varphi(at + x)$  соседней слева границы. Это позволяет представить стержневую систему в виде совокупности сопряженных конечных элементов, для которых внутри элемента аналитически можно определять волновые состояния для произвольного поперечного сечения, если известны параметры падающих и сформированных волн на границах элемента.

Учитывая (2) и (3) в крайних условиях (4) и (5), имеем

$$\begin{aligned} f''_{d+1}(a_{d+1} t - x_{d_1}) &= 2 \frac{k}{E_{d+1} A_{d+1}} \frac{a_d}{a_{d+1}} f'_d(a_d t - x_d) - \frac{k}{E_{d+1} A_{d+1}} \left(1 + \frac{1}{r_d}\right) f'_{d+1}(a_{d+1} t - x_{d_1}) + \\ &+ \varphi''_{d+1}(a_{d+1} t + x_{d_1}) - \frac{k}{E_{d+1} A_{d+1}} \left(1 + \frac{1}{r_d}\right) \varphi'_{d+1}(a_{d+1} t + x_{d_1}), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\varphi'_d(a_d t + x_d) = f'_d(a_d t - x_d) - \frac{E_{d+1} A_{d+1}}{E_d A_d} [f'_{d+1}(a_{d+1} t - x_{d_1}) - \varphi'_{d+1}(a_{d+1} t + x_{d_1})], \quad (7)$$

где  $r_d = \frac{E_d A_d}{E_{d+1} A_{d+1}} \frac{a_{d+1}}{a_d}$  – отношение волновых сопротивлений  $d$ -го и  $(d + 1)$ -го участков.

Решение уравнения (6) строится методом последовательных приближений. Учитывая, что

$$a_{d+1}f'_{d+1}(a_{d+1}t - x_{d_1}) = a_{d+1}f'_{d+1,0} + \int_{t_0}^t a_{d+1}^2 f''_{d+1}(a_{d+1}t - x_{d_1}) dt,$$

а также (6) для  $f''_{d+1}(a_{d+1}t - x_{d_1})$ , имеем для  $i$ -го приближения (в дальнейших выражениях опущены аргументы функций)

$$f'_{d+1,i} = f'_{d+1,0} + a_{d+1} \int_{t_0}^t \frac{k}{E_{d+1}A_{d+1}} \left[ 2 \frac{a_d}{a_{d+1}} f'_1 - \left( 1 + \frac{1}{r_d} \right) f'_{d+1,i-1} - \left( 1 + \frac{1}{r_d} \right) \varphi'_{d+1} + \frac{E_{d+1}A_{d+1}}{k} \varphi''_{d+1} \right] dt,$$

где  $f'_{d+1,0}$  – значение функции  $f'_{d+1}(a_{d+1}t - x_{d_1})$  при  $t = t_0$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  – число последовательных приближений.

Аппроксимируя падающие волны ступенчатыми участками, можем принять, что на рассматриваемом малом интервале времени  $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$   $f'_d = \text{const}$ ,  $\varphi'_{d+1} = \text{const}$ ,  $\varphi''_{d+1} = 0$ . В результате приходим к выражению

$$f'_{d+1,i} = f'_{d+1,0} + \frac{k}{E_{d+1}A_{d+1}} a_{d+1} \left[ 2 \frac{a_d}{a_{d+1}} f'_d - \left( 1 + \frac{1}{r_d} \right) f'_{d+1,i-1} - \left( 1 + \frac{1}{r_d} \right) \varphi'_{d+1} \right] \Delta t, \quad \Delta t = t - t_0.$$

Число последовательных приближений  $i = 1, 2, 3, \dots$  стремится к тому значению, пока не будет обеспечено неравенство

$$\frac{f'_{d+1,i} - f'_{d+1,i-1}}{f'_{d+1,i}} \leq \Delta \tilde{f},$$

где  $\Delta \tilde{f}$  – относительная малая величина, определяющая степень приближения.

После того, как будет найдено значение  $f'_{d+1}$ , используя (7), находим

$$\varphi'_d(a_d t + x_d) = f'_d(a_d t - x_d) - \frac{E_{d+1}A_{d+1}}{E_d A_d} \left[ f'_{d+1}(a_{d+1}t - x_{d_1}) - \varphi'_{d+1}(a_{d+1}t + x_{d_1}) \right].$$

При идеальном сопряжении элементарных участков для произвольной  $j$ -й границы идеального сопряжения, на которую падают волны  $f_j(a_j t - x_j)$  и  $\varphi_{j+1}(a_{j+1}t + x_j)$ , имеют место следующие равенства [4]

$$\begin{aligned} f'_{j+1}(a_{j+1}t - x_j) &= Q_{j,1} f'_j(a_j t - x_j) + R_{j,2} \varphi'_{j+1}(a_{j+1}t + x_j), \\ \varphi'_{j+1}(a_{j+1}t + x_j) &= Q_{j,2} \varphi'_{j+1}(a_{j+1}t + x_j) + R_{j,1} f'_j(a_j t - x_j), \end{aligned}$$

где  $Q_{j,1}$  – коэффициент прохождения через  $j$ -е граничное сечение падающей прямой волны  $f'_j(a_j t - x_j)$ ,  $Q_{j,2}$  – коэффициент прохождения через  $j$ -е граничное сечение падающей обратной волны  $\varphi'_{j+1}(a_{j+1}t + x_j)$ ,  $R_{j,1}$  – коэффициент отражения от  $j$ -го сечения падающей прямой волны  $f'_j(a_j t - x_j)$ ,  $R_{j,2}$  – коэффициент отражения от  $j$ -го сечения падающей обратной волны



$\varphi'_{j+1}(a_{j+1}t + x_j)$ ,  $a_j$ ,  $a_{j+1}$  – скорости распространения волн на  $j$ -м и  $j+1$ -м участках;  $x_j$  – координата  $j$ -го сечения.

Значения коэффициентов прохождения и отражения волн равны

$$Q_{j,1} = \frac{2r_{j,j+1}a_j}{(r_{j,j+1} + 1)a_{j+1}}, \quad Q_{j,2} = \frac{2r_{j+1,j}a_{j+1}}{(r_{j+1,j} + 1)a_j}, \quad R_{j,1} = \frac{(r_{j,j+1} - 1)}{(r_{j,j+1} + 1)}, \quad R_{j,2} = \frac{(r_{j+1,j} - 1)}{(r_{j+1,j} + 1)},$$

$$r_{j,j+1} = \frac{E_j A_j a_{j+1}}{E_{j+1} A_{j+1} a_j}, \quad r_{j+1,j} = \frac{E_{j+1} A_{j+1} a_j}{E_j A_j a_{j+1}},$$

где  $r_{j,j+1}$ ,  $r_{j+1,j}$  – отношение волновых сопротивлений соответствующих сопряженных участков.

Процедура численного решения реализована в соответствующих алгоритмах и программах. Проверка процедуры осуществлена при рассмотрении тестовой задачи преобразования волны прямоугольной формы на границе однородных полуограниченных стержней (рис. 2), разделенных упругим элементом жесткостью « $k$ », когда падающая волна  $f_1(a_1 t - 0) = \varepsilon$ , а обратная волна  $\varphi'_2(a_2 + 0) = 0$ .

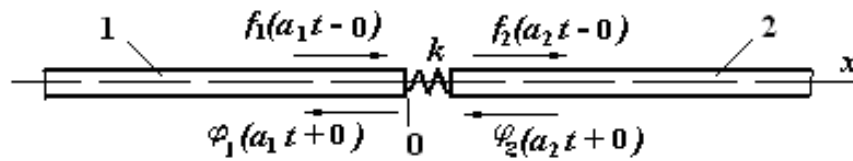


Рис. 2. Схема сопряжения полуограниченных стержней

Для тестовой задачи в работе [5] получено аналитическое решение для расчета параметров волн, формируемых в сечении  $x = 0$ :

$$\tilde{\varphi}'_1(a_1 t + 0) = \frac{r-1}{r+1} + \frac{2}{r+1} e^{-\tilde{k}(r+1)\frac{t}{\Delta T}}, \quad \tilde{\varphi}'_1(a_1 t + 0) = \frac{\varphi'_1(a_1 t + 0)}{\varepsilon}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\tilde{\varphi}'_1(a_1 t + 0) = -\frac{2}{r+1} \left[ 1 - e^{-\tilde{k}(r+1)\frac{T}{\Delta T}} \right] e^{-\tilde{k}(r+1)\frac{t-T}{\Delta T}}, \quad t \geq T,$$

где  $\Delta T = \frac{\Delta l_1}{a_1}$  – время прохождения волной единицы длины  $\Delta l_1$  первого

стержня,  $T$  – длительность падающей волны,  $\tilde{k} = \frac{k}{E_1 A_1} \Delta l_1$  – отношение

жесткости « $k$ » упругого элемента к продольной жесткости  $\frac{E_1 A_1}{\Delta l_1}$  единицы

длины первого стержня,  $r = \frac{E_1 A_1 a_2}{E_2 A_2 a_1}$  – отношение волновых сопротивлений.

Параметры волны, прошедшей через границу  $x = 0$ , определяются как

$$\tilde{f}_2'(a_2 t - 0) = 2 \frac{r}{r+1} \frac{a_1}{a_2} \left[ 1 - e^{-\tilde{k}(r+1) \frac{t}{\Delta T}} \right], \quad \tilde{f}_2'(a_2 t - 0) = \frac{f_2'(a_2 t - 0)}{\varepsilon}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

$$\tilde{f}_2'(a_2 t - 0) = 2 \frac{r}{r+1} \frac{a_1}{a_2} \left[ 1 - e^{-\tilde{k}(r+1) \frac{T}{\Delta T}} \right] e^{-\tilde{k}(r+1) \frac{t-T}{\Delta T}}, \quad t \geq T. \quad (9)$$

Для схемы сопряжения стержней, представленной на фиг. 2, энергия падающей на границу сопряжения волны деформации, описываемой функцией  $f_1'(a_1 t - 0)$ , равна

$$E_{f_1} = \int_0^T E_1 A_1 a_1 [f_1'(a_1 t - 0)]^2 dt. \quad (10)$$

Энергия прошедшей через границу сопряжения волны,

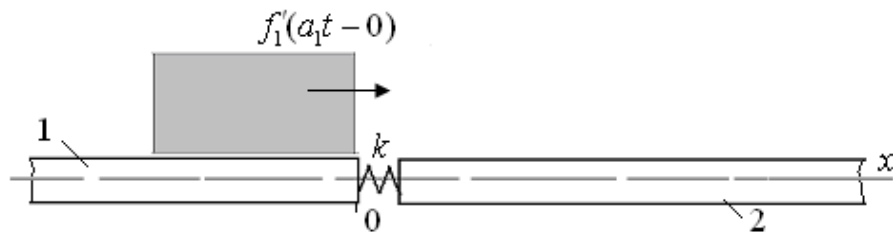
$$E_{f_2} = \int_0^t E_2 A_2 a_2 [f_2'(a_2 t - 0)]^2 dt. \quad (11)$$

Коэффициент эффективности передачи энергии во второй стержень определяется отношением

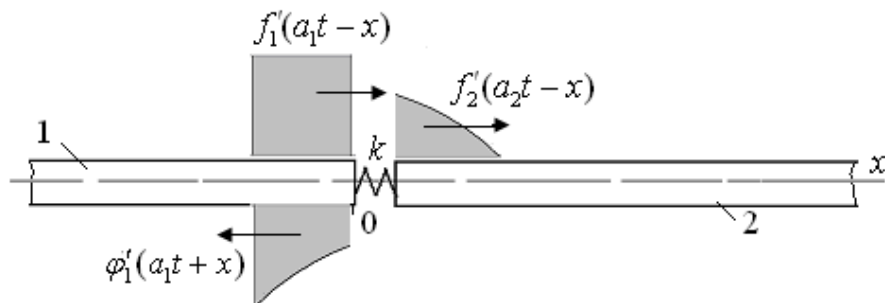
$$\eta = E_{f_2} / E_{f_1}. \quad (12)$$

## 2. Волны деформации, формируемые в сопряженных сечениях

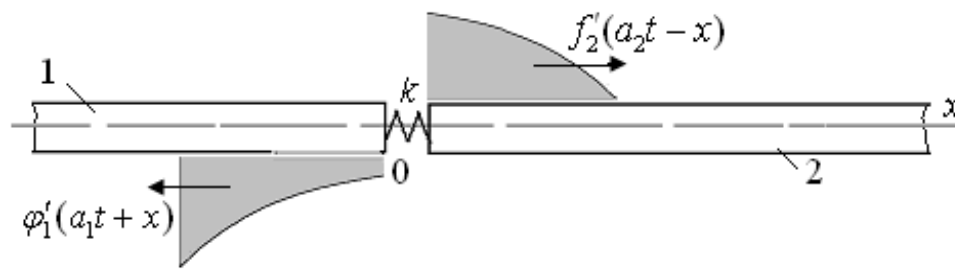
На рис. 3 представлены диаграммы падающей волны  $f_1'(a_1 t - x)$ , а также сформированных в сечении  $x = 0$  прямой волны  $f_2'(a_2 t - x)$  и обратной волны  $\varphi_1'(a_1 t + x)$  в различные моменты времени в диапазоне  $0 \leq t \leq 2T$ .



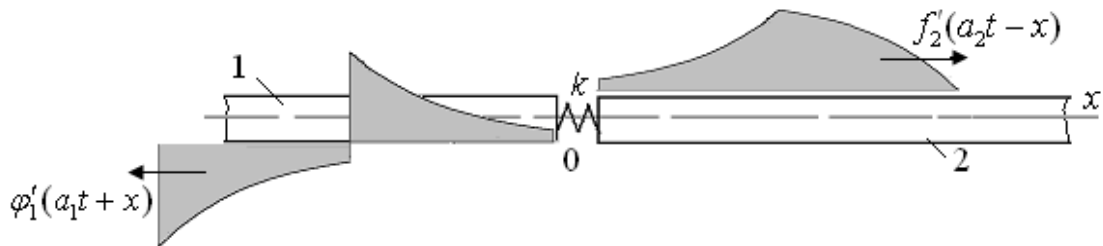
а) диаграмма волны  $f_1'$  при  $t = 0$



б) диаграммы волн  $f_1'$ ,  $f_2'$ ,  $\varphi_1'$  при  $t = T/2$



в) диаграммы волн  $f'_2$ ,  $\phi'_1$  при  $t = T$



г) диаграммы волн  $f'_2$ ,  $\phi'_1$  при  $t = 2T$

Рис. 3. Диаграммы прямых и обратных волн, формируемых на границе сопряжения

В табл. 1 представлены результаты расчета параметров трансформированной волны  $\tilde{f}'_2(a_2t - 0)$  на основе численного расчета при моделировании процесса и аналитического расчета по формулам (8), (9). Результаты моделирования в табл. 1 представлены для следующих параметров стержневой системы: падающая волна прямоугольной формы с относительной длительностью  $\tilde{T} = T / \Delta T = 1$ , отношение волновых сопротивлений  $r = 1$ , скорости распространения волн  $a_1 = a_2$ .

**Таблица 1**

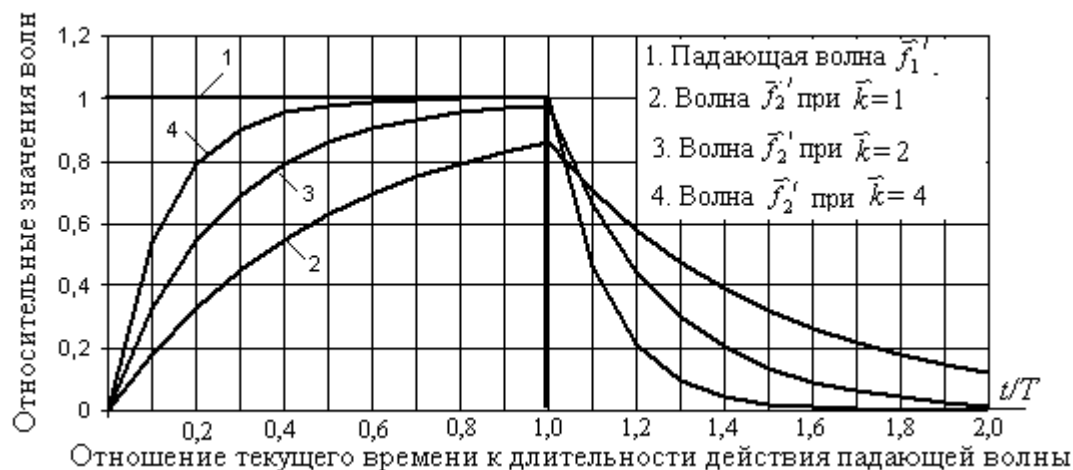
Результаты расчета параметров трансформированной волны  $\tilde{f}'_2(a_2t)$  на основе численного расчета при моделировании процесса и аналитического расчета по формулам (8), (9)

| Время,<br>$t / T$ | Падающая<br>волна,<br>$\tilde{f}'_1(a_1t)$ | Трансформированная волна $\tilde{f}'_2(a_2t)$ |               |                                   |               |
|-------------------|--------------------------------------------|-----------------------------------------------|---------------|-----------------------------------|---------------|
|                   |                                            | Расчет по<br>формулам<br>(8), (9)             | Моделирование | Расчет по<br>формулам<br>(8), (9) | Моделирование |
|                   |                                            | $\tilde{k} = 1$                               |               | $\tilde{k} = 2$                   |               |
| 0                 | 1,0                                        | 0                                             | 0             | 0                                 | 0             |
| 0,1               | 1,0                                        | 0,181                                         | 0,179         | 0,329                             | 0,324         |
| 0,2               | 1,0                                        | 0,329                                         | 0,327         | 0,550                             | 0,544         |
| 0,3               | 1,0                                        | 0,451                                         | 0,448         | 0,698                             | 0,692         |
| 0,4               | 1,0                                        | 0,550                                         | 0,547         | 0,798                             | 0,792         |
| 0,5               | 1,0                                        | 0,632                                         | 0,628         | 0,864                             | 0,859         |
| 0,6               | 1,0                                        | 0,698                                         | 0,695         | 0,909                             | 0,905         |
| 0,7               | 1,0                                        | 0,753                                         | 0,750         | 0,939                             | 0,935         |

|     |     |       |       |       |       |
|-----|-----|-------|-------|-------|-------|
| 0,8 | 1,0 | 0,798 | 0,795 | 0,959 | 0,956 |
| 0,9 | 1,0 | 0,834 | 0,832 | 0,972 | 0,970 |
| 1,0 | 1,0 | 0,864 | 0,862 | 0,981 | 0,980 |
| 1,1 | 0   | 0,707 | 0,707 | 0,658 | 0,662 |
| 1,2 | 0   | 0,579 | 0,580 | 0,441 | 0,447 |
| 1,3 | 0   | 0,474 | 0,476 | 0,296 | 0,302 |
| 1,4 | 0   | 0,388 | 0,390 | 0,198 | 0,204 |
| 1,5 | 0   | 0,318 | 0,320 | 0,133 | 0,138 |
| 1,6 | 0   | 0,261 | 0,263 | 0,089 | 0,093 |
| 1,7 | 0   | 0,213 | 0,216 | 0,059 | 0,063 |
| 1,8 | 0   | 0,175 | 0,177 | 0,040 | 0,042 |
| 1,9 | 0   | 0,143 | 0,145 | 0,027 | 0,029 |
| 2,0 | 0   | 0,117 | 0,119 | 0,018 | 0,019 |

Сопоставление значений, рассчитанных для тестовой задачи по разработанной процедуре численного расчета и по аналитическим зависимостям (8) и (9), показано их удовлетворительное совпадение.

На фиг. 4 приведены диаграммы, характеризующие изменение формируемой в сечении  $x=0$  прямой волны  $\tilde{f}_2'(a_2t-0)$  для различных значений относительной жесткости  $\tilde{k}$ . Заметим, что прошедшая через сечение  $x=0$  волна  $\tilde{f}_2'(a_2t-0)$  существенно отличается по форме от прямоугольной падающей волны. Она состоит из участка роста (передний фронт) и участка спада (задний фронт).



Фиг. 4. Диаграммы волн  $\tilde{f}_1'$  и  $\tilde{f}_2'$  для различных значений жесткости  $\tilde{k}$

Длительность переднего фронта волны соответствует длительности исходной падающей волны. Чтобы прошедшая через сечение волна обеспечила практически тот же уровень значений продольной силы, что и в падающей волне (порядка 0,99), необходимо, чтобы длительность падающей волны была

$$T > 4,6 \frac{\Delta T}{\tilde{k}(r+1)}.$$

Максимального по модулю значения продольная деформация в сечении  $x = 0$  второго стержня достигнет в момент времени  $t = T$ :

$$\left. \frac{\partial u_2(0, T)}{\partial x} \right|_{t=T} = -2 \frac{r}{r+1} \frac{a_1}{a_2} \varepsilon \left[ 1 - e^{-\tilde{k}(r+1) \frac{T}{\Delta T}} \right].$$

Продольная деформация в сечении  $x = 0$  первого стержня, возникающая в результате действия падающей волны  $f_1'(a_1 t - 0)$  постоянной интенсивности, равна

$$\left( \frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} \right)_{f_1} = -f_1'(a_1 t - 0) = -\varepsilon, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Коэффициент усиления продольной деформации при прохождении волны через границу  $x = 0$  оценим из отношения

$$\delta = \frac{\frac{\partial u_2(0, T)}{\partial x}}{\left( \frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} \right)_{f_1}} = 2 \frac{r}{r+1} \frac{a_1}{a_2} \left[ 1 - e^{-\tilde{k}(r+1) \frac{T}{\Delta T}} \right].$$

Если  $T / \Delta T$  заменить отношением

$$T / \Delta T = \frac{a_1 T}{a_1 \Delta T} = \frac{\lambda}{\Delta l_1} = \tilde{\lambda},$$

то коэффициент усиления

$$\delta = 2 \frac{r}{r+1} \frac{a_1}{a_2} \left[ 1 - e^{-\tilde{k}(r+1) \tilde{\lambda}} \right],$$

где  $\lambda$  – длина волны,  $\tilde{\lambda} = \lambda / \Delta l_1$  – отношение длины волны к единице длины стержня.

Чем больше относительная жесткость упругого элемента  $\tilde{k}$ , тем меньше величина слагаемого  $e^{-\tilde{k}(r+1) \tilde{\lambda}}$  и тем больше коэффициент усиления. При  $\tilde{k} \rightarrow \infty$  слагаемое  $e^{-\tilde{k}(r+1) \tilde{\lambda}} \rightarrow 0$ , а  $\delta \rightarrow 2 \frac{r}{r+1} \frac{a_1}{a_2}$ .

### 3. Эффективность передачи энергии через границу сопряжения

Если падающая волна имеет постоянную интенсивность  $f_1'(a_1 t - 0) = \varepsilon$ , то энергия падающей на границу сопряжения волны деформации из (10)

$$E_{f_1} = \int_0^T E_1 A_1 a_1 [f_1'(a_1 t - 0)]^2 dt = E_1 A_1 \varepsilon^2 a_1 T. \quad (13)$$

Энергия прошедшей через границу сопряжения волны из (11)

$$E_{f_2} = \int_0^t E_2 A_2 a_2 [f_2'(a_2 t - 0)]^2 dt = \int_0^T E_2 A_2 a_2 [f_2'(a_2 t - 0)]^2 dt + \int_T^t E_2 A_2 a_2 [f_2'(a_2 t - 0)]^2 dt.$$

Учитывая (8), найдем значение энергии, переданной во второй стержень в первой фазе движения системы, когда  $t = T$ :

$$(E_{f_2})_I = E_2 A_2 a_2 \left( 2 \frac{r}{r+1} \frac{a_1}{a_2} \varepsilon \right)^2 \int_0^T \left( 1 - e^{-\tilde{k}(r+1) \frac{t}{\Delta T}} \right)^2 dt =$$

$$= E_2 A_2 a_2 \left( 2 \frac{r}{r+1} \frac{a_1}{a_2} \varepsilon \right)^2 \frac{\Delta T}{2\tilde{k}(r+1)} \left( 2\tilde{k}(r+1) \frac{T}{\Delta T} + 4e^{-\frac{\tilde{k}(r+1)T}{\Delta T}} - e^{-2\frac{\tilde{k}(r+1)T}{\Delta T}} - 3 \right).$$

Значение энергии, переданной во второй стержень во второй фазе движения системы, когда  $t > T$ :

$$(E_{f_2})_{II} = E_2 A_2 a_2 \left( 2 \frac{r}{r+1} \frac{a_1}{a_2} \varepsilon \right)^2 \left[ 1 - e^{-\tilde{k}(r+1) \frac{T}{\Delta T}} \right]^2 \int_T^{t-T} \left( e^{-\tilde{k}(r+1) \frac{t-T}{\Delta T}} \right)^2 dt =$$

$$= E_2 A_2 a_2 \left( 2 \frac{r}{r+1} \frac{a_1}{a_2} \varepsilon \right)^2 \left[ 1 - e^{-\tilde{k}(r+1) \frac{T}{\Delta T}} \right]^2 \frac{\Delta T}{2\tilde{k}(r+1)} \left( 1 - e^{-2\tilde{k}(r+1) \frac{t-T}{\Delta T}} \right), \quad t > T. \quad (14)$$

Энергия прошедшей через границу сопряжения волны

$$E_{f_2} = E_2 A_2 a_2 \left( 2 \frac{r}{r+1} \frac{a_1}{a_2} \varepsilon \right)^2 \frac{\Delta T}{2\tilde{k}(r+1)} \left[ \left( 2\tilde{k}(r+1) \frac{T}{\Delta T} + 4e^{-\frac{\tilde{k}(r+1)T}{\Delta T}} - \right. \right.$$

$$\left. - e^{-2\frac{\tilde{k}(r+1)T}{\Delta T}} - 3 \right) + \left( 1 - e^{-\tilde{k}(r+1) \frac{T}{\Delta T}} \right)^2 \left( 1 - e^{-2\tilde{k}(r+1) \frac{t-T}{\Delta T}} \right) \right], \quad t > T. \quad (15)$$

Эффективность передачи энергии во второй стержень определится из (12) с учетом (15) и (13) как

$$\eta = \frac{E_2 A_2 a_2}{E_1 A_1 a_1} \left( 2 \frac{r}{r+1} \frac{a_1}{a_2} \varepsilon \right)^2 \frac{\Delta T}{2\tilde{k}(r+1)} \left[ \left( 2\tilde{k}(r+1) \frac{T}{\Delta T} + 4e^{-\frac{\tilde{k}(r+1)T}{\Delta T}} - \right. \right.$$

$$\left. - e^{-2\frac{\tilde{k}(r+1)T}{\Delta T}} - 3 \right) + \left( 1 - e^{-\tilde{k}(r+1) \frac{T}{\Delta T}} \right)^2 \left( 1 - e^{-2\tilde{k}(r+1) \frac{t-T}{\Delta T}} \right) \right], \quad t > T. \quad (16)$$

Максимальное количество энергии, переданное в стержень 2, может быть определено из условия, что при  $t \rightarrow \infty$  составляющая  $e^{-2\tilde{k}(r+1) \frac{t-T}{\Delta T}}$  в выражении (16) стремится к нулю. Тогда из (16)

$$\eta_{\max} = \frac{4r}{(r+1)^3} \cdot \frac{\Delta T}{2\tilde{k}T} \left[ \left( 2\tilde{k}(r+1) \frac{T}{\Delta T} + 4e^{-\frac{\tilde{k}(r+1)T}{\Delta T}} - e^{-2\frac{\tilde{k}(r+1)T}{\Delta T}} - 3 \right) + \left( 1 - e^{-\tilde{k}(r+1) \frac{T}{\Delta T}} \right)^2 \right].$$

Последнее равенство можно преобразовать к виду

$$\eta_{\max} = \frac{4r}{(r+1)^3} \cdot \frac{\Delta T}{\tilde{k}T} \left( \tilde{k}(r+1) \frac{T}{\Delta T} + e^{-\frac{\tilde{k}(r+1)T}{\Delta T}} - 1 \right).$$

Если отношение  $T / \Delta T$  заменить отношением  $T / \Delta T = \frac{a_1 T}{a_1 \Delta T} = \frac{\lambda}{\Delta l} = \tilde{\lambda}$ , то

$$\eta_{\max} = \frac{4r}{(r+1)^2} \cdot \left( 1 + \frac{e^{-\tilde{k}(r+1)\tilde{\lambda}} - 1}{\tilde{\lambda}\tilde{k}(r+1)} \right),$$

где  $\lambda$  – длина волны,  $\tilde{\lambda} = \lambda / \Delta l$  – отношение длины волны к единице длины стержня.

Эффективность передачи энергии во второй стержень зависит от относительной жесткости упругого элемента  $\tilde{k}$ , отношения волновых сопротивлений  $r$ , отношения длины волны к единице длины стержня  $\tilde{\lambda}$ .

Чем больше относительная жесткость упругого элемента  $\tilde{k}$ , тем меньше величина слагаемого  $\frac{e^{-\tilde{k}(r+1)\tilde{\lambda}} - 1}{\tilde{\lambda}\tilde{k}(r+1)}$ . При  $\tilde{k} \rightarrow \infty$  слагаемое  $\frac{e^{-\tilde{k}(r+1)\tilde{\lambda}} - 1}{\tilde{\lambda}\tilde{k}(r+1)} \rightarrow 0$ ,

а  $\eta_{\max} \rightarrow \frac{4r}{(r+1)^2}$ .

Предельная эффективность передачи энергии через границу сопряжения стержней равна  $\eta_{\text{пр}} = \frac{4r}{(r+1)^2}$ . Так как

$$\frac{\partial \eta_{\text{пр}}}{\partial r} = \frac{4}{(r+1)^2} - \frac{4r \cdot 2(r+1)}{(r+1)^4}, \quad (17)$$

то, приравнявая (17) к нулю, получим  $r+1-2r=0$ , откуда  $r=1$ .

Из последнего равенства следует, что максимум  $\eta_{\text{пр}}$  можно достичь, лишь при равенстве волновых сопротивлений сопряженных стержней.

Падающая волна  $f'_1(a_1 t - 0)$  при прохождении через сечение  $x=0$  трансформируется не только по форме и максимальному значению продольной деформации, но и по длине волны. При длительности действия падающей волны  $f'_1(a_1 t - 0)$ , равной  $T$ , длительность формирования волны  $f'_2(a_2 t - 0)$  в сечении  $x=0$  для полуограниченных стержней стремится к бесконечности.

Можно ввести понятие конечной длительности действия волны  $f'_2(a_2 t - 0)$ , ограничиваясь заданным уровнем энергии волны  $[(E_f)_\Pi]$  по отношению к максимально возможному уровню передачи энергии во второй фазе движения системы  $\max(E_f)_\Pi$ , когда  $t \rightarrow \infty$  и слагаемое  $e^{-2\tilde{k}(r+1)\frac{t-T}{\Delta T}}$  стремится к нулю. В этом случае

$$\max(E_{f_2})_{\Pi} = E_2 A_2 a_2 \left( 2 \frac{r}{r+1} \frac{a_1}{a_2} \varepsilon \right)^2 \left[ 1 - e^{-\tilde{k}(r+1) \frac{T}{\Delta T}} \right]^2 \frac{\Delta T}{2\tilde{k}(r+1)}. \quad (18)$$

Обозначим отношение  $\frac{[(E_{f_2})_{\Pi}]}{\max(E_{f_2})_{\Pi}} = [\eta_2]$ . Учитывая (14) и (18), находим

(полагая, что  $[\eta_2]$  будет достигнуто при  $t = T_1$ )

$$[\eta_2] = \left( 1 - e^{-2\tilde{k}(r+1) \frac{T_1 - T}{\Delta t}} \right) \text{ или } e^{-2\tilde{k}(r+1) \frac{T_1 - T}{\Delta t}} = 1 - [\eta_2].$$

Из последнего равенства следует, что

$$T_1 = -\frac{\Delta t}{2\tilde{k}(r+1)} \ln(1 - [\eta_2]) + T.$$

Если падающая волна деформации в первом стержне имеет продолжительность действия  $T$ , а прошедшую во второй стержень волну деформации мы ограничиваем длительностью  $T_1$ , то степень трансформации исходной волны по продолжительности равна

$$k_t = \frac{T_1}{T} = -\frac{\Delta t}{2\tilde{k}(r+1)T} \ln(1 - [\eta_2]) + 1.$$

Например, если  $[\eta_2] = 0,99$ , то  $k_t = \frac{T_1}{T} \approx \frac{2,3\Delta t}{\tilde{k}(r+1)T} + 1$ . Если  $[\eta_2] = 0,9$ , то

$$k_t = \frac{T_1}{T} \approx \frac{1,15\Delta t}{\tilde{k}(r+1)T} + 1.$$

Ограниченная длительность  $T_1$  волны деформации, прошедшей во второй стержень, всегда больше длительности падающей волны  $T$ . Длительность  $T_1$  тем больше, чем меньше относительная жесткость упругого элемента  $\tilde{k}$  и больше  $[\eta_2]$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алимов О. Д., Манжосов В. К., Еремьянц В. Э. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах. – М.: Наука, 1985. – 354 с.
2. Алимов О. Д., Дворников Л. Т., Еремьянц В. Э. и др. Исследование прохождения ударных импульсов по стержневой системе с участками разного волнового сопротивления // Физико-техн. проблемы разработки полезных ископаемых, 1973. – № 6. – С. 66 – 68.
3. Еремьянц В. Э., Невенчаный Ю. В., Писаренко Н. Г. Ударное нагружение оснащенных стержней. Фрунзе: Илим, 1987. – 165 с.
4. Манжосов В. К. Продольный удар. – Ульяновск, 2007. – 357 с.



5. Манжосов В. К., Новикова И. А. Преобразование волны деформации линейной формы на границе сопряжения стержней с упругим элементом // Вестник УлГТУ, 2008. – № 3. – С. 29 – 34.

6. Саруев Л. А., Слистин А. П., Авдеева А. И Передача энергии по ставу штанг при продольном импульсном воздействии. – Томск, 1995. – 6 с. – Деп. в ВИНТИ 29.11.95, № 3164-B95.

7. Дворников Л. Т., Жуков И. А. Продольный удар полукатеноидальным бойком. – Новокузнецк: СибГАУ, 2006. – 80 с.

8. Малков О. Б. Динамика стержневых систем с внутренними граничными поверхностями. – Омск, 2000. – 112 с.

# ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

*В работе рассматриваются интегральные представления голоморфных функций в терминах форм объема.*

В современной теории интегрирования на гладких многообразиях  $M$  в  $\mathbb{R}^m$  все интегралы второго рода могут быть записаны в виде  $\int_D f \Omega$ , где  $\Omega$  – форма объема на  $M$ , а  $f$  – некоторая функция на  $D \subset M$ . В теории функций нескольких комплексных переменных получены разнообразные интегральные представления (см. [1]). Их можно переписать в терминах форм объема.

1. Пусть  $\varphi_0 = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dx_{n+k}$  – фундаментальная квадратичная форма в  $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $(x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$  (см. [2], стр. 190). При помощи комплексификации  $J: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $J(x_1, \dots, x_{2n}) = (z_1, \dots, z_n) = z$ ,  $z_k = x_k + ix_{n+k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , перепишем  $\varphi_0$  в виде  $\varphi_0 = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n dz_k \wedge d\bar{z}_k$ ,  $\bar{z}_k = x_k - ix_{n+k}$ . Тогда

$$\frac{1}{m!} \varphi_0^{\wedge(m)} = \frac{1}{m!} \varphi_0 \wedge \dots \wedge \varphi_0 \quad (1)$$

$m$  раз является формой объема на  $m$ -мерных комплексных плоскостях в  $\mathbb{C}^n$  (см. [3], стр.382).

Пусть  $D$  – ограниченная область в  $\mathbb{C}^n$  и предположим, что граница  $M = \partial D$  – кусочно-гладкая, и

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z, \bar{z}) < 0\}, \quad (2)$$

где действительная функция  $\rho$  принадлежит классу  $C^{(2)}$  в окрестности  $\bar{D}$ , причем  $\text{grad } \rho \neq 0$  на  $M$ . Тогда вектору  $\text{grad } \rho(\zeta)$  на  $\mathbb{R}^{2n}$  соответствует вектор

$$\bar{\nabla}_\zeta \rho = \left( \frac{\partial \rho}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial \rho}{\partial z_n} \right) (\zeta), \quad \zeta \in M \text{ в } \mathbb{C}^n.$$

Отметим еще, что имеем ортогональное разложение (соответственно в евклидовой метрике  $\mathbb{R}^{2n}$  и эрмитовой метрике  $\mathbb{C}^n$ )

$$\mathbb{C}^n = T_\zeta M \oplus_{\mathbb{R}} \eta_\zeta = T_\zeta^{\mathbb{C}} \oplus_{\mathbb{C}} \eta_\zeta^{\mathbb{C}}, \quad (3)$$

где  $T_\zeta M$  – действительная касательная плоскость к  $M$  в точке  $\zeta \in M$ ;  $T_\zeta^{\mathbb{C}} M = T_\zeta M \cap J T_\zeta M$  – комплексная касательная плоскость к  $M$  в точке  $\zeta \in M$ ;  $\eta_\zeta$  – вещественная нормаль к  $M$  в точке  $\zeta \in M$ ;  $\eta_\zeta^{\mathbb{C}}$  – комплексная нормаль к  $M$  в точке  $\zeta \in M$  (см. [3]).

2. Рассмотрим форму объема

$$\Omega_M = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \dots \wedge dx_{2n} \quad (4)$$

на  $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ . Здесь как обычно символ  $\widehat{dx_k}$  обозначает, что дифференциал пропускается.

**Лемма.** Пусть  $M : \rho = 0, \bar{\nabla}_\zeta \rho \neq 0$  – действительная гиперповерхность в  $\mathbb{C}^n$ . Тогда форма объема на  $M$  имеет вид

$$\Omega_M = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{\mathbb{C}} \rho(\zeta)}{|\bar{\nabla}_\zeta \rho|} \wedge \varphi_0^{\wedge(n-1)} \quad (5)$$

Ориентации на  $M$  и  $D$  из (2) согласованы. Отметим, что  $d^{\mathbb{C}} = i(\bar{\partial} - \partial)$  – оператор комплексного дифференцирования.

*Доказательство.* ([3], стр.382, зад. 22) Без ограничения общности выбираем локальные координаты  $(x_1, z_2, \dots, z_n)$  в окрестности точки  $\zeta \in M$ . Тогда  $T_\zeta M = \{z \in \mathbb{C}^n : x_1 = 0\}$ . Теперь из (4) следует

$\Omega_M / T_\zeta M = -dx_1 \wedge \frac{1}{(n-1)!} \varphi_0^{\wedge(n-1)}$ , где  $\frac{1}{(n-1)!} \varphi_0^{\wedge(n-1)}$  является формой объема на  $T_\zeta^{\mathbb{C}} M = \{z \in \mathbb{C}^n : z_1 = 0\}$ .

Вычисления дают  $\frac{d^{\mathbb{C}} \rho(\zeta)}{|\bar{\nabla}_\zeta \rho|} = \frac{2i\bar{\partial}\rho(\zeta)}{|\bar{\nabla}_\zeta \rho|} = -(dx_1)(\zeta)$ . Таким образом,

получаем (5). Ввиду произвольности  $\zeta \in M$ , отсюда и вытекает равенство (5). Доказательство закончено.

Пусть  $\nu_\zeta$  – внешняя единичная нормаль к  $M$  в точке  $\zeta \in M$  и  $\langle u, v \rangle = (u, \bar{v}), u \in \mathbb{C}^n, v \in \mathbb{C}^n$ .

**Теорема 1.** Для любой функции  $f$ , голоморфной на  $D$  и непрерывной на  $\bar{D}$  справедлива формула

$$\int_M f(\zeta) \frac{\langle \nu_\zeta, \bar{\zeta} - \bar{z} \rangle}{|\zeta - z|^{2n}} \Omega_M = \begin{cases} \frac{2\pi^n}{(n-1)!} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \bar{D}. \end{cases} \quad (6)$$

Имеются и другие обозначения: [3], стр. 382, зад. 23.

Доказательство. Для  $n=1$  формула (6) переходит в интегральную формулу Коши. Поэтому пусть  $n > 1$ . Тогда применяя формулу Мартинелли-Бохнера [1], [3], имеем

$$\int_M f(\zeta) \omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}) = \begin{cases} f(z), z \in D, \\ 0, z \notin \bar{D}. \end{cases}$$

где  $\omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z})$  – ядро Мартинелли-Бохнера. Так как любая форма полной степени  $2n-1$  на вещественной гиперповерхности  $M \subset \mathbb{C}^n$  пропорциональна  $\Omega_M$ , то утверждение будет доказано, если вычислим коэффициент  $\lambda(\zeta, z)$  в представлении  $\omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}) = \lambda(\zeta, z) \Omega_M$ .

Пусть как обычно  $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n$ . Тогда

$$(-1)^{k-1} d\bar{\zeta}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\bar{\zeta}_k} \wedge \dots \wedge d\bar{\zeta}_n \wedge d\zeta = d\zeta_k \wedge \left( \prod_{j \neq k} d\bar{\zeta}_j \wedge d\zeta_j \right).$$

$$\text{Следовательно, } \omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^n \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}} d\zeta_k \wedge \left( \prod_{j \neq k} d\bar{\zeta}_j \wedge d\zeta_j \right).$$

Так как  $\partial|\zeta - z|^{2-2n} = (1-n) \sum_{k=1}^n \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}} d\zeta_k$ , то на  $T_\zeta M$  имеем

$$\sum_{k=1}^n \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}} d\zeta_k \wedge \left( \prod_{j \neq k} d\bar{\zeta}_j \wedge d\zeta_j \right) = \frac{(-1)^{n-1}}{1-n} \left( \frac{2}{i} \right)^{n-1} \frac{\partial}{\partial v_\zeta} |\zeta - z|^{2-2n} \wedge \frac{1}{(n-1)!} \varphi_0^{\wedge(n-1)}.$$

Дифференцируя по  $\zeta$  вдоль комплексной нормали  $\eta_\zeta^{\mathbb{C}}$ , получаем

$$\frac{\partial}{\partial v_\zeta} |\zeta - z|^{2-2n} = i(n-1) \frac{(v_\zeta, \zeta - z)}{|\zeta - z|^{2n}} \frac{\partial \rho(\zeta)}{|\bar{\nabla}_\zeta \rho|}.$$

Ввиду  $d^{\mathbb{C}}\rho/M = -2i\partial\rho/M$ , имеем

$$\omega(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \frac{(v_\zeta, \zeta - z)}{|\zeta - z|^{2n}} \frac{d^{\mathbb{C}}\rho(\zeta)}{|\bar{\nabla}_\zeta \rho|} \wedge \frac{1}{(n-1)!} \varphi_0^{\wedge(n-1)}.$$

Осталось применить лемму. Теорема доказана.

3. В заключение, обсудим некоторые перспективы об применения. В многомерном комплексном анализе имеем возможности описания интегральных представлениях типа Лере-Коши-Фанталпье-Андреоти-Норге и др.(см. [1], [3], [4]) в терминах форм объема. В кватернионном анализе (см. [5]) для гиперголоморфных функции кватернионного переменного получены аналоги интегральной теоремы Коши и интегральных представлений Мартинелли-Бохнера. В современном анализе Клиффорда (см. [6]) рассматриваются аналоги формулы Мартинелли-Бохнера. Интегральные представления в гиперкомплексном анализе на алгебрах (см. [7]) еще не изучены до конца и здесь имеем новые перспективы.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Айзенберг Л. А., Южаков А. П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. – Новосибирск: Наука, 1979.
2. Уэллс Р. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. – М.: Мир, 1976.
3. Шабат В. В. Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1976. – Т.2.
4. Кытманов А. М. Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения. – Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1992.
5. Nono K. Hyperholomorphic function of a quaternion variable // Bull. Fukuoka Univ. Educ. – Nat. Sci. q 1982 (1983), 32. – P. 21-37.
6. Sommen F. Martinelli-Bochner type formulae in complex Clifford analysis // Z. Anal. Und Anwend., 1987. – 6, № 1. – P. 75-82.
7. Apostolova L., Dimiev S., Marinov M., Stoev P. Problems in hypercomplex analysis over some matrix hypercomplex system // Applications on Math. In Engineering and Economics. – DMEE'11, Sozopol (2011), AIP conference Series, American Institute of Physics, 2011.

**П. К. Маценко** (г. Ульяновск)

## РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОТРАЖЕНИЕМ В СТАРШЕМ ЧЛЕНЕ

*Рассматривается на отрезке  $[-1,1]$  краевая задача для простейшего дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся типом отражения аргументом и простейшими распадающимися краевыми условиями.*

*Найдено распределение собственных значений краевой задачи и получены достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье по системе собственных функций.*

1. На отрезке  $[-1,1]$  рассмотрим краевую задачу, порожденную дифференциально-функциональным уравнением

$$y''(x) + ay''(-x) - \lambda y(x) = f(x) \quad (1)$$

и краевыми условиями

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (2)$$

Считаем, что  $f(x) \in L(-1,1)$ ,  $\lambda$  – комплексный параметр,  $a \neq \pm 1$  – некоторая константа; для определенности считаем, что  $|a| < 1$ . Задача подобного типа рассматривалась, в частности, в работе [1].

В уравнении (1) заменим переменную  $x$  на  $-x$ , получим уравнение

$$y''(-x) + ay''(x) - \lambda y(-x) = f(-x). \quad (3)$$

Затем в системе (1), (3) сделаем замену

$$y_1(x) = y(x) + y(-x), \quad y_2(x) = y(x) - y(-x), \quad (4)$$

сложим и вычтем уравнения системы; получим равносильную систему

$$\begin{cases} (1+a)y_1''(x) - \lambda y_1(x) = f_1(x), \\ (1-a)y_2''(x) - \lambda y_2(x) = f_2(x), \end{cases} \quad (5)$$

в которой  $f_1(x) = f(x) + f(-x)$ ,  $f_2(x) = f(x) - f(-x)$ .

Поскольку функция  $y_1(x)$  четна, а  $y_2(x)$  нечетна, краевые задачи для уравнений (5) можно решать только на отрезке  $[0,1]$ , а затем решение соответствующим образом продолжить на промежуток  $[-1,0)$ . При этом для функций  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  выполняются краевые условия

$$y_1'(0) = 0, \quad y_1(1) = 0, \quad (6)$$

$$y_2(0) = 0, \quad y_2(1) = 0. \quad (7)$$

Тогда решение (1), (2) с учетом формул (4) можно найти по формулам

$$\begin{aligned} y(x) &= 0,5 \cdot [y_1(x) + y_2(x)], & \text{если } x \geq 0, \\ y(x) &= 0,5 \cdot [y_1(-x) - y_2(-x)], & \text{если } x < 0. \end{aligned} \quad (8)$$

*Теорема 1.* Краевая задача (1), (2) имеет две последовательности собственных значений, распределенных по формулам

$$\lambda_k^{[1]} = -(1+a)\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)^2, \quad k = \overline{0, \infty}, \quad (9)$$

$$\lambda_k^{[2]} = -(1-a)\pi^2 k^2, \quad k = \overline{1, \infty}. \quad (10)$$

*Доказательство.* В уравнении (1) положим  $f(x) \equiv 0$ , тогда  $f_1(x) \equiv 0$ ,  $f_2(x) \equiv 0$ , и система (5) будет иметь общее решение

$$y_n(x) = \alpha_n \cdot ch\mu_n x + \beta_n \cdot sh\mu_n x, \quad n = 1, 2,$$

где  $\mu_1 = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1+a}}, \quad \mu_2 = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1-a}}, \quad 0 \leq \arg(\sqrt{\lambda}) < \pi, \quad \alpha_n, \beta_n$  – произвольные

константы. Но функция  $y_1(x)$  – четна,  $y_2(x)$  – нечетна, поэтому  $\alpha_2 = \beta_1 = 0$ . Значит, собственные функции краевой задачи (1), (2) должны иметь вид

$$y(x) = \frac{\alpha_1}{2} \cdot ch\mu_1 x + \frac{\beta_2}{2} \cdot sh\mu_2 x. \quad (11)$$

Используя краевые условия (2), получим систему уравнений для определения  $\alpha_1$  и  $\beta_2$ :

$$\frac{\alpha_1}{2} \cdot ch\mu_1 - \frac{\beta_2}{2} \cdot sh\mu_2 = 0, \quad \frac{\alpha_1}{2} \cdot ch\mu_1 + \frac{\beta_2}{2} \cdot sh\mu_2 = 0,$$

которая равносильна следующей системе:

$$\alpha_1 \cdot ch\mu_1 = 0, \quad \beta_2 \cdot sh\mu_2 = 0.$$

Из этой системы следует совокупность систем уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 \neq 0, \\ \beta_2 = 0, \\ ch\mu_1 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \beta_2 \neq 0, \\ sh\mu_2 = 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \alpha_1 \neq 0, \quad \beta_2 \neq 0, \\ ch\mu_1 = 0, \\ sh\mu_2 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Из первой системы совокупности (12) получим уравнение:  $e^{2\mu_1} + 1 = 0$ , из второй системы – уравнение:  $e^{2\mu_2} - 1 = 0$ . Решение первого уравнения дает собственные значения, распределенные по формуле (9), второго – по формуле (10). При этом собственные функции с точностью до постоянного множителя имеют вид соответственно

$$\varphi_k^{[1]}(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x, \quad k = \overline{0, \infty} \quad \text{и} \quad \varphi_k^{[2]}(x) = \sin \pi k x, \quad k = \overline{1, \infty}.$$

Отметим, что третья система совокупности (12) имеет непустое множество решений, если только  $\lambda_k^{[1]} = \lambda_n^{[2]}$  при некоторых натуральных  $k, n$ .

Это возможно в том случае, если  $\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}(0,5 + k) = n$  – целое. При этом

некоторые собственные значения будут иметь вторую кратность, а соответствующие собственные функции будут линейными комбинациями  $\varphi_k^{[1]}(x)$  и  $\varphi_n^{[2]}(x)$ .

2. Пусть  $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ , где  $E$  – единичный оператор, – резольвента оператора  $L$ , порожденного краевой задачей (1), (2). Пусть  $G_1(x, t, \lambda)$  и  $G_2(x, t, \lambda)$  – функции Грина краевых задач (5.1), (6) и (5.2), (7) соответственно. Легко видеть, что если  $\lambda$  не является собственным значением краевой задачи (1), (2), обе функции Грина существуют и находятся по формулам:

$$G_1(x, t, \lambda) = \frac{1}{1+a} \cdot \left[ \delta(x-t) \cdot \frac{sh\mu_1(x-t)}{\mu_1} - \frac{ch\mu_1 x}{ch\mu_1} \cdot \frac{sh\mu_1(1-t)}{\mu_1} \right],$$

$$G_2(x, t, \lambda) = \frac{1}{1-a} \cdot \left[ \delta(x-t) \cdot \frac{sh\mu_2(x-t)}{\mu_2} - \frac{sh\mu_2 x}{sh\mu_2} \cdot \frac{sh\mu_2(1-t)}{\mu_2} \right],$$

где  $\delta(x) = 1$  при  $x \geq 0$  и  $\delta(x) = 0$  при  $x < 0$ . Тогда для  $x \in [0, 1]$  будем иметь

$$y_n(x) = \int_0^1 G_n(x, t, \lambda) f_n(t) dt, \quad n = 1, 2. \quad (13)$$

Из формулы (8) с учетом (13) получаем представление резольвенты в виде

$$R_\lambda f(x) = \int_{-1}^1 R(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad (14)$$

где

$$R(x, t, \lambda) = \begin{cases} 0,5 \cdot [G_1(x, t, \lambda) + G_2(x, t, \lambda)], & \text{если } x, t \geq 0, \\ 0,5 \cdot [G_1(x, -t, \lambda) - G_2(x, -t, \lambda)], & \text{если } x \geq 0, t < 0, \\ 0,5 \cdot [G_1(-x, t, \lambda) - G_2(-x, t, \lambda)], & \text{если } x < 0, t \geq 0, \\ 0,5 \cdot [G_1(-x, -t, \lambda) + G_2(-x, -t, \lambda)], & \text{если } x, t < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Формула (14) означает, что  $R_\lambda$  – интегральный оператор; его ядро  $R(x, t, \lambda)$  назовем функцией Грина краевой задачи (1), (2).

**Теорема 2.** Если функция  $f(x)$  удовлетворяет краевым условиям (2) и  $f''(x) \in L(-1, 1)$ , то  $f(x)$  разлагается в ряд Фурье по системе собственных функций краевой задачи (1), (2).

*Доказательство.* Пусть  $\Lambda_\delta$  – комплексная  $\lambda$  – плоскость, из которой выброшены  $\delta$  – окрестности собственных значений краевой задачи (1), (2). Известно (см., например, [2, с. 93-97]), что в области  $\Lambda_\delta$  имеют место оценки

$$|G_n(x, t, \lambda)| \leq C_\delta \cdot |\lambda|^{-0,5}, \quad n = 1, 2, \quad (16)$$



где  $C_\delta > 0$  – некоторая константа, величина которой зависит от  $\delta$ . Тогда согласно представлению (15) функция Грина  $R(x, t, \lambda)$  имеет в области  $\Lambda_\delta$  ту же оценку (16).

Поскольку  $\lambda = 0$  не является собственным значением краевой задачи (1), (2), то, применив тождество Гильберта к  $g(x) = f''(x) + af''(-x)$ , получим:  $R_\lambda g(x) - R_0 g(x) = \lambda R_\lambda R_0 g(x)$ . Но  $R_0 g(x) = f(x)$ , поэтому

$$\frac{1}{\lambda} f(x) + R_\lambda f(x) = \frac{1}{\lambda} R_\lambda g(x).$$

В области  $\Lambda_\delta$  выберем последовательность  $\{\Gamma_n\}_{n=1}^\infty$  концентрических окружностей радиусов  $r_n$  с центром в точке  $\lambda = 0$  таких, что  $r_n \uparrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда

$$f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} R_\lambda f(x) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{1}{\lambda} R_\lambda g(x) d\lambda,$$

$$\left| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} R_\lambda f(x) d\lambda \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \frac{1}{|\lambda|} |R_\lambda g(x)| d|\lambda|. \quad (17)$$

Из формулы (14) с учетом оценки (16) для  $R(x, t, \lambda)$  следует оценка

$|R_\lambda g(x)| \leq C_\delta |\lambda|^{-0,5} \|f''(x) + af''(-x)\|_1$ , в которой  $\|\cdot\|_1$  – норма элемента в пространстве  $L(-1, 1)$ . Теперь из неравенства (17) получаем

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} R_\lambda f(x) d\lambda \right| = O(r_n^{-0,5}) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

В заключение отметим, что согласно [3, с. 11] интеграл  $\frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} R_\lambda f(x) d\lambda$  есть частичная сумма ряда Фурье по собственным функциям краевой задачи (1), (2).

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Платонов С. С. Разложение по собственным функциям для некоторых функционально-дифференциальных операторов // Тр. Петрозаводск. ун-та. Сер. матем. – 2004. – Вып. 11. – С. 15 – 35.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М: Наука, 1969. – 585 с.
3. Хромов А. П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов. – Современная математика. Фундаментальные исследования. – М.: изд-во МАИ, 2004. – Т. 10. – С. 3 – 163.

**Р. Ф. Мухутдинов** (г. Казань)

## ВЛИЯНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛА НА ВЫПУЧИВАНИЕ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ

*Рассматривается задача о выпучивании упругопластических полубесконечных стержней при продольном ударе, когда нагрузка на ударяемом торце мгновенно достигает своего максимального значения и остается постоянной. Учитывается процесс распространения продольной волны, при этом предполагается, что потеря устойчивости происходит при первом прохождении волны сжатия вдоль стержня. Для материала стержня принимается схема с линейным упрочнением. Рассмотрены четыре варианта граничных условий на ударяемом торце. Критические длины (гибкости) в зависимости от приложенного напряжения находятся по статическому критерию. Результаты решения задач представлены в виде таблицы.*

**Постановка задачи.** Интерес к поведению элементов конструкций из ортотропных материалов усилился в связи с широким применением композиционных материалов при изготовлении различных элементов строительных и машиностроительных конструкций. В данной работе исследуется выпучивание ортотропных цилиндрических оболочек переменной толщины при продольном ударе абсолютно твердым телом. Считается что «отскок» тела и повторные удары отсутствуют. Начало правой системы координат  $Oxuz$  расположено на левом торце оболочки, воспринимающем удар. Ось  $Ox$  направлена вправо, параллельно оси оболочки, ось  $Oz$  в сторону внешней нормали к поверхности оболочки. Оболочка лежит в области  $x > 0$ . Удар в момент времени  $t=0$  наносится по сечению с координатой  $x=0$ . Общий вид срединной поверхности оболочки показан на рис.1. Характер изменения толщины оболочки по длине показан на рис.2. Главные оси ортотропии материала совпадают с направлением осей координат. Данное исследование является продолжением работ [1]-[3].

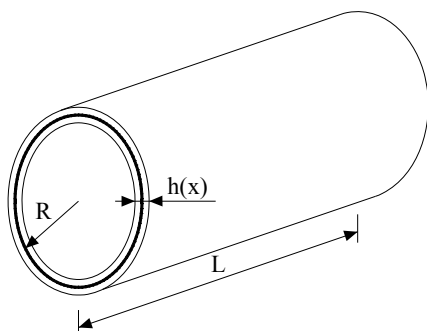


Рис.1. Общий вид оболочки

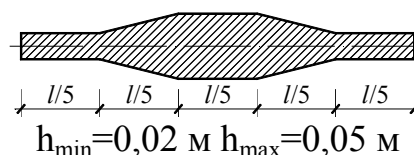


Рис.2. Характер изменения толщины

Имеющиеся экспериментальные работы, например, [5],[6] указывают на то, что при продольном ударе начальные формы выпучивания в цилиндрических оболочках носят осесимметричный характер. По осесимметричным формам теряют устойчивость оболочки, материал которых сжат напряжениями, превышающими предел текучести материала. Поэтому, рассматривая удар с умеренными скоростями, будем предполагать, что движения оболочки в рассматриваемый промежуток времени носят осесимметричный характер.

Соотношения физического закона упругости для материала оболочки приняты в виде:

$$T_{11} = K_1 \cdot h(x) \cdot (\varepsilon_1 + \nu_2 \cdot \varepsilon_2); \quad T_{22} = K_2 \cdot h(x) \cdot (\varepsilon_2 + \nu_1 \cdot \varepsilon_1); \quad (1)$$

$$M_{11} = \frac{K_1 \cdot (h(x))^3}{12} \cdot \chi_1; \quad M_{22} = \frac{K_2 \cdot (h(x))^3}{12} \cdot \nu_1 \cdot \chi_1; \quad (2)$$

$$N = k^2 \cdot G_{13} \cdot h(x) \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma \right); \quad (3)$$

$$K_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \cdot \nu_2}; \quad K_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \cdot \nu_2}. \quad (4)$$

Геометрически нелинейные осесимметричные дифференциальные уравнения продольно-поперечных движений тонкой оболочки типа Тимошенко, учитывающие пербеменность толщины, сдвиг и инерцию вращения элемента оболочки, получены из уравнений К.З. Галимова [4] и использовались ранее в [1]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} &= \rho \cdot h(x) \cdot \ddot{u} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( N + T_{11} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{T_{22}}{R} + \frac{x_3}{R} &= \rho \cdot h(x) \cdot \ddot{w} \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x} - N &= \frac{\rho \cdot (h(x))^3}{12} \cdot \ddot{\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Граничные условия на торцах оболочки соответствуют условиям шарнирного опирания на ударяемом торце и условиям жесткого защемления на втором торце.

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_2 = \frac{w}{R}; \quad \chi_1 = \frac{\partial \gamma}{\partial x}; \quad \chi_2 = 0. \quad (6)$$

Здесь  $k^2$  – коэффициент сдвига,  $G_{13}$  – модуль сдвига,  $\gamma$  – угол поворота нормали к срединной поверхности, вокруг касательной к окружности.  $u$ ,  $v$ ,  $w$

– перемещения точек поверхности приведения оболочки,  $T_{11}$ ,  $T_{22}$  – усилия в срединной поверхности оболочки,  $M_{11}$ ,  $M_{22}$  – изгибающие и крутящий моменты в срединной поверхности оболочки,  $N$  – перерезывающая сила,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  – относительные деформации, соответствующие введенной системе координат. Начальные условия для перемещений и деформаций приняты нулевыми. Система уравнений (5) с учетом соотношений (1)-(4), (6) решалась методом конечных разностей.

**Конечно-разностная схема.** Геометрически нелинейные уравнения (5) записывались в виде явной конечно-разностной схемы. Значения безразмерных шагов сетки выбирались из соображений устойчивости разностной схемы и минимальности времени счета и составляли 0,01-по пространственной координате; 0,0025-по временной координате. Длина оболочки во всех случаях принималась равной 2м, радиус срединной поверхности оболочки равнялся 1м. Скорость удара принималась равной 5м/с. С целью тестирования разностной схемы и метода решения счет проводился до 24 пробегов продольной волны вдоль оболочки. Во всех случаях наблюдалась устойчивость счета. В статье приведены характерные для данной задачи формы выпучивания срединной поверхности для шести моментов времени, что соответствует шести пробегам продольной волны вдоль оболочки. Для оценки устойчивости разностной схемы проводились расчеты при различных шагах по временной координате: 0,005; 0,0025; 0,00125 и фиксированном шаге 0,01-по пространственной координате. Оптимальным оказалось соотношение 0,01 и 0,025. Были проделаны расчеты с увеличением скорости удара в предположении о бесконечной упругости материала, при этом получены прогибы равные 1,5 – 2 толщинам оболочки. При изменении скорости удара счет оставался устойчивым.

**Обсуждение результатов.** Форма оболочки и продольного сечения показаны на рис.1,2. По длине оболочка разбивается на участки с постоянной или линейно изменяющейся толщиной. В тестовом примере по длине оболочки выделено пять участков равной длины, минимальная толщина составляет  $h_{\min}=0,02$  м, максимальная толщина выбиралась из условия тонкости оболочки и составляет  $h_{\max}=0,05$  м (рис.2). Отношение модулей упругости варьировалось от 0,2 до 1; отношение модуля сдвига к большему из модулей упругости было равно 0,4.

Некоторые результаты решений представлены на рис. 3-14. В виде пространственных графиков здесь показаны картины волнообразования в оболочках в зависимости от отношения  $\lambda = E_1/E_2$ . По одной из осей откладывается линейная координата  $x$ , по другой отношения модулей упругости, по третьей (вертикальной) оси откладывается относительный прогиб оболочки. Каждый рисунок соответствует конкретному моменту безразмерного времени  $T = t/t_0$ , где  $t_0$  – время, за которое продольная волна

один раз пробегает вдоль длины оболочки. Например, графики для  $T=1$  соответствуют моменту времени, когда волна достигнет защемленного торца, а графики для  $T=2$  соответствует моменту времени, когда отраженная продольная волна первый раз достигнет ударяемого торца. На каждом рисунке показано по девять кривых, соответствующих разным значениям  $\lambda$ , отложенным перпендикулярно к оси  $Ox$ .

На рисунках 3, 5, 7, 9, 11, 13 представлены картины прогибов для оболочки переменной толщины. Для сравнения на рисунках 4, 6, 8, 10, 12, 14 представлены аналогичные результаты расчетов для оболочки постоянной толщины,  $h=0,02$ м.

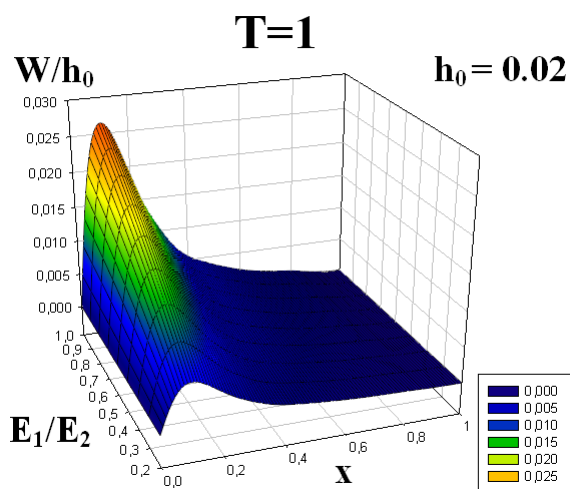


Рис. 3

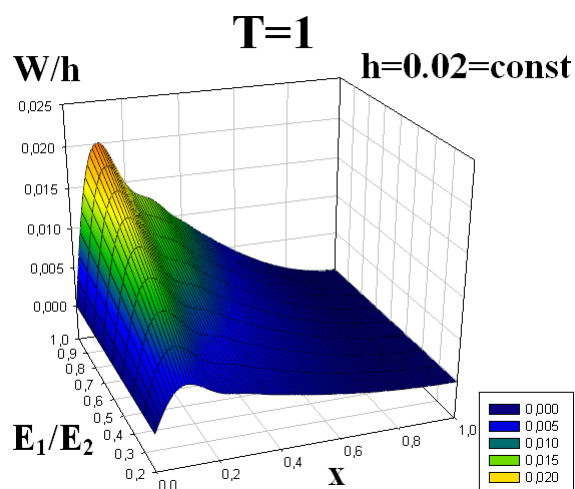


Рис. 4

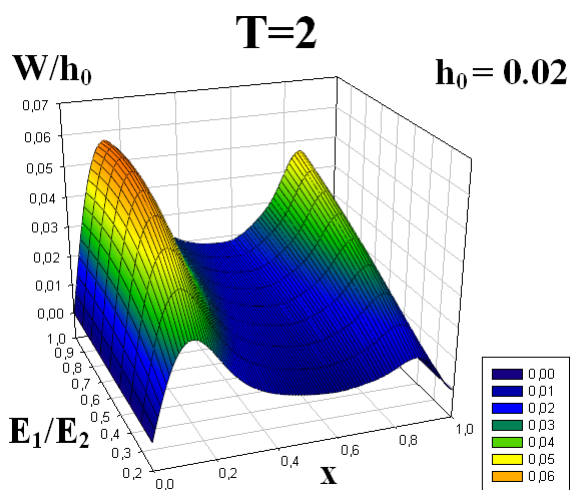


Рис. 5

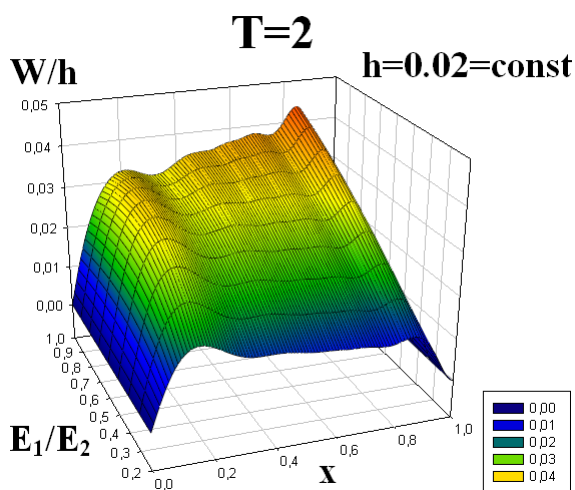
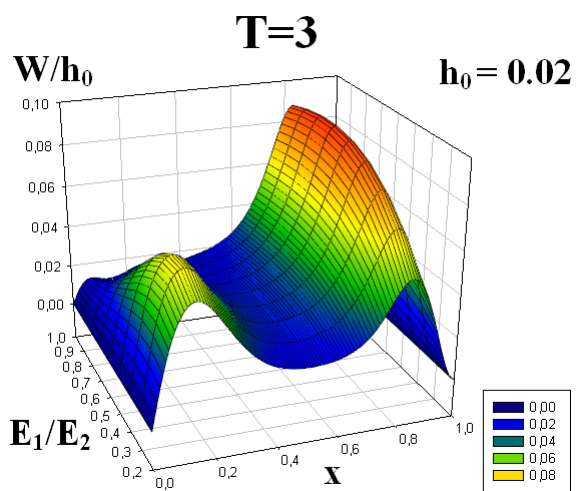
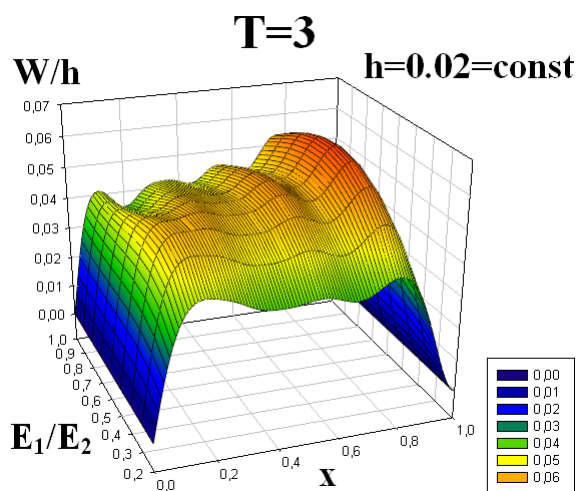


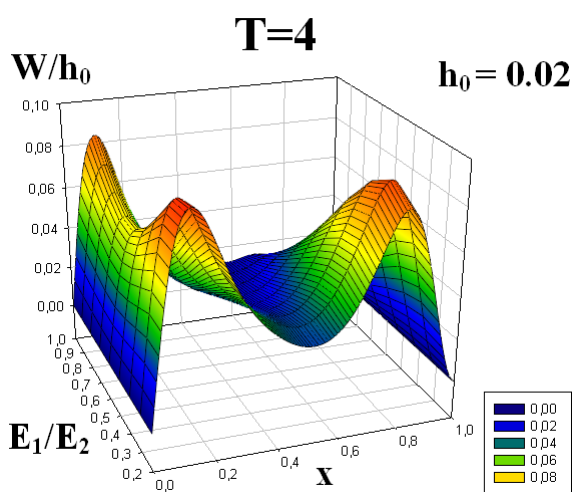
Рис. 6



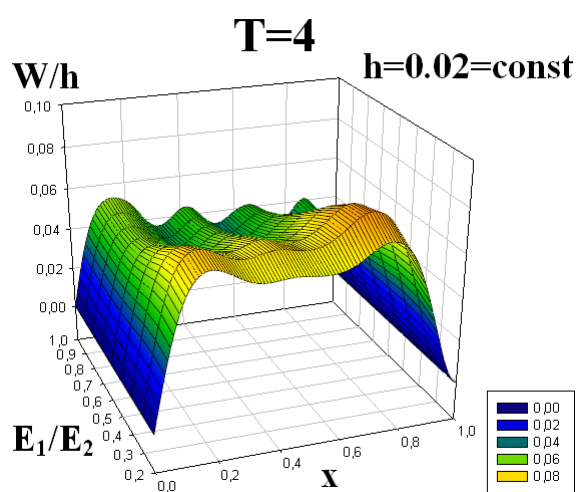
*Puc. 7*



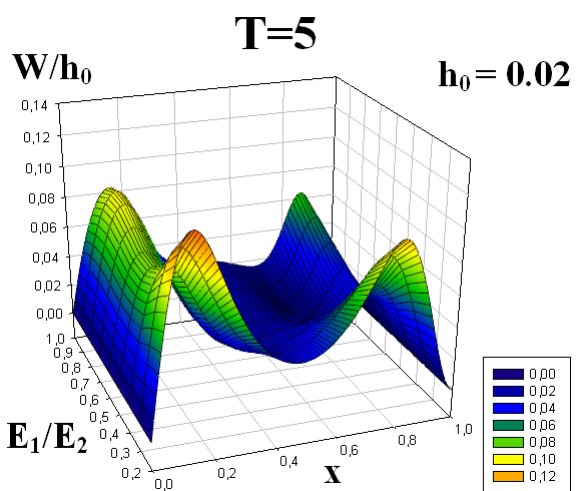
*Puc. 8*



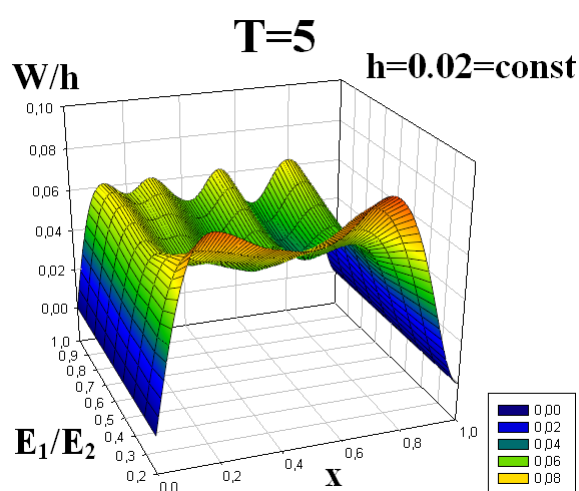
*Puc. 9*



*Puc. 10*



*Puc. 11*



*Puc. 12*

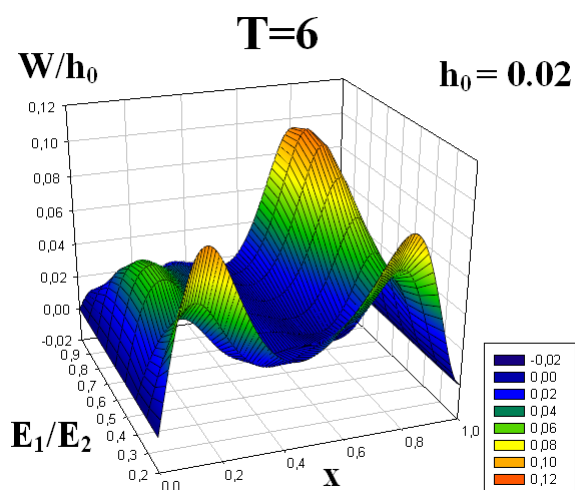


Рис. 13

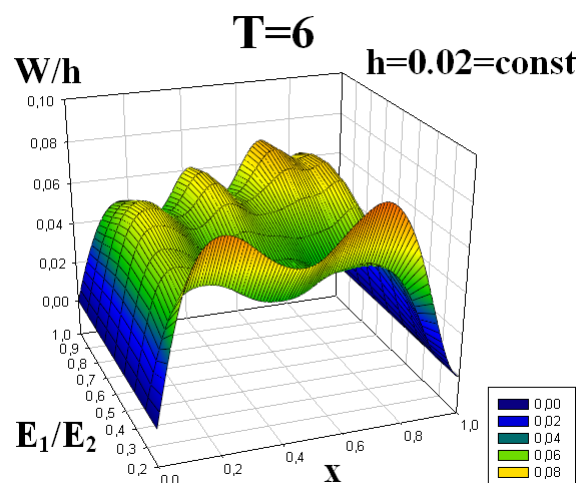


Рис. 14

Из рисунков 3 и 4 следует отметить, что при первом пробеге волны вдоль оболочки формы волнообразования в оболочке переменной и постоянной толщины качественно схожи. Это объясняется тем, что скорость поперечного выпучивания меньше скорости продольной волны и картина выпучивания, в основном, определяется формой поперечного сечения у торца, воспринимающего удар. Поперечные движения как бы отстают от изменения напряженного состояния в оболочке. При временах, соответствующих первому пробегу продольной волны вдоль оболочки, уменьшение отношения  $\lambda$  ведет к увеличению жесткости оболочки в радиальном направлении. Это, в свою очередь, отражается на уменьшении величин относительных прогибов у ударяемого торца оболочки. Это явление наблюдается и у оболочек постоянной толщины, и у оболочек переменной толщины (рис.3, 4).

У оболочки постоянной толщины максимальные прогибы наблюдаются у торцов оболочки, что согласуется с результатами [5]. С увеличением параметра времени в средней части оболочки постоянной толщины прогибы могут быть сопоставимы с максимальными прогибами у торцов оболочки. Для принятой в расчете оболочки переменной толщины прогибы в средней части всегда меньше прогибов на торцах. В этом проявляется влияние изменения толщины оболочки в средней части. Увеличение толщины оболочки в некоторой части влияет не только на абсолютные значения прогибов, но и на всю картину волнообразования в целом. Уменьшение толщин отдельных участков оболочки снижает влияние переменной толщины на формы движения.

Зависимость максимального прогиба от отношения  $\lambda$  в общем случае нелинейна. Это видно по рисункам 9, 11, 13. Та же тенденция наблюдается у оболочки постоянной толщины (рис. 10, 12, 14).

В целом картина продольно-поперечных движений носит сложный характер, не позволяющий сделать исчерпывающие выводы, пригодные на все

случаи. Движения конкретной оболочки приходится изучать каждый раз отдельно. И все же, изучение характера изменения прогибов в различных сечениях оболочки в зависимости от механических характеристик материала позволяет выявить их оптимальное соотношение. Позволяет подобрать тот материал, который обеспечит максимальную жесткость оболочки.

Работа выполнена на кафедре теоретической механики Казанского государственного архитектурно строительного университета.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шигабутдинов Ф. Г., Муртазин Р. З., Мухутдинов Р. Ф. Влияние ступенчато переменной толщины на выпучивание ортотропных цилиндрических оболочек под действием продольной ударной нагрузки // Математические методы и модели в задачах науки и техники. «Прикладная математика и механика» сборник научных трудов. – Ульяновск, 2004. – С. 146-149.

2. Шигабутдинов Ф. Г., Муртазин Р. З., Мухутдинов Р. Ф. Выпучивание упругих цилиндрических оболочек при продольном ударе // Международный сборник научных трудов «Механика, научные исследования и учебно-методические разработки». – Гомель: Белорусский государственный университет, 2009. – С. 132-138.

3. Шигабутдинов Ф. Г., Мухутдинов Р. Ф. Распространение упругих волн от продольного удара по оболочкам переменной толщины с нулевой гауссовой кривизной срединной поверхности // «Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского» (IV том). – Н. Новгород, 2011.

4. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига // кол. авторов. – Казань: Изд-во КГУ, 1977. – С. 3-132.

5. Гордиенко Б. А. Экспериментальное исследование поведения стержней и цилиндрических оболочек при ударе // Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. – Днепропетровск, 1969. – М.: Наука, 1970. – С. 190-193.

6. Кийко И. А. Продольный удар по тонкой цилиндрической оболочке.// Вестник МГУ, Математика и механика, 1972. – № 3. – С. 118-121.



**В. Ю. Ольшанский, А. В. Серебряков, Ю. Н. Нагар** (г. Саратов, г. Энгельс)

## МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ЗАДАЧЕ ОБ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЯХ ПРИ НАЛИЧИИ КОРИОЛИСОВЫХ СИЛ

*Рассмотрены неустановившиеся колебания в поле кориолисовых сил для системы из упругих пьезокерамических пластин при наличии присоединенной массы. Перемещения в пластинах представлены разложениями в ряды по малому параметру. Получены оценки для характеристик тока, генерируемого за счет пьезоэффекта.*

Рассматривается предложенная ранее в работе [1] математическая модель измерителя угловой скорости вращения объекта. Действие устройства основано на явлении пьезоэффекта. Чувствительный элемент устройства состоит из двух тонких пьезокерамических пластин  $\Pi_1, \Pi_2$  и груза массы  $M$ , контактирующего с ними. Предполагается, что на пластины от груза передаются только нормальные усилия.

Пластины предварительно поляризованы вдоль толщин  $h_1, h_2$ . К пластинам прикреплены электроды, с помощью которых на пластину  $\Pi_1$  подается электрический ток, а с пластины  $\Pi_2$  – снимается. За счет продольного пьезоэффекта в пьезопластине  $\Pi_1$  возникают упругие деформационные волны, которые приводят груз в движение.

При вращении подвижной системы отсчета относительно инерциальной системы с угловой скоростью  $\Omega$  возникает кориолисова сила инерции  $\mathbf{F}^c = -2M(\Omega \times \mathbf{v}_r)$ , которая действует на груз и влияет на амплитуду и другие характеристики. За счет компонента  $\Omega_3$ , коллинеарного оси  $Ox_3$ , груз оказывает давление на пластину  $\Pi_2$ , в результате чего в ней возбуждается электрический ток. Величина тока в пластине  $\Pi_2$  позволяет определить  $\Omega_3$ .

Функции перемещений  $u_i(x_i, t)$  удовлетворяют уравнениям движения

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}, \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

Уравнения (1) содержат безразмерные величины  $x_i = x_i^{\text{разм}} / h$ ,  $u_i = u_i^{\text{разм}} / h$ ,  $t = t^{\text{разм}} \cdot c / h$ . Здесь  $h$  – характерный линейный размер,  $c$  – скорость сопряженных продольных волн в пьезокерамике.

Начальные условия имеют вид

$$u_i(x_i, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_i(x_i, 0)}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Закрепление пластин учитывается в граничных условиях

$$u_i(0, t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

На основаниях пластин с площадью  $A$ , контактирующих с присоединенным грузом массой  $M$ , действуют внешние усилия. Эти усилия обусловлены силами инерции, включая силы Кориолиса. Тогда

$$\sigma_x A = -M \frac{\partial^2 u_i(h_i, t)}{\partial t^2} + F_i^c, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

где

$$F_1^c = 2M\Omega_3 \frac{\partial u_2(h_2, t)}{\partial t}, \quad F_2^c = -2M\Omega_3 \frac{\partial u_1(h_1, t)}{\partial t}. \quad (5)$$

Подстановка выражений (5) в граничные условия (4) и переход к безразмерной форме приводят к условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(\delta_1, t)}{\partial x_1} &= m \left( -\frac{\partial^2 u_1(\delta_1, t)}{\partial t^2} + 2\omega \cdot \frac{\partial u_2(\delta_2, t)}{\partial t} \right) + E(t), \\ \frac{\partial u_2(\delta_2, t)}{\partial x_2} &= m \left( -\frac{\partial^2 u_2(\delta_2, t)}{\partial t^2} - 2\omega \cdot \frac{\partial u_1(\delta_1, t)}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $E(t)$  – напряженность внешнего электрического поля. Обозначено:  $\delta_i = h_i / h$ ,  $m = M \cdot s_{33} c^2 / Ah$ ,  $\omega = \Omega_3 h / c$ . Заметим, что для реальных значений  $\Omega_3$  параметр  $\omega \ll 1$ .

Представим перемещения  $u_i(x_i, t)$  разложениями в ряды по малому параметру  $\omega$

$$u_i(x_i, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{in}(x_i, t) \omega^n, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Подстановка рядов (7) в уравнения (1), начальные и граничные условия (2), (3), (6) приводит к последовательности краевых задач для функций  $u_{in}(x_i, t)$ . Уравнения (1) и условия (2), (3) сохраняют свой вид при всех  $n$ . Условия (6) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{10}(\delta_1, t)}{\partial x_1} + m \frac{\partial^2 u_{10}(\delta_1, t)}{\partial t^2} &= E(t), \\ \frac{\partial u_{20}(\delta_2, t)}{\partial x_2} + m \frac{\partial^2 u_{20}(\delta_2, t)}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

для  $n=0$ . Те же граничные условия (6) приводят для  $n \geq 1$  к равенствам

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{1n}(\delta_1, t)}{\partial x_1} + m \frac{\partial^2 u_{1n}(\delta_1, t)}{\partial t^2} &= m \frac{\partial u_{2, n-1}(\delta_2, t)}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial u_{2n}(\delta_2, t)}{\partial x_2} + m \frac{\partial^2 u_{2n}(\delta_2, t)}{\partial t^2} &= -m \frac{\partial u_{1, n-1}(\delta_1, t)}{\partial t^2}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

При этом получаем  $u_{1n}(x_1, t) = 0$  для  $n$  – нечетных, а также  $u_{2n}(x_2, t) = 0$  для  $n$  – четных.

В работе [1] рассмотрен случай  $E(t) = E_0 \sin \beta t$  и получены, с использованием метода Фурье, выражения для перемещений  $u_{10}(x_1, t)$ ,  $u_{21}(x_2, t)$ . Приведем эти выражения в безразмерной форме при  $\delta_1 = 1$

$$\begin{aligned} u_{10}(x_1, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(t) \sin \lambda_k x_1, \\ u_{21}(x_2, t) &= x_2 \varphi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( Q_k (\cos \beta t - \cos \mu_k t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i (\cos \lambda_i t - \cos \mu_k t) \right) \sin \mu_k x_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$\Phi_k(t) = E_0 B_k \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2 - \beta^2} \left( \sin \beta t - \frac{\beta}{\lambda_k} \sin \lambda_k t \right), \quad B_k = \frac{4 \sin \lambda_k}{2 \lambda_k^2 + \lambda_k \sin 2 \lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$$\varphi(t) = -2m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d\Phi_k}{dt} \cdot \sin \lambda_k.$$

В формулах (10), (11)  $Q_k, P_i$  – известные коэффициенты,  $\lambda_k$  – корни уравнения

$$\operatorname{ctg}(\lambda \delta_1) = m \cdot \lambda,$$

$\mu_k$  – корни уравнения

$$\operatorname{ctg}(\mu \delta_2) = m \cdot \mu.$$

В настоящей работе получим далее оценку для силы тока, который генерируется за счет пьезоэффекта в пластине  $\Pi_2$ . Сила тока  $I(t)$  связана с индукцией  $D$  равенством

$$I(t) = A \cdot \frac{\partial D(h_2, t)}{\partial t}. \quad (12)$$

В рамках линейной теории пьезоэффекта имеем

$$D = e_{33} \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_{33}^S \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (13)$$

Здесь  $e_{33}$  – пьезомодуль,  $\varepsilon_{33}^S$  – диэлектрическая проницаемость при постоянных деформациях,  $\psi$  – электрический потенциал. Учтем, что сопротивление внешнего участка цепи много меньше сопротивления пьезокерамической пластины. Следуя [2], полагаем

$$\psi_2(0, t) = \psi_2(h_2, t) = 0. \quad (14)$$

Условия (14) в случае тонкой пластины  $\Pi_2$  позволяют сохранить в выражении (13) для индукции только первое слагаемое, учитывающее механические деформации. В результате выражение (12) принимает вид

$$I(t) = I_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_2(\delta_2, t)}{\partial x_2} \right). \quad (15)$$

В правой части формулы (15) размерные величины собраны в один коэффициент

$$I_0 = A \frac{c}{h} e_{33}.$$

Удерживая в разложении из (7) одно слагаемое, представим перемещение в пластине  $\Pi_2$  в виде

$$u_2(x_2, t) = \omega u_{21}(x_2, t). \quad (16)$$

Подставим перемещение (16) в формулу для тока (15). Это приводит, с учетом формул (10) и (11), к представлению

$$\begin{aligned} \frac{I(t)}{\omega I_0} = & -2mE_0\beta \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2 - \beta^2} (\lambda_k \sin \lambda_k t - \beta \sin \beta t) \cdot \sin \lambda_k + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left( Q_k(\mu_k \sin \mu_k t - \beta \sin \beta t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(\mu_k \sin \mu_k t - \lambda_i \sin \lambda_i t) \right) \cdot \mu_k \cos \mu_k \delta_2 \end{aligned} \quad (17)$$

Зависимость силы тока от времени показана в безразмерной форме на рис.1.

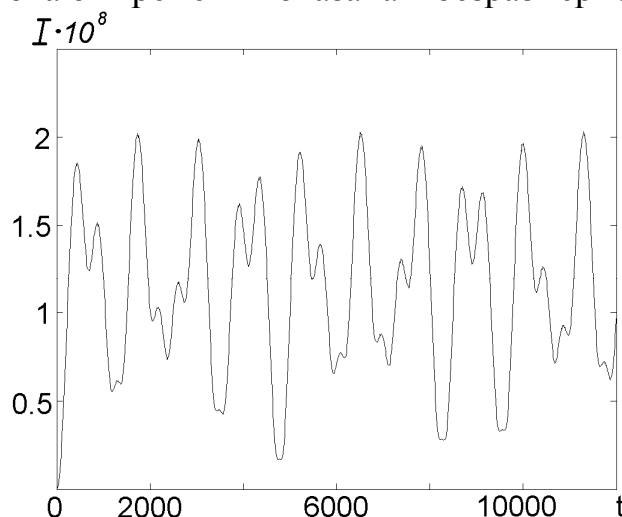


Рис.1

Полученные результаты позволяют оценить характеристики тока, которые в свою очередь могут использоваться при решении обратных задач по определению угловой скорости.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Об одной модели пьезогироскопа / Ю. Н. Нагар [и др.] // Мехатроника, автоматизация, управление, 2010. – № 2. – С.71–74.
2. Гринченко, В. Т. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.

**О. А. Перегудова, Д. Ю. Моторина** (г. Ульяновск)

## **ЗАДАЧИ СЛЕЖЕНИЯ ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ УПРАВЛЕНИЕМ И НЕИЗВЕСТНОЙ МАТРИЦЕЙ ИНЕРЦИИ**

*Исследуется задача об отслеживании траектории механической системы с неизвестными массо-инерционными характеристиками при помощи непрерывного управления с запаздыванием.*

*Ключевые слова: механическая система, слежение, запаздывание в управлении, вектор-функция Ляпунова, функция насыщения*

Рассмотрим механическую систему, состояние которой описывается  $n$  обобщенными координатами  $q_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Кинетическая энергия системы записывается в следующем виде:

$$T(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T H(t, q) \dot{q} + H_1^T(t, q) \dot{q} + H_0(t, q),$$

где  $q = (q_1, \dots, q_n)^T$  – вектор обобщенных координат,  $H(t, q) \in R^{n \times n}$  – положительно-определенная матрица инерции системы,  $H_1(t, q) \in R^n$  – матрица столбец,  $H_0(t, q) \in R$  – скалярная функция. Предположим, что элементы матриц  $H(t, q)$ ,  $H_1(t, q)$  и функция  $H_0(t, q)$  определены и дважды непрерывно-дифференцируемы в некоторой области  $G = \{(t, q) \in R^+ \times R^n : |q| < \alpha_0 \leq +\infty\}$ ,  $|\cdot|$  – некоторая векторная норма в пространстве  $R^n$ .

Для описания динамики системы воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q(t, q, \dot{q}) + u,$$

где  $Q(t, q, \dot{q}) \in R^n$  – обобщенные силы,  $u \in R^n$  – управляющие воздействия.

Подставим выражение для кинетической энергии в уравнения Лагранжа и после преобразований получим следующую систему:

$$H(t, q) \ddot{q} + F(t, q, \dot{q}) = u,$$

где

$$F(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left\{ \frac{\partial H(t, q)}{\partial q} \right\} \dot{q} + \frac{\partial H(t, q)}{\partial t} \dot{q} + \frac{\partial H_1(t, q)}{\partial q} \dot{q} - \left( \frac{\partial H_1(t, q)}{\partial q} \right)^T \dot{q} + \\ + \frac{\partial H_1(t, q)}{\partial t} - \frac{\partial H_0(t, q)}{\partial q} - Q(t, q, \dot{q}).$$

Рассмотрим постановку задачи слежения для механических систем, описываемых нестационарными нелинейными уравнениями, при действии управления с запаздыванием. Пусть уравнения управляемого движения механической системы имеют вид

$$H(t, q)\ddot{q} + F(t, q, \dot{q}) = u(t - h(t)), \quad (1)$$

Рассмотрим механическую систему (1). Пусть матрица инерции  $H(t, q)$  в системе (1) имеет следующий вид:

$$H(t, q) = \hat{H}(t, q) + \Delta H(t, q), \quad (2)$$

где  $\hat{H}(t, q)$  – положительно-определенная известная матрица, а матрица  $\Delta H(t, q)$  неизвестна.

Пусть  $q^*(t) \in R^n$  – отслеживаемая траектория системы (1). Рассмотрим задачу слежения для системы с неизвестной матрицей инерции. Необходимо построить управление  $u(t - h(t))$ , принадлежащее некоторому классу, при котором все решения  $q(t)$  системы (1) с матрицей инерции вида (2) и с начальным условием

$$\max \left\{ \max_{-h_0 \leq s \leq 0} |\varphi(s) - q^*(s)|, \max_{-h_0 \leq s \leq 0} |\varphi(s) - q^*(s) + C^{-1}(\dot{\varphi}(s) - \dot{q}^*(s))| \right\} < \delta,$$

будут удовлетворять неравенству  $|q(t) - q^*(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$ .

Управление в системе (1) будем искать в виде:

$$u(t - h(t)) = -k\hat{H}(t, q^*(t - h(t)))Csat(z(t - h(t))), \quad (3)$$

где

$$z(t - h(t)) = q(t - h(t)) - q^*(t - h(t)) + C^{-1}(\dot{q}(t - h(t)) - \dot{q}^*(t - h(t))).$$

Здесь  $C \in R^{n \times n}$  – постоянная невырожденная матрица, достаточно произвольно подбираемая,  $k$  – константа, которую необходимо определить. Запишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \hat{H}(t, q)\ddot{q} + \hat{F}(t, q, \dot{q}) &= R(t, q, \dot{q}) + u(t - h(t)) - \\ &- \Delta H(t, q)H^{-1}(t, q)u(t - h(t)), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$R(t, q, \dot{q}) = \Delta H(t, q)H(t, q)^{-1}F(t, q, \dot{q}) - \Delta F(t, q, \dot{q}).$$

Здесь  $F(t, q, \dot{q}) = \hat{F}(t, q, \dot{q}) + \Delta F(t, q, \dot{q})$ , где вектор  $\hat{F}(t, q, \dot{q})$  не содержит элементов матрицы  $H(t, q)$  и их производных.

Введем отклонения  $x = q - q^*(t)$ ,  $\dot{x} = \dot{q} - \dot{q}^*(t)$  и приведем систему (4) к линейному виду:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + A(t)\dot{x} + B(t)x &= \hat{H}_1^{-1}(t, x)u(t - h(t)) - S(t) - G(t, x, \dot{x}) + \\ &+ R_1(t, x, \dot{x}) - \hat{H}_1^{-1}(t, x)\Delta H_1(t, x)H_1^{-1}(t, x)u(t - h(t)), \end{aligned} \quad (5)$$

где матрицы  $H_1(t, x)$ ,  $A(t)$ ,  $B(t)$ , векторы  $S(t)$ ,  $R_1(t, x, \dot{x})$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} H_1(t, x) &= \hat{H}_1(t, x) + \Delta H_1(t, x) = \hat{H}(t, q^*(t) + x) + \Delta H(t, q^*(t) + x), \\ S(t) &= \hat{H}^{-1}(t, q^*(t)) \hat{F}(t, q^*(t), \dot{q}^*(t)) + \ddot{q}^*(t), \\ R_1(t, x, \dot{x}) &= \hat{H}^{-1}(t, q^*(t) + x) R(t, q^*(t) + x, \dot{q}^*(t) + \dot{x}), \\ A(t) &= \left. \frac{\partial L(t, q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right|_{q=q^*(t), \dot{q}=\dot{q}^*(t)}, \quad B(t) = \left. \frac{\partial L(t, q, \dot{q})}{\partial q} \right|_{q=q^*(t), \dot{q}=\dot{q}^*(t)}, \\ L(t, q, \dot{q}) &= \hat{H}^{-1}(t, q) \hat{F}(t, q, \dot{q}), \end{aligned}$$

$G(t, x, \dot{x})$  – остаточный член разложения.

Выберем в качестве векторной нормы в пространстве  $R^n$  кубическую векторную норму.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть матрица инерции системы имеет вид (2), управление имеет вид (3), и существуют такие положительные постоянные  $\varepsilon$ ,  $a$ ,  $b$  и  $N$ , что:

- 1) Число  $\gamma$  удовлетворяет неравенству  $\gamma < \varepsilon$ .
- 2) Матрица  $C$  такова, что выполняется неравенство  $\lg n \| -C \| < 0$ .
- 3) Для всех  $t \geq 0$  и  $x, y \in R^n$ , таких, что  $|x| < \varepsilon$ ,  $|y| < (\|C\| - \lg n \| -C \|) \varepsilon$ ,

справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} \lg n \| C - C^{-1} A(t) C \| &\leq b, \quad |C^{-1} G(t, x, y)| \leq N(|x|^2 + |y|^2), \\ \| C - C^{-1} A(t) C + C^{-1} B(t) \| \varepsilon &+ |C^{-1} S(t)| + N c_\delta^2 \varepsilon^2 + |C^{-1} R_1(t, x, y)| + \\ &+ \| k C^{-1} \hat{H}_1^{-1}(t, x) \Delta H_1(t, x) H_1^{-1}(t, x) \hat{H}(t, q^*(t - h(t))) C \| + \\ &+ \| k C^{-1} \hat{H}_1^{-1}(t, x) \hat{H}(t, q^*(t - h(t))) C \| \leq a, \\ \left[ \| C - C^{-1} A(t) C + C^{-1} B(t) \| + \frac{1}{c} \lg n \| C - C^{-1} A(t) C \| \right] \varepsilon &+ \\ &+ |C^{-1} S(t)| + N c_\delta^2 \varepsilon^2 + |C^{-1} R_1(t, x, y)| + \\ &+ \| k C^{-1} \hat{H}_1^{-1}(t, x) \Delta H_1(t, x) H_1^{-1}(t, x) \hat{H}(t, q^*(t - h(t))) C \| + \\ &+ \lg n \| -k C^{-1} \hat{H}_1^{-1}(t, x) \hat{H}(t, q^*(t - h(t))) C \| \leq 0, \end{aligned}$$

где  $c = -\frac{\|C\|}{\lg n \| -C \|} = \text{const} > 0$ ,  $c_\delta^2 = (\|C\| - \lg n \| -C \|)^2 + 1$ .

- 4) Начальная функция  $\phi: [-h_0, 0] \rightarrow R^n$  удовлетворяет неравенству:

$$\max_{-h_0 \leq s \leq 0} \left\{ \left| \phi(s) - q^*(s) \right|, \left| \phi(s) - q^*(s) + C^{-1} (\dot{\phi}(s) - \dot{q}^*(s)) \right| \right\} < \delta,$$

где число  $\delta$  таково, что  $0 < c\delta < \varepsilon$ .

5) Максимальная величина запаздывания  $h_0$  удовлетворяет неравенству

$$h_0 < \frac{1}{b} \ln \frac{b\varepsilon + ac}{c(a + b\gamma)}.$$

Тогда решение системы (1) с матрицей инерции (2) отслеживает траекторию  $q^*(t)$  посредством управления (3) с погрешностью слежения, не превышающей  $\varepsilon$ .

*Доказательство.*

Сделаем в системе (5) замену переменных  $y = x$ ,  $z = x + C^{-1}\dot{x}$ . Получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{y} = -Cy + Cz, \\ \dot{z} = \left( -C + C^{-1}A(t)C - C^{-1}B(t) \right) y + \left( C - C^{-1}A(t)C \right) z + \\ -C^{-1}S(t) - C^{-1}G_1(t, y, z) + C^{-1}R_2(t, y, z) + \\ + kC^{-1}\hat{H}_1^{-1}(t, y)\Delta H_1(t, y)H_1^{-1}(t, y)\hat{H}(t, q^*(t - h(t)))Csat(z(t - h(t))) - \\ - kC^{-1}\hat{H}_1^{-1}(t, y)\hat{H}(t, q^*(t - h(t)))Csat(z(t - h(t))), \end{cases} \quad (6)$$

где  $G_1(t, y, z) = G(t, y, -Cy + Cz)$ ,  $R_2(t, y, z) = R_1(t, y, -Cy + Cz)$ .

Пусть имеется вектор-функция Ляпунова  $V = (V_1, V_2)^T$  с компонентами в виде кубической векторной нормы. Функции  $V_1$  и  $V_2$  не являются гладкими, но удовлетворяют условию Липшица, поэтому будем рассматривать правосторонние производные  $\dot{V}_1$  и  $\dot{V}_2$  в силу системы (6). Так как  $\left| \frac{z_i}{\gamma} \right| < 1$  при  $|z_i| < \gamma$ , для правосторонних производных  $\dot{V}_1$  и  $\dot{V}_2$  в силу системы (6) справедливы оценки:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 \leq lgn \| -C \| V_1 - lgn \| -C \| V_2, \\ \dot{V}_2 \leq c \| C - C^{-1}A(t)C + C^{-1}B(t) \| V_1 + lgn \| C - C^{-1}A(t)C \| V_2 + \\ + c \| C^{-1}S(t) \| + c \| C^{-1}G_1(t, y, z) \| + c \| C^{-1}R_2(t, y, z) \| + \\ + c \| kC^{-1}\hat{H}_1^{-1}(t, y)\Delta H_1(t, y)H_1^{-1}(t, y)\hat{H}(t, q^*(t - h(t)))C \| + \\ + c \| kC^{-1}\hat{H}_1^{-1}(t, y)\hat{H}(t, q^*(t - h(t)))C \|. \end{cases} \quad (7)$$



Пусть  $(y(t), z(t))$  – произвольное решение системы (6), удовлетворяющее начальному условию:

$$\max_{-h_0 \leq s \leq 0} \{|y(s)|, |z(s)|\} < \delta.$$

Докажем, что для скалярной функции  $\bar{V}(t)$ , определенной следующим образом:

$$\bar{V}(t) = \max \{V_1(y(t), z(t)), V_2(y(t), z(t))\},$$

будет справедливо неравенство:

$$\bar{V}(t) < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Что влечет за собой искомое неравенство  $|q - q^*(t)| < \varepsilon$ .

Предположим от противного, что существует такой момент времени  $T > 0$ , что выполняется условие  $\bar{V}(T) = \varepsilon$ ,  $\bar{V}(t) < \varepsilon$ ,  $0 \leq t < T$ .

Функция  $\bar{V}(t)$  представляет собой кубическую норму в пространстве  $R^2$ , для нее справедливы условия Липшица, поэтому можно рассмотреть правую производную  $\dot{\bar{V}}$  в силу системы (6). Для правосторонней производной  $\dot{\bar{V}}$  в силу системы (6) при учете неравенств (7) справедлива оценка:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{V}} \leq & \max \left\{ 0, \left[ c \|C - C^{-1}A(t)C + C^{-1}B(t)\| + \lg n \|C - C^{-1}A(t)C\| \right] \bar{V} + \right. \\ & + c \left[ |C^{-1}S(t)| + |C^{-1}G_1(t, y, z)| + |C^{-1}R_2(t, y, z)| \right] + \\ & + c \left\| kC^{-1}\hat{H}_1^{-1}(t, y)\Delta H_1(t, y)H_1^{-1}(t, y)\hat{H}(t, q^*(t - h(t)))C \right\| + \\ & \left. + c \left\| kC^{-1}\hat{H}_1^{-1}(t, y)\hat{H}(t, q^*(t - h(t)))C \right\| \right\}. \end{aligned}$$

Существует момент времени  $t_0$ ,  $0 < t_0 < T$ , такой, что для всех  $t \in [t_0, T]$  справедливо соотношение  $\bar{V}(t) = V_2(y(t), z(t))$ . Пусть  $t_1$  – наибольший момент, такой, что  $-h_0 \leq t_1 < T$  и  $z_k(t_1) = 0$ . Если такого момента не существует, то определим  $t_1 = -h_0$ . Таким образом, на отрезке  $[t_1, T]$  функция  $z_k(t)$  не меняет знак. Будем считать для определенности, что  $z_k(t) \geq 0$  при всех  $t \in [t_1, T]$ . Пусть  $t_2$  – наибольший момент времени, такой, что  $t_1 \leq t_2 < T$  и  $z_k(t_2) = \gamma$ . Если такого момента не существует, то определим  $t_2 = t_1$ .

Тогда, учитывая условие 3 теоремы, будет иметь место дифференциальное неравенство:  $\dot{z}_k(t) \leq a + bz_k \quad \forall t \in [t_2, T]$ ,  $z_k(t_2) \leq \gamma$ , из которого следует оценка

$$z_k(T) \leq \frac{1}{b} \left[ (a + b\gamma) \exp\{b(T - t_2)\} - a \right].$$

Из последнего соотношения следует неравенство  $\varepsilon \leq \frac{c}{b}[(a + b\gamma)\exp\{b(T - t_2)\} - a]$ , из которого, с учетом условия 5 теоремы, получаем соотношение  $T - t_2 \geq \frac{1}{b} \ln \frac{b\varepsilon + ac}{c(a + b\gamma)} > h_0$ .

Значит найдется такое число  $\delta_1 > 0$ , что для всех  $t \in [T - h_0 - \delta_1, T]$  будет иметь место неравенство  $z_k(t) \geq \gamma$ . Следовательно, для всех  $t \in [T - \delta_1, T]$  будет справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{V}} \leq & \left[ c \|C - C^{-1}A(t)C + C^{-1}B(t)\| + lgn \|C - C^{-1}A(t)C\| \right] \bar{V} + \\ & + c \left[ |C^{-1}S(t)| + |C^{-1}G_1(t, y, z)| + |C^{-1}R_2(t, y, z)| \right] + \\ & + c \left\| kC^{-1}\hat{H}_1^{-1}(t, y)\Delta H_1(t, y)H_1^{-1}(t, y)\hat{H}(t, q^*(t - h(t)))C \right\| + \\ & + clgn \left\| -kC^{-1}\hat{H}_1^{-1}(t, y)\hat{H}(t, q^*(t - h(t)))C \right\|, \end{aligned}$$

которое, в силу условия 3 теоремы, влечет за собой неравенство  $\dot{\bar{V}}(t) \leq 0 \quad \forall t \in [T - \delta_1, T]$ , означающее, что функция  $\bar{V}(t)$  не возрастает на отрезке  $t \in [T - \delta_1, T]$ , а это противоречит сделанному предположению. Таким образом, теорема доказана.

Теорема 1 дополняет результаты [1,2], на основе этой теоремы построен алгоритм нахождения параметров управления.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/11180) и РФФИ (11-01-00541).

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Перегудова О. А. К задаче слежения для механических систем с запаздыванием в управлении // АИТ, 2009. – № 5. – С. 95-105.
2. Моторина Д. Ю. Синтез управления для механических систем с неизвестной матрицей инерции при учете запаздывания в структуре обратной связи // Автоматизация процессов управления, 2010. – № 4. – С. 10-15.

**И. В. Прудаева, Т. В. Мальцева** (г. Тюмень)

## **ВВЕДЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ НА МНОЖЕСТВЕ МОТИВОВ**

*В статье предлагается функциональная зависимость для определения направленности мотивационных установок. Моделирование с помощью дифференциального уравнения, позволяет математически представить взаимодействие мотивов во времени.*

В настоящее время методы математического моделирования находят все большее применение в междисциплинарных исследованиях, в том числе и в психологии [1]. Является актуальным спрогнозировать поведение человека для дальнейшей коррекции его поведения.

Для формализации поведения личности потребуются следующие определения.

В профессиональной деятельности человека возникают ситуации, требующие принятия решения (совершения поступка). Поступок – это выбор между альтернативными мотивами. Термин «мотив» применяется для обозначения самых различных явлений и состояний, вызывающих активность субъекта. Мотивационная сфера личности, назовем ее мотивацией, есть иерархия мотивов. На нижних уровнях мотивационной иерархии находятся ситуативные мотивы (мотиваторы), воздействие которых сильно зависит от особенностей ситуации. На высшем уровне расположены ценности, которые действуют постоянно, ориентируя человека в его поступках. Ценности – это нормы поведения в рамках определенной культуры общества. Мотивационная регуляция – процесс во времени осознанного и /или неосознаваемого упорядочивания мотивов выполняемой деятельности [2].

Единство поступков, совершающихся в игре, учении и труде, представляет собой деятельность человека. В ней человек формируется и проявляет себя как личность, обладающая сознанием. К этому следует добавить, что влияние деятельности на формирование сознания конкретного человека во многом зависит от его профессиональной направленности. Разрабатываемая модель должна учитывать поведение человека в профессиональной среде и типичных ситуациях.

Построение модели функциональных зависимостей начнем с введения конечно-мерного ( $\mathfrak{N}^m$ ) пространства базисных мотивов (ценностей), в котором элементом является мотив. По модели мотив представим в виде линейной комбинации базисных мотивов:

$$y_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i, 0 \leq a_{ji} \leq 1, j = 1..m, \quad (1)$$

где  $a_{ji}$  – элементы матрицы весовых коэффициентов базисных мотивов,  $x_i$  – базисные мотивы.

Матрица весовых коэффициентов была получена в результате тестирования, проведенного И. В. Васильевой, О. В. Гармановой, А. В. Осинцевой. В процессе тестирования, сотруднику внутренних дел была предложена типичная профессиональная ситуация. Испытуемому необходимо было выбрать мотивы, которые, по его мнению, влияют на него в данной ситуации и оценить их по шкале от 0 до 100 относительно ценностей (ложь – правда, зло – добро, смерть – жизнь и т.п.). После нормировки данных (деление на максимально возможное значение равное 100) получена матрица и приведена в таблице 1.

**Таблица 1.**

**Матрица весовых коэффициентов базисных мотивов**

| Ситуация 1 |                                      | Базисные мотивы ( $x_i$ ) |             |                |                            |                      |                      |                      |                         |
|------------|--------------------------------------|---------------------------|-------------|----------------|----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-------------------------|
| № п/п      | Мотивы ( $y_j$ )                     | истина - ложь             | добро - зло | жизнь - смерть | Необходимость - ненужность | порядок - беспорядок | богатство - бедность | легкость - сложность | игра - действительность |
| 1          | преодолеть трудности в работе        | -0,11                     | -0,29       | -0,4           | -0,22                      | -0,24                | 0,2                  | 0,24                 | -0,39                   |
| 2          | использовать властные полномочия     | -0,01                     | 0,4         | -0,07          | -0,49                      | -0,08                | -0,07                | 0,18                 | 0,05                    |
| 3          | избежать неприятностей с законом     | -0,05                     | 0,11        | 0,09           | 0,29                       | 0,19                 | 0,39                 | -0,28                | 0,13                    |
| 4          | соблюдать закон                      | 0,04                      | 0,35        | 0,43           | -0,38                      | 0,37                 | -0,27                | -0,15                | 0,29                    |
| 5          | оправдать надежды населения          | -0,21                     | 0,46        | -0,42          | -0,07                      | 0,21                 | -0,11                | -0,12                | -0,34                   |
| 6          | предотвратить правонарушение         | 0,43                      | 0,48        | -0,26          | 0,06                       | 0,33                 | 0,11                 | 0,34                 | 0,07                    |
| 7          | выполнять свои служебные обязанности | 0,43                      | 0,01        | 0,12           | -0,28                      | 0,45                 | -0,37                | -0,44                | 0,2                     |
| 8          | быть спокойным, уравновешенным       | -0,46                     | 0,3         | 0,32           | -0,03                      | 0,19                 | 0,34                 | 0,44                 | 0,2                     |

Аналогично введем конечно-мерное пространство мотиваторов, где мотив представим как линейную комбинацию мотиваторов:

$$y_j = \sum_{i=1}^k \beta_{ji} p_i, 0 \leq \beta_{ji} \leq 1, j = 1..m, \quad (2)$$

где  $\beta_{ji}$  – элементы матрицы весовых коэффициентов мотиваторов,  $p_i$  – мотиваторы.

Матрица весовых коэффициентов мотиваторов также была получена путем тестирования. Результаты тестирования после выполнения нормировки (деление на 100) приведены в таблице 2.

Таблица 2.

Матрица весовых коэффициентов мотиваторов

| Ситуация 1 |                                      | Мотиваторы ( $p_i$ ) |                          |                              |                         |                   |                   |                |                 |
|------------|--------------------------------------|----------------------|--------------------------|------------------------------|-------------------------|-------------------|-------------------|----------------|-----------------|
| № п/п      | Мотивы ( $y_j$ )                     | Значимость           | Достижимость:<br>условия | Достижимость:<br>способности | Достижимость:<br>усилия | Вознаграждаемость | Удовлетворенность | Справедливость | Ответственность |
| 1          | преодолеть трудности в работе        | 0,79                 | 0,48                     | 0,17                         | 0,3                     | 0,27              | 0,11              | 0,67           | 0,78            |
| 2          | использовать властные полномочия     | 0,29                 | 0,69                     | 0,07                         | 0,23                    | 0,91              | 0,15              | 0,92           | 0,57            |
| 3          | избежать неприятностей с законом     | 0,15                 | 0,24                     | 0,86                         | 0,97                    | 0,83              | 0,67              | 0,14           | 0,1             |
| 4          | соблюдать закон                      | 0,73                 | 0,96                     | 0,3                          | 0,2                     | 0,19              | 0,96              | 0,12           | 0,81            |
| 5          | оправдать надежды населения          | 0,46                 | 0,38                     | 0,99                         | 0,93                    | 0,09              | 0,12              | 0,22           | 0,35            |
| 6          | предотвратить правонарушение         | 0,99                 | 0,5                      | 0,17                         | 0,02                    | 0,56              | 0,48              | 0,55           | 0,54            |
| 7          | выполнять свои служебные обязанности | 0,72                 | 0,86                     | 0,3                          | 0,9                     | 0,45              | 0,97              | 0,64           | 0,62            |
| 8          | быть спокойным, уравновешенным       | 0,9                  | 0,38                     | 0,74                         | 0,33                    | 0,29              | 0,58              | 0,35           | 0,87            |

Установим связь между этими пространствами. Для этого перепишем (1) и (2) в матричном виде:

$$\bar{y} = A\bar{x}, A = \{\alpha_{ij}\}, |\bar{x}| = 1, \bar{y} = B\bar{p}, B = \{\beta_{ij}\}.$$

Выразим вектор мотиваторов через базисный вектор, т.к. они находятся в одном базисном пространстве:

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= B\bar{p}, \\ \bar{p} &= B^{-1}A\bar{x}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для того, чтобы матрица  $B$  имела обратную, она должна быть квадратной и невырожденной, поэтому введем ограничение  $i = j = m$  (равенство строк и столбцов).

Рассмотрим один из возможных способов определения взаимно обратной функции мотивов и мотиваторов  $y(p)$  из статистических данных. Отобразим пространство мотиваторов  $\mathcal{R}^m$  в пространство  $\mathcal{R}^1$ , т.е. введем норму по формуле:

$$|\bar{p}| = p = \sqrt{\sum_{i=1}^m p_i^2}. \quad (4)$$

Вид аппроксимирующей функции определяется видом графика, построенного по экспериментальным точкам (рисунок 1). Например, для рассмотренной выше ситуации имеем тригонометрическую функцию вида:

$$y(p) = b \sin(p) + a, \quad (5)$$

где  $a$  и  $b$  находятся по методу наименьших квадратов [3].

По данным таблиц 1 и 2, с учетом формул (3) и (4), получаем:  $a = 11,24$ ;  $b = -8,88$ .

Она описывает изменение мотиваторов, то её можно назвать силовой.

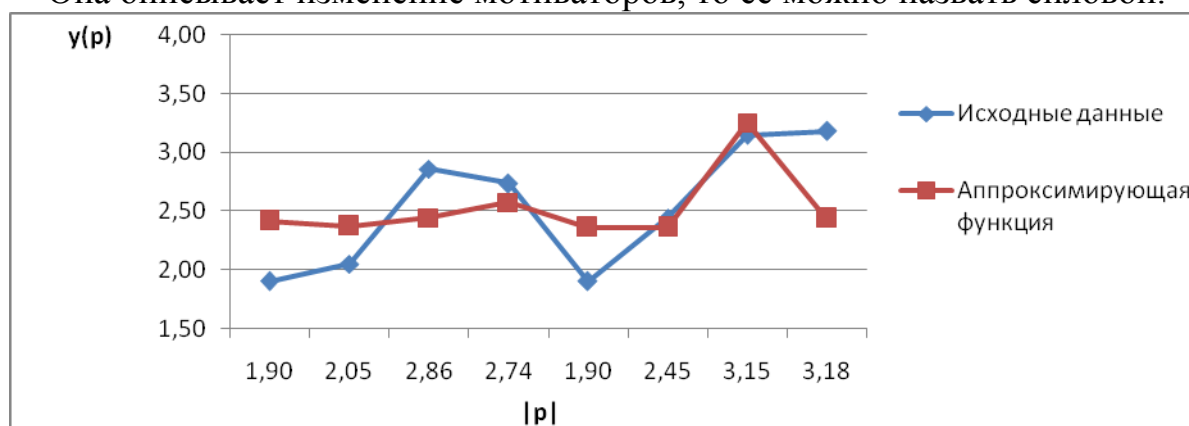


Рис. 1. Зависимость мотивов от мотиваторов

Максимальное расхождение составляет 30%. Эту погрешность можно уменьшить за счет набора функций  $\sin(p)$  при изменении амплитуды  $b$  с использованием функции Хевисайда. Например,

$$y(p) = [b_1 h(p) + b_2 h(p - p_1)] \sin p, \quad h(p) = \begin{cases} 0, & p < 0, \\ 1, & p \geq 0. \end{cases}$$

Продолжим развитие модели. Рассмотрим зависимость от времени в процессе мотивационной регуляции и вектор перемещения для описания изменения положения мотива.

Введем зависимость от времени и вектор перемещения в процессе мотивационной регуляции с течением времени происходит изменение положения мотива и совершение человеком определенного поступка.

Введем в модель следующую закономерность: вектор наибольшего возрастания силовой функции (5) пропорционален скорости  $\vec{v}$  устремления к совершению поступка:

$$\vec{\nabla} p = k \vec{v}, \quad (6)$$

где  $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ ;  $\vec{\nabla}$  – градиент;  $k(\vec{x})$  – функция, характеризующая тип личности.

Добавим к зависимости (6) вектор-функцию  $\vec{f}(\vec{x}, t)$ , учитывающую особенности профессиональной среды и ситуации:

$$\vec{\nabla} p = k \vec{v} + \vec{f}. \quad (7)$$

Введение времени, перемещения и скорости позволяет развить функциональные зависимости.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Митин Н. А. Новые модели математической психологии и информационные процессы. // Новое в синергетике. Взгляд в третье тысячелетие. Сб. статей. – М.: Наука, 2002.
2. Доценко Е. Л. Психология личности: учебное пособие. – Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2009. – 512 с.
3. Бахвалов Н. С., Корнев А. А., Чижонков Е. В. Численные методы. Решения задач и упражнения. – М: Дрофа, 2009. – 400 с.

**Ю. Н. Санкин, С. М. Манзулин** (г. Ульяновск)

## **СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОСТОЯННЫХ ВРЕМЕНИ ЗАГОТОВКИ ПРИ ХОЛОДНОЙ ШТАМПОВКЕ**

*Разработан метод, позволяющий исключить наличие брака при изготовлении деталей из дюралюминия и алюминиево-магниевого сплавов при холодной штамповке.*

Развитие современного машиностроения характеризуется созданием конструкций и узлов машин, предназначенных для работы в соответствии с требованиями экономического развития, предусматривающими сосредоточение усилий на повышение качества, производительности труда, снижении материалоемкости и энергопотребления.

Основными критериями, лимитирующими применение технологических процессов, определяющих эффективность технических решений при штамповке деталей, является металлосбережение.

В настоящее время основным способом проектирования технологических процессов при получении деталей на листоштамповочных прессах является использование справочных материалов, опыта технолога, отладки по методу проб и ошибок. Такой подход нельзя признать эффективным, поскольку он требует затрат времени и средств на разработку и отладку технологического процесса, не позволяет дать научно-обоснованную оценку реальных возможностей по экономии металла и оптимизации процесса в целом. Таким образом, накопленных данных для реального проектирования технологических процессов штамповки деталей на листоштамповочных молотах не достаточно.

В данной работе рассматриваем процесс вытяжки детали цилиндрической формы на листоштамповочном прессе РУЕ100S/1М.

Верхнюю, падающую часть прессы в процессе ударного взаимодействия с заготовкой можно моделировать сложной вязкоупругой стержневой системой с распределенными параметрами, соударяющейся с препятствием. В качестве математической модели заготовки предполагается принять четырехэлементную вязкоупругую модель первого типа (рис.1) [1].



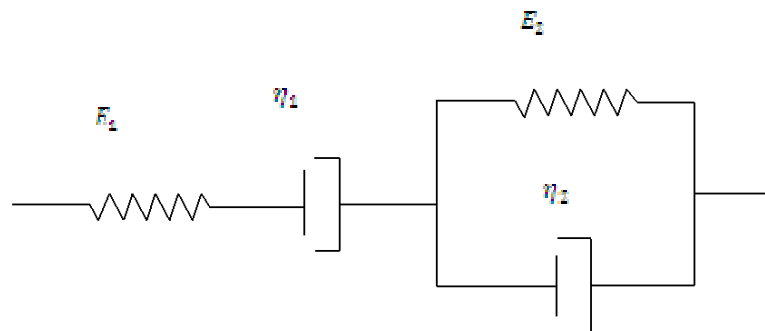


Рис. 1. Четырехэлементная вязкоупругая модель первого типа

На рис. 1:  $E_1$  – модуль упругости тела Максвелла;  $E_2$  – модуль упругости тела Кельвина-Фойгта;  $\eta_1$  – коэффициент вязкости тела Максвелла;  $\eta_2$  – коэффициент вязкости тела Кельвина-Фойгта.

Для решения поставленной задачи используем модификацию метода конечных элементов (МКЭ), основанную на точном интегрировании дифференциального уравнения для каждого элемента, позволяющего рассчитывать продольные и поперечные колебания стержней с учетом или без учета рассеяния энергии при соударении с жестким препятствием [3].

Для вязкоупругого тела, соответствующего рис.1 существуют следующие соотношения:

$$E(i\omega) = \frac{E_1(i\omega) + E_2(i\omega)}{E_1(i\omega) + E_2(i\omega)}, \quad (1)$$

где  $E_1(i\omega) = \frac{E_1 \eta_1 i\omega}{E_1 + \eta_1 i\omega}$  – модуль упругости тела Максвелла;  $E_2(i\omega) = E_2 + \eta_2 i\omega$  – модуль упругости тела Кельвина-Фойгта;  $\eta_1$  и  $\eta_2$  – коэффициенты вязкости соответственно тела Максвелла и тела Кельвина-Фойгта, определяемые экспериментальным путем;  $\omega$  – частота.

Рассмотрим решение поставленной задачи на примере детали «стакан» (Рис.2).

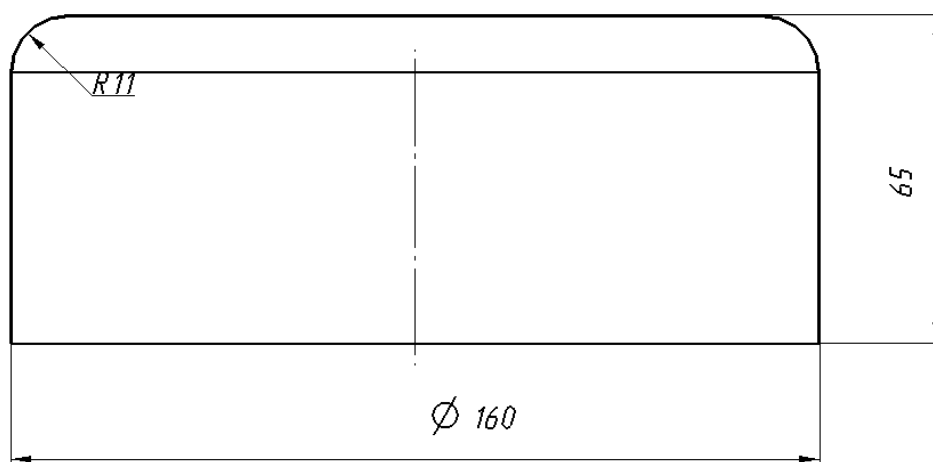


Рис. 2. Деталь

Для начала рассмотрим методику расчета параметров вытяжки [4] детали, изображенной на рисунке 2.

По справочнику [4] находим припуск на обрезку детали  $\Delta=3,95$  мм.

Диаметр заготовки находим по формуле:

$$D_s = \sqrt{d_1^2 + 4d_2h - 2\pi r d_1 + 8r^2}, \quad (2)$$

$D_s = 251,629$  мм;  $248,715$  мм;  $245,799$  мм – соответственно для толщин 1, 2, и 3 мм. Наименьший диаметр цилиндра, вытягиваемый без опасности разрыва материала, находится по формуле:

$$d_1 = m_1 \cdot D_s, \quad (3)$$

где  $m_1$  – коэффициент вытяжки.

Найденные диаметры цилиндра, вытягиваемые без опасности разрыва материала, внесем в таблицу 1, в зависимости от материала, его толщины и соответствующего коэффициента вытяжки.

**Таблица 1.**

Наименьший диаметр цилиндра, вытягиваемый без опасности разрыва материала, рассчитанный по формуле (3)

| Материал          | Коэффициент вытяжки | Толщина материала |         |         |
|-------------------|---------------------|-------------------|---------|---------|
|                   |                     | 1                 | 2       | 3       |
| Алюминий<br>АМц   | $m_1 = 0,52$        | 130,847           | 129,332 | 127,815 |
|                   | $m_1 = 0,53$        | 133,364           | 131,819 | 130,273 |
|                   | $m_1 = 0,54$        | 135,88            | 134,306 | 132,731 |
|                   | $m_1 = 0,55$        | 138,396           | 136,793 | 135,189 |
| Дуралюмин<br>Д16М | $m_1 = 0,56$        | 140,912           | 139,28  | 137,647 |
|                   | $m_1 = 0,57$        | 143,429           | 141,768 | 140,105 |
|                   | $m_1 = 0,58$        | 145,945           | 144,255 | 142,563 |

Далее по справочнику [4] находим, что число операций вытяжки равно 1. Находим высоту цилиндра, вытягиваемого без опасности разрыва по формуле:

$$h = \frac{D_s^2 - d_1^2 - 2\pi r d_1 + 8r^2}{4d_2}, \quad (4)$$

Результаты расчета сведены в таблицу 2, из которых видно, что для каждой толщины материала наименьший диаметр колеблется в пределах 6 мм, а высота в пределах 3 мм.

Расчетная схема рассматриваемой задачи представлена на рис. 3. Сплошной упругий стержень (падающие части узлы 2-1) соударяется со скоростью  $V_0$ , которые давят на заготовку (узлы 0-1), моделируемой четырехэлементной моделью вязкоупругого тела 1-го типа, соответствующей рис.1. Будем считать, что после удара контакт между стержнями сохраняется.

После удара осевой размер вязкоупругого стержня смещается за счет вытяжки по матрице на величину  $\delta$ .

Таблица 2.

Высота цилиндра, вытягиваемого без опасности разрыва,  
рассчитанная по формуле (4)

| Материал | Коэффициент<br>вытяжки | 1      | 2      | 3      |
|----------|------------------------|--------|--------|--------|
| АМгЗМ    | $m_1 = 0,52$           | 57,342 | 58,117 | 58,885 |
|          | $m_1 = 0,53$           | 56,039 | 56,841 | 57,636 |
|          | $m_1 = 0,54$           | 54,716 | 55,546 | 56,638 |
|          | $m_1 = 0,55$           | 53,373 | 54,231 | 55,081 |
| Д16М     | $m_1 = 0,56$           | 52,01  | 52,896 | 53,775 |
|          | $m_1 = 0,57$           | 50,26  | 51,542 | 52,449 |
|          | $m_1 = 0,58$           | 49,223 | 50,168 | 51,104 |

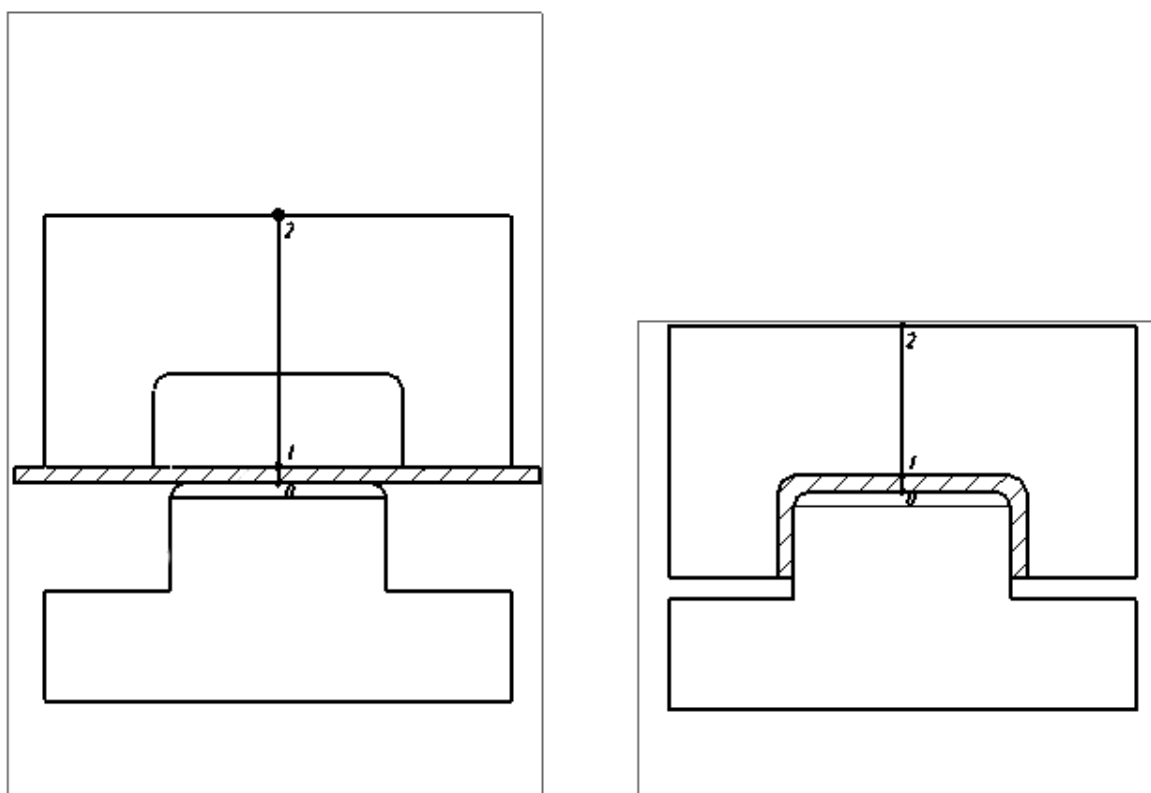


Рис. 3. Расчетная схема задачи

Расчетной схеме соответствует следующая система уравнений [3,4]:

$$\begin{cases} (S_{0,1} + S_{1,2})w_1 - T_{1,2}w_2 = -T_{0,1}[w_0] - T_{1,2}[w_2], \\ -T_{1,2}w_1 + S_{1,2}w_2 = -T_{1,2}[w_1]. \end{cases} \quad (5)$$

Из системы разрешающих уравнений находятся изображения перемещений  $w_i(\omega)$  в узлах системы. Для получения переходного процесса используется дискретное преобразование Лапласа по формуле

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re}(w(\omega) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}) d\omega, \quad (6)$$

где  $u(x, t)$  – продольное перемещение поперечного сечения;  $x$  – координата сечения;  $t$  – время;  $\omega$  – частота.

Для вычисления коэффициентов общей матрицы системы используются соответствующие формулы для продольных и поперечных колебаний стержней ступенчато-переменного сечения [2]. Зная перемещения начала и конца стержня, рассчитываются продольные усилия  $N_i(\omega)$  по формулам:

$$\begin{cases} N_n = [N_n] + S_{nk} W_n - T_{nk} W_k \\ N_k = [N_k] + S_{kn} W_k - T_{kn} W_n \end{cases}, \quad (7)$$

где

$$S_{nk} = j_{nk} \frac{K_{uN}(1)}{K_{uN}(1)}, \quad (8)$$

$$T_{nk} = j_{nk} \frac{1}{K_{uN}(1)}, \quad (9)$$

$$[N_n] = [u_n] T_{nk}, \quad (10)$$

$$[N_k] = [u_n] T_{kn}, \quad (11)$$

$$j_{nk} = \frac{E_{nk} F_{nk}}{l_{nk}}, \quad (12)$$

$$\begin{cases} [u_n] = \frac{l}{E \cdot F} \sum N_i K_{uN}(1 - \zeta_i) + \frac{l^2}{E \cdot F} \sum \int_{S_1}^{S_2} f(s) \cdot K_{uN}(1 - s) ds, \\ [u_k] = \frac{l}{E \cdot F} \sum N_i K_{uN}(\zeta_i) + \frac{l^2}{E \cdot F} \sum \int_{S_1}^{S_2} f(1 - s) \cdot K_{uN}(s) ds \end{cases} \quad (13)$$

– вектора перемещений от местных нагрузок в начале и в конце стержня соответственно, зависящие от скорости движения бабы прессы.

При соударении бабы с заготовкой формулы (8)-(13) примут вид:

$$S_{nk} = \frac{E_{nk} F_{nk} (1 + i\omega \gamma_{nk}) \alpha_{nk} \cos \alpha_{nk}}{l_{nk} \sin \alpha_{nk}}, \quad (14)$$

$$T_{nk} = \frac{E_{nk} F_{nk} (1 + i\omega \gamma_{nk}) \alpha_{nk}}{l_{nk} \sin \alpha_{nk}}, \quad (15)$$

$$\alpha_{nk} = \omega l_{nk} \sqrt{\frac{\mu_{nk}}{E_{nk} F_{nk} (1 + i\omega \gamma_{nk})}}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} [u_n] &= \frac{-\mu_{nk} V_0 l_{nk}^2}{E_{nk} F_{nk} (1 + i\omega \gamma_{nk}) \alpha_{nk}} \int_0^1 \sin(\alpha_{nk} s) ds = \\ &= \frac{-\mu_{nk} V_0 l_{nk}^2}{E_{nk} F_{nk} (1 + i\omega \gamma_{nk}) \alpha_{nk}} \frac{1 - \cos \alpha_{nk}}{\alpha_{nk}^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} [u_k] &= \frac{-\mu_{nk} V_0 l_{nk}^2}{E_{nk} F_{nk} (1 + i\omega \gamma_{nk}) \alpha_{nk}} \int_0^1 \sin(\alpha_{nk} (1 - s)) ds = \\ &= \frac{-\mu_{nk} V_0 l_{nk}^2}{E_{nk} F_{nk} (1 + i\omega \gamma_{nk}) \alpha_{nk}} \frac{1 - \cos \alpha_{nk}}{\alpha_{nk}^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

$l_{nk}$  – длина отдельного участка;  $E_{nk}$  – модуль упругости отдельного участка стержня;  $F_{nk}$  – площадь поперечного сечения отдельного участка;

$N_i(\xi)$  – продольная сила;  $K_{uN} = \frac{\sin(\alpha\xi)}{\alpha}$  – элемент матрицы переноса начальных параметров;  $K = \begin{pmatrix} K_{uu} & K_{uN} \\ K_{Nu} & K_{NN} \end{pmatrix}$  – матрица переноса начальных параметров;

$$K_{uu} = \cos(\alpha\xi); K_{uN} = \frac{\sin(\alpha\xi)}{\alpha}; K_{Nu} = -\alpha\sin(\alpha\xi); K_{NN} = \cos(\alpha\xi). \quad (19)$$

Из значений оригиналов продольных усилий находятся напряжения и деформации, которые связаны с усилиями следующими зависимостями

$$\sigma(t) = \frac{N(t)}{F}; \quad \varepsilon(t) = \frac{N(t)}{EF}. \quad (20)$$

Рассмотрим решение поставленной задачи для пресса PUE100S/1M при следующих исходных данных (Таблица 3), а также при представленных в таблице 4 параметрах экспериментируемых заготовок.

Таблица 3.

Исходные данные

| Начало участка | Конец участка | l, м · 10 <sup>-3</sup> | E, 10 <sup>5</sup> МПа | F, м <sup>2</sup>        | μ, кг/м |
|----------------|---------------|-------------------------|------------------------|--------------------------|---------|
| 0              | 1             | 1;2;3                   | Езаг                   | 5,027 · 10 <sup>-3</sup> | 133     |
| 1              | 2             | 0,1                     | 2,1                    | 2,483 · 10 <sup>-3</sup> | 371     |

Таблица 4.

Параметры экспериментируемых заготовок

| Обозначение сплава | Толщина материала, мм | Модуль упругости, $\frac{H}{м^2}$ | Максимальная высота, вычисленная практически методами, мм | Максимальная высота, вычисленная теоретически методами, мм | Постоянные времени |          |
|--------------------|-----------------------|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|--------------------|----------|
|                    |                       |                                   |                                                           |                                                            | $\tau_1$           | $\tau_2$ |
| Д16м               | 1                     | 0,69 · 10 <sup>11</sup>           | 57,342                                                    | 57,2                                                       | 0,83               | 0,25     |
|                    | 2                     |                                   | 58,117                                                    | 58,2                                                       | 1,63               | 0,25     |
|                    | 3                     |                                   | 58,885                                                    | 58,1                                                       | 2,44               | 0,25     |
| АМг3М              | 1                     | 0,71 · 10 <sup>11</sup>           | 52,01                                                     | 52,2                                                       | 0,91               | 0,25     |
|                    | 2                     |                                   | 52,896                                                    | 52,9                                                       | 1,79               | 0,25     |
|                    | 3                     |                                   | 53,775                                                    | 53,4                                                       | 2,65               | 0,25     |

На рис. 4,5 представлены зависимости реальной и мнимой АФЧХ заготовки из Д16м, АМг3М, в 1-м узле от частоты, а так же переходный процесс 1-м узле системы.

Математическая модель состоит из последовательно соединенных тел Максвелла и тела Кельвина-Фойгта. Данный вид АФЧХ в основном определяется влиянием тела Максвелла, и характер переходного процесса определяется как телом Максвелла, так и телом Кельвина-Фойгта. В частности колебательная составляющая в переходном процессе определяется телом Кельвина-Фойгта, наличие постоянной составляющей – телом Максвелла.

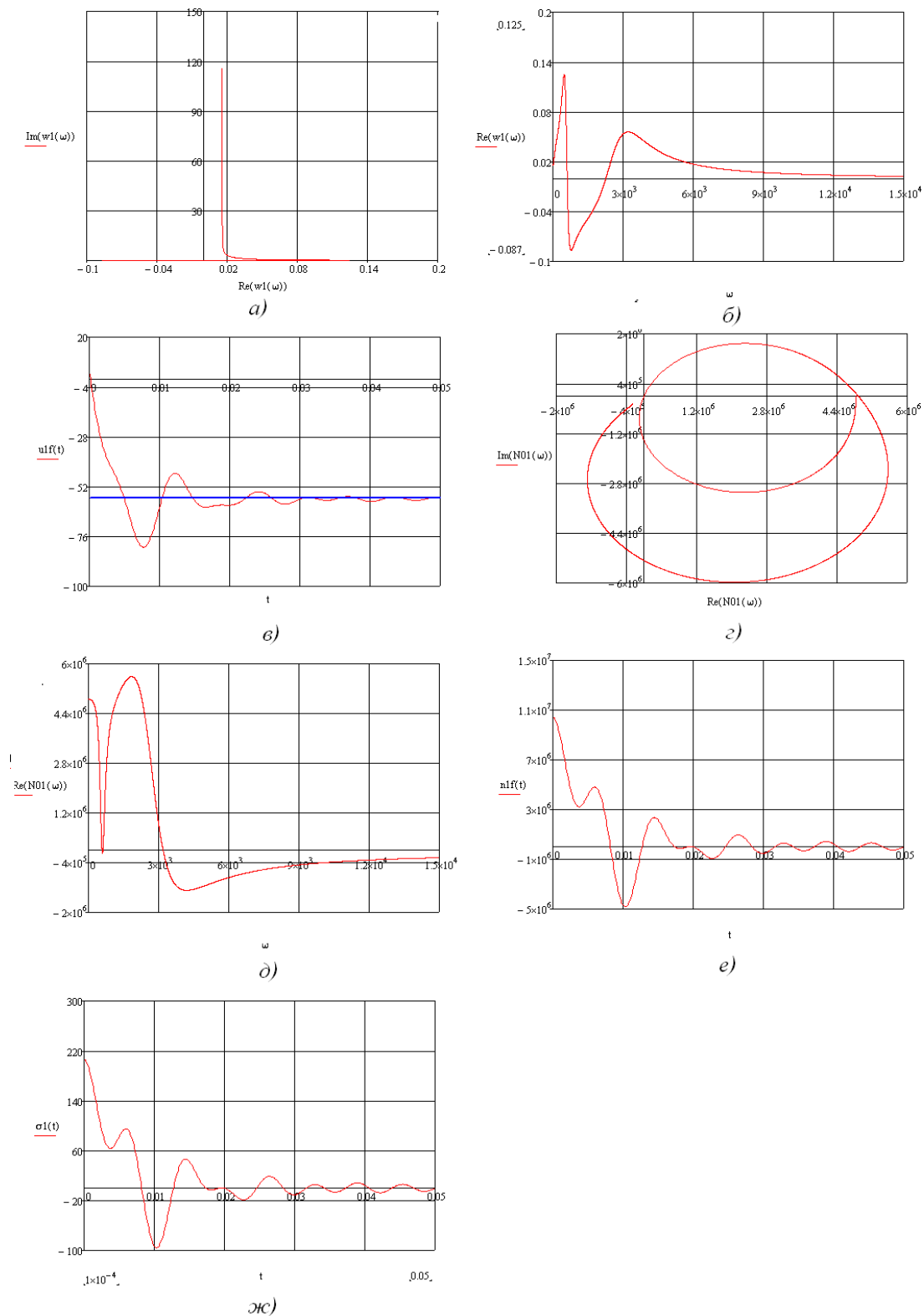


Рис. 4. а) АФЧХ перемещений; б) зависимость реальной части перемещений от частоты; в) переходный процесс перемещений; г) АФЧХ продольных усилий; д) зависимость реальной части продольных усилий от частоты; е) переходный процесс для продольных усилий; ж) напряжения для заготовки из Д16м толщиной 1мм.

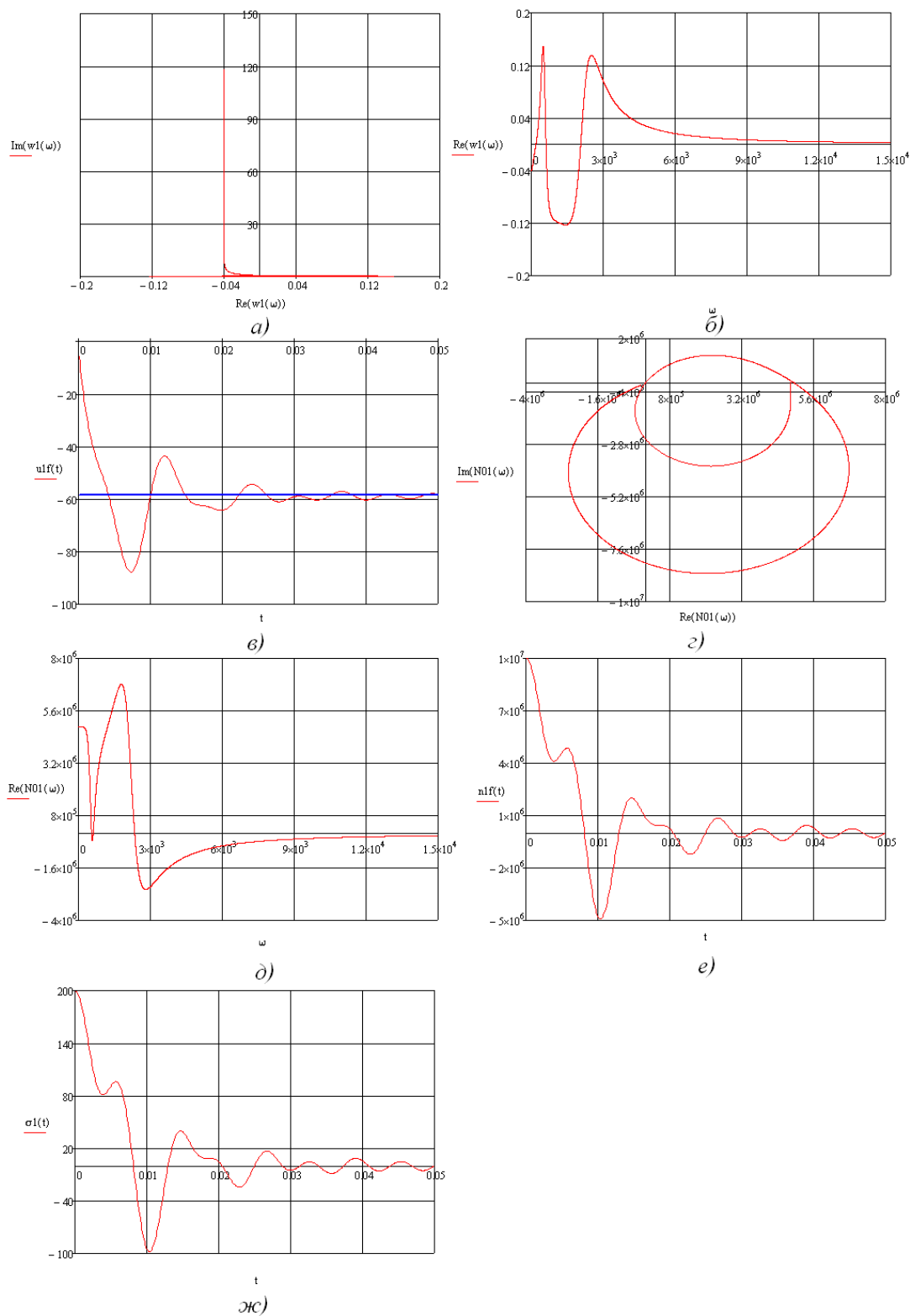


Рис. 5. а) АФЧХ перемещений; б) зависимость реальной части перемещений от частоты; в) переходный процесс перемещений; г) АФЧХ продольных усилий; д) зависимость реальной части продольных усилий от частоты; е) переходный процесс для продольных усилий; ж) напряжения для заготовки из Д16м толщиной 2мм.

Окончательная модель определяется телом Максвелла. По величинам постоянного смещения экспериментально находятся постоянные времени тела Максвелла и тела Кельвина-Фойгта.

В данном случае постоянные времени определены для двух типов заготовок.

$\tau_1$  – постоянная составляющая тела Максвелла;

$\tau_2$  – постоянная составляющая тела Кельвина-Фойгта.

В технологическом процессе, предусматривающем использование данного метода, следует выделить следующие операции:

- 1) Заготовку, проверить визуально на наличие трещин;
- 2) Установить штамп на пресс и смазать;
- 3) Поставить заготовку на штамп;
- 4) Произвести первое испытание на максимальную высоту вытяжки;
- 5) По максимальной высоте вытяжки определить постоянные составляющие  $\tau_1$  и  $\tau_2$ ;
- 6) Исходя из найденных постоянных времени определяются напряжения в заготовке и фиксируются усилия в прессе.
- 7) На следующей заготовке производится вытяжка, исходя из фиксированного усилия в прессе.

Формулы (2) – (4) не позволяют корректно оптимизировать технологический процесс, т. к. коэффициент  $m = 0,52 \div 0,58$  не предусматривает тех параметров эксперимента и заготовки, которые получаются в реальном случае. Поэтому приходится выбирать технологический режим в зависимости от данного коэффициента  $m$ .

В предложенном методе рекомендуется произвести одно пробное испытание, по результатам которого находятся постоянные времени, после чего следуют вытяжные операции на других заготовках с полученными режимами вытяжки. В данном методе исключена случайность подбора коэффициента  $m$  вытяжки, что тем самым увеличивает точность выбора технологического режима, и погрешность в данном случае не превышает 10%.

Примечательно, что выбор постоянных времени практически не зависит от минимальных изменений химического состава материала в каждой из заготовок, а зависит лишь от модуля Юнга материала, а также от экспериментально подобранной за одно испытание постоянной времени, которая будет той же самой при любых испытаниях для данного материала.

Затем находятся напряжения, которые не должны превышать допустимые.

Данное исследование позволяет назначить технологический процесс, исключающий брак при изготовлении заготовок данного типа.



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости / Перевод с английского И. И. Гольберга и Н. И. Малинина. Под ред. Э. И. Григолюка. – Москва: Издательство «Мир», 1965. – 200 с.
2. Проектирование штампов для холодной штамповки (РТМ-890). – Научно-исследовательский институт технологии и организации производства, 1960. – 238 с.
3. Санкин, Ю. Н. Динамические характеристики вязкоупругих систем с распределенными параметрами / Ю. Н. Санкин. – Саратов: Издательство Саратовского университета. – 1977. – 312 с.
4. Санкин, Ю. Н. Нестационарные колебания стержневых систем при соударении с препятствием / Ю. Н. Санкин, Н. А. Юганова; под общ. ред. Ю. Н. Санкина. – Ульяновск: УлГТУ, 2010. – 174 с.

Ю. Н. Санкин, К. В. Олейников (г. Ульяновск)

## ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ФЛАТТЕРЕ КРЫЛА В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

*Работа посвящена нелинейной задаче флаттера изгибно-крутильных колебаний консольного крыла. Если рассматривается линейная задача, то решение можно свести к исследованию собственных значений обыкновенных дифференциальных уравнений. Данная задача в настоящее время решается методом Бубнова-Галеркина или при помощи метода конечных элементов (МКЭ), когда изгибные колебания аппроксимируются полиномом третьей степени, а крутильные полиномом первой степени. Данный подход приводит к системе высокого порядка и требует больших затрат машинного времени. Здесь предлагается вариант МКЭ, который называется методом перемещения и который основан на точном интегрировании, когда для участка стержня решается краевая задача по нахождению краевых сил и моментов через вынужденные перемещения его концов. Затем составляются уравнения равновесия узлов. При этом благодаря точному интегрированию длина участка неограниченна и, например, для крыла постоянного сечения может быть взят только один участок. Несовпадение центра жесткости и центра тяжести учитывается нагрузочными членами, которые также получаются точным интегрированием. На этой основе рассматривается нелинейная задача частотным методом.*

Ключевые слова: Флаттер крыла, дозвуковой поток, частотный метод

Постановка задачи хорошо известна из литературы [1,2]. Крыло с прямой осью направлено перпендикулярно потоку и представляет собой упругий стержень постоянного сечения, жесткость которого в направлении потока (ось  $y$ ) максимальна и очень велика по сравнению с другой изгибной жесткостью (ось  $x$ ) рис.1.

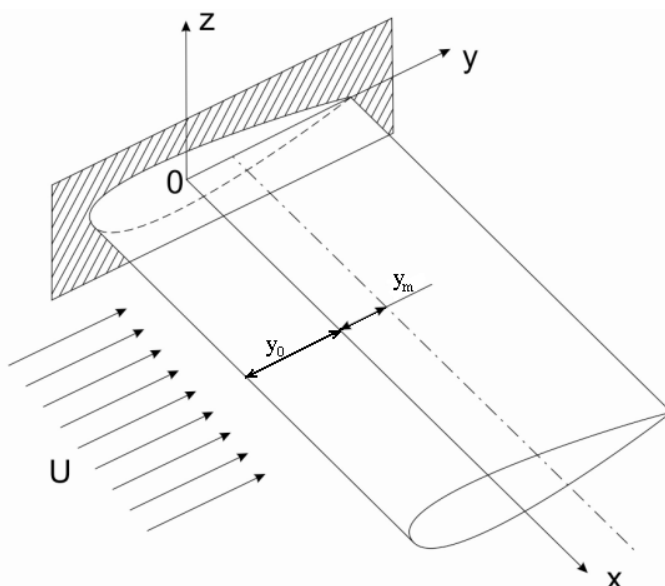


Рис.1

Деформация крыла характеризуется смещением центров изгиба, углами поворота. Эти смещения показаны на рис 2.

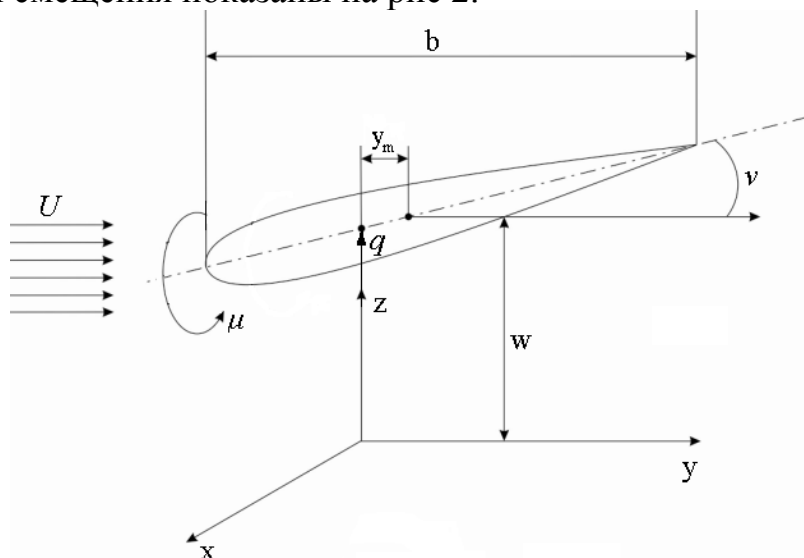


Рис.2

Уравнения малых колебаний крыла имеют вид[1,2]:

$$\begin{cases} EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m y_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = q(x, t) \\ GJ_k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - m r^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + m y_m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu(x, t) \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $w$  – прогиб крыла,  $\theta$  – угол атаки,  $EJ$ ,  $GJ_k$  – соответственно изгибная и крутильная жесткости,  $m$  – масса крыла на единицу длины,  $y_m$  – расстояние от центра тяжести до центра жесткости,  $r$  – радиус инерции сечения относительно центра изгиба,  $q$  и  $\mu$  – соответственно аэродинамическая сила и аэродинамический момент, отнесенные к единице длины крыла. Для  $q$  и  $\mu$  имеются следующие выражения [1]:

$$\begin{aligned} q &= \frac{\rho U^2}{2} c C_L = \frac{\rho U^2}{2} c \frac{dC_L}{d\theta} \left[ \theta + \frac{1}{U} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{U} \left( \frac{3}{4} c - y_0 \right) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \right]; \\ \mu &= \frac{\rho U^2}{2} c^2 \left[ (C_M)_{l.c.} + \frac{y_0}{c} C_L \right] = \frac{\rho U^2}{2} c^2 \left[ -\frac{c\pi}{8U} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left( \frac{y_0}{c} - \frac{1}{4} \right) \frac{dC_L}{d\theta} \left( \theta + \frac{1}{U} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{U} \left( \frac{3}{4} c - y_0 \right) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

В формулах (2) величины  $C_L$  – коэффициент подъемной силы,  $(C_M)_{l.c.}$  – коэффициент аэродинамического момента,  $U$  – скорость набегающего потока,  $\rho$  – плотность воздуха,  $c$  – хорда крыла,  $y_0$  – расстояние упругой оси до передней кромки,  $\theta$  – угол атаки.

Подставляя величины  $q$  и  $\mu$ , согласно формулам (2), в уравнения (1) получим:

$$\begin{cases} EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m y_m \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} - \frac{\rho U^2}{2} c \frac{dC_L}{d\vartheta} \left[ \vartheta + \frac{1}{U} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{U} \left( \frac{3}{4} c - y_0 \right) \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right] = 0; \\ GJ_k \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - m r^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} + m y_m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho U^2}{2} c^2 \left[ -\frac{c\pi}{8U} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \left( \frac{y_0}{c} - \frac{1}{4} \right) \frac{dC_L}{d\vartheta} \left( \vartheta + \frac{1}{U} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{U} \left( \frac{3}{4} c - y_0 \right) \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right) \right] = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Граничные условия:  $w = \frac{\partial w}{\partial x} = \vartheta = 0$  при  $x = 0$ ,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0 \text{ при } x = l.$$

Уравнения колебаний крыла по методу перемещений согласно (2) с учетом граничных условий имеют вид (рассматривается 2 элемента) [3]:

$$\begin{aligned} R_{z10} + R_{z12} &= -D_{01}[\varphi_0] + H_{01}[w_0] + C_{01}\varphi_1 + G_{01}w_1 + D_{12}[\varphi_2] + H_{12}[w_2] - C_{12}\varphi_1 - D_{12}\varphi_2 + G_{12}w_1 - H_{12}w_2 = 0; \\ R_{z21} &= -D_{12}[\varphi_1] + H_{12}[w_1] + C_{12}\varphi_2 + D_{12}\varphi_1 + G_{12}w_2 - H_{12}w_1 = 0; \\ M_{y10} + M_{y12} &= -B_{01}[\varphi_0] + D_{01}[w_0] + A_{01}\varphi_1 + C_{01}w_1 - D_{12}[w_2] - B_{12}[\varphi_2] + A_{12}\varphi_1 + B_{12}\varphi_2 - C_{12}w_1 + D_{12}w_2 = 0; \\ M_{y21} &= -B_{12}[\varphi_1] + D_{12}[w_1] + A_{12}\varphi_2 + B_{12}\varphi_1 + C_{12}w_2 - D_{12}w_1 = 0; \\ M_{x10} + M_{x10} &= F_{10}[\vartheta_0] + Q_{10}\vartheta_1 + F_{12}[\vartheta_2] + Q_{12}\vartheta_1 - F_{12}\vartheta_2 = 0; \\ M_{x21} &= F_{12}[\vartheta_1] + Q_{12}\vartheta_2 - F_{12}\vartheta_1 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Подробности метода перемещений изложены в [3].

В уравнениях (4) индексы соответствуют рис. 3.

В величины в квадратных скобках подставляются полиномом третьей степени, аппроксимирующим изгибные колебания и полиномом первой степени, аппроксимирующим крутильные, зависящие только от 3-х параметров: перемещения на конце крыла, угла поворота сечения при изгибе и угла закручивания[3].

Они определяются аэродинамическими силами, которые в свою очередь зависят от угла атаки.

Угол атаки считаем обусловленным полиномом первой степени, а перемещение – полиномом третьей степени.

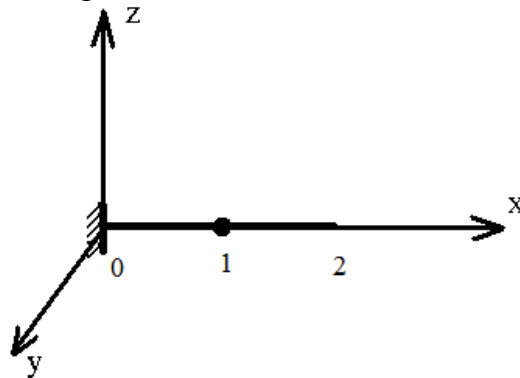


Рис. 3

$$[w_0] = -l_{01} \int_0^1 (q(1-s) + m_{01} y_{m01} \frac{\partial^2 \vartheta(1-s)}{\partial t^2}) \cdot \frac{l_{01}^3}{\lambda_{01}^3 E_{01} J_{01}} \cdot V(s) ds;$$

$$\begin{aligned}
[w_1] &= -l_{12} \int_0^1 (q(1-s) + m_{12} y_{m12} \frac{\partial^2 \mathcal{G}(1-s)}{\partial t^2}) \cdot \frac{l_{12}^3}{\lambda_{12}^3 E_{12} J_{12}} \cdot V(s) ds; \\
[w_2] &= -l_{12} \int_0^1 (q(s) + m_{12} y_{m12} \frac{\partial^2 \mathcal{G}(s)}{\partial t^2}) \cdot \frac{l_{12}^3}{\lambda_{12}^3 E_{12} J_{12}} \cdot V(1-s) ds; \\
[\varphi_0] &= -l_{01} \int_0^1 (q(1-s) + m_{01} y_{m01} \frac{\partial^2 \mathcal{G}(1-s)}{\partial t^2}) \cdot \frac{l_{01}^2}{\lambda_{01}^2 E_{01} J_{01}} \cdot U(s) ds; \\
[\varphi_1] &= -l_{12} \int_0^1 (q(1-s) + m_{12} y_{m12} \frac{\partial^2 \mathcal{G}(1-s)}{\partial t^2}) \cdot \frac{l_{12}^2}{\lambda_{12}^2 E_{12} J_{12}} \cdot U(s) ds; \\
[\varphi_2] &= -l_{12} \int_0^1 (q(s) + m_{12} y_{m12} \frac{\partial^2 \mathcal{G}(s)}{\partial t^2}) \cdot \frac{l_{12}^2}{\lambda_{12}^2 E_{12} J_{12}} \cdot U(1-s) ds; \\
[\mathcal{G}_0] &= -l_{01} \int_0^1 (\mu(1-s) + m_{01} y_{m01} \frac{\partial^2 \mathcal{G}(1-s)}{\partial t^2}) \cdot \frac{l_{01}}{G_{01} J_{k01}} \cdot \frac{\sin \alpha_{01} s}{\alpha_{01}} ds; \\
[\mathcal{G}_1] &= -l_{12} \int_0^1 (\mu(1-s) + m_{12} y_{m12} \frac{\partial^2 \mathcal{G}(1-s)}{\partial t^2}) \cdot \frac{l_{12}}{G_{12} J_{k12}} \cdot \frac{\sin \alpha_{12} s}{\alpha_{12}} ds; \\
[\mathcal{G}_2] &= -l_{12} \int_0^1 (\mu(s) + m_{12} y_{m12} \frac{\partial^2 \mathcal{G}(s)}{\partial t^2}) \cdot \frac{l_{12}}{G_{12} J_{k12}} \cdot \frac{\sin \alpha_{12} (1-s)}{\alpha_{12}} ds.
\end{aligned} \tag{5}$$

где  $V(s) = \frac{1}{2}(-\sin \lambda s + sh \lambda s)$ ,  $U(s) = \frac{1}{2}(-\cos \lambda s + sh \lambda s)$  – функции Крылова,

$\lambda = l \sqrt{\frac{m \omega^2}{EJ}}$ ,  $\alpha = \sqrt{\frac{J_\rho \omega^2 \cdot l^2}{GJ_k}}$ ,  $J_\rho$  – момент инерции единицы длины стержня

относительно центра кручения.

Подставляя  $q$  и  $\mu$  определяемые по формулам (2), то есть прогибом и углом поворота сечения на конце, которые определяются в свою очередь полиномами.

Полином, аппроксимирующий изгибные колебания:

$$w = (1 - 3s^2 + 2s^3)w_{нач} + (sl - 2s^2l + s^3l)\varphi_{нач} + (3s^2 - 2s^3)w_{кон} + (-s^2l + s^3l)\varphi_{кон}, \tag{6}$$

Полином, аппроксимирующий крутильные колебания:

$$\mathcal{G} = (1-s)\mathcal{G}_{нач} + s\mathcal{G}_{кон}, \tag{7}$$

Согласно формулам (2) и (5) имеем:

$$\begin{aligned}
[w_0] &= -\frac{l_{10}^4}{\lambda_{10}^3 E_{10} J_{10}} \int_0^1 \left( \frac{\rho U^2}{2} c_{10} \frac{dC_L}{d\mathcal{G}} (\mathcal{G}(1-s) + \frac{1}{U} \cdot \frac{\partial w(1-s)}{\partial t} + \frac{1}{U} (\frac{3}{4} c_{10} - y_{010}) \cdot \frac{\partial \mathcal{G}(1-s)}{\partial t}) + \right. \\
&\quad \left. + m_{10} y_{m10} \frac{\partial^2 \mathcal{G}(1-s)}{\partial t^2} \right) \cdot V(s) ds;
\end{aligned} \tag{8}$$

$[w_1], [w_2]$  – аналогично.

$$[\varphi_0] = -\frac{l_{10}^3}{\lambda_{10}^2 E_{10} J_{10}} \int_0^1 \left( \frac{\rho U^2}{2} c_{10} \frac{dC_L}{d\vartheta} (\vartheta(1-s) + \frac{1}{U} \cdot \frac{\partial w(1-s)}{\partial t} + \frac{1}{U} (\frac{3}{4} c_{10} - y_{010}) \cdot \frac{\partial \vartheta(1-s)}{\partial t}) + \right. \\ \left. + m_{10} y_{m10} \frac{\partial^2 \vartheta(1-s)}{\partial t^2} \right) \cdot U(s) ds; \quad (9)$$

$[\varphi_1], [\varphi_2]$  – аналогично.

$$[\vartheta_0] = -\frac{l_{10}^2}{\alpha_{10} G_{10} J_{k10}} \int_0^1 \left( \frac{\rho U^2}{2} c_{10}^2 \left( -\frac{c_{10} \pi}{8U} \cdot \frac{\partial \vartheta(1-s)}{\partial t} + \left( \frac{y_{010}}{c_{10}} - \frac{1}{4} \right) \frac{dC_L}{d\vartheta} (\vartheta(1-s) + \frac{1}{U} \cdot \frac{\partial w(1-s)}{\partial t} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{U} (\frac{3}{4} c_{10} - y_{010}) \cdot \frac{\partial \vartheta(1-s)}{\partial t} \right) \right) + m_{10} y_{m10} \frac{\partial^2 w(1-s)}{\partial t^2} \right) \cdot \sin \alpha_{10} s ds; \quad (10)$$

$[\vartheta_1], [\vartheta_2]$  – аналогично. Здесь  $p$  – параметр преобразования Лапласа.

В уравнениях динамического равновесия узлов (4) коэффициенты динамических жесткостей стержня в общем случае даются формулами [3]:

$$A = \frac{EJ}{l} (\sin \lambda ch \lambda - sh \lambda \cos \lambda) t \lambda; \\ B = \frac{EJ}{l} (sh \lambda - \sin \lambda) t \lambda; \\ C = \frac{EJ}{l^2} \sin \lambda \cdot sh \lambda \cdot t \lambda^2; \\ D = \frac{EJ}{l^2} (ch \lambda - \cos \lambda) t \lambda^2; \\ G = \frac{EJ}{l^3} (\sin \lambda ch \lambda + sh \lambda \cos \lambda) t \lambda^3; \\ H = \frac{EJ}{l^3} (\sin \lambda + sh \lambda) t \lambda^3; \\ F = \frac{GJ_k}{l} \cdot \frac{\alpha}{\sin \alpha}, Q = \frac{GJ_k}{l} \cdot \frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha},$$

где  $\lambda = l^4 \sqrt{\frac{m \omega^2}{EJ}}, \frac{1}{t} = 1 - \cos \lambda ch \lambda, \alpha = \sqrt{\frac{J_p \omega^2 \cdot l^2}{GJ_k}}.$

В уравнениях (4) величины в квадратных скобках определяются аэродинамическими силами, которые в свою очередь зависят от угла атаки по формулам (5), где выражения  $\frac{\partial w}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$  заменяем на  $p \cdot w$  и  $p \cdot \vartheta$ , полагая  $p = i \cdot \omega$ .

Учет рассеяния энергии осуществляем методом малого параметра, пропорционального силам трения [3]. Для этого все жесткостные характеристики, в нашем случае модуль упругости  $E$  и модуль сдвига  $G$  в уравнениях (4) заменяем на комплексные характеристики  $\bar{E} = E(1 + i\gamma_1)$ ,  $\bar{G} = G(1 + i\gamma_2)$ , где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  – коэффициенты рассеяния энергии. В нашем случае  $\gamma_1 = \gamma_2$ .

Рассмотрим решение задачи при помощи частотного критерия устойчивости[4]:

Уравнения динамики вязкоупругой системы в операторной форме:

$$D\sigma + R\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + T\frac{\partial u}{\partial t} - f = 0, \quad (11)$$

$$CD^*u + C_1D^*\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma, \quad (12)$$

где  $\sigma, u$  – обобщенные силы и перемещения,  $f$  – вектор функция, характеризующая силовое воздействие на упругую систему,  $R$  – оператор распределенных масс,  $C$  – оператор характеризующий распределение упругих сил,  $T$  – оператор внешнего рассеяния энергии,  $C_1$  – оператор внутреннего рассеяния энергии,  $t$  – время,  $D$  и  $D^*$  – дифференциальные операторы, сопряженные в смысле Лагранжа

Уравнение для силового воздействия  $f = f(e)$ , нелинейно зависящего от некоторого параметра  $e$ , возьмем в виде:

$$\dot{e} = c_1x_1 + c_2x_2 - hf(e), \quad (13)$$

где  $e = e(\alpha, t)$  – управляющее воздействие,  $\alpha$  – пространственная координата,  $c_1$  – оператор обратных связей по перемещению,  $c_2$  – оператор обратных связей по скорости,  $h$  – положительно определенная симметричная весовая матрица управляющих воздействий

В нашем случае:

$$f(e) = \begin{bmatrix} -D_{01}[\varphi_0] + H_{01}[w_0] + D_{12}[\varphi_2] + H_{12}[w_2] \\ -D_{12}[\varphi_1] + H_{12}[w_1] \\ -B_{01}[\varphi_0] + D_{01}[w_0] - D_{12}[w_2] - B_{12}[\varphi_2] \\ -B_{12}[\varphi_1] + D_{12}[w_1] \\ F_{10}[\vartheta_0] + F_{12}[\vartheta_2] \\ F_{12}[\vartheta_1] \end{bmatrix} \quad (14)$$

где  $[w_0] = -l_{01} \int_0^1 q(1-s) \cdot \frac{l_{01}^3}{\lambda_{01}^3 E_{01} J_{01}} \cdot V(s) ds$ ;  $[w_1] = -l_{12} \int_0^1 q(1-s) \cdot \frac{l_{12}^3}{\lambda_{12}^3 E_{12} J_{12}} \cdot V(s) ds$ ;

$[w_2] = -l_{12} \int_0^1 q(s) \cdot \frac{l_{12}^3}{\lambda_{12}^3 E_{12} J_{12}} \cdot V(1-s) ds$ ;  $[\varphi_0] = -l_{01} \int_0^1 q(1-s) \cdot \frac{l_{01}^2}{\lambda_{01}^2 E_{01} J_{01}} \cdot U(s) ds$ ;

$[\varphi_1] = -l_{12} \int_0^1 q(1-s) \cdot \frac{l_{12}^2}{\lambda_{12}^2 E_{12} J_{12}} \cdot U(s) ds$ ;  $[\varphi_2] = -l_{12} \int_0^1 q(s) \cdot \frac{l_{12}^2}{\lambda_{12}^2 E_{12} J_{12}} \cdot U(1-s) ds$ ;

$[\vartheta_0] = -l_{01} \int_0^1 \mu(1-s) \cdot \frac{l_{01}}{G_{01} J_{k01}} \cdot \frac{\sin \alpha_{01} s}{\alpha_{01}} ds$ ;  $[\vartheta_1] = -l_{12} \int_0^1 \mu(1-s) \cdot \frac{l_{12}}{G_{12} J_{k12}} \cdot \frac{\sin \alpha_{12} s}{\alpha_{12}} ds$ ;

$[\vartheta_2] = -l_{12} \int_0^1 \mu(s) \cdot \frac{l_{12}}{G_{12} J_{k12}} \cdot \frac{\sin \alpha_{12} (1-s)}{\alpha_{12}} ds$ .

Если исключить из уравнения динамики обобщенные силы  $\sigma$ , то получим уравнение в обобщенных перемещениях:

$$R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B \frac{\partial u}{\partial t} + Ku = f, \quad (15)$$

где  $B = T + DC_1 D^*$  и  $K = DCD^*$  – положительно определенные, вполне непрерывные операторы рассеяния энергии и упругости

Рассмотрим уравнение динамики в обобщенных перемещениях (15):

Сделаем замену переменных:  $u_1 = u$ ;  $u_2 = \dot{u}$  Тогда:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2, \\ \dot{u}_2 &= (-R^{-1}B\dot{u}_1 - R^{-1}Ku_1 + R^{-1}f(e)). \end{aligned} \quad (16)$$

Запишем функционал Ляпунова в виде:

$$V = \frac{1}{2} \int_v u_2^T R u_2 dv + \frac{1}{2} \int_v u_1^T K u_1 dv + \int_v \left[ \int_0^e f(z)^T dz \right] dv. \quad (17)$$

Таким образом, функционал  $V$  является положительно определенным. Его производная в силу уравнений движения (15) :

$$\dot{V} = - \int_v u_2^T B u_2 dv + \int_v [c_1 u_1 + (1 + c_2) u_2 - hf(e)]^T f(e) dv. \quad (18)$$

Если бы  $\dot{V}$  была знакоопределенной отрицательной величиной, то движение было бы асимптотически устойчиво. Первое в формуле (18) отрицательно определенное, поэтому достаточно, чтобы:

$$\int_v [c_1 u_1 + (1 + c_2) u_2 - hf(e)]^T f(e) dv \leq \int_v u_2^T B u_2 dv. \quad (19)$$

Критерий устойчивости строится по форме выражения (19) [4].

$$1 - \frac{\operatorname{Re}((c_1 + i\omega(1 + c_2))W(i\omega)f, f)}{(hf, f)} \geq 0, \quad (20)$$

где  $W(i\omega)$  – матрица передаточных функций.

Для построения амплитудно-фазо-частотных характеристик (АФЧХ) возмущающее воздействие поочередно приравняется к 1 в системе уравнений (4):

$$\begin{aligned} -D_{01}[\varphi_0] + H_{01}[w_0] + C_{01}\varphi_1 + G_{01}w_1 + D_{12}[\varphi_2] + H_{12}[w_2] - C_{12}\varphi_1 - D_{12}\varphi_2 + G_{12}w_1 - H_{12}w_2 &= 1; \\ -D_{12}[\varphi_1] + H_{12}[w_1] + C_{12}\varphi_2 + D_{12}\varphi_1 + G_{12}w_2 - H_{12}w_1 &= 0; \\ -B_{01}[\varphi_0] + D_{01}[w_0] + A_{01}\varphi_1 + C_{01}w_1 - D_{12}[w_2] - B_{12}[\varphi_2] + A_{12}\varphi_1 + B_{12}\varphi_2 - C_{12}w_1 + D_{12}w_2 &= 0; \\ -B_{12}[\varphi_1] + D_{12}[w_1] + A_{12}\varphi_2 + B_{12}\varphi_1 + C_{12}w_2 - D_{12}w_1 &= 0; \\ F_{10}[\vartheta_0] + Q_{10}\vartheta_1 + F_{12}[\vartheta_2] + Q_{12}\vartheta_1 - F_{12}\vartheta_2 &= 0; \\ F_{12}[\vartheta_1] + Q_{12}\vartheta_2 - F_{12}\vartheta_1 &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{где } [w_0] = -l_{01} \int_0^1 m_{01} y_{m01} \frac{\partial^2 \vartheta(1-s)}{\partial t^2} \cdot \frac{l_{01}^3}{\lambda_{01}^3 E_{01} J_{01}} \cdot V(s) ds;$$

$$[w_1] = -l_{12} \int_0^1 m_{12} y_{m12} \frac{\partial^2 \vartheta(1-s)}{\partial t^2} \cdot \frac{l_{12}^3}{\lambda_{12}^3 E_{12} J_{12}} \cdot V(s) ds;$$

$$[w_2] = -l_{12} \int_0^1 m_{12} y_{m12} \frac{\partial^2 \vartheta(s)}{\partial t^2} \cdot \frac{l_{12}^3}{\lambda_{12}^3 E_{12} J_{12}} \cdot V(1-s) ds;$$



$$\begin{aligned}
[\varphi_0] &= -l_{01} \int_0^1 m_{01} y_{m01} \frac{\partial^2 \vartheta(1-s)}{\partial t^2} \cdot \frac{l_{01}^2}{\lambda_{01}^2 E_{01} J_{01}} \cdot U(s) ds; \\
[\varphi_1] &= -l_{12} \int_0^1 m_{12} y_{m12} \frac{\partial^2 \vartheta(1-s)}{\partial t^2} \cdot \frac{l_{12}^2}{\lambda_{12}^2 E_{12} J_{12}} \cdot U(s) ds; \\
[\varphi_2] &= -l_{12} \int_0^1 m_{12} y_{m12} \frac{\partial^2 \vartheta(s)}{\partial t^2} \cdot \frac{l_{12}^2}{\lambda_{12}^2 E_{12} J_{12}} \cdot U(1-s) ds; \\
[\vartheta_0] &= -l_{01} \int_0^1 m_{01} y_{m01} \frac{\partial^2 \vartheta(1-s)}{\partial t^2} \cdot \frac{l_{01}}{G_{01} J_{k01}} \cdot \frac{\sin \alpha_{01} s}{\alpha_{01}} ds; \\
[\vartheta_1] &= -l_{12} \int_0^1 m_{12} y_{m12} \frac{\partial^2 \vartheta(1-s)}{\partial t^2} \cdot \frac{l_{12}}{G_{12} J_{k12}} \cdot \frac{\sin \alpha_{12} s}{\alpha_{12}} ds; \\
[\vartheta_2] &= -l_{12} \int_0^1 m_{12} y_{m12} \frac{\partial^2 \vartheta(s)}{\partial t^2} \cdot \frac{l_{12}}{G_{12} J_{k12}} \cdot \frac{\sin \alpha_{12} (1-s)}{\alpha_{12}} ds.
\end{aligned}$$

Откуда получим  $W_{11}(i\omega) \dots W_{16}(i\omega)$  (рис.4).

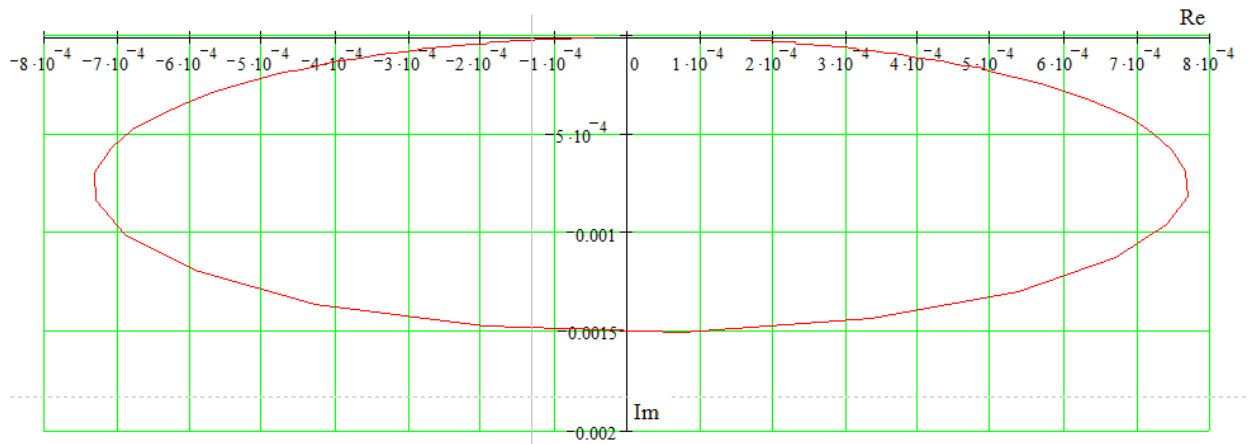


Рис.4. АФЧХ  $W_{11}(i\omega)$

Известно, что каждому витку АФЧХ соответствует один член ряда в разложении по форме колебаний. Между экстремальными точками АФЧХ и коэффициентами соответствующих членов ряда существует однозначная связь, которая используется в настоящей работе для осуществления обратного преобразования Лапласа.

$$W(i\omega) = \sum_{n=1}^s \frac{k_n}{-T_{2n}^2 \omega^2 + i\omega T_{1n} + 1}, \quad (22)$$

где  $k_n = A_n \frac{T_{1n}}{T_{2n}}$  – коэффициент усиления;  $T_{2n} = \frac{1}{\omega_n}$ ,  $\frac{T_{1n}}{T_{2n}} = 1 - \frac{\omega_{n\max}^2}{\omega_n^2}$  – постоянные времени.

Зависимость  $1 - \frac{\operatorname{Re}((c_1 + i\omega(1 + c_2))W(i\omega)f, f)}{(hf, f)}$  показана на рис.5.

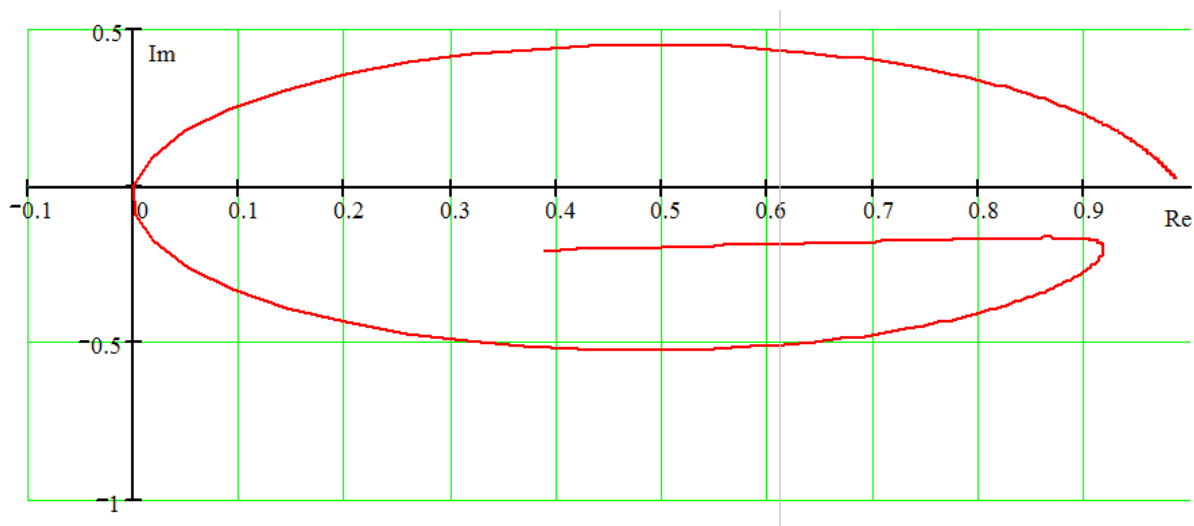


Рис. 5.

На рис. 5 показана область, где происходит потеря устойчивости, откуда следует скорость флаттера  $U_{кр} = 15 м/с$ , частота флаттера  $\omega_{кр} = 11 рад/с$ , для крыла с параметрами:  $l = 4 м$ ,  $J = 2,204 \cdot 10^{-6} м^4$ ,  $J_k = 4,524 \cdot 10^{-6} м^4$ ,  $E = 72 ГПа$ . Оказывается, что частота флаттера близка к частоте собственных колебаний крыла при изгибе, которая равна  $\omega_1 = 10,9 рад/с$  [5].

Выводы:

1. Разработан новый подход к решению задачи флаттера крыла в дозвуковом потоке газа.
2. Решены тестовые задачи, на этой основе построен МКЭ, когда длина конечного элемента неограниченна, это позволяет учитывать переменность сечения крыла, наличие сосредоточенных масс, например двигателя, а также стреловидность крыла.
3. Данный метод является более компактным, благодаря чему снижаются вычислительные затраты.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фын Я. Ц. Введение в теорию аэроупругости. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 524 с.
2. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 340 с.
3. Санкин Ю. Н. Динамические характеристики вязко-упругих систем с распределенными параметрами // Саратов: Издательство Саратовского университета, 1977. – 312 с.
4. Санкин Ю. Н. Частотный критерий устойчивости нелинейных замкнутых систем, включающих вязкоупругое звено с распределенными параметрами // Труды СВМО, 2005, Т.7, №1.
5. Санкин Ю. Н., Олейников К. В. Частотный метод в задаче о флаттере крыла в дозвуковом потоке газа // Автоматизация процессов управления, 2011. – №3 (25).

Ю. Н. Санкин, П. Ю. Павлов (г. Ульяновск)

## УСТОЙЧИВОСТЬ ФРЕЗЕРНОЙ ГОЛОВКИ, НОСИМОЙ РОБОТОТЕХНИЧЕСКИМ УСТРОЙСТВОМ

В настоящее время существуют робототехнические обрабатывающие станки, способные производить обработку сложных поверхностей с высокой точностью. Однако номенклатура обрабатываемых материалов ограничивается пенопластом, деревом, камнем и, в крайнем случае, алюминием. Существующие робототехнические обрабатывающие станки не способны обрабатывать такие материалы как сталь, титан и др. Это обуславливается тем, что подобные устройства состоят из большого количества податливых звеньев, имеют большое количество степеней свободы, что приводит к уменьшению жесткости конечного звена с инструментом.

Рассмотрим трехмерную модель робототехнического устройства (рис. 1).

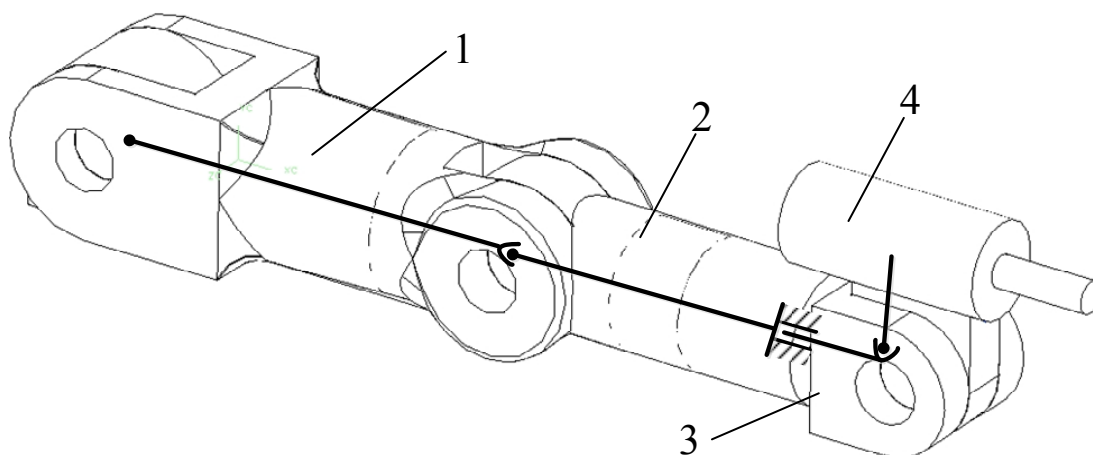


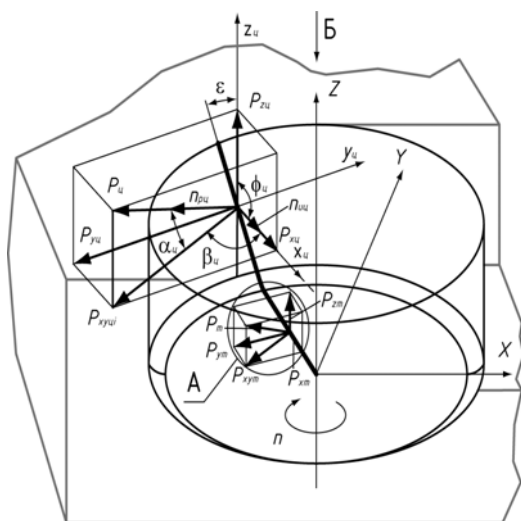
Рис. 1. Пример робототехнического обрабатывающего устройства

Звенья имеют характеристики, указанные в таблице 1.

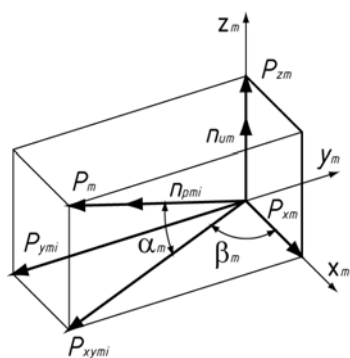
Таблица 1.

| № звена | Масса звена, кг | Длина звена, м | Момент инерции относительно осей, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ | Момент инерции относительно оси $y$ , $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ | Момент инерции относительно осей $z$ , $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ |
|---------|-----------------|----------------|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| 1       | 1170            | 1,35           | $59309650 \cdot 10^{-8}$                                       | $405449652 \cdot 10^{-8}$                                          | $393265472 \cdot 10^{-8}$                                           |
| 2       | 583             | 1,3            | $13584964 \cdot 10^{-8}$                                       | $102232195 \cdot 10^{-8}$                                          | $98094894 \cdot 10^{-8}$                                            |
| 3       | 345             | 0,5            | $9587287 \cdot 10^{-8}$                                        | $15540635 \cdot 10^{-8}$                                           | $14297355 \cdot 10^{-8}$                                            |
| 3       | 488             | 0,65           | $14374773 \cdot 10^{-8}$                                       | $29710980 \cdot 10^{-8}$                                           | $19897956 \cdot 10^{-8}$                                            |

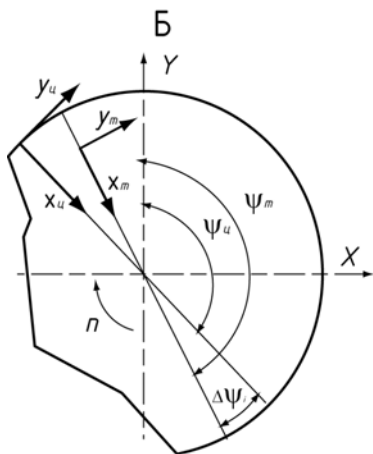
Длина устройства в вытянутом положении составляет 2,650 м.



А



б)



в)

Рис. 2. Силы действующие на  $i$ -й зуб концевой фрезы (а), силы действующие на цилиндрическую часть фрезы (б), силы действующие на торцовую часть фрезы (в)

С учетом влияния следов обработки, линейная динамическая характеристика процесса резания для  $i$ -го зуба фрезы в линейной постановке может быть записана в следующем виде[1,2]:

$$W_{pi}(p) = \frac{k_{pi}(\chi_i e^{-p\tau} - 1)}{T_{pi}p + 1}, \quad (1)$$

где  $k_{pi}$  – коэффициент резания на  $i$ -ом зубе фрезы;  $\tau = \frac{60}{nz}$  – время поворота фрезы на

один зуб (здесь  $n$  – частота вращения фрезы;  $z$  – число зубьев фрезы);

$T_{pi}(p) = \frac{m}{n} \frac{a_0 \xi_0}{v} = \frac{l_{pi}}{v}$  – постоянная времени

стружкообразования, зависящая от

скорости резания (здесь  $\frac{m}{n} = 1 \div 1,5$  –

постоянный коэффициент;  $a_0$  – заданная толщина срезаемого слоя или подача на

зуб;  $\xi = \frac{a_1}{a_0}$  – усадка стружки;  $a_1$  – толщина

стружки;  $v$  – скорость резания;  $l_{pi}$  – некоторый путь движения резца, определяющий формирование силы резания). При необходимости учет нелинейности можно осуществить согласно методике, изложенной в работе [3].

Ранее в работах [2, 4] была исследована устойчивость процесса торцевого и концевой фрезерования. В данной работе рассматривается концевое фрезерование робототехническим устройством.

Рассмотрим процесс фрезерования концевой фрезой, когда основной съем материала осуществляется цилиндрической частью фрезы при полустойковой (чистой) обработке заготовок (рис. 2).

На рис. 2:  $\alpha_{\psi i}$  – угол наклона силы  $P_{\psi i}$  к обрабатываемой плоскости;  $\beta_{\psi i}$  – угол между горизонтальной проекцией  $P_{\psi i}$  и осью  $x_{\psi i}$  системы координат, связанной с  $i$ -ым зубом фрезы;  $\psi_{\psi i}$  – угол, определяющий текущее положение цилиндрической части  $i$ -го зуба относительно осей  $X, Y, Z$  неподвижной системы координат с центром  $O$  на оси фрезы;  $\alpha_{mi}$  – угол наклона силы  $P_{mi}$  к обрабатываемой плоскости;  $\beta_{mi}$  – угол между горизонтальной проекцией  $P_{mi}$  и осью  $x_{mi}$ ;  $\psi_{mi}$  – угол, определяющий текущее положение торцевой части  $i$ -го зуба относительно осей  $X, Y, Z$ ;  $\varepsilon$  – угол винтовой канавки;  $\psi_{\psi i} = \psi_{mi} - \Delta\psi_i$ , где  $\Delta\psi_i$  – разность углов, определяющих положение зубьев цилиндрической и торцевой части фрезы относительно единой системы координат;  $\Delta\psi_i = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{B_{\psi} \operatorname{tg} \varepsilon}{2D}\right)$ , где  $D$  – диаметр фрезы;  $B_{\psi}$  – предполагаемая ширина фрезерования.

Проекция силы  $P_{\psi i}$  на оси  $x_{\psi i}, y_{\psi i}, z_{\psi i}$ , определяются следующим образом:

$$P_{x\psi i} = P_{\psi i}^0 \cos \alpha_{\psi i} \cdot \sin \beta_{\psi i}; P_{y\psi i} = P_{\psi i}^0 \cos \alpha_{\psi i} \cdot \cos \beta_{\psi i}; P_{z\psi i} = P_{\psi i}^0 \sin \alpha_{\psi i};$$

Проекция силы  $P_{\psi i}$  на оси  $X, Y, Z$  будут:

$$P_{X\psi i} = P_{\psi i}^0 \cos \alpha_{\psi i} \cdot \sin(\beta_{\psi i} + \psi_{\psi i}); P_{Y\psi i} = P_{\psi i}^0 \cos \alpha_{\psi i} \cdot \cos(\beta_{\psi i} + \psi_{\psi i}); P_{Z\psi i} = P_{\psi i}^0 \sin \alpha_{\psi i};$$

Орт силы  $P_{\psi i}$ :

$$n_{p\psi i} = \left| \cos \alpha_{\psi i} \cdot \sin(\beta_{\psi i} + \psi_{\psi i}); \cos \alpha_{\psi i} \cdot \cos(\beta_{\psi i} + \psi_{\psi i}); \sin \alpha_{\psi i} \right|^T.$$

Орт нормали к поверхности резания цилиндрической части зуба:

$$n_{u\psi i} = \left| \sin \varphi_{\psi i} \cdot \sin \psi_{\psi i}; \sin \varphi_{\psi i} \cdot \cos \psi_{\psi i}; \cos \varphi_{\psi i} \right|^T.$$

Учитывая, что  $\varphi_{\psi i} = \frac{\pi}{2}$ , получаем:  $n_{u\psi i} = \left| \sin \psi_{\psi i}; \cos \psi_{\psi i}; 0 \right|^T.$

Проекция силы  $P_{mi}$  на оси  $x_{mi}, y_{mi}, z_{mi}$ :

$$P_{xmi} = P_{mi}^0 \cos \alpha_{mi} \cdot \sin \beta_{mi}; P_{ymi} = P_{mi}^0 \cos \alpha_{mi} \cdot \cos \beta_{mi}; P_{zmi} = P_{mi}^0 \sin \alpha_{mi}.$$

Проекция силы  $P_{mi}$  на оси  $X, Y, Z$  будут:

$$P_{Xmi} = P_{mi}^0 \cos \alpha_{mi} \cdot \sin(\beta_{mi} + \psi_{mi}); P_{Ymi} = P_{mi}^0 \cos \alpha_{mi} \cdot \cos(\beta_{mi} + \psi_{mi});$$

$$P_{Zmi} = P_{mi}^0 \sin \alpha_{mi}.$$

Орт силы  $P_{mi}$ :

$$n_{pmi} = \left| \cos \alpha_{mi} \cdot \sin(\beta_{mi} + \psi_{mi}); \cos \alpha_{mi} \cdot \cos(\beta_{mi} + \psi_{mi}); \sin \alpha_{mi} \right|^T.$$

Орт нормали к поверхности резания торцевой части зуба:

$$n_{umi} = \left| \sin \varphi_{mi} \cdot \sin \psi_{mi}; \sin \varphi_{mi} \cdot \cos \psi_{mi}; \cos \varphi_{mi} \right|^T.$$

Так как  $\varphi_{mi} = 0$ , получаем:  $n_{umi} = \left| 0; 0; 1 \right|^T.$

Суммарная сила резания записывается следующим образом:

$$P = \sum_{i=1}^{Sn} P_{\psi i} + \sum_{i=j}^{Sm} P_{mi}, \quad (2)$$

где  $P_{ui} = P_u^0 n_{pui}$ ,  $P_{mi} = P_m^0 n_{pmi}$ .

Модуль силы резания на  $i$ -ом зубе[3]:

$$P_i^0 = W_p(p) u_{ni} = W_p(p) n_{ui}^T u, (3)$$

где  $u_{ni}$  – проекция относительного перемещения между резцом и заготовкой на нормаль к поверхности резания,  $u$  – относительное перемещение между фрезой и заготовкой от действия всех сил резания на зубьях.

$$U = W(p)P, (4)$$

где  $W(p)$  – суммарная передаточная функция несущей системы станка и заготовки.

Учитывая (3), выражение (2) можно представить в виде:

$$P = \left[ \sum_{i=1}^{S_n} \frac{k_{pu} (\chi_{ui} e^{-p\tau} - 1)}{T_{pu} p + 1} n_{ui}^T n_{pui} + \sum_{j=1}^{S_m} \frac{k_{pm} (\chi_{mj} e^{-p\tau} - 1)}{T_{pm} p + 1} n_{umj}^T n_{pmj} \right] u, (5)$$

где  $k_{pu} = k B_u$  – коэффициент резания для цилиндрической части зуба;  $k_{mj} = k B_m$  – коэффициент резания для торцевой части зуба;  $B_u$ ,  $B_m$  – ширина срезаемого слоя соответственно цилиндрической и торцевой частью фрезы;  $k$  – коэффициент удельной силы резания.

Отсюда:

$$P = B_u k \left[ \sum_{i=1}^{S_n} \frac{k_{pu} (\chi_{ui} e^{-p\tau} - 1)}{T_{pu} p + 1} n_{ui}^T n_{pui} + \sum_{j=1}^{S_m} \frac{\frac{B_m}{B_u} (\chi_{mj} e^{-p\tau} - 1)}{T_{pm} p + 1} n_{umj}^T n_{pmj} \right] u; (6)$$

$$P \approx B_u k \frac{(\chi_i e^{-p\tau} - 1)}{T_p p + 1} R u,$$

где  $R = \left[ \sum_{i=1}^{S_u} n_{umi}^T n_{pmi} + \sum_{j=1}^{S_m} \frac{B_m}{B_u} n_{umj}^T n_{pmj} \right]$  – матрица коэффициентов направления.

Подставив (6) в (4), получим:

$$W(p) B_u k \frac{(\chi_i e^{-p\tau} - 1)}{T_p p + 1} R u = u, B_u k \frac{(\chi_i e^{-p\tau} - 1)}{T_p p + 1} R W(p) P = P.$$

Так как  $P = P^0 n_p$  (орт силы  $P$ ), получим:

$$B_u k \frac{(\chi_i e^{-p\tau} - 1)}{T_p p + 1} R W(p) n_p = n_p.$$

Умножив скалярно обе части равенства на  $n_p$ :

$$\left( B_u k \frac{(\chi_i e^{-p\tau} - 1)}{T_p p + 1} R W(p) n_p \right)^T n_p = n_p^T n_p = 1. (7)$$

При этом данное равенство возможно только тогда, когда левая часть принимает вещественное значение, при этом  $p=i\omega$ .

Из равенства (7) получим ширину срезаемого слоя на цилиндрической части при фиксированном отношении  $B_y/B_m$ :

$$B_y = \frac{1}{-\operatorname{Re} \left[ k \frac{(\chi_i e^{-p\tau} - 1)}{T_p p + 1} (RW(p)n_p)^T n_p \right]}. \quad (8)$$

Рассмотрим задачу, когда робототехническое устройство находится в вытянутом положении, а концевая фреза находится на конце манипулятора. В этом случае получим систему в виде стержня с массой на конце. Заготовку не учитываем.

Исходные данные: диаметр фрезы  $D=10$  мм; число зубьев фрезы  $z=8$ ; частота вращения фрезы  $n=3000$  об/мин; коэффициент перекрытия  $\chi=1$ ; постоянная времени стружкообразования  $T_p = 1 \cdot 10^{-3}$ ; коэффициент удельной силы резания  $k=2 \cdot 10^9 \frac{H}{M}$ ; матрица коэффициентов направления

$$R = \begin{pmatrix} 2,24 & 0,453 & -0,43 \\ 1,915 & 1,777 & -0,503 \\ -18,55 & -10,481 & 4,275 \end{pmatrix}.$$

АФЧХ полученной системы представлено на рис. 3

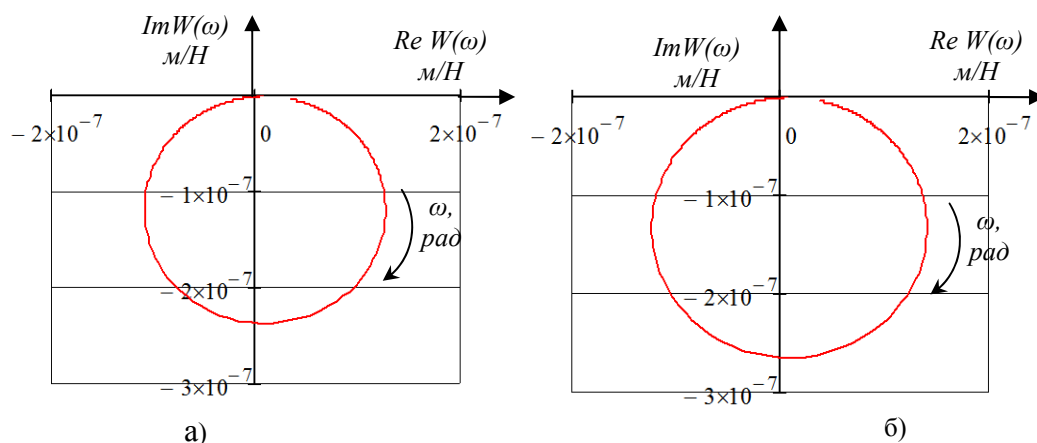


Рис. 3. АФЧХ системы: а – в направлении ОУ, б – в направлении ОZ

АФЧХ разомкнутой системы (знаменатель выражения (8)) показана на рис. 4.

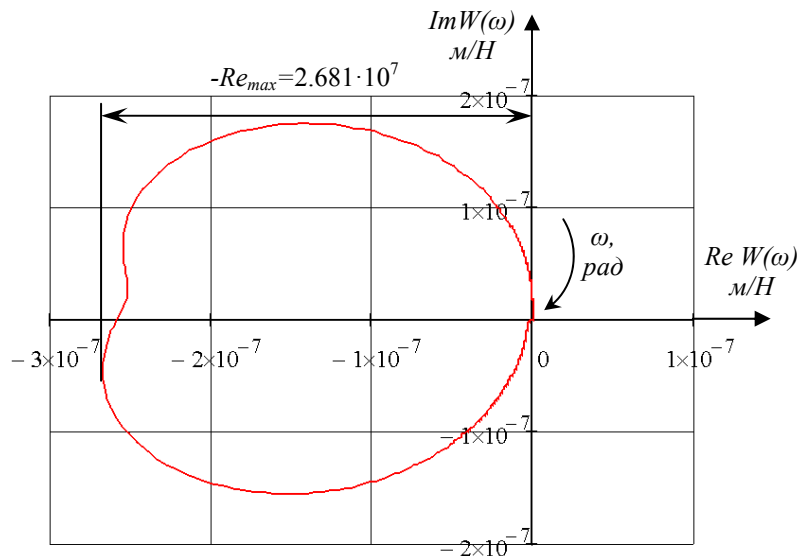


Рис. 4. АФЧХ разомкнутой системы

Результаты расчета показали, что устойчивым является режим, когда ширина среза не превышает 1,87 мм. Это говорит о том, что система в данном виде не подходит для обработки твердых металлов из-за низкой производительности.

Увеличим ширину среза до 3 мм. Для этого увеличим момент инерции в 2 раза. Примем  $I_y = 3,371 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $I_z = 3,488 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $m = 4200 \text{ кг}$ .

АФЧХ новой системы представлено на рис. 5.

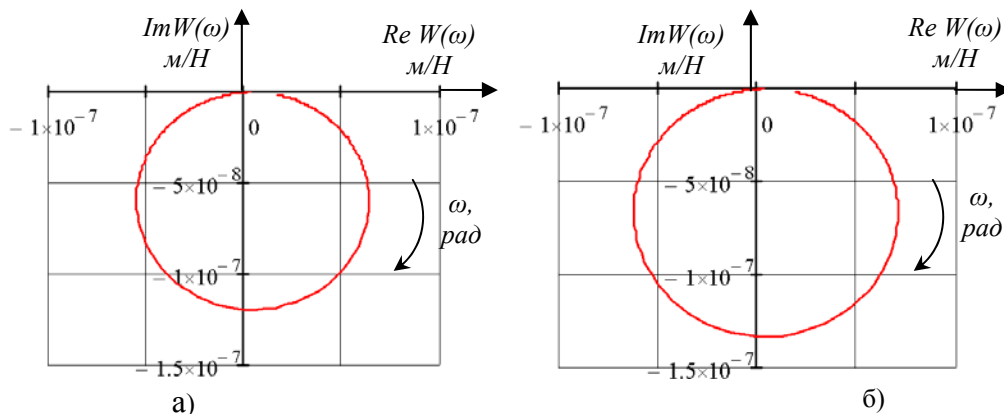


Рис. 5. АФЧХ новой системы: а – в направлении ОУ, б – в направлении ОZ

АФЧХ новой разомкнутой системы (знаменатель выражения (8)) приведена на рис. 6.



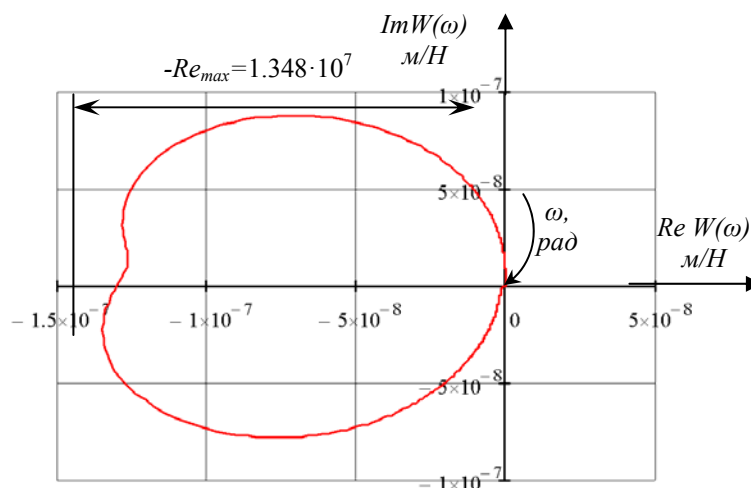


Рис. 6. АФЧХ новой разомкнутой системы

Результаты расчета показали, что устойчивым является режим, когда ширина среза не превышает 3,7 мм, что позволит производить чистовую обработку твердых металлов.

#### Вывод

Рассчитана ширина срезаемого слоя робототехническим устройством и подобраны его характеристики, позволяющие производить чистовую обработку при фрезеровании концевой фрезой с учетом влияния её торцевой части из условия устойчивости процесса резания.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кудинов, В. А. Динамика станков / В. А. Кудинов. – М: Машиностроение, 1966. – 358 с.
2. Санкин, Ю. Н. Устойчивость фрезерных станков при резании / Ю. Н. Санкин // Вестник машиностроения, 1984. – № 4. – С. 59 - 62.
3. Санкин, Ю. Н. Устойчивость фрезерных станков при нелинейной характеристике процесса резания / Ю. Н. Санкин, Н. Ю. Санкин // СТИН, 2002. – №6. – С. 24 - 27.
4. Санкин Ю. Н. Устойчивость обработки тонкостенных заготовок концевыми фрезами/ Санкин Ю. Н., Явкин С. А., Ахметов К. Ю. // Вестник УлГТУ, 2006. – №4. – С. 33 - 36.

**Ю. Н. Санкин, Н. А. Юганова** (г. Ульяновск)

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАГОТОВКИ КОВОЧНОГО МОЛОТА

*Рассмотрена задача математического моделирования заготовок ковочных молотов в виде вязкоупругого тела Максвелла, испытывающего ударные нагрузки. Частотным методом получена оценка осадки заготовки при ковке. Проведена экспериментальная проверка адекватности построенной математической модели.*

Ковочный молот (рис. 1) имеет падающие части: поршень, шток, бабу и верхний боек, который крепится к бабе молота. Нижний боек крепится к плите, закрепленной в шаботе.

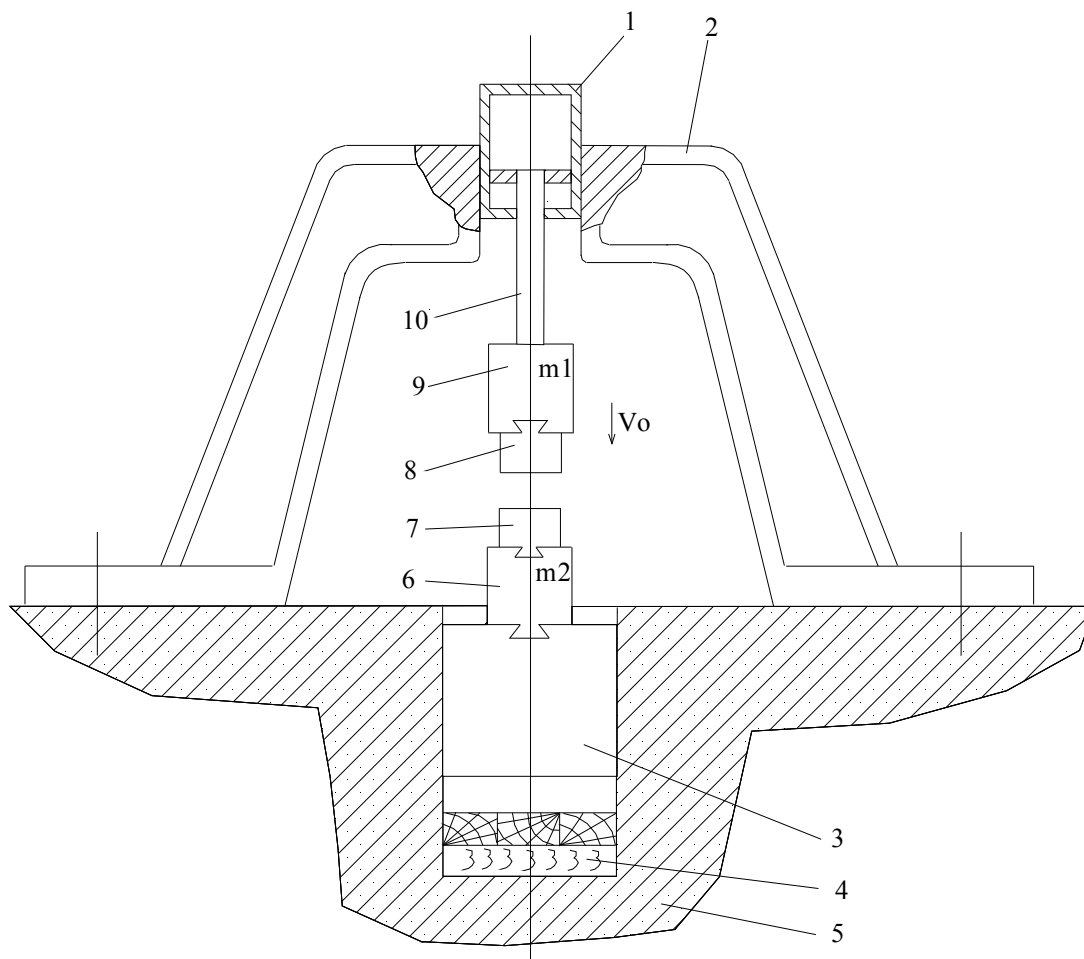


*Рис. 1. Паровоздушный ковочный молот с двустоечной станиной арочного типа: 1 – поршень; 2 – стойка станины молота; 3 – шабот; 4 – подкладка из дубовых брусьев; 5 – фундамент; 6 – подушка; 7 – нижний боек; 8 – верхний боек; 9 – баба; 10 – шток.*

Обрабатываемая заготовка в процессе деформирования находится на нижнем бойке. Верхний боек вместе с бабой молота осуществляет возвратно-поступательное движение, нанося удары по заготовке.

Заготовки ковочных молотов при ударном деформировании проявляют упругие, пластические и вязкие свойства.

При высоких уровнях нагружения, когда в заготовке возникают значительные деформации, материал частично теряет упругие свойства: при разгрузке его первоначальные размеры и форма полностью не восстанавливаются, а при полном снятии внешних нагрузок фиксируются остаточные деформации, т.е. заготовка проявляет пластические свойства.

Основная часть энергии удара молота расходуется на деформирование заготовки (работа деформации), часть энергии теряется на упругие деформации бойков, бабы, штока, стоек, станин, колебание шабота, фундамента и др. Заготовка в процессе деформирования поглощает механическую энергию (работу) в процессе ударной нагрузки, тем самым проявляя вязкие свойства.

Математически свойство упругости выражается в установлении взаимно однозначной функциональной зависимости между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций (закон Гука):

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (1)$$

где:  $\sigma$  – нормальное напряжение в поперечном сечении, Па;  $E$  – модуль упругости, МПа;  $\varepsilon$  – относительное удлинение (сжатие).

Идеальным линейным упругим элементом является пружина (рис. 2).

Для вязкого элемента:

$$\sigma = \eta D\varepsilon, \quad (2)$$

$$F = \eta Da,$$

где  $F$  – сила,  $\eta$  – коэффициент вязкости амортизатора,  $D$  – оператор дифференцирования по времени. Примером идеального линейного вязкого элемента служит амортизатор (рис. 3).

Обобщая упругие и вязкие свойства заготовки ковочного молота рассмотрим комбинацию упругих и вязких элементов. Одним из наиболее простейших последовательно соединенных элементов является элемент Максвелла (рис. 4).



Рис. 2



Рис. 3

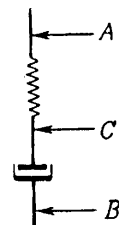


Рис. 4

Для вязко-упругого элемента Максвелла существуют следующие зависимости:

$$\frac{\partial}{\partial t} S_{ij} + \frac{S_{ij}}{t_M} = 2G_M \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t},$$

где  $t_M$  – время релаксации напряжений;  $S_{ij}$  – тензор напряжений;  $\varepsilon_{ij}$  – тензор деформаций.

Вводя параметр преобразования Лапласа  $p = \frac{\partial}{\partial t}$ , и учитывая, что при построении АФЧХ  $p = i\omega$  получим:

$$\left( i\omega + \frac{1}{t_M} \right) S_{ij} = 2G_M \varepsilon_{ij} i\omega;$$

$$S_{ij} = 2G_M \frac{i\omega \varepsilon_{ij}}{\left( i\omega + \frac{1}{t_M} \right)} = 2G_M \frac{i\omega \varepsilon_{ij} t_M}{(1 + t_M i\omega)}.$$

Откуда получаем выражения для характеристики  $E$ :

$$\bar{E} = E \frac{t_M i\omega}{1 + t_M i\omega}.$$

Коэффициент  $t_M$  определяется экспериментальным путем.

Для заготовки, обладающей одновременно упругостью, вязкостью и пластичностью в различных формах и соотношениях, и моделируемой элементом Максвелла, учет рассеяния энергии будем осуществлять согласно [1].

$$\bar{E} = E(1 + i\gamma_1), \quad \bar{C} = C(1 + i\gamma_2),$$

$$\bar{G} = G(1 + i\gamma_3), \quad \bar{\xi} = \xi(1 + i\gamma_4),$$

где  $\gamma$  – коэффициент сопротивления.

Рассмотрим частотный метод динамического расчета нестационарных колебаний падающих частей ковочного молота в процессе ударного взаимодействия с заготовкой. Предлагаемая методика использует модификацию метода конечных элементов (МКЭ), основанную на точном интегрировании дифференциального уравнения для конечного элемента [2] и позволяет рассчитывать продольные и поперечные колебания стержней ступенчато-переменного сечения с учетом или без учета рассеяния энергии при соударении с жестким препятствием [3].

Предлагаемый подход справедлив для стержней неограниченной длины, поэтому разбиение на участки молота можно проводить в любых сечениях, но наиболее целесообразно там, где меняются физические или геометрические характеристики объекта.

Таким образом, расчетная схема ковочного молота, представленная на рис. 5 будет состоять из 6 узлов, на участках которых имеют место продольные колебания. Участок 3 – 4 моделирует стык. На завершающей

стадии удара верхний боек считается присоединившимся к заготовке, что подтверждается экспериментально.

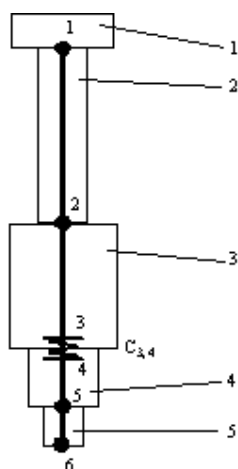


Рис. 5. Падающие части ковочного молота при ударе о заготовку:  
1 – поршень, 2 – шток, 3 – баба, 4 – верхний боек, 5 – заготовка.

Расчетной схеме (рис. 5) соответствует следующая система разрешающих уравнений:

$$\begin{aligned} S_{1,2}U_1 - T_{1,2}U_2 &= -T_{1,2}[u_2]; \\ -T_{1,2}U_1 + (S_{1,2} + S_{2,3})U_2 - T_{2,3}U_3 &= -T_{1,2}[u_1] - T_{2,3}[u_3]; \\ -T_{2,3}U_2 + (S_{1,2} + c_{3,4})U_3 - c_{3,4}U_4 &= -T_{2,3}[u_2]; \\ (S_{4,5} + c_{3,4})U_4 - c_{3,4}U_3 - T_{4,5}U_5 &= -T_{4,5}[u_5]; \\ -T_{4,5}U_4 + (S_{4,5} + S_{5,6})U_6 &= -T_{4,5}[u_4], \end{aligned}$$

где  $S_{nk} = \frac{E_{nk} \cdot (1 + i\omega\gamma_{kn}) \cdot F_{nk}}{l_{nk}} - \frac{\mu_{nk} \cdot l_{nk}}{3} \cdot \omega^2$ ,  $T_{nk} = \frac{E_{nk} \cdot (1 + i\omega\gamma_{kn}) \cdot F_{nk}}{l_{nk}} + \frac{\mu_{nk} \cdot l_{nk}}{6} \cdot \omega^2$ ;

$$[u_n] = -\frac{\mu_{kn} V_0 l_{kn}^2}{E_{kn} F_{kn} (1 + i\omega\gamma_{kn})} \cdot \frac{1 - \cos \alpha_{kn}}{\alpha_{kn}^2}; \quad [u_k] = [u_n]; \quad \alpha_{kn} = \omega l_{kn} \sqrt{\frac{\mu_{kn}}{F_{kn} E_{kn} (1 + i\omega\gamma_{kn})}};$$

$n, k$  – индексы, указывающие, соответственно начало и конец участка;  
 $j$  – номер узла ( $i = 1, 2 \dots 19$ );  $i$  – мнимая единица,  $\sqrt{i} = -1$ ;  $E_{nk}$  – модуль упругости участка  $nk$ , Па;  $F_{nk}$  – площадь поперечного сечения участка  $nk$ ,  $\text{м}^2$ ;  
 $l_{nk}$  – длина участка  $nk$ , м;  $\mu_{nk}$  – масса единицы длины стержня участка  $nk$ ,  $\frac{\text{кг}}{\text{м}}$ ;  
 $V_0$  – скорость соударения с заготовкой, м/с;  $\gamma_{nk}$  – коэффициент сопротивления участка  $nk$ ;  $\omega$  – частота колебаний,  $\text{с}^{-1}$ .

Решение построенной системы уравнений осуществлялось при исходных данных, представленных в табл. 1, при  $V=7$  м/с. Параметры падающих частей соответствуют параметрам ковочного паровоздушного молота модели М1345. В работе [4] показано, что модуль упругости стали, нагретой до температуры 1200 ... 1300 °С, уменьшается в 25 ... 30 раз по сравнению с холодной сталью,

а меди – уменьшается в 6 ... 7 раз при нагреве с 15 до 800 °С, алюминия – в 30 ... 35 раз при нагреве до 600 °С.

Таблица 1.

Исходные данные для расчетов

| Начало участка | Конец участка | $l$ , м                                   | $E$ , Па            | $F$ , м <sup>2</sup> | $\rho$ , кг/м <sup>3</sup> |
|----------------|---------------|-------------------------------------------|---------------------|----------------------|----------------------------|
| 1              | 2             | 1,6                                       | $2,1 \cdot 10^{11}$ | 0,024                | 7800                       |
| 2              | 3             | 0,906                                     | $2,1 \cdot 10^{11}$ | 0,39                 | 7800                       |
| 3              | 4             | пружина с жесткостью $75 \cdot 10^6$ кг/м |                     |                      |                            |
| 4              | 5             | 0,3                                       | $2,1 \cdot 10^{11}$ | 0,204                | 7800                       |
| 5              | 6             | 0,115                                     | $7 \cdot 10^9$      | 0,0016               | 7620                       |

В результате численных расчетов, осуществленных с помощью программного комплекса MathCAD2001, получен переходный процесс в точке контакта верхнего бойка молота с заготовкой, представленный на рис. 6. Получено, что осадка заготовки после первого удара составляет 21 мм. Что согласуется с экспериментальными данными.

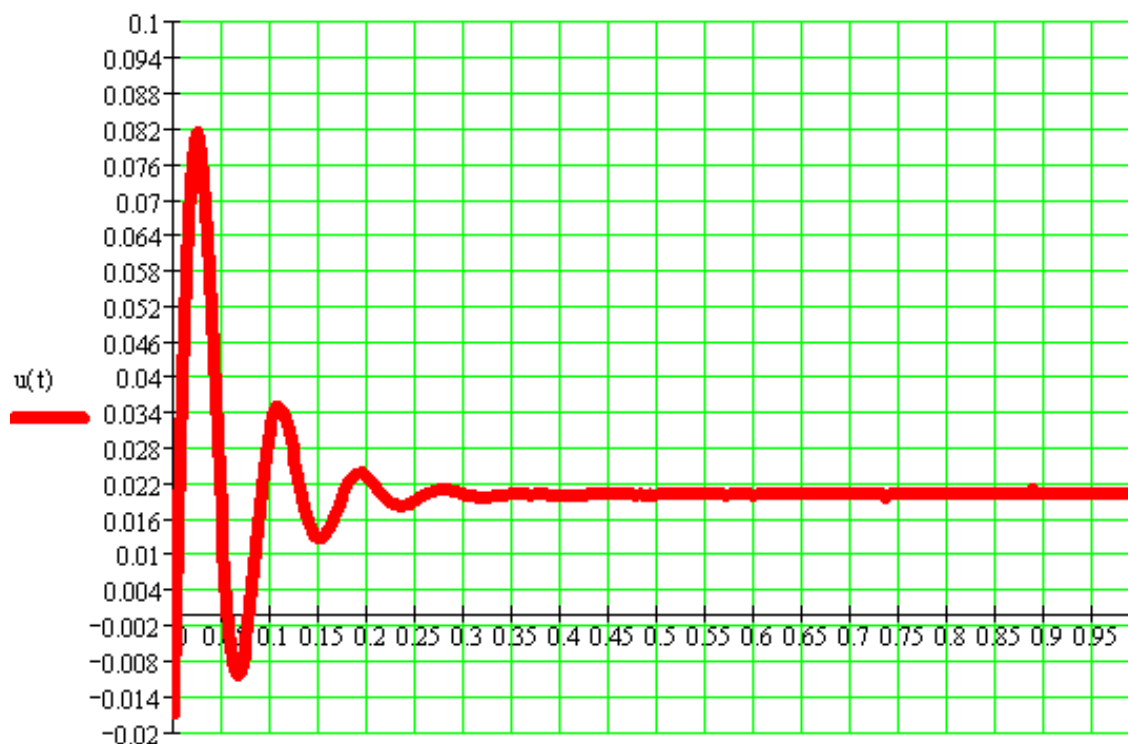


Рис. 6. График перемещений 5 узла системы

Для проверки адекватности построенной математической модели в основном производстве ЗАО «Авиастар-СП» на операциях свободнойковки были проведены испытания с целью исследования осадки заготовки в процессе ударного взаимодействия с падающими частями ковочного молота при фиксированном ходе бабы. Испытания проводились в условиях выполнения производственной программы при ковке заготовок в количестве 5 шт. Для контроля размеров заготовки до и после удара падающих частей молота использовали кронциркуль.

Условия испытаний:

1. Молот ковочный паровоздушный арочного типа с массой падающих частей 3150 кг. Модель М1345. Заводской номер № 107.
2. Режимковки – режим единичного удара.
3. Результаты опытно – промышленных испытаний представлены в табл. 2.

**Таблица 2.**

**Результаты экспериментальных исследований**

|   | Материал заготовки | Температураковки, °С | Форма и размеры заготовки | Ход бабы, мм | Размеры заготовки после 1 удара |
|---|--------------------|----------------------|---------------------------|--------------|---------------------------------|
| 1 | 30ХГСА             | 1170                 | Ø 45×115                  | 635          | Ø 50×93                         |
| 2 | 30 ХГСА            | 1170                 | Ø 45×80                   | 670          | Ø 50×65                         |
| 3 | 12Х18Н10Т          | 1170                 | Ø 210×92                  | 448          | Ø 220×83                        |
| 4 | АК6                | 450                  | 110×140×86                | 610          | 95×96×145                       |
| 5 | АК6                | 465                  | Ø 110×240                 | 510          | Ø 50×93                         |

По результатам экспериментальных исследований составлен и подписан акт опытно-промышленных испытаний с представителями ОАО «Авиастар-СП» и УлГТУ.

Получили, что для заготовки, выполненной из стали 30ХГСА, при температурековки 1170<sup>0</sup>С, Ø 45×115, осадка составляет 22 мм, что хорошо согласуется с теоретическим расчетом. Расхождение составляет 4,5%.

Вывод:

- Построена математическая модель заготовки ковочного молота в виде тела Максвелла;
- выполнена проверка адекватности построенной математической модели, путем сравнения теоретических расчетов с экспериментальными данными;
- получено хорошее совпадение теоретических и экспериментальных результатов. Погрешность расчетов составила 5 %.

Предлагаемый подход теоретического расчета осадки заготовки имеет ценность, заключающуюся в возможности предварительной оценки ее прочности, в зависимости от разных технологических режимовковки.

Из производственной практики известны нередкие случаи образования трещин на заготовках ковочных молотов, осколков, причиняющих вред жизни и здоровью рабочих и приводящие к материальным потерям на производстве.

Возможность теоретического расчета напряжений и деформаций, возникающих в деталях ковочного молота и заготовки позволяет назначать оптимальные технологические режимыковки.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сорокин, Е. С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем / Е. С. Сорокин. – М.: Гостройиздат, 1960. – 131 с.
2. Санкин, Ю. Н. Динамические характеристики вязко-упругих систем с распределенными параметрами / Ю. Н. Санкин. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1977. – 312 с.
3. Санкин, Ю. Н. Продольные колебания упругих стержней ступенчато-переменного сечения при соударении с жёстким препятствием / Ю. Н. Санкин, Н. А. Юганова // Прикладная математика и механика. – М.: Изд-во «Наука», 2001. – Том 65. Вып. 3. – С. 444-450.
4. Драпкин, Б. М. О температурной зависимости модуля упругости металлов / Б. М. Драпкин, В. К. Кононенко, Б. Н. Леонов // Журнал «Перспективные материалы», Москва, 1998. – №2.



## ПОСТРОЕНИЕ ПРОБНЫХ РЕШЕНИЙ МЕТОДА ГАЛЁРКИНА В ВИДЕ МНОГОЧЛЕНОВ ДЛЯ ПРОСТЕЙШЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

*В работе для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка построена система пробных функций Галёркина для всех возможных вариантов разделённых линейных граничных условий. Установлены условия существования решения краевой задачи в виде аналитической на отрезке функции.*

I. Рассмотрим краевую задачу: требуется найти на отрезке  $[0;1]$  функцию  $y = f(x)$ , являющуюся решением дифференциального уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad (1)$$

и удовлетворяющую граничным условиям

$$\begin{cases} a_0 y(0) + a_1 y'(0) = a_2, \\ b_0 y(1) + b_1 y'(1) = b_2; \end{cases} \quad (2)$$

где  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  – заданные действительные числа, причём  $a_0^2 + a_1^2 \neq 0$ ,  $b_0^2 + b_1^2 \neq 0$ ;  $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ ;  $p(x), q(x), g(x)$  – заданные функции, непрерывные на  $[0;1]$ . Предполагается, что для получения численного приближения к существующему решению поставленной задачи будет применяться метод Галёркина [1]. В методе Галёркина последовательные приближения  $y_n(x)$  ищутся в виде пробных решений  $y_n(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^n C_k u_k(x)$ . Они строятся из системы дважды непрерывно дифференцируемых функций  $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$ , причём  $u_0(x)$  удовлетворяет условиям (2), а функции  $u_1(x), \dots, u_n(x)$ , называемые пробными функциями, линейно независимы на отрезке  $[0;1]$  и удовлетворяют однородным граничным условиям, которые получаются из условий (2) при  $a_2 = 0$  и  $b_2 = 0$ .

В этой работе для построения  $u_0(x)$  и линейно независимой на отрезке  $[0;1]$  системы функций  $u_1(x), \dots, u_n(x)$ , являющихся многочленами, применён метод неопределённых коэффициентов для всех возможных вариантов граничных условий (2).

1. Пусть  $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ , тогда условия (2) можно записать в виде

$$\begin{cases} y(0) + \alpha y'(0) = \delta, \\ y(1) + \beta y'(1) = \gamma; \end{cases}$$

где  $\alpha = a_1/a_0$ ,  $\delta = a_2/a_0$ ,  $\beta = b_1/b_0$ ,  $\gamma = b_2/b_0$ . Последовательно находим:

а) если  $1 + \beta - \alpha \neq 0$ , то

$$u_0(x) = \delta - \frac{\gamma - \delta}{1 + \beta - \alpha} (\alpha - x),$$

$$u_k(x) = \frac{1 + \beta(k+1)}{1 + \beta - \alpha} (\alpha - x) + x^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$y_n(x) = \delta - \frac{\gamma - \delta}{1 + \beta - \alpha} (\alpha - x) + \sum_{k=1}^n C_k \left( \frac{1 + \beta(k+1)}{1 + \beta - \alpha} (\alpha - x) + x^k \right);$$

б) если  $1 + \beta - \alpha = 0$ ,  $1 + m\beta \neq 0$ ,  $m \in N \setminus \{2, 3, \dots\}$ , то

$$u_0(x) = \delta + \frac{\gamma - \delta}{1 + 2\beta} x^2,$$

$$u_1(x) = -\alpha + x, \quad u_k(x) = -\frac{1}{1 + 2\beta} x^2 + \frac{1}{1 + \beta(k+1)} x^{k+1}, k = 2, 3, \dots, n;$$

$$y_n(x) = \delta + \frac{\gamma - \delta}{1 + 2\beta} x^2 + C_1(x - \alpha) + \sum_{k=2}^n C_k \left( -\frac{1}{1 + 2\beta} x^2 + \frac{1}{1 + \beta(k+1)} x^{k+1} \right);$$

с) если  $1 + \beta - \alpha = 0$ ,  $1 + 2\beta = 0$ , то

$$u_0(x) = \delta - 2(\gamma - \delta)x^2,$$

$$u_1(x) = 1 - 2x, \quad u_2(x) = x^2, \quad u_k(x) = x^2 - \frac{1}{k-1} x^{k+1}, k = 3, 4, \dots, n;$$

$$y_n(x) = \delta - 2(\gamma - \delta)x^2 + C_1(1 - 2x) + C_2x^2 + \sum_{k=3}^n C_k \left( x^2 - \frac{1}{k-1} x^{k+1} \right);$$

д) если  $1 + \beta - \alpha = 0$ ,  $1 + m\beta = 0$ ,  $m \in N \setminus \{1, 2\}$ , то

$$u_0(x) = \delta + \frac{m(\gamma - \delta)}{m-2} x^2, \quad u_1(x) = -\frac{m-1}{m} + x,$$

$$u_k(x) = \begin{cases} x^m, & \text{если } k = m; \\ \frac{1}{m-2} x^2 - \frac{1}{k-m} x^k, & \text{если } k \in \{3, 4, \dots, n\} \setminus \{m\}; \end{cases}$$

$$y_n(x) = \delta + \frac{m(\gamma - \delta)}{m-2} x^2 + C_1 \left( -\frac{m-1}{m} + x \right) + \sum_{k=2}^n C_k u_k(x).$$

2. Пусть  $a_0 \neq 0$ ,  $b_0 = 0$ , тогда условия (2) можно записать в виде

$$\begin{cases} y(0) + \alpha y'(0) = \delta, \\ y'(1) = \varepsilon; \end{cases}$$

где  $\varepsilon = b_2/b_1$ . Последовательно находим:

$$u_0(x) = \delta - \varepsilon(\alpha - x), \quad u_k(x) = \alpha - x + \frac{1}{1+k} x^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$y_n(x) = \delta - \varepsilon(\alpha - x) + \sum_{k=1}^n C_k \left( \alpha - x + \frac{1}{k+1} x^{k+1} \right).$$

3. Пусть  $a_0 = 0, b_0 \neq 0$  тогда условия (2) можно записать в виде

$$\begin{cases} y'(0) = \theta, \\ y(1) + \beta y'(1) = \gamma; \end{cases}$$

где  $\theta = b_2/b_1$ . Последовательно находим:

$$u_0(x) = \gamma - \theta(1 + \beta) + \theta x, \quad u_k(x) = 1 + \beta(k+1) - x^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$y_n(x) = \gamma - \theta(1 + \beta) + \theta x + \sum_{k=1}^n C_k (1 + \beta(k+1) - x^{k+1}).$$

4. Пусть  $a_0 = 0, b_0 = 0$  тогда условия (2) можно записать в виде

$$\begin{cases} y'(0) = \theta, \\ y'(1) = \varepsilon. \end{cases}$$

Последовательно находим:

$$u_0(x) = \varepsilon - \theta(1 - x), \quad u_1(x) = 1, \quad u_k(x) = 0.5x^2 - \frac{1}{k+1} x^{k+1}, \quad k = 2, 3, \dots, n,$$

$$y_n(x) = \varepsilon - \theta(1 - x) + C_1 \cdot 1 + \sum_{k=1}^n C_k \left( 0.5x^2 - \frac{1}{k+1} x^{k+1} \right).$$

II. Предположим, что решением задачи (1), (2) является аналитическая на отрезке  $[0;1]$  функция  $y = f(x)$ , т. е. функция разложимая в ряд по степеням  $x$ . Тогда пробное решение  $y_n(x)$ , например для второго варианта граничных условий, можно считать  $n$ -ой частичной суммой степенного ряда

$$\delta - \varepsilon(\alpha - x) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left( \alpha - x + \frac{1}{k+1} x^{k+1} \right),$$

который, при определённых значениях коэффициентов  $C_k$ , сходится к функции  $f(x)$ . Так как разложение аналитической функции в ряд по степеням  $x$  единственно [2], то должны выполняться равенства

$$f(0) = \delta - \alpha\varepsilon + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} C_n, \quad f'(0) = \varepsilon - \sum_{n=1}^{\infty} C_n, \quad \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = \frac{C_n}{n+1}, n \in N.$$

Отсюда следует, что аналитическая функция  $y = f(x)$  будет решением краевой задачи для уравнения (1) с граничными условиями

$$\begin{cases} y(0) + \alpha y'(0) = \delta, \\ y'(1) = \varepsilon. \end{cases}$$

тогда и только тогда, когда действительное число  $r = f'(0)$  является корнем уравнения с одним неизвестным  $z$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n+1}(z)}{n!} = \varepsilon - z.$$

В этом уравнении функции  $\varphi_{n+1}(z) = f^{(n+1)}(0)$  последовательно определяются при помощи уравнения (1), учитывая, что  $f(0) = \delta - \alpha z$ .

Например,

$$\begin{aligned} f''(0) &= g(0) - p(0)z - q(0)(\delta - \alpha z) = \varphi_2(z), \\ f^{(3)}(0) &= (g(x) - p(x)f'(x) - q(x)f(x))'|_{x=0} = \varphi_3(z). \end{aligned}$$

В итоге, решение краевой задачи можно задать в виде ряда

$$f(x) = \delta - \alpha(\varepsilon - x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi_n(r)}{n!} x^n.$$

Аналогичные результаты можно установить и для остальных рассмотренных выше вариантов граничных условий (2).

III. Если для дифференциального уравнения (1) на отрезке  $[a; b]$  поставлена краевая задача с граничными условиями

$$\begin{cases} c_0 y(a) + c_1 y'(a) = c_2, \\ d_0 y(b) + d_1 y'(b) = d_2; \end{cases}$$

то заменой независимой переменной по формуле  $t = (x - a)/(b - a)$  она сводится к задаче (1), (2).

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина / К. Флетчер. – М.: Мир, 1988. – 352с.
2. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа (в двух томах). Учебник для студентов университетов и вузов / Л. Д. Кудрявцев. – М.: Высшая школа, 1981. – Т.1. – 687 с.

А. О. Сыромясов (г. Саранск)

## ОДИНОЧНАЯ ЧАСТИЦА В ОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ

*Рассмотрена частица, помещенная в поток жидкости, вязкость которой зависит от температуры. Вдалеке от частицы поддерживается постоянный градиент температуры; набегающий поток в отсутствие градиента однороден. Течение описано в приближении Стокса. Найдены возмущения, вносимые частицей в поток, обнаружено, что они не затухают на бесконечности. Показано, что если градиент температуры не коллинеарен скорости набегающего потока, то частица вращается.*

Хорошо известна задача об обтекании частицы потоком жидкости с постоянной вязкостью [1, 2, 7]. В реальности вязкость является переменной величиной и зависит от ряда параметров, например, от температуры. Исследование течения жидкости с переменной вязкостью является практически важным: так, в пласте нефтесодержащей породы перепад температуры может создаваться для повышения текучести нефти.

В работе изучается обтекание одиночной частицы несжимаемой жидкостью, вязкость которой зависит от температуры по закону

$$\eta(T) = \eta_0 \left( 1 - \alpha \frac{T - T_0}{T_0} \right), \quad (1)$$

где  $T_0$  – некоторый «условный нуль» температуры,  $\eta_0 = \eta(T_0)$ . Безразмерная константа  $\alpha > 0$  является специфичной для каждой конкретной жидкости. Формула (1) может быть получена разложением более сложных зависимостей  $\eta(T)$  в ряд Тейлора в окрестности  $T_0$ . Она отражает тот факт, что с повышением температуры вязкость жидкости убывает.

Предполагается, что на жидкость не действуют внешние силы и моменты. Течение считается стационарным и настолько медленным, что инерцией можно пренебречь. В неподвижной ортонормированной системе координат, в которой положение произвольной точки задается радиус-вектором  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , общие уравнения движения имеют вид [5]:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = 0, \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \eta(T) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (2)$$

Здесь и далее  $p$  и  $\mathbf{u}$  – давление и скорость жидкости,  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера; по повторяющимся индексам осуществляется суммирование в пределах от 1 до 3.

В работе рассматривается случай, когда вдали от начала координат градиент температуры постоянен, а в отсутствие перепада температур поток жидкости на бесконечности однороден:

$$T \rightarrow T_0 + \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{T} = (T_1, T_2, T_3) = \text{const}, |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (3)$$

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{U}^{(0)} = \text{const}, |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, T = \text{const}. \quad (4)$$

Будем считать, что конвекцией можно пренебречь, но зато неоднородность температурного поля влияет (через вязкость) на скорость и давление.

Далее, пусть в жидкости взвешена одиночная твердая сферическая частица радиуса  $a$  с центром в начале координат. Она не движется поступательно, но может вращаться вокруг своего центра. На поверхности частицы выполнены условия прилипания:

$$u_i = \Gamma_{ij} x_j, |\mathbf{x}| = a. \quad (5)$$

Абсолютная угловая скорость частицы  $\Gamma_{ij}$  должна определяться из условия, что момент, действующий на частицу, равен нулю. Присутствие твердой сферы искажает и температурное поле, и течение. Поэтому требуется найти распределение температуры, скорости и давления и вычислить  $\Gamma_{ij}$ .

Известна задача о термофорезе частицы [3]. Это явление состоит в том, что вследствие перепада температуры и перераспределения напряжений частица начинает поступательно двигаться относительно жидкости. В отличие от этой задачи, в нашем случае величины  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{U}^{(0)}$  независимы друг от друга, а частица может вращаться.

Представим скорость и давление в виде

$$u_i = U_i + v_i, p = P + p', \quad (6)$$

где  $U_i$  и  $P$  задают «фон» (течение в отсутствие взвеси),  $v_i$  и  $p'$  – возмущение, вносимое частицей.

При наличии градиента температуры поток на бесконечности уже не будет однородным, поэтому сначала найдем «фон». Величины  $u_i = U_i$  и  $p = P$  должны удовлетворять (2), если температура задается равенством (3). Исходя из формулы (1), будем раскладывать искомые величины по малому параметру  $Q = T_j x_j / T_0$ :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^{(0)} + \mathbf{U}^{(1)} Q + \dots, P = P^{(0)} + P^{(1)} Q + \dots, \mathbf{U}^{(0,1)} = \text{const}, P^{(0,1)} = \text{const}.$$

Подставив эти выражения, а также  $\eta = \eta_0(1 - \alpha Q)$ , в (2), после упрощений получим с точностью до слагаемых порядка  $Q$ :

$$U_i = U_i^{(0)} + U_i^{(1)} T_j x_j / T_0, P = P^{(0)}, \mathbf{U}^{(1)} \perp \mathbf{T}. \quad (7)$$

Постоянный вектор  $\mathbf{U}^{(1)}$  можно определить, например, если на бесконечности задан тензор напряжений. Тем самым, «фон» в решении найден; перепад температуры приводит к возникновению градиента скорости.

Теперь найдем искажения, вносимые частицей. Обозначим отклонения температуры в жидкости и внутри частицы от значения  $T_0$  через  $T_f$  и  $T_p$ , соответственно. В отсутствие конвекции они подчиняются уравнениям

$$\Delta T_f = 0, \Delta T_p = 0$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} T_f &\rightarrow T \cdot \mathbf{x}, |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \\ T_f = T_p, \quad \kappa_f \frac{\partial T_f}{\partial n} &= \kappa_p \frac{\partial T_p}{\partial n}, \quad |\mathbf{x}| = a, \\ T_f(\mathbf{0}) &< \infty. \end{aligned}$$

Первое из них означает затухание возмущений далеко от частицы, второе – непрерывность температуры и теплового потока на поверхности сферы;  $\kappa_f$  и  $\kappa_p$  суть теплопроводности жидкости и частицы, соответственно. Решением этой задачи являются [2]

$$T_p = (1 + \kappa)T_j x_j, \quad T_f = T_j x_j - \kappa a^3 T_j L_j(\mathbf{x}) = T_j x_j \left[ 1 + \kappa \left( \frac{a}{|\mathbf{x}|} \right)^3 \right], \quad \kappa = \frac{\kappa_f - \kappa_p}{\kappa_p + 2\kappa_f}. \quad (8)$$

Мультиполи  $L_{i...j}$  задаются формулами

$$L_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|}, \quad L_{i...j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \dots \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right).$$

Для определения возмущений скорости и давления требуется подставить в (2) функции, заданные формулой (6). При этом величины  $U_i$  и  $P$  определяются равенствами (7), а вязкость – равенством (1). Температура в жидкости есть  $T = T_0 + T_f$ , причем  $T_f$  вычисляется по формуле (8).

Считая величину  $(T - T_0)/T_0$  малой, разложим  $\eta$ ,  $v_i$ ,  $p$  и  $\Gamma_{ij}$  по степеням малого параметра  $\delta = \Theta a/T_0$ , где  $\Theta = |\mathbf{T}|$ :

$$\eta = \eta_0 \left( 1 - \frac{\alpha}{\Theta a} T_f \right), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(1)} \delta + \dots, \quad p = p^{(0)} + p^{(1)} \delta + \dots, \quad \mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^{(1)} \delta + \dots$$

Разложение угловой скорости не содержит слагаемых нулевого порядка, поскольку в отсутствие градиента температуры и внешнего момента сил сферическая частица, обтекаемая однородным потоком, не вращается.

Подставив эти выражения в (2), (5), (6), получим уравнения, которым удовлетворяют  $\mathbf{v}^{(0,1)}$  и  $p^{(0,1)}$ . При подстановке воспользуемся тем, что на поверхности частицы введенный ранее параметр  $Q$  имеет порядок  $\delta$ .

Для нулевого приближения по  $\delta$  выполнены уравнения Стокса (с постоянной вязкостью)

$$\eta_0 \Delta \mathbf{v}^{(0)} = \nabla p^{(0)}, \quad \text{div } \mathbf{v}^{(0)} = 0$$

и граничные условия, следующие из (4)–(6) при  $\delta \rightarrow 0$ :

$$\mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{0}, \quad |\mathbf{x}| = a; \quad \mathbf{v}^{(0)} \rightarrow \mathbf{0}, \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty.$$

Решение задачи для  $\mathbf{v}^{(0)}$  и  $p^{(0)}$  имеет вид [4]:

$$v_i^{(0)}(\mathbf{x}) = -\frac{3}{4} a U_i^{(0)} L_0(\mathbf{x}) - \frac{3}{4} a U_j^{(0)} \frac{x_i x_j}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{1}{4} a^3 U_j^{(0)} L_{ij}(\mathbf{x}), \quad (9)$$

$$p^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{3}{2} a \eta_0 U_j^{(0)} L_j(\mathbf{x}).$$

Функции первого приближения удовлетворяют уравнениям

$$-\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} + \eta_0 \Delta v_i^{(1)} = \frac{\eta_0 \alpha}{\Theta a} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ T_f(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial x_i} \right) \right], \quad \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_i} = 0, \quad (10)$$

функции  $T_f$  и  $\mathbf{v}^{(0)}$  определяются формулами (8) и (9), соответственно. Условия на поверхности частицы получаются из (5):

$$v_i^{(1)} + E_{ij}^{(1)} x_j + \Omega_{ij}^{(1)} x_j = \Gamma_{ij}^{(1)} x_j, \quad |\mathbf{x}| = a. \quad (11)$$

Здесь  $\mathbf{E}^{(1)}$  и  $\mathbf{\Omega}^{(1)}$  обозначают симметричную и антисимметричную части тензора  $\mathbf{U}^{(1)} \mathbf{T} / (\Theta a)$ , соответственно:

$$E_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2\Theta a} (U_i^{(1)} T_j + U_j^{(1)} T_i), \quad \Omega_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2\Theta a} (U_i^{(1)} T_j - U_j^{(1)} T_i)$$

В силу того, что  $\mathbf{U}^{(1)} \cdot \mathbf{T} = 0$ , тензоры  $\mathbf{E}^{(1)}$  и  $\mathbf{\Omega}^{(1)}$  имеют нулевой след.

Для функций первого приближения (в отличие от нулевого) нельзя поставить условие затухания на бесконечности. Т.к.  $T_f$  имеет порядок  $|\mathbf{x}|$ ,  $v_i^{(0)}$  – порядок  $1/|\mathbf{x}|$ , а дифференцирование по  $x_j$  понижает его на 1, то правая часть первого из уравнений (10) имеет порядок  $|\mathbf{x}|^{-2}$ . Это приводит к оценкам  $p^{(1)} \sim 1/|\mathbf{x}|$  и  $\mathbf{v}^{(1)} \sim 1$ .

Вычислив дивергенцию обеих частей первого из уравнений (10), получим уравнение Пуассона для определения  $p^{(1)}$ :

$$\Delta p^{(1)} = \frac{\eta_0 \alpha}{\Theta a} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[ T_f(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (12)$$

Решив его, можно будет вернуться к (10), (11) и найти  $\mathbf{v}^{(1)}$ . Незвестные функции будем искать в виде

$$p^{(1)} = p_*^{(1)} + p_H^{(1)}, \quad \mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}_*^{(1)} + \mathbf{v}_H^{(1)}.$$

Здесь  $p_*^{(1)}$  и  $p_H^{(1)}$  – частное решение уравнения Пуассона и общее решение уравнения Лапласа в (12), а  $\mathbf{v}_*^{(1)}$  и  $\mathbf{v}_H^{(1)}$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \eta_0 \Delta v_{*i}^{(1)} &= \frac{\partial p_*^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\eta_0 \alpha}{\Theta a} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ T_f(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial x_i} \right) \right], \\ \eta_0 \Delta v_{Hi}^{(1)} &= \frac{\partial p_H^{(1)}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (v_{*i}^{(1)} + v_{Hi}^{(1)}) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

После раскрытия скобок и перегруппировки слагаемых найдем, что в правой части (12) находится линейная комбинация выражений вида  $x_i \dots x_j |\mathbf{x}|^\alpha$ . Метод подбора частных решений таких уравнений предложен в [6]. В результате



$$p_*^{(1)} = \frac{\eta_0 \alpha}{\Theta a} \left\{ \frac{a}{2} T_s U_t^{(0)} L_{st}(\mathbf{x}) |\mathbf{x}|^2 + \kappa T_s U_s^{(0)} \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{a}{|\mathbf{x}|} \right)^4 + \frac{1}{4} \left( \frac{a}{|\mathbf{x}|} \right)^6 \right] + \right. \\ \left. + \kappa T_s U_t^{(0)} \frac{x_s x_t}{|\mathbf{x}|^2} \left[ -3 \left( \frac{a}{|\mathbf{x}|} \right)^4 + \frac{3}{4} \left( \frac{a}{|\mathbf{x}|} \right)^6 \right] \right\} \quad (14)$$

Для дальнейшего удобно ввести тензоры  $\mathbf{E}^{(0)}$  и  $\mathbf{\Omega}^{(0)}$  аналогично  $\mathbf{E}^{(1)}$  и  $\mathbf{\Omega}^{(1)}$ , заменив в их определении  $\mathbf{U}^{(1)}$  на  $\mathbf{U}^{(0)}$ . Поскольку  $\mathbf{\Omega}^{(0)}$  антисимметричен, его след равен нулю; но в общем случае  $E_{ss}^{(0)} \neq 0$ .

Аналогично  $p_*^{(1)}$ , из (13) определяется  $\mathbf{v}_*^{(1)}$ . В терминах только что введенных тензоров получим:

$$v_{*i}^{(1)} = \alpha \left\{ -\frac{\kappa}{4} \left( \frac{a}{|\mathbf{x}|} \right)^6 \Omega_{ij}^{(0)} x_j + 3\kappa \left( \frac{a}{|\mathbf{x}|} \right)^4 \left[ -E_{jk}^{(0)} \frac{x_j x_k}{|\mathbf{x}|^2} x_i + \frac{1}{4} E_{ij}^{(0)} x_j + \frac{1}{4} E_{jj}^{(0)} x_i \right] - \right. \\ \left. - \frac{a^3}{20} E_{jk}^{(0)} L_{ijk}(\mathbf{x}) |\mathbf{x}|^2 - \frac{1}{8} \frac{a}{|\mathbf{x}|} \left[ 5E_{jj}^{(0)} x_i + 6E_{ij}^{(0)} x_j + 3E_{jk}^{(0)} \frac{x_j x_k}{|\mathbf{x}|^2} x_i \right] \right\} \quad (15)$$

Для  $p_*^{(1)}$  и  $\mathbf{v}_*^{(1)}$  справедливы оценки порядка по  $|\mathbf{x}|$ , полученные ранее.

Частные решения уравнения Пуассона линейны по  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{U}^{(0)}$ . В отсутствие градиента температуры они обращаются в нуль; линейность по  $\mathbf{U}^{(0)}$  обусловлена присутствием в уравнении вектор-функции  $\mathbf{v}^{(0)}$ .

Общий вид решения уравнений (13), которым удовлетворяют  $p_H^{(1)}$  и  $\mathbf{v}_H^{(1)}$ , известен [4]. Из оценки скорости убывания  $p^{(1)}$  на бесконечности следует, что и общее решение уравнения Лапласа можно искать в виде линейной комбинации мультиполей. Аналогично,  $\mathbf{v}_H^{(1)}$  будем искать в виде мультипольного разложения. Его коэффициенты – тензоры; очевидно, они также должны быть линейны по  $\mathbf{T}$ . В силу граничных условий (11), они содержат слагаемые, линейные либо по  $\mathbf{U}^{(0)}$ , либо по  $\mathbf{U}^{(1)}$ . Помимо указанных векторов, для построения тензорных коэффициентов можно использовать лишь символ Кронекера. Пользуясь тем, что  $E_{ss}^{(0)} \neq 0$ , получим

$$p_H^{(1)} = A_0 L_0(\mathbf{x}) + F_{jk} L_{jk}(\mathbf{x}), \\ A_0 = \eta_0 \alpha A A_0 E_{ss}^{(0)}, \quad F_{jk} = 2\eta_0 \alpha (F A_0 E_{jk}^{(0)} + F A_1 E_{jk}^{(1)}) \quad (16)$$

Скалярные коэффициенты  $AA_0$ ,  $FA_0$ ,  $FA_1$  заранее неизвестны.

Аналогично выписываются выражения для возмущения скорости:

$$\eta_0 v_{Hi}^{(1)} = -\frac{1}{2} A_0 L_0(\mathbf{x}) |\mathbf{x}|^2 + \frac{3}{2} F_{jk} \frac{x_j x_j x_k}{|\mathbf{x}|^5} + B_{ij} L_j(\mathbf{x}) + D_{ijkl} L_{jkl}(\mathbf{x}),$$

$$B_{ij} = \eta_0 \alpha \left[ BA_0 E_{ss}^{(0)} \delta_{ij} + \left( 2BC_0 + \frac{3}{10} a^3 \right) \Omega_{ij}^{(0)} - \frac{3}{10} a^3 E_{ij}^{(0)} + 2BC_1 \Omega_{ij}^{(1)} \right], \quad (17)$$

$$D_{ijkl} = 2\eta_0 \alpha \left[ DA_0 \delta_{i(j} E_{kl)}^{(0)} + DA_1 \delta_{i(j} E_{kl)}^{(1)} \right]$$

Здесь сразу учтено, что  $\text{div}(\mathbf{v}_*^{(1)} + \mathbf{v}_H^{(1)}) = 0$ . Это условие также дает  $AA_0 = 2a$ .

Для полного определения возмущений, вносимых частицей в поток, следует найти  $FA_0, BA_0, BC_0, DA_0, FA_1, BC_1, DA_1$  из граничных условий.

Поскольку угловая скорость антисимметрична по своим индексам, то из соображений линейности по  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{U}^{(0,1)}$  получаем разложение

$$\Gamma_{ij}^{(1)} = \xi_0 \Omega_{ij}^{(0)} + \xi_1 \Omega_{ij}^{(1)}. \quad (18)$$

Безразмерные константы  $\xi_0$  и  $\xi_1$  подлежат определению.

Величины  $\mathbf{U}^{(0)}$  и  $\mathbf{U}^{(1)}$  являются независимыми, а значит, не зависят друг от друга и коэффициенты при  $\Omega^{(0)}$  и  $\Omega^{(1)}$ ,  $\mathbf{E}^{(1)}$ . Если  $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{0}$ , условие (11) принимает вид

$$v_{*i}^{(1)} + v_{Hi}^{(1)} = \xi_0 \Omega_{ij}^{(0)} x_j, \quad |\mathbf{x}| = a.$$

Подставив сюда (15)–(17) и учитывая, что  $AA_0 = 2a$ , получим

$$FA_0 = a^3 \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \kappa \right), \quad BA_0 = a^3 \left( \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \kappa \right), \quad DA_0 = \frac{a^5}{48} (1 - \kappa),$$

$$\xi_0 = -\alpha \left( \frac{3}{10} + \frac{\kappa}{4} + 2 \frac{BC_0}{a^3} \right). \quad (19)$$

Если же  $\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{0}$ , то граничное условие записывается в форме

$$v_{Hi}^{(1)} + E_{ij}^{(1)} x_j + \Omega_{ij}^{(1)} x_j = \xi_1 \Omega_{ij}^{(1)} x_j, \quad |\mathbf{x}| = a.$$

Легко проверить, что при  $\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{0}$  выполнено равенство  $\text{div} \mathbf{v}_H^{(1)} = 0$ . Это значит, что при определении неизвестных величин из указанных условий можно воспользоваться решением задачи о частице в линейном потоке жидкости постоянной вязкости [4]:

$$FA_1 = -\frac{5a^3}{6\alpha}, \quad DA_1 = -\frac{a^5}{36\alpha}, \quad \xi_1 = 1 - 2\alpha \frac{BC_1}{a^3}. \quad (20)$$

Остается лишь вычислить  $BC_0$  и  $BC_1$ .

Поскольку равен нулю суммарный момент, действующий на частицу, то, пренебрегая инерцией, мы получим, что равен нулю и гидродинамический момент  $\mathbf{M}^{\text{hyd}}$ , вычисляемый по формуле

$$M_i^{\text{hyd}} = e_{ijk} \oint x_j \sigma_{kl}(\mathbf{x}) n_l dS.$$

Интегрирование ведется по поверхности сферы  $|\mathbf{x}| = a$ ,  $e_{ijk}$  – символ Леви-Чивита,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности. Подставляя сюда  $\sigma_{ij}$  из (2), общие выражения (6) и (7), возмущения скорости и давления из (14)–(18) и учитывая (19), (20), получим

$$M_i^{\text{hyd}} = -4\pi a^3 \eta_0 \alpha e_{ijk} \left[ \left( 2 \frac{BC_0}{a^3} - \frac{1}{5} \right) \Omega_{jk}^{(0)} + 2 \frac{BC_1}{a^3} \Omega_{jk}^{(1)} \right].$$

Равенство момента нулю дает

$$BC_0 = \frac{a^3}{10}, \quad BC_1 = 0.$$

Отсюда коэффициенты разложения в (18) равны

$$\xi_0 = -\frac{\alpha}{4}(2 + \kappa), \quad \xi_1 = 1.$$

Из полученной формулы следует, что при увеличении  $\kappa$  угловая скорость частицы растет. Этот факт можно объяснить так. Частица будет вращаться, если распределение напряжений на ее поверхности не является зеркально симметричным. В однородном потоке симметрия нарушается из-за перепада температур и зависимости вязкости от температуры, причем только тогда, когда  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{U}^{(0)}$  не параллельны. Чем больше градиент температуры, тем сильнее меняется вязкость жидкости и искажается симметрия. Но из (8) вытекает, что перепад температуры тем заметнее, чем больше  $\kappa$ .

Равенство  $\xi_1 = 1$  легко объяснимо. При  $\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{0}$  перепад температуры приводит лишь к возникновению в жидкости линейного потока, а в таком потоке в отсутствие внешних моментов частица вращается с локальной угловой скоростью жидкости [7].

Гидродинамическая сила, действующая на сферическую частицу с неподвижным центром, находится по формуле

$$F_i^{\text{hyd}} = \oint \sigma_{ij}(\mathbf{x}) n_j dS.$$

Используя найденные выражения для возмущений потока, можно показать, что  $\mathbf{F}^{\text{hyd}} = 6\pi\eta_0 a \mathbf{U}^{(0)}$ , т.е. не отличается от силы, действующей на частицу в однородном потоке жидкости с постоянной вязкостью. Тем самым, постоянный градиент температуры на гидродинамическую силу не влияет. Действительно, иначе  $\mathbf{F}^{\text{hyd}}$  имела бы компоненты, линейные одновременно по  $\mathbf{T}$  и по одному из векторов  $\mathbf{U}^{(0)}$ ,  $\mathbf{U}^{(1)}$ . Но тензор, линейный по  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{U}^{(0,1)}$ , будет иметь нулевой или второй ранг. Использование символа Леви-Чивита (аналогично тому, как это сделано при определении  $\mathbf{M}^{\text{hyd}}$ ) запрещено, поскольку  $\mathbf{F}^{\text{hyd}}$  не зависит от ориентации системы координат.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости / Дж. Бэтчелор. – М. : Мир, 1973. – 760 с.
2. Ландау Л. Д. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 3-е изд., перераб. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1986. – 736 с.
3. Малай Н. В. К вопросу о термофорезе твердой сферической частицы в жидкости / Н. В. Малай // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2003. – № 6. – С. 145–154.
4. Мартынов С. И. Взаимодействие частиц в суспензии / С. И. Мартынов. – Казань : Изд-во Казан. Матем. Об-ва, 1998. – 135 с.
5. Седов Л.И. Механика сплошной среды : в 2 т. Т. 1. 6-е изд., стер. – СПб. : Издательство «Лань», 2004. – 528 с.
6. Сыромясов А. О. Частные решения уравнения Пуассона с правой частью специального вида / А. О. Сыромясов // Журнал Средневолжского Математического общества. – 2010. – Т. 12. – № 3. – С. 65–70.
7. Хаппель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. – М. Мир, 1976. – 632 с.

*Т. К. Хамитов* (г. Казань)

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ДЛИН ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПО ДЛИНЕ**

**Введение.** В настоящей работе рассматриваются задачи о потере устойчивости упруго-пластических стержней при продольном ударе с учетом конечности скорости распространения продольной волны вдоль стержня. При этом кроме трудностей, связанных с учетом физической нелинейности задачи, появляются трудности, связанные с существенной неоднородностью напряженного состояния по длине возмущенного участка стержня, вызванной продольной волной сжатия. Определение критической длины выпучивания упругопластических стержней с использованием динамического и статического критериев, основанных на результатах работы [1] впервые было выполнено в работе [2]. В данном исследовании делается попытка построить методику определения критических длин потери устойчивости, позволяющую расширить круг рассматриваемых видов граничных условий и законов ударного нагружения торца стержня. Для определения критических длин потери устойчивости используется статический критерий в форме, которая была использована в работе [3] применительно к упругим и в работах [4], [5] применительно к упругопластическим шарнирно опертым стержням.

**Постановка задачи.** Рассмотрим прямой полубесконечный стержень площадью поперечного сечения  $F$ , центральным наименьшим моментом инерции поперечного сечения  $J$ , плотностью материала  $\rho$  при приложении силы  $P$  (напряжения  $\sigma_m$ ), которая мгновенно достигнув своего максимального значения, остается затем постоянной. Ось  $Ox$  координатной системы  $Oxu$  направим вдоль оси стержня, ось  $Oy$  направим перпендикулярно плоскости изгиба  $Oxu$ . Начало координат расположено в центре тяжести поперечного сечения, по которому наносится удар. Стержень располагается в части  $x > 0$ ,  $w$  и  $u$  – перемещения оси стержня в направлении осей  $Oy$  и  $Ox$ .

Рассматривая начальные стадии поперечных движений, систему уравнений, описывающих продольно-поперечные движения стержня, можно записать в виде [1], [2]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

$$TJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma F \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где  $a$  – скорость распространения продольных волн,  $T$  – модуль Кармана.

Реальную диаграмму сжатия материала заменим диаграммой с линейным упрочнением (рис.1). Закон изменения ударных напряжений на торце стержня показан на рис.2. При этих предположениях решение уравнения (1) при начальных условиях вида

$$t = 0: \quad w = \partial w / \partial t = 0, \quad u = \partial u / \partial t = 0, \quad \text{при } x > 0;$$

$$\sigma(0, t) = \sigma_m, \quad \sigma_m > \sigma_s, \quad \text{при } x = 0$$

имеет известное решение [6] (рис.3). От ударяемого торца распространяются упругая волна со скоростью  $a_0 = \sqrt{E/\rho}$  и с напряжением за фронтом волны, равным пределу пропорциональности  $\sigma_s$ , и пластическая волна со скоростью  $a_1 = \sqrt{E_k/\rho}$  с максимальным приложенным напряжением  $\sigma_m$ . Здесь  $E$ ,  $E_k$  – модули упругости и упрочнения материала соответственно. Перед фронтом продольной волны невозмущенный участок стержня с нулевым уровнем напряжений.

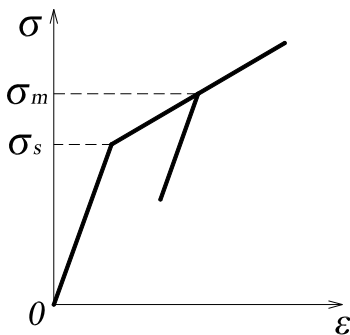


Рис.1

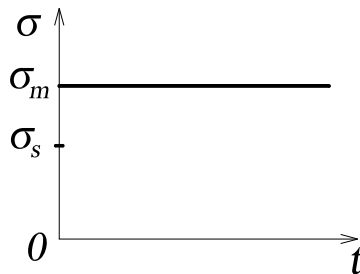


Рис.2

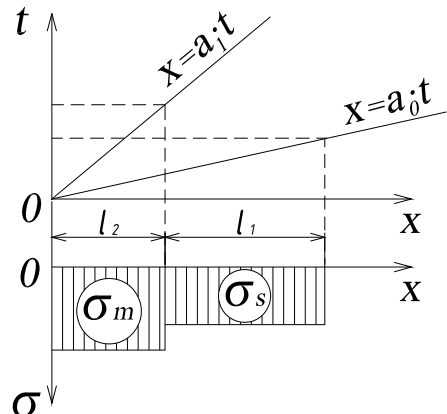


Рис.3

Здесь:  $l$  – полная длина возмущенного участка стержня,  $l_1$  – длина участка, на котором напряжения равны пределу текучести материала  $\sigma_s$ ,  $l_2$  – длина участка, где напряжения равны максимальным напряжениям удара  $\sigma_m$ . Между длинами отдельных участков имеют место соотношения:

$$l = a_0 t; \quad l_2 = a_1 t; \quad l = l_1 + l_2; \quad l_2 = l \frac{a_1}{a_0} = l \sqrt{\frac{E_k}{E}}; \quad l_1 = l \left( 1 - \sqrt{\frac{E_k}{E}} \right). \quad (3)$$

**Решение.** При решении второго уравнения системы (1), (2) рассмотрим четыре способа закрепления стержня на ударяемом торце, а на фронте продольной волны – условия жесткого закрепления.

5. Пусть торец, воспринимающий удар шарнирно оперт. Граничные условия имеют вид:

$$x=0: w=0, \quad w''_{xx}=0; \quad x=l: w=0, \quad w'_x=0. \quad (4)$$

Функцию прогибов представим в виде ряда, удовлетворяющего граничным условиям (4):

$$w(x,t) = e^{i\omega t} \sum_{k=1}^{\infty} f_k [\sin \lambda_{2k-1} x + \sin \lambda_{2k+1} x], \quad \lambda_{2k\pm 1} = \frac{\pi(2k \pm 1)}{2l}, \quad (k=1,2,3,\dots). \quad (5)$$

Ступенчатую функцию напряжений  $\sigma(x,t)$  представим в виде ряда Фурье по синусам (рис.3):

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq l_2, \quad \sigma_m \\ l_2 \leq x \leq l, \quad \sigma_s \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin(\lambda_{2i-1} x), \quad \lambda_{2i-1} = \frac{\pi \cdot (2i-1)}{2l}, \quad (i=1,2,3,\dots), \quad (6)$$

где коэффициенты ряда имеют вид:

$$a_i = \frac{4}{\pi (2i-1)} \left[ \sigma_m - (\sigma_m - \sigma_s) \cos \left( \pi \frac{(2i-1)l_2}{2l} \right) \right]. \quad (7)$$

Уравнение (2) заменим системой уравнений типа уравнений Бубнова-Галеркина:

$$\int_0^l \left( TJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sigma F \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\gamma}{g} F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \times g_k(x) dx = 0, \quad (k=1,2,3,\dots). \quad (8)$$

Здесь  $g_k(x)$  – координатные функции в методе Бубнова-Галеркина.

После подстановки рядов (5) и (6) в уравнения типа (8) и интегрирования приходим к бесконечной системе однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $f_k$ :

$$f_k \Omega_k + \sum_{j=k+1}^{\infty} f_j c_{kj} + \sum_{j=1}^{k-1} f_j c_{kj} = 0, \quad (k=1,2,3,\dots). \quad (9)$$

Условие существования нетривиального решения системы уравнений (9) приводит к условию равенства нулю бесконечного определителя

$$\det \|c_{jk}\| = 0, \quad (10)$$

в котором  $c_{kk} = \Omega_k$  при  $k=j$  и  $c_{kj} = c_{jk}$  при  $k \neq j$ .

Диагональные элементы определителя имеют вид:

$$\begin{aligned} \Omega_k = & \frac{1}{2} TJ (\lambda_{2k-1}^4 + \lambda_{2k+1}^4) - \frac{\gamma}{g} F \omega^2 + \frac{2}{\pi} \lambda_{2k-1}^2 \sum_{i=1,3,5}^{\infty} a_i \cdot \frac{2(2k-1)^2 - i^2}{i(i^2 - 4(2k-1)^2)} + \\ & + \frac{2}{\pi} \lambda_{2k+1}^2 \sum_{i=1,3,5}^{\infty} a_i \cdot \frac{(2k+1)^2 - i^2}{i(i^2 - 4(2k+1)^2)} + \\ & + \frac{4}{\pi} \sum_{i=1,3,5}^{\infty} a_i \cdot \frac{\lambda_{2k-1} \lambda_{2k+1} \cdot i \cdot [(2k-1)^2 + (2k+1)^2 - i^2]}{(2k-1)^4 + (2k+1)^4 + i^4 - 2i^2((2k-1)^2 + (2k+1)^2) + (2k-1)^2(2k+1)^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Недиагональные элементы определителя  $c_{kj} = c_{jk}$  из-за громоздкости здесь не приводятся. Можно показать, что определитель (10) относится к классу «нормальных» определителей и может быть вычислен по усеченному определителю с любой заданной точностью. Для определения критического напряжения (или длины) воспользуемся статическим критерием. Согласно этому критерию при заданном напряжении  $\sigma_m$  безразмерная критическая длина  $l^*$  определяется как наименьший корень характеристического уравнения (9) при условии  $\omega = 0$ . Для других граничных условий ход решения аналогичен.

6. Пусть торец, по которому наносится удар, свободен. Граничные условия и функция прогиба имеют соответственно вид:

$$x = 0: EJw''' = -Pw', \quad w''_{xx} = 0; \quad x = l: w = 0, \quad w'_x = 0, \quad (12)$$

$$w(x, t) = e^{i\omega t} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \left[ (-1)^{k+1} - \sin(\lambda_{2k-1} x) \right], \quad \lambda_{2k-1} = \frac{(2k-1)\pi}{2l}, \quad (k=1, 2, 3, \dots). \quad (13)$$

Элементы определителя (10) имеют вид:

$$\Omega_k = \frac{1}{2} \left( TJ\lambda_{2k-1}^4 - \frac{\gamma}{g} F\omega^2 \right) + \frac{2}{\pi} \lambda_{2k-1}^2 \sum_{i=1,3,5}^{\infty} a_i \cdot \frac{(2(2k-1)^2 - i^2)}{i(i^2 - 4(2k-1)^2)}. \quad (14)$$

$$c_{kj} = c_{jk} = \frac{2}{\pi} \lambda_{2k-1} \lambda_{2j-1} \times \\ \times \left( \sum_{i=1,3,5}^{\infty} a_i \cdot \frac{i \cdot ((2j-1)^2 + (2k-1)^2 - i^2)}{(2j-1)^4 + (2k-1)^4 + i^4 - 2(i^2((2j-1)^2 + (2k-1)^2) + (2j-1)^2(2k-1)^2)} \right). \quad (15)$$

7. Рассмотрим подвижную в продольном направлении заделку

$$x = 0: w = 0, \quad w'_x = 0; \quad x = l: w = 0, \quad w'_x = 0. \quad (16)$$

Функцию прогиба, удовлетворяющую граничным условиям (16), возьмем в виде:

$$w(x, t) = e^{i\omega t} \sum_{k=1}^{\infty} f_k [1 - \cos(\lambda_{2k} x)], \quad \lambda_{2k} = \frac{2\pi k}{l}, \quad (k=1, 2, 3, \dots). \quad (17)$$

Для вариантов граничных условий, рассмотренных в настоящем п.3 и ниже в п.4, функция напряжений  $\sigma(x, t)$  представляется следующим рядом Фурье:

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq l_2, \quad \sigma_m \\ l_2 \leq x \leq l, \quad \sigma_s \end{aligned} \right\} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin(\lambda_i x), \quad \lambda_i = \frac{\pi \cdot i}{l}, \quad (i=1, 2, 3, \dots), \quad (18)$$

где

$$a_i = \frac{2}{\pi i} \left[ \sigma_m - (\sigma_m - \sigma_s) \cos\left(\pi i \frac{l_2}{l}\right) \right]. \quad (19)$$

Элементы определителя (10) в данном случае принимают вид:



$$\Omega_k = \frac{1}{2} T J \lambda_{2k}^4 - \frac{3\gamma}{2g} F \omega^2 + \frac{16}{\pi} \lambda_{2k}^2 \sum_{i=1,3,5}^{\infty} a_i \cdot \frac{k^2}{i(i^2 - 16k^2)}, \quad (20)$$

$$c_{k,j} = c_{j,k} = -\frac{\gamma}{g} F \omega^2 + \frac{16}{\pi} \sum_{i=1,3,5}^{\infty} a_i \cdot \frac{\lambda_{2k} \lambda_{2j} \cdot i \cdot j \cdot k}{i^4 + 16(j^4 + k^4) - 8(i^2(j^2 + k^2) + 4j^2 k^2)}. \quad (21)$$

8. Рассмотрим еще один вид граничных условий, когда ударяемый торец стержня заделан от поворотов, но подвижен в продольном и вертикальном направлениях:

$$x=0: \quad w'''=0, \quad w'_x=0; \quad x=l: \quad w=0, \quad w'_x=0, \quad (22)$$

$$w(x,t) = e^{i\omega t} \sum_{k=1}^{\infty} f_k [1 - \cos(\lambda_{2k-1} x)], \quad \lambda_{2k-1} = \frac{(2k-1)\pi}{l}, \quad (k=1,2,3,\dots). \quad (23)$$

Элементы определителя (10) принимают вид:

$$\Omega_k = \frac{1}{2} T J \lambda_{2k-1}^4 - \frac{3\gamma}{2g} F \omega^2 + \frac{4}{\pi} \lambda_{2k-1}^2 \sum_{i=1,3,5}^{\infty} a_i \cdot \frac{(2k-1)^2}{i(i^2 - 4(2k-1)^2)}, \quad (24)$$

$$c_{k,j} = c_{j,k} = -\frac{\gamma}{g} F \omega^2 + \frac{4}{\pi} \sum_{i=1,3,5}^{\infty} a_i \cdot \frac{\lambda_{2k-1} \lambda_{2j-1} \cdot i \cdot (2j-1) \cdot (2k-1)}{i^4 + (2k-1)^4 + (2j-1)^4 - 2(i^2((2j-1)^2 + (2k-1)^2) + (2j-1)^2 \cdot (2k-1)^2)}.$$

**Числовые примеры.** Вычисления проводились для достаточно широкого диапазона напряжений  $\sigma_m$  и касательного модуля  $E_k$ . Полученные результаты, где это было возможно, сравнивались с результатами работы [2]. Получено полное совпадение. Приведем результаты вычислений для стержня прямоугольного сечения из стали с данными  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ,  $\sigma_s = 2400 \text{ кг/см}^2$ ,  $T = 4EE_k / (\sqrt{E} + \sqrt{E_k})^2$ . В табл.1 в качестве примера приведены значения критических гибкостей  $l^* = l_{кр} \cdot \sqrt{F/J}$  в зависимости от напряжения  $\sigma_m$  (в  $\text{кг/см}^2$ ) при значении касательного модуля  $E_k = 0,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$  для шарнирного опирания торца (индекс «ш»), воспринимающего удар, заделки, подвижной в продольном направлении (индекс «з-1») и заделки, подвижной в продольном и поперечном направлениях (индекс «з-2») на торце, воспринимающем удар. Под размерной критической длиной  $l_{кр}$  понимается наименьшая длина, на которую должна продвинуться продольная волна сжатия, чтобы стержень потерял устойчивость по статическому критерию. Там же приведены значения для величины  $q_k = l^* / l_{cm}^*$ , где  $l_{cm}^* = \frac{\pi}{\nu} \sqrt{T / \sigma_m}$ . Здесь  $l_{cm}^*$  – значение безразмерной критической длины (гибкости), полученное из формулы Кармана для  $\sigma_m$

динамической задачи,  $\nu$  – коэффициент приведенной длины, учитывающий условия закрепления.

Таблица 1.

| $\sigma_m \backslash l^*$ | 2400  | 2600  | 2800  | 3000  | 3200  | 3400  | 3600  | 3800  | 4000  | 4200  |
|---------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $l_{ui}^*$                | 47,61 | 46,59 | 45,63 | 44,71 | 43,84 | 43,01 | 42,22 | 41,47 | 40,76 | 40,08 |
| $q_k$                     | 1     | 1,018 | 1,035 | 1,049 | 1,063 | 1,075 | 1,086 | 1,096 | 1,105 | 1,113 |
| $l_{3-2}^*$               | 33,29 | 33,21 | 33,12 | 33,03 | 32,95 | 32,86 | 32,78 | 32,69 | 32,61 | 32,52 |
| $q_k$                     | 1     | 1,038 | 1,074 | 1,109 | 1,143 | 1,175 | 1,206 | 1,236 | 1,264 | 1,292 |
| $l_{3-1}^*$               | 66,58 | 66,07 | 65,56 | 65,05 | 64,55 | 64,06 | 63,58 | 63,1  | 62,62 | 62,16 |
| $q_k$                     | 1     | 1,033 | 1,063 | 1,092 | 1,119 | 1,145 | 1,169 | 1,192 | 1,214 | 1,235 |

Из таблицы видно, что влияние неоднородности напряженного состояния усиливается с увеличением жесткости закрепленного торца. Максимальное расхождение между критическими гибкостями, полученными с учетом и без учета неоднородности напряженного состояния, наблюдается для граничного условия, помеченного индексом «3-2». При  $\sigma_m = 4200 \text{ кг/см}^2$  это расхождение составляет 29,2%.

Автор благодарит профессора КГАСУ Шигабутдинова Ф. Г. за помощь при подготовке данной статьи.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // ДАН СССР, 1949. – Т. 64, №6. – С. 779-782.
2. Терегулов И. Г., Шигабутдинов Ф. Г. Устойчивость упругопластического стержня при динамическом нагружении // Сб. «Прочность и жесткость тонкостенных конструкций». – Казань: 1977. – Вып.2. – С. 77-86 / Сб. деп. В ВИНТИ №4101-77. Деп. от 25.10.1977г.
3. Мовсисян Л. А. Об устойчивости упругой балки при продольном ударе // ДАН Арм. ССР, 1969. – Т. XXLIX, №3. – С. 124-130.
4. Аракелян А. Е., Мовсисян Л. А. Об упругопластической устойчивости стержня и цилиндрической оболочки при продольных интенсивных нагружениях // Изв. АН Арм. ССР, серия ф.-м. н., 1987. – Т. XL, №5. – С. 3-13.
5. Мовсисян Л. А. К устойчивости упругопластических стержней при ударных нагрузках // Изв. АН Арм. ССР, серия ф.-м. н., 1986. – Т. XXXIX, №2. – С. 15-23.
6. Рахматуллин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. – М.: Физматгиз, 1961. – 369с.

*А. А. Цынаева, Е. А. Цынаева, П. А. Вельмисов* (г. Ульяновск)

## МОДЕЛЬ ИЗОТЕРМИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ДАВЛЕНИЯ ГАЗА НА ОСНОВЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕМПЕРАТУРНОЙ СТРАТИФИКАЦИИ

*В данной статье рассматриваются математические модели регулятора давления газа на основе трубы температурной стратификации.*

Основным элементом изотермического регулятора [1] на основе газодинамической температурной стратификации (рис.1) является сопло Лаваля. Сопло устанавливается так, что входное сечение сопла сообщается с дозвуковым трактом, соединенным с магистралью высокого давления; а, выходное сечение сопла Лаваля соединено с магистралью низкого давления.

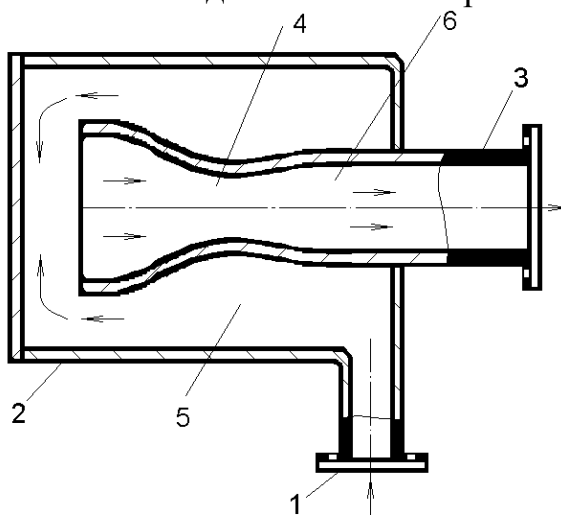


*Рис. 1. Изотермический регулятор давления газа на основе газодинамической температурной стратификации: 1 – магистраль высокого давления; 2 – корпус; 3 – магистраль низкого давления; 4 – сопло Лаваля; 5 – дозвуковой тракт; 6 – сверхзвуковой тракт*

Таким образом, снижение давления газа осуществляется в критическом сечении сопла Лаваля, а эффективность работы изотермического регулятора давления газа зависит от качества реализации процесса газодинамической стратификации и интенсивности энергообмена между сверхзвуковым и дозвуковым трактами изотермического регулятора давления газа.

Принцип газодинамической температурной стратификации потока [2] основан на возможности переноса тепла между потоками газа с разными числами Маха, но поступающими из общего корпуса. Это связано с тем, что

при сверхзвуковых числах Маха и при числе Прандтля  $Pr$  меньше единицы температура восстановления газа на стенке отличается от температуры торможения. Следовательно, возникает температурный напор  $\Delta T = T^* - T_{r2}$  и возможность подогрева одного потока газа другим. Эффективность температурной стратификации определяется плотностью теплового потока от газа в дозвуковом тракте к газу в сверхзвуковом тракте, рассчитываемой по выражению:

$$q = k \cdot (T^* - T_{r2}), \quad (1)$$

где  $T^*$  – температура заторможенного потока;  $T_{r2}$  – температура стенки со стороны сверхзвукового потока;  $k$  – коэффициент теплопередачи.

При этом температурный напор  $\Delta T = T^* - T_{r2}$  увеличивается с уменьшением температуры  $T_{r2}$ , которая определяется величиной коэффициента восстановления  $r$ , то есть зависит от природы газа (от величины числа Прандтля). Температура  $T_{r2}$ , профили скорости и температуры в сечениях пограничного слоя, коэффициент восстановления  $r$  и коэффициент теплоотдачи может быть определен [3] в результате решения системы уравнений, описывающих движение и теплообмен в пограничном слое:

– дифференциальное уравнение энергии

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\lambda + \lambda_T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + (\mu + \mu_T) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{dp}{dx} + q_v, \quad (2)$$

– дифференциальное уравнение движения

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{dp}{dx} + s_v, \quad (3)$$

– неразрывности

$$\partial(\rho u)/\partial x + \partial(\rho v)/\partial y = 0, \quad (4)$$

– уравнение состояния

$$\rho = p/(RT), \quad (5)$$

Использование дисперсного рабочего тела вместо газа открывает возможность существенного повышения эффективности процесса газодинамической температурной стратификации [3, 4] в трубе Леонтьева. При этом коэффициент теплоотдачи в сверхзвуковом тракте при использовании дисперсного рабочего тела становится существенно выше коэффициента теплоотдачи в тракте дозвуковом. В работе [3] показано, что использование продольных ребер на поверхности теплообмена в тракте дозвукового течения может повысить эффективность процесса газодинамической температурной стратификации. Однако оребрение поверхности значительно уменьшает живое сечение тракта дозвукового течения. Однако увеличение длины ребер, в итоге, не приводит к дальнейшему росту эффективности газодинамической температурной стратификации [3]. И для дальнейшего увеличения передаваемого теплового

потока при работе сверхзвуковой трубы температурной стратификации на газе или дисперсном рабочем теле целесообразно в дозвуковом тракте использовать тепловые трубы, выполненные в виде продольных ребер. Главным достоинством тепловых труб является их существенно большая эффективная теплопроводность по сравнению любым твердотельным проводником тепла [5].

Моделирование выполнено применительно к тепловым трубам, выполненным в дозвуковом тракте в виде прямых плоских продольных ребер постоянной толщины [6, 7]. Сравнение результатов осуществлялось при наличии цельнометаллических ребер и тепловых труб, используемых в качестве оребрения. Коэффициенты теплоотдачи к поверхности ребер, тепловых труб и к межреберной поверхности принимались равными.

Коэффициент эффективности ребра  $\eta_p$  рассчитывался по формуле, записываемой в виде:

$$\eta_p = \text{th} \left( \frac{l}{\delta} \sqrt{2\text{Bi}} \right) / \left( \frac{l}{\delta} \sqrt{2\text{Bi}} \right), \quad (6)$$

где  $\text{Bi} = \alpha_1 \delta / \lambda_{\text{эф}}$  – число Био;  $l$  – длина ребра (тепловой трубы), м;  $\delta$  – толщина ребра (тепловой трубы), м.

Для трубы круглого сечения, приняв равной 0,5 долю периметра трубы занятой тепловыми трубами в виде продольных ребер, тепловой поток в сверхзвуковой трубе температурной стратификации определяется выражением:

$$\bar{q} = (1 - r) \cdot \frac{1 - \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right)}{\frac{1}{0.5 + \eta_p \left( \frac{1}{\delta} + 0.5 \right)} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \quad (7)$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты;  $\eta_p$  – коэффициент эффективности ребра;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи;  $M$  – число Маха; индексы: 1 – параметры в дозвуковом тракте; 2 – параметры в сверхзвуковом тракте.

Сопротивление теплопередачи для тепловой трубы определялось выражением:

$$R_{\Sigma} = \sum R_{ct} + R_{исп} + \sum R_{\phi n} + R_{кан} + R_{кон}, \quad (8)$$

где  $R$  – термическое сопротивление; индексы:  $\phi$  – фитиль тепловой трубы;  $\phi n$  – зона фазового перехода тепловой трубы;  $исп$  – зона испарения тепловой трубы;  $кон$  – зона конденсации тепловой трубы;  $кан$  – зона парового канала тепловой трубы. Здесь принято допущение согласно [5], что сопротивление раздела фаз  $\sum R_{\phi n}$  и сопротивление парового канала пренебрежимо малы. Сопротивление теплопередачи ребра определялось по стандартной методике [8].

В первом приближении коэффициент теплоотдачи для зоны кипения определялся при допущении наличия развитого пузырькового кипения. В расчете принято, что в качестве рабочей жидкости принята вода, поэтому в расчете использовалась следующая известная зависимость:

$$\alpha_{\phi.исп.} = \frac{39,3 \cdot (p_n \cdot 10^{-5})^{0,54}}{(1 - 4,5 \cdot 10^{-8} \cdot p_n)^3} \cdot \Delta t^2, \quad (9)$$

Принято следующее допущение, что в зоне конденсации тепловой трубы реализован режим пленочной конденсации пара. Среднее значение коэффициента теплоотдачи на горизонтальной трубе определялось по формуле:

$$\alpha_{\phi.кон.} = \frac{0,728 A_n}{[d_m (t_n - t_n')]^{0,25}}, \quad (10)$$

Эффективная теплопроводность тепловой трубы определялась формулой:

$$\lambda_{эф} = \frac{d_m}{F \cdot R_{\Sigma}}, \quad (11)$$

Рис. 2, 3 показывает зависимость передаваемого теплового потока от числа Маха и от относительной длины для ребер и для тепловых труб, выполненных в виде продольных ребер. Расчеты выполнялись для значений  $\gamma = 1,4$ ,  $Pr = 0,7$ ,  $M_1 = 0,5$ ,  $Re_{вх2} = 0,5 \cdot 10^6$ .

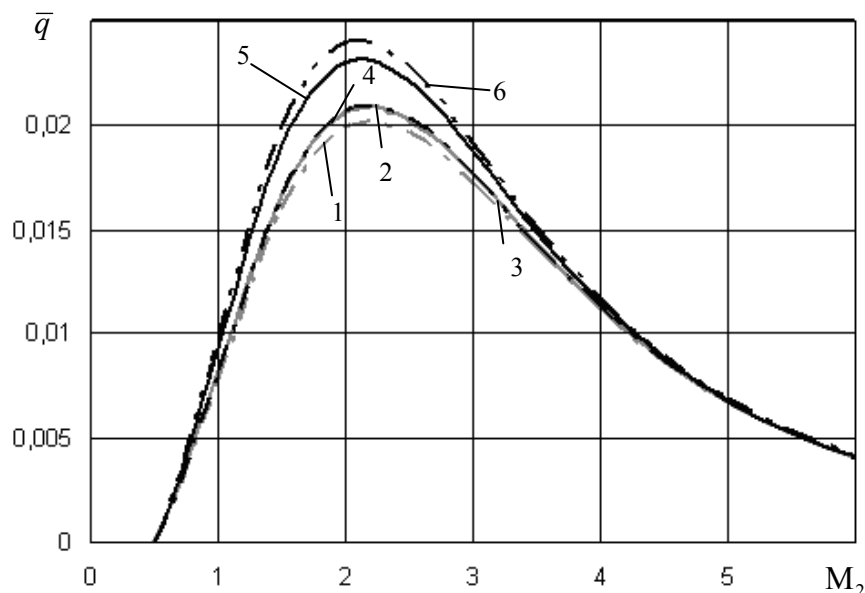


Рис. 2. Влияние числа Маха и относительной длины тепловой трубы (ребра) на температурную стратификацию газа: 1, 2, 3 — для прямых продольных ребер с  $l/\delta = 2, 5, 10$  соответственно; 4, 5, 6 — для тепловых труб, выполненных в виде прямых продольных ребер  $l/\delta = 2, 5, 10$  соответственно

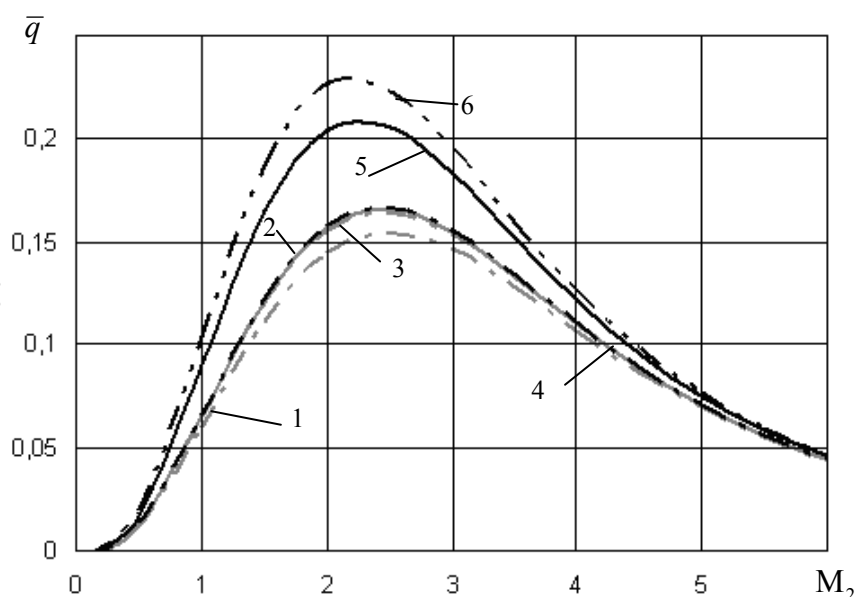


Рис. 3. Влияние числа Маха и относительной длины тепловой трубы (ребра) на температурную стратификацию в дисперсном потоке: 1, 2, 3 – для прямых продольных ребер с  $l/\delta = 2, 5, 10$  соответственно; 4, 5, 6 – для тепловых труб, выполненных в виде прямых продольных ребер  $l/\delta = 2, 5, 10$  соответственно

Из анализа приведенных на рис. 2 и 3 результатов следует, что применение тепловых труб в виде продольных ребер, выполненных на поверхности теплообмена в тракте дозвукового течения, приводит к значительному повышению эффективности температурной стратификации. При этом максимальное значение передаваемого теплового потока увеличивается по сравнению с использованием простого оребрения в 1,14 раза при  $l/\delta = 5$  для газа и в 1,25 раза для дисперсного потока.

Обоснованная возможность повышения эффективности работы сверхзвуковой трубы температурной стратификации за счет использования тепловых труб позволит применять газодинамическую температурную стратификацию для изотермического регулирования давления газа.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Цынаева, А. А. Регулятор давления газа / А. А. Цынаева, Н. Н. Ковальногов // Патент РФ №2364914, бюлл. №23, 20.08.2009.
2. Леонтьев, А. И. Газодинамический метод энергоразделения газовых потоков / А.И. Леонтьев // Теплофизика высоких температур, 1997. – Т. 35, № 1. – С. 157 – 159.
3. Ковальногов, Н. Н. Температурная стратификация в сверхзвуковом дисперсном потоке / Н. Н. Ковальногов, Л. М. Магазинник, Е. В. Фокеева, М. А. Кузьмина // Труды XVII Школы-семинара молодых специалистов под

руководством академика РАН А. И. Леонтьева. – М.: Издательский дом МЭИ, 2009. – Т. 2. – С. 213 – 216.

4. Цынаева, А. А. Моделирование процесса движения и теплообмена потока для внутреннего охлаждения плазмотрона / А. А. Цынаева, Л. М. Магазинник // Тезисы докладов Всероссийской школы-семинара молодых ученых “Актуальные вопросы теплофизики и гидрогазодинамики” Новосибирск: Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе, 2008. – С. 130–132.

5. Дан, П. Д., Рей, Д. А. Тепловые трубы: Пер. с англ. – М.: Энергия, 1979. – 272 с.

6. Цынаева, А. А. О возможностях повышения эффективности работы сверхзвуковой трубы температурной стратификации при использовании тепловых труб / А. А. Цынаева, Е. А. Цынаева, Н. Н. Ковальногов // Тепловые процессы в технике. – Москва. Изд.: ООО Наука и технологии, 2011. – №8. – С. 380-389.

7. Цынаева, А. А. Труба температурной стратификации / Т. Н. Волкова, К. М. Магазинник, К. Р. Сагитова, А. А. Цынаева // Заявка на изобретение РФ №2011114941.

8. Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача. – М.: Энергия, 1981. – 440 с.



**Р. Д. Шигапов** (г. Ульяновск)

## **ПРИВЕДЕНИЕ К ЦЕЛИ НЕОБИТАЕМОГО ПОДВОДНОГО АППАРАТА, СВЯЗАННОГО С КОРАБЛЕМ КАБЕЛЬ-ТРОСОМ**

*Исследуются динамические свойства необитаемого подводного аппарата (НПА), связанного с кораблем кабель-тросом (КТ), в задаче приведения к заданной цели при действии возмущений. При формировании алгоритмов управления в условиях неполной информации используются методы нечеткой логики.*

В настоящее время для моделирования движения НПА используются программы «элементарных» режимов движения. Сочетание данных программ позволяет описывать множество траекторий движения. Однако это не позволяет учитывать динамику переходных процессов, таким образом, переход между режимами получается скачкообразным. Еще одним недостатком использования программ-заданий является невозможность адаптации системы к окружающей среде, возмущениям. В результате цель может быть не достигнута, так как в реальной среде практически всегда присутствуют внешние воздействия.

Рассмотрим задачу управления движением НПА при наведении на заданную цель в условиях недостоверной информации о внешней среде и течениях. При этом необходимо обеспечить подход аппарата к цели при соблюдении временных (скоростей и ускорений), пространственных (перерегулирования) и энергетических (энергии, затрачиваемой на движение) ограничений. Также устанавливаются ограничения на натяжение КТ и скорость вращения корабельной лебедки. В алгоритме используются данные навигационной системы и данные с датчиков. Управление движением достигается преобразованием рассчитанных программой значений в управляющие силы и моменты.

При описании движения использованы следующие системы координат (СК):  $0_g x_{g0} y_{g0} z_{g0}$  – земная базовая система координат,  $0_g x_g y_g z_g$  – промежуточная земная или полусвязанная (начало всегда совмещено с центром масс объекта),  $Oxyz$  – связанная система координат, используется для математического описания движения объекта. Модель динамики пространственного движения НПА в общей форме в СК  $Oxyz$  представим в виде [2]:

$$\begin{aligned}
m_x \cdot \frac{dVx}{dt} + m_z \cdot \omega_y \cdot Vz - m_y \cdot \omega_z \cdot Vy + \lambda 35 \cdot \omega^2_y - \lambda 26 \cdot \omega^2_z &= Rx; \\
m_y \cdot \frac{dVy}{dt} + \lambda 26 \cdot \frac{d\omega_z}{dt} \cdot m_x \cdot \omega_z \cdot Vx - m_z \cdot \omega_x \cdot Vz - \lambda 35 \cdot \omega_x \cdot \omega_y &= Ry; \\
m_z \cdot \frac{dVz}{dt} + \lambda 35 \cdot \frac{d\omega_y}{dt} + m_y \cdot \omega_x \cdot Vy - m_x \cdot \omega_y \cdot Vx + \lambda 26 \cdot \omega_x \cdot \omega_z &= Rz; \\
J_x \cdot \frac{d\omega_x}{dt} + (\lambda 26 + \lambda 35) \cdot (\omega_y \cdot Vy - \omega_z \cdot Vz) &= Mx; \\
J_y \cdot \frac{d\omega_y}{dt} + \lambda 35 \cdot \frac{dVz}{dt} + \omega_x \cdot \omega_y \cdot (J_x - J_y) + Vx \cdot Vz \cdot (m_x - m_z) - \\
- \lambda 26 \cdot \omega_x \cdot Vy - \lambda 35 \cdot \omega_y \cdot Vx &= My; \\
J_z \cdot \frac{d\omega_z}{dt} + \lambda 26 \cdot \frac{dVy}{dt} + \omega_x \cdot \omega_y \cdot (J_y - J_x) + Vx \cdot Vy \cdot (m_y - m_x) + \\
+ \lambda 35 \cdot \omega_x \cdot Vz + \lambda 26 \cdot \omega_z \cdot Vx &= Mz,
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $m_x, m_y, m_z$  – масса аппарата плюс масса присоединенной массы воды;  
 $J_x, J_y, J_z$  – моменты инерции плюс моменты инерции присоединенной воды;  
 $\lambda 35, \lambda 26$  – зависят от линейных размеров, формы корпуса НПА;  
 $R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z$  – силы и моменты, действующие на НПА.

Исследование динамики НПА с помощью системы уравнений (1) представляет собой сложную задачу. Рассмотрим движение НПА только в горизонтальной плоскости (на определенной глубине). Будем считать, что система управления НПА удерживает значение глубины постоянным, угол крена и угол дифферента – нулевыми. С учетом этого система уравнений упрощается и выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
m_x \cdot \frac{dVx}{dt} + m_z \cdot \omega_y \cdot Vz + \lambda 35 \cdot \omega^2_y &= Rx; \\
m_y \cdot \frac{dVy}{dt} &= Ry; \\
m_z \cdot \frac{dVz}{dt} + \lambda 35 \cdot \frac{d\omega_y}{dt} - m_x \cdot \omega_y \cdot Vx &= Rz; \\
J_y \cdot \frac{d\omega_y}{dt} + \lambda 35 \cdot \frac{dVz}{dt} + Vx \cdot Vz \cdot (m_x - m_z) - \lambda 35 \cdot \omega_y \cdot Vx &= My;
\end{aligned} \tag{2}$$

Предположим, что НПА оснащен двумя маршевыми движителями, которые обеспечивают управление маршем и курсом. Тогда в системе уравнений (2)  $R_x = T_x - T_{nx}$ ,  $R_y = -T_{ny}$ ,  $R_z = -T_{nz}$ , где  $T_x$  – продольный упор,  $T_n$  – вектор натяжения в месте соединения КТ к НПА,  $M_y$  – вращательный

момент движителей. В [1] решается система дифференциальных уравнений, описывающих динамику КТ. При этом находится натяжение КТ. Из (1) получим вектор  $Tnb$  – натяжение у НПА в базовой системе координат. Для учета натяжения в системе (2) используются матричные уравнения связи [2]:

$$Tn = Bv \cdot Tnb,$$

где  $Bv = \begin{pmatrix} \cos fi & 0 & -\sin fi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin fi & 0 & \cos fi \end{pmatrix}$ ,  $fi$  – текущий курс НПА.

Задача управления состоит в синтезе управляющих воздействий,  $Tx$  и  $My$ . Течение приводит к сносу программной траектории, это обуславливает необходимость формирования управления, обладающего свойством «грубости» по отношению к внешнему возмущению. При наличии полной и достоверной информации об относительном положении аппарата и цели управляющие воздействия могут формироваться с помощью ПИД-регуляторов. Однако зачастую навигационные данные и данные с пилотажных датчиков имеют неточный характер. Для работы с неточной и недостоверной информацией применяется аппарат нечеткой логики. Его основными достоинствами являются:

- описание движения НПА на формальном языке;
- возможность использования априорной информации о НПА;
- «грубость» по отношению к внешним возмущениям;
- возможность работы в нелинейном режиме.

Для управления НПА и приведения его к цели был смоделирован нечеткий регулятор. Использовалась стандартная для нечетких систем схема: *фазификация – агрегирование – активизация – аккумуляция – дефазификация*. Функции принадлежности термов нечетких переменных выбраны кусочно-линейной формы, что обеспечивает простоту и быстрое действие вычислений. Для дефазификации выбран метод Mamdani. База данных нечеткого вывода состоит из 75-и правил. Количество правил можно сокращать или увеличивать в зависимости от задачи. Параметры функций принадлежности входных и выходных переменных настраиваются априорно до начала движения НПА экспертом на основе опыта предыдущих испытаний и гидродинамических расчетов. Для решения задачи приведения НПА к цели использованы три входные переменные: «расстояние до цели», «направление на цель» и «скорость вращения НПА»:

**$R$**  (расстояние до цели): *близко* (0м-3м), *недалеко* (2м-18м), *далеко* (от 16 м),

**$dfi$**  (направление на цель): *справа сбоку* (-80град – -5град), *справа сзади* (-180град– -70град), *прямо* (-7град– +7град), *слева сбоку* (5град–80град), *слева сзади* (70град–180град),

$W$  (скорость вращения НПА): около нуля ( $-0.08\text{м/с} - +0.08\text{м/с}$ ), небольшая положительная ( $0.05\text{м/с} - 0.25\text{м/с}$ ), большая положительная (от  $0.2\text{м/с}$ ), небольшая отрицательная ( $-0.25\text{м/с} - -0.05\text{м/с}$ ), большая отрицательная (до  $-0.2\text{м/с}$ )

и две выходные переменные: «продольный упор» и «управляющий момент»:

$T_x$  (продольный упор): около нуля ( $-1.0\text{Н} - +1.0\text{Н}$ ), вперед ( $0.5\text{Н} - 79.5\text{Н}$ ), быстро вперед ( $70\text{Н} - 90\text{Н}$ ), торможение ( $-79.5\text{Н} - -0.5\text{Н}$ ).

$M_y$  (управляющий момент): около нуля ( $-0.5\text{Н} - +0.5\text{Н}$ ), по курсу вправо ( $0.1\text{Н}-47.0\text{Н}$ ), по курсу сильно вправо ( $45.0\text{Н} - 70.0\text{Н}$ ), по курсу влево ( $-47.0\text{Н} - -0.1\text{Н}$ ), по курсу сильно влево ( $-70.0\text{Н} - -45.0\text{Н}$ ).

При управлении движением НПА с помощью нечетких правил переход между режимами движения происходит нелинейно. На рис. 1 представлен пример траектории движения, полученной при моделировании алгоритма. Рисунок иллюстрирует процесс приведения аппарата к цели при наличии переменного течения. Движение построено из трех сопряженных режимов – наведение к цели с заданной скоростью в дальней зоне, сближение с целью с переменной скоростью в ближней зоне, динамическое позиционирование с удержанием аппарата носом к цели с компенсацией течения. Использование нечеткого регулятора приводит к переключению режимов движения в неявном виде. На рис. 2 представлены графики параметров движения.

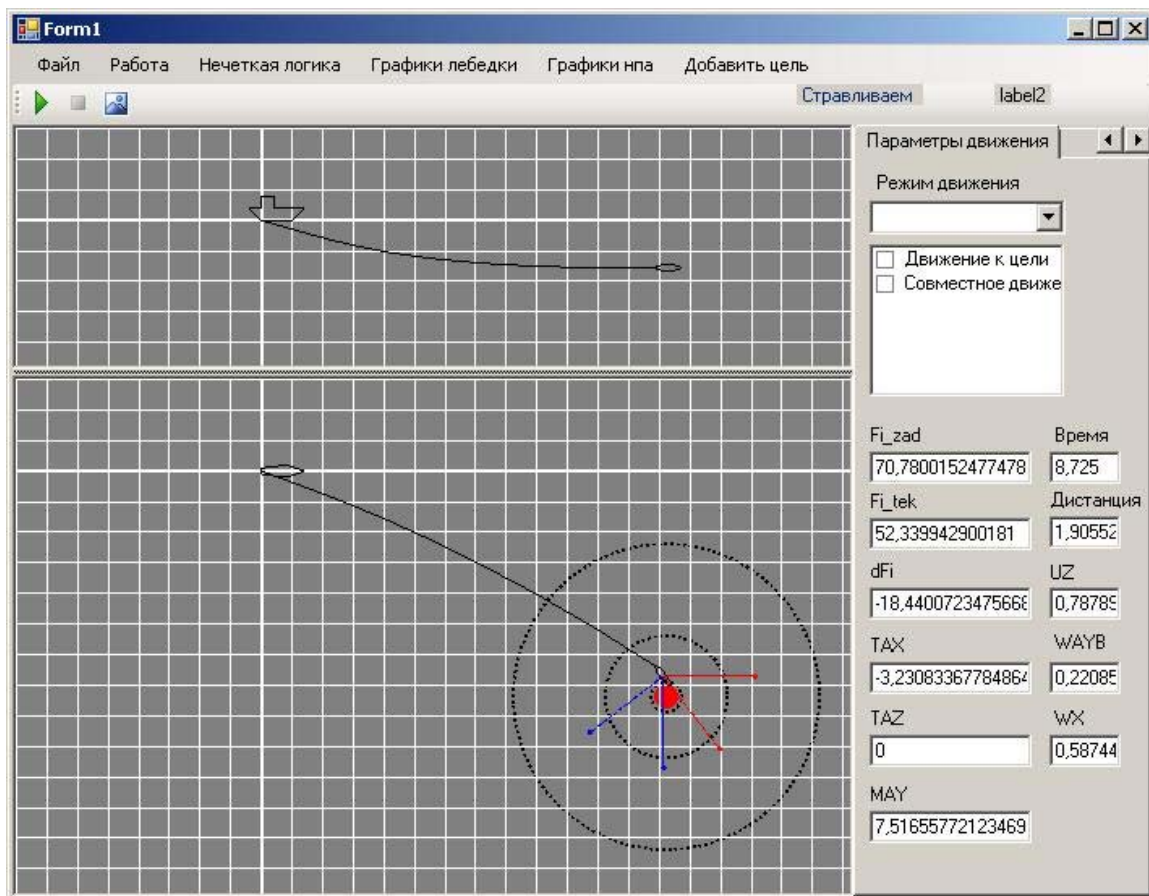


Рис.1. Траектория движения НПА

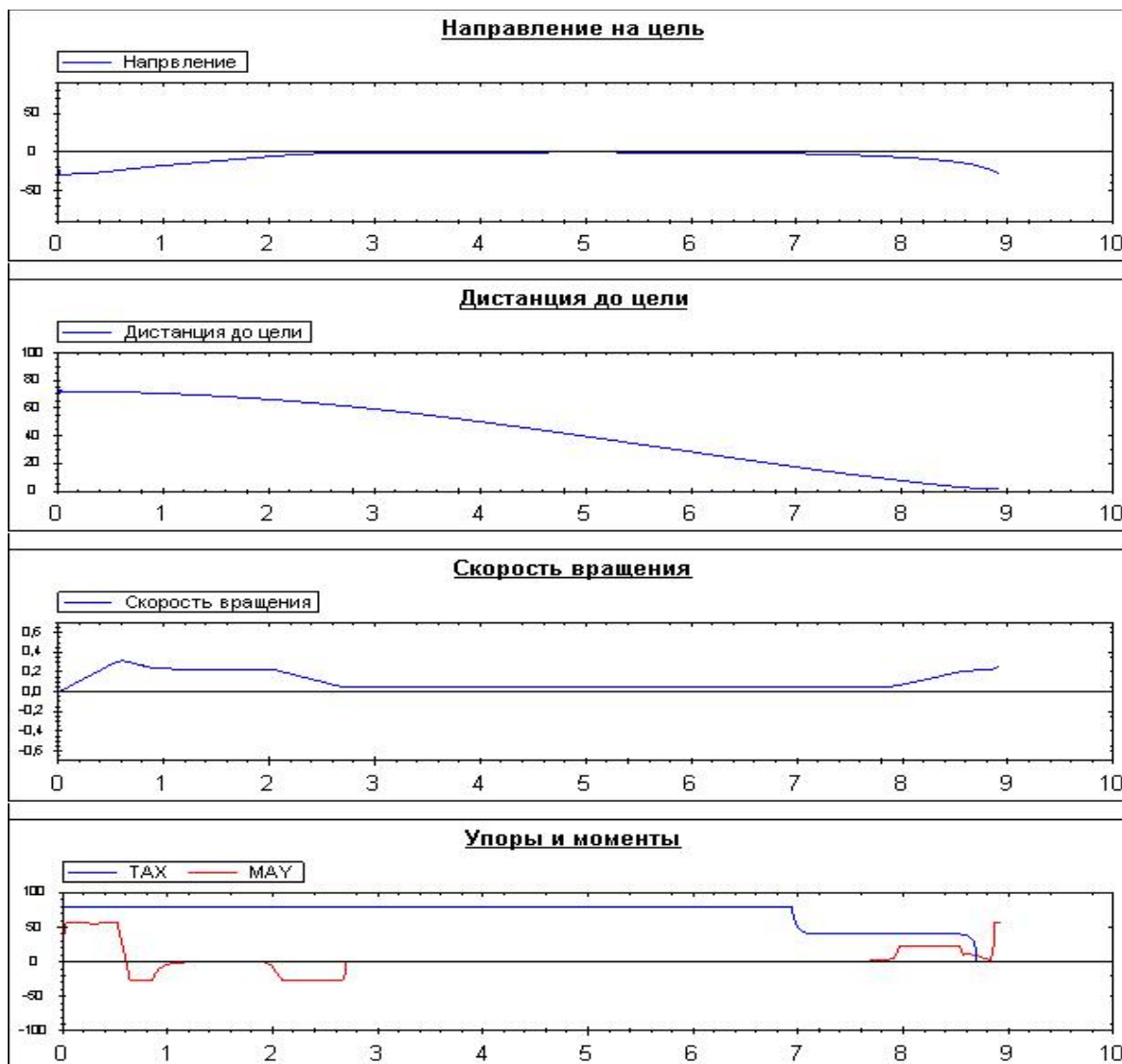


Рис. 2. Графики параметров движения НПА

Проведенные исследования показывают, что использование нечеткого регулятора позволяет решать задачи управления с учетом реальной ситуации. По сравнению с известным набором команд формирования движения, нечеткие системы позволяют описать поведение аппарата с более высокой степенью адекватности и возможностью адаптивной настройки параметров управления.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Крашенинников В. Р. Численное решение уравнений движения подводного буксировочного кабеля. Сборник научных трудов "Прикладная математика и механика". – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – Вып. 8. – С. 150-159.
2. Лукомский Ю. А., Корчанов В. М. Управление морскими подвижными объектами. – СПб.: «Элмор», 1996. – 320 с.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

| <b>Ф.И.О</b>                                  | <b>Ученая степень, ученое звание, место работы, e-mail</b>                                                                                                                                                        |
|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Андреев А. С.</b>                          | Доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой информационной безопасности и теории управления Ульяновского государственного университета. E-mail: andreevas@sv.ulsu.ru                                          |
| <b>Анкилов А. В.</b>                          | Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: ankil@ulstu.ru                                                                          |
| <b>Артемова А. О.</b>                         | Ассистент кафедры информационной безопасности и теории управления Ульяновского государственного университета. E-mail: mtu@ulsu.ru                                                                                 |
| <b>Байков А. Е.</b>                           | Канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель кафедры «Дифференциальные уравнения» Московского авиационного института (национальный исследовательский университет). E-mail: alexbaikov16@gmail.com                  |
| <b>Блинкова А. Ю.</b>                         | Студентка 5-го курса механико-математического факультета по специальности «прикладная математика и информатика» Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского. E-mail: anblinkova@yandex.ru |
| <b>Бодунов Д. М.</b>                          | Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Московского государственного технического университета «МАМИ». E-mail: d-bodounov@mail.ru                                                                |
| <b>Бойков И. В.</b>                           | Доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой «Высшая и прикладная математика» Пензенского государственного университета.                                                                                       |
| <b>Борискина И. П.</b>                        | Канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой математики и теоретической механики Мордовского государственного университета им. Н.П.Огарева. E-mail: irinaboriskina@mail.ru                                         |
| <b>Bosakova-Ardenska, Atanaska, Dimitrova</b> | PhD assistant of department of Computer Systems and Technologies of University of Food Technologies. E-mail: abosakova@yahoo.com                                                                                  |
| <b>Быкова Т. В.</b>                           | Аспирант кафедры «Теплогазоснабжение, вентиляция, водообеспечение и прикладная газогидродинамика» Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А. E-mail: tbykova69@mail.ru           |
| <b>Вельмисова А. И.</b>                       | Ассистент кафедры математической теории упругости и биомеханики Саратовского государственного университета им. Н.Г.Чернышевского. E-mail: Velmisovaanna@yandex.ru                                                 |
| <b>Вельмисов П. А.</b>                        | Доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: velmisov@ulstu.ru                                                            |
| <b>Вильде М. В.</b>                           | Доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник отдела биомеханики ОНИ наноструктур и биосистем Саратовского государственного университета им. Н.Г.Чернышевского. E-mail: mv_wilde@mail.ru                       |

|                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Данилова С. В.</b>                  | Аспирант кафедры системного анализа и математического моделирования Чувашского государственного университета имени И. Н. Ульянова. E-mail: sveta_yumanova@mail.ru                                                                                                                                                                      |
| <b>Дворянинова Н. В.</b>               | Ассистент кафедры технологий программирования Мордовского государственного университета им. Н.П.Огарева. E-mail: dvorjaninovanv@mail.ru                                                                                                                                                                                                |
| <b>Дерябина М. С.</b>                  | Аспирант Югорского государственного университета, г. Ханты-Мансийск.                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <b>Еремеева Н. И.</b>                  | Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математика и информационные технологии филиала Ульяновского государственного технического университета в г. Димитровград. E-mail: eremeev.juri@yandex.ru                                                                                                                                          |
| <b>Еремин А. В.</b>                    | Ассистент кафедры «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика» Самарского государственного технического университета. E-mail: a.v.eremin@list.ru                                                                                                                                                                                |
| <b>Захарова А. Б.</b>                  | Аспирант, учебный мастер кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: sasha_karzakova@mail.ru                                                                                                                                                                                          |
| <b>Захарова Ю. Ф.</b>                  | Канд. физ.-мат. наук, доцент, докторант кафедры «Высшая и прикладная математика» Пензенского государственного университета.                                                                                                                                                                                                            |
| <b>Иванов С. В.</b>                    | Старший преподаватель кафедры математического и компьютерного моделирования Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского; аспирант кафедры «Теплогазоснабжения, вентиляции, водообеспечения и прикладной гидродинамики» Саратовского государственного технического университета. E-mail: evilgraywolf@gmail.com |
| <b>Казакова Ю. А.</b>                  | Аспирант кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: kazakovaia@mail.ru                                                                                                                                                                                                               |
| <b>Karandzhulov<br/>Lyudmil Ivanov</b> | Доктор кафедры "Математический анализ" факультета прикладной математики и информатики Софийского технического университета. E-mail: likar@tu-sofia.bg                                                                                                                                                                                  |
| <b>Каюмова Д. Р.</b>                   | Московский авиационный институт. E-mail: dina.kayumova@gmail.com                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>Ковалева И. А.</b>                  | Студентка 5-го курса механико-математического факультета по специальности «прикладная математика и информатика» Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского. E-mail: irinakovaleva1406@gmail.com                                                                                                               |
| <b>Ковальногов В. Н.</b>               | Канд. техн. наук, профессор, и. о. зав. кафедрой «Теплоэнергетика» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: kvn@ulstu.ru                                                                                                                                                                                       |

|                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|---------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Кондратов Д. В.</b>    | <i>Доктор физ.-мат. наук, зав. кафедрой прикладной информатики и информационных технологий в управлении Поволжского института имени П.А. Столыпина (филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ). E-mail: KondratovDV@yandex.ru</i> |
| <b>Королев А. В.</b>      | <i>Аспирант кафедры «Теплоэнергетика» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: a.korolev@mail.ru</i>                                                                                                                                                      |
| <b>Котова Е. В.</b>       | <i>Ассистент кафедры «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика» Самарского государственного технического университета. E-mail: larginaevgenya@mail.ru</i>                                                                                                                |
| <b>Кочулимов А. В.</b>    | <i>Аспирант кафедры «Информационная безопасность и теория управления» Ульяновского государственного университета.</i>                                                                                                                                                             |
| <b>Kovacheva T.</b>       | <i>Doctor of Department "Mathematics", Technical University, Varna, Bulgaria.</i>                                                                                                                                                                                                 |
| <b>Красильников П. С.</b> | <i>Доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой «Дифференциальные уравнения» Московского авиационного института (государственный технический университет). E-mail: krasil06@rambler.ru</i>                                                                                     |
| <b>Красинская Э. М.</b>   | <i>Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической механики Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. E-mail: krasinsk@mail.ru</i>                                                                                                             |
| <b>Красинский А. Я.</b>   | <i>Доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры автоматики, мехатроники и электротехники Московского государственного университета пищевых производств. E-mail: krasinsk@mail.ru</i>                                                                                                  |
| <b>Красников С. Д.</b>    | <i>Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры 803 Московского авиационного института (государственный технический университет). E-mail: sergeykr@mail.ru</i>                                                                                                                            |
| <b>Кудинов В. А.</b>      | <i>Доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика» Самарского государственного технического университета. E-mail: kud-samgtu@yandex.ru</i>                                                                                    |
| <b>Кузнецов Е. Б.</b>     | <i>Доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры 803 Московского авиационного института (государственный технический университет). E-mail: kuznetsov@mai.ru</i>                                                                                                                        |
| <b>Лавыгин Д. С.</b>      | <i>Младший научный сотрудник, аспирант кафедры "Информационная безопасность и теория управления" Ульяновского государственного университета. E-mail: vdm.inbox@gmail.com</i>                                                                                                      |
| <b>Леонтьев В. Л.</b>     | <i>Доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры "Информационная безопасность и теория управления" Ульяновского государственного университета. E-mail: alex_lion@rambler.ru</i>                                                                                                        |
| <b>Мальцева Т. В.</b>     | <i>Доктор физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой математики и информатики Института математики, естественных наук и информационных технологий Тюменского государственного университета. E-mail: maltv@utmn.ru</i>                                                                  |



|                         |                                                                                                                                                                                                                    |
|-------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Манжосов В. К.</b>   | Доктор техн. наук, профессор, зав. кафедрой «Теоретическая и прикладная механика» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: v.manjosov@ulstu.ru, tpm@ulstu.ru                               |
| <b>Манзулин С. М.</b>   | Аспирант кафедры теоретической и прикладной механики Ульяновского государственного технического университета. E-mail: seregama@mail.ru                                                                             |
| <b>Маринов М. С.</b>    | Доктор кафедры "Математический анализ" факультета прикладной математики и информатики Софийского технического университета. E-mail: msm@tu-sofia.bg                                                                |
| <b>Мартынов С. И.</b>   | Доктор физ.-мат. наук, профессор Югорского государственного университета, г. Ханты-Мансийск.                                                                                                                       |
| <b>Маценко П. К.</b>    | Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета.                                                                                                  |
| <b>Михайлов И. С.</b>   | Аспирант кафедры «Математическое моделирование технических систем» Ульяновского государственного университета.                                                                                                     |
| <b>Могилевич Л. И.</b>  | Доктор техн. наук, профессор кафедры «Высшая и прикладная математика» Поволжского филиала МИИТ. E-mail: mogilevich@sgu.ru                                                                                          |
| <b>Молгачев А. А.</b>   | Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета.                                                                                                  |
| <b>Моторина Д. Ю.</b>   | Младший научный сотрудник Ульяновского государственного университета.                                                                                                                                              |
| <b>Мухутдинов Р. Ф.</b> | Ассистент кафедры теоретической механики Казанского государственного архитектурно-строительного университета. E-mail: ktm80@yandex.ru                                                                              |
| <b>Нагар Ю. Н.</b>      | Ассистент кафедры «Высшая математика и механика» Энгельсского технологического института (филиал Саратовского государственного технического университета). E-mail: ynagar@yandex.ru                                |
| <b>Новиков Д. А.</b>    | Ассистент кафедры «Теоретическая и прикладная механика» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: tpm@ulstu.ru                                                                              |
| <b>Новикова И. А.</b>   | Старший преподаватель кафедры «Измерительно-вычислительные комплексы» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: tpm@ulstu.ru; nia@ulstu.ru                                                  |
| <b>Олейников К. В.</b>  | Аспирант кафедры теоретической и прикладной механики Ульяновского государственного технического университета. E-mail: o-kirill87@ya.ru                                                                             |
| <b>Ольшанский В. Ю.</b> | Главный науч. сотрудник, доктор физ.-мат. наук, профессор Института проблем точной механики и управления РАН. E-mail: olshanskiy vlad@mail.ru                                                                      |
| <b>Павлов П. Ю.</b>     | Аспирант кафедры «Теоретическая и прикладная механика» Ульяновского государственного технического университета, ассистент кафедры «Самолетостроение» ИАТУ Ульяновского государственного технического университета. |

|                             |                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Перегудова О. А.</b>     | Доктор физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры информационной безопасности и теории управления Ульяновского государственного университета. E-mail: peregidovaoo@rambler.ru                                                                               |
| <b>Плаксына И. В.</b>       | Зав. кабинетом кафедры прикладной информатики и информационных технологий в управлении Поволжского института имени П.А. Столыпина (филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ). E-mail: kafprinform@pags.ru |
| <b>Покладова Ю. В.</b>      | Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета.                                                                                                                                          |
| <b>Попов В. С.</b>          | Доктор техн. Наук, доцент, зав. кафедрой «Теплогазоснабжение, вентиляция, водообеспечение и прикладная газогидродинамика» Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А. E-mail: vic_p@br.ru                                  |
| <b>Прудаева И. В.</b>       | Старший преподаватель кафедры математики и информатики Института математики, естественных наук и информационных технологий Тюменского государственного университета. E-mail: teacher13@yandex.ru                                                           |
| <b>Сагдеева Ю. К.</b>       | Аспирант кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета.                                                                                                                                                              |
| <b>Садыкова Д. Р.</b>       | Студентка 5 курса специальности прикладная математика и информатика филиала Ульяновского государственного технического университета в г. Димитровград.                                                                                                     |
| <b>Санкин Ю. Н.</b>         | Доктор техн. Наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Ульяновского государственного технического университета. E-mail: uns@ulstu.ru                                                                                                     |
| <b>Семенов А. С.</b>        | Канд. Физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета.                                                                                                                                       |
| <b>Серебряков А. В.</b>     | Канд. Физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика и механика» Энгельсского технологического института (филиал Саратовского государственного технического университета). E-mail: bundzin@inbox.ru                                                     |
| <b>Серебрянникова Е. С.</b> | Старший преподаватель кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета.                                                                                                                                                 |
| <b>Сыромясов А. О.</b>      | Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики и теоретической механики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева. E-mail: syall@yandex.ru                                                                                               |
| <b>Тимофеев М. С.</b>       | Аспирант кафедры «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика» Самарского государственного технического университета. E-mail: xaddan@list.ru                                                                                                         |
| <b>Федоров Р. В.</b>        | Ассистент кафедры «Теплоэнергетика» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: r.fedorov@ulstu.ru                                                                                                                                    |
| <b>Хамитов Т. К.</b>        | Ассистент кафедры теоретической механики Казанского государственного архитектурно-строительного университета.                                                                                                                                              |

|                      |                                                                                                                                                      |
|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                      | <i>E-mail: tagirkx@yandex.ru</i>                                                                                                                     |
| <b>Цынаева А. А.</b> | <i>Канд. техн. наук, доцент кафедры «Теплоэнергетика» Ульяновского государственного технического университета.<br/>E-mail: a.tsinaeva@rambler.ru</i> |
| <b>Цынаева Е. А.</b> | <i>Канд. техн. наук, доцент кафедры «Теплоэнергетика» Ульяновского государственного технического университета.</i>                                   |
| <b>Шигапов Р. Д.</b> | <i>Аспирант Ульяновского государственного технического университета. E-mail: shigap@hotmail.com</i>                                                  |
| <b>Юганова Н. А.</b> | <i>Аспирант кафедры «Теоретическая и прикладная механика» Ульяновского государственного технического университета.</i>                               |

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                                                                                                                            |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| К 50-летию кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета .....                                                                                                                                       | 3   |
| К 100-летию со дня рождения Мстислава Всеволодовича Келдыша .....                                                                                                                                                                          | 5   |
| К 100-летию со дня рождения Савелия Владимировича Фальковича .....                                                                                                                                                                         | 13  |
| <b>А. С. Андреев</b> (г. Ульяновск)<br>О методах исследования задач устойчивости, стабилизации и управления движением механических систем .....                                                                                            | 16  |
| <b>А. С. Андреев, А. О. Артемова</b> (г. Ульяновск), <b>Д. М. Бодунов</b> (г. Москва)<br>Об управлении линейными нестационарными механическими системами с неполным выходом и учетом запаздывания в структуре обратной связи .             | 66  |
| <b>А. С. Андреев, А. А. Молгачев</b> (г. Ульяновск)<br>О применимости функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости пластины .....                                                                                                        | 72  |
| <b>А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Ю. К. Сагдеева</b> (г. Ульяновск)<br>Устойчивость упругого элемента проточного канала .....                                                                                                             | 74  |
| <b>А. В. Анкилов, А. Б. Захарова</b> (г. Ульяновск)<br>Сравнительный анализ численного моделирования динамики упругой пластины в потоке газа .....                                                                                         | 83  |
| <b>А. Е. Байков</b> (г. Москва)<br>О предельном цикле в окрестности равновесия неконсервативной системы при резонансе 1:2 .....                                                                                                            | 90  |
| <b>А. Ю. Блинкова, С. В. Иванов, И. А. Ковалева</b> (г. Саратов)<br>Оценка взаимодействия вязкой несжимаемой жидкости с упругими стенками трубы кругового и кольцевого сечений при воздействии волны деформации .....                      | 104 |
| <b>И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова</b> (г. Пенза)<br>Оптимальные методы вычисления полигиперсингулярных интегралов ....                                                                                                                       | 117 |
| <b>И. П. Борискина, Н. В. Дворянинова</b> (г. Саранск)<br>Динамика частиц в звуковой волне с учетом парных взаимодействий .....                                                                                                            | 132 |
| <b>А. D. Bosakova-Ardenska</b> (г. Пловдив, Болгария)<br>Modifications of algorithm quick sort .....                                                                                                                                       | 138 |
| <b>Т. В. Быкова, Л. И. Могилевич, В. С. Попов</b> (г. Саратов)<br>Математическая модель для исследования динамики взаимодействия круглой пластины, подкрепленной ребрами жесткости, с пульсирующим слоем вязкой несжимаемой жидкости ..... | 143 |

|                                                                                                                                                                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>П. А. Вельмисов, Ю. А. Казакова</b> (г. Ульяновск)<br>О решениях типа «простая волна» дифференциальных уравнений<br>с частными производными .....                                                                          | 151 |
| <b>П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова, Е. С. Серебрянникова</b> (г. Ульяновск)<br>Математические модели систем измерения давления .....                                                                                         | 162 |
| <b>А. И. Вельмисова, М. В. Вильде</b> (г. Саратов)<br>Погранслой в окрестности условного фронта волны Рэлея в двухслойной<br>пластине при ударном поверхностном воздействии .....                                             | 173 |
| <b>С. В. Данилова</b> (г. Чебоксары)<br>Вторая основная задача теории упругости для составного кольца в случае<br>контакта с трением .....                                                                                    | 184 |
| <b>М. С. Дерябина, С. И. Мартынов</b> (г. Ханты-Мансийск)<br>Модель фильтрации вязкой жидкости через периодическую решетку<br>частиц с заданным градиентом давления .....                                                     | 195 |
| <b>Н. И. Еремеева, Д. Р. Садыкова</b> (г. Димитровград)<br>Исследование модели роста опухоли .....                                                                                                                            | 204 |
| <b>А. В. Еремин</b> (г. Самара)<br>Аналитический метод исследования теплообмена при ламинарном<br>течении жидкости в трубах .....                                                                                             | 214 |
| <b>L. I. Karandzhulov</b> (Sofia, Bulgaria)<br>Fredholm boundary-value problems on time scales .....                                                                                                                          | 221 |
| <b>Л. И. Каранджулов, Н. Д. Сиракова</b> (г. София, Болгария)<br>Асимптотическое решение почти регулярных нелинейных систем .....                                                                                             | 233 |
| <b>В. Н. Ковальногов, Р. В. Федоров, А. В. Королев</b> (г. Ульяновск)<br>Влияние продольного градиента давления на эффективность пленочного<br>охлаждения поверхности, обтекаемой высокоскоростным дисперсным<br>потокм ..... | 239 |
| <b>T. Kovacheva</b> (Varna, Bulgaria)<br>Risk factors analysis affecting the insurance company's activities .....                                                                                                             | 252 |
| <b>Д. В. Кондратов, И. В. Плаксина</b> (г. Саратов)<br>Постановка задачи гидроупругости для геометрически нерегулярной<br>трубы кольцевого профиля при воздействии гармонического перепада<br>давления .....                  | 259 |
| <b>А. В. Кочулимов, В. Л. Леонтьев</b> (г. Ульяновск)<br>Смешанный вариационно-сеточный метод решения задач<br>теплопроводности .....                                                                                         | 264 |

|                                                                                                                                                                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Е. В. Котова, В. А. Кудинов, М. С. Тимофеев</b> (г. Самара)<br>Теплообмен в пластине с внутренними источниками теплоты<br>при граничных условиях второго рода .....                                                               | 272 |
| <b>П. С. Красильников</b> (г. Москва)<br>О нелинейных колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем<br>основании .....                                                                                                         | 283 |
| <b>Э. М. Красинская, А. Я. Красинский</b> (г. Москва)<br>Об устойчивости и стабилизации неизолированных установившихся<br>движений механических систем. Голономные системы .....                                                     | 301 |
| <b>А. Я. Красинский, Д. Р. Каюмова</b> (г. Москва)<br>Об одном алгоритме построения математической модели экипажей<br>с деформируемыми колесами .....                                                                                | 323 |
| <b>С. Д. Красников, Е. Б. Кузнецов</b> (г. Москва)<br>Метод прохождения точек бифуркации коразмерности три .....                                                                                                                     | 335 |
| <b>Е. Б. Кузнецов</b> (г. Москва)<br>К определению предельных состояний упругопластических тел .....                                                                                                                                 | 347 |
| <b>Д. С. Лавыгин, В. Л. Леонтьев</b> (г. Ульяновск)<br>Смешанный вариационно-сеточный метод, связанный с ортогональными<br>финитными функциями, в задачах теории стержней .....                                                      | 362 |
| <b>В. Л. Леонтьев, А. В. Кочулимов</b> (г. Ульяновск)<br>О применении ортогональных финитных кусочно квадратичных<br>функций на треугольных сетках в линейной аппроксимации<br>поверхностей .....                                    | 368 |
| <b>В. Л. Леонтьев, И. С. Михайлов</b> (г. Ульяновск)<br>О математических моделях нанообъектов, о связанных с ними численных<br>алгоритмах и их программной реализации .....                                                          | 376 |
| <b>В. К. Манжосов, Д. А. Новиков</b> (г. Ульяновск)<br>Моделирование движения виброударной системы при различных циклах<br>периодического силового воздействия .....                                                                 | 379 |
| <b>В. К. Манжосов, И. А. Новикова</b> (г. Ульяновск)<br>Численное решение и моделирование процесса преобразования<br>продольной волны деформации на границе сопряжения стержней<br>неоднородной структуры с упругой прокладкой ..... | 389 |
| <b>М. С. Маринов</b> (г. София, Болгария)<br>Об интегральных представлениях голоморфных функций .....                                                                                                                                | 402 |

|                                                                                                                                                                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>П. К. Маценко</b> (г. Ульяновск)<br>Разложение по собственным функциям краевой задачи<br>для дифференциально-функционального уравнения второго порядка<br>с отражением в старшем члене .....           | 406 |
| <b>Р. Ф. Мухутдинов</b> (г. Казань)<br>Влияние механических характеристик материала на выпучивание<br>ортотропных цилиндрических оболочек переменной толщины<br>при продольном ударе .....                | 410 |
| <b>В. Ю. Олышанский, А. В. Серебряков, Ю. Н. Назар</b> (г.Саратов, г.Энгельс)<br>Метод малого параметра в задаче об упругих колебаниях при наличии<br>кориолисовых сил .....                              | 417 |
| <b>О. А. Перегудова, Д. Ю. Моторина</b> (г. Ульяновск)<br>Задачи слежения для механической системы с запаздывающим<br>управлением и неизвестной матрицей инерции .....                                    | 421 |
| <b>И. В. Прудаева, Т. В. Мальцева</b> (г. Тюмень)<br>Введение функциональных зависимостей на множестве мотивов .....                                                                                      | 427 |
| <b>Ю. Н. Санкин, С. М. Манзулин</b> (г. Ульяновск)<br>Способ определения постоянных времени заготовки при холодной<br>штамповке .....                                                                     | 432 |
| <b>Ю. Н. Санкин, К. В. Олейников</b> (г. Ульяновск)<br>Частотный метод решения задачи о флаттере крыла в дозвуковом потоке<br>газа .....                                                                  | 442 |
| <b>Ю. Н. Санкин, П. Ю. Павлов</b> (г. Ульяновск)<br>Устойчивость фрезерной головки, носимой робототехническим<br>устройством .....                                                                        | 451 |
| <b>Ю. Н. Санкин, Н. А. Юганова</b> (г. Ульяновск)<br>Математическая модель заготовки ковочного молота .....                                                                                               | 458 |
| <b>А. С. Семёнов</b> (г. Ульяновск)<br>Построение пробных решений метода Галёркина в виде многочленов для<br>простейшей краевой задачи .....                                                              | 465 |
| <b>А. О. Сыромясов</b> (г. Саранск)<br>Одиночная частица в однородном потоке жидкости переменной вязкости .....                                                                                           | 469 |
| <b>Т. К. Хамитов</b> (г. Казань)<br>Определение критических длин потери устойчивости<br>упругопластических стержней при продольном ударе с учетом<br>неоднородности напряженного состояния по длине ..... | 477 |

|                                                                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b><i>А. А. Цынаева, Е. А. Цынаева, П. А. Вельмисов</i></b> (г. Ульяновск)                                         |     |
| Модель изотермического регулирования давления газа на основе<br>газодинамической температурной стратификации ..... | 483 |
| <b><i>Р. Д. Шигапов</i></b> (г. Ульяновск)                                                                         |     |
| Приведение к цели необитаемого подводного аппарата, связанного<br>с кораблем кабель-тросом .....                   | 489 |
| Сведения об авторах .....                                                                                          | 494 |



**Требования к оформлению**  
электронных текстов статей в сборник научных трудов  
«Прикладная математика и механика»

1. Объем текста статьи – до 20 страниц.
2. **Редактор – Microsoft Word 2000, 2003, 2007. Формат А4. Шрифт – Times New Roman (14).** Межстрочный интервал – одинарный (Word). **Поля –** левое, правое, верхнее – **25 мм**, нижнее – **30 мм**. Отступ (красная строка) – **10 мм**. Не допускается использования табуляции и пробелов для формирования отступа первой строки абзаца!
3. При оформлении формул использовать редактор формул Microsoft Equation 3.0. **Установки редактора формул:** размеры: **14 – 11 – 9 – 16 - 11**, стиль переменных и функций – курсив. Номера формул указываются в скобках с правой стороны, формулы центрируются. Выравнивание по ширине.
4. При оформлении рисунков в документе не допускается использование панели Рисование Microsoft Word непосредственно в тексте документа! Рекомендуется использование вставки рисунка из буфера, из файла без привязки. Формат графических файлов bmp. Названия рисунков (обязательно) даются снизу по центру рисунка шрифтом Times New Roman 12 pt, курсив.
5. Названия таблиц (обязательно) и сами таблицы печатаются шрифтом Times New Roman 14 pt.
6. С первой строки УДК работы (от левого края), далее пустая строка, И. О. Фамилия авторов (строчными буквами, от левого края, полужирный шрифт), далее пустая строка, НАЗВАНИЕ (прописными буквами, от левого края, полужирный шрифт), далее пустая строка, затем **обязательно краткая аннотация работы** до 10 строк (строчными буквами, по ширине, курсив, шрифт Times New Roman 12), далее пустая строка, затем текст статьи, далее пустая строка, затем БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.
7. Диск с файлами, содержащими текст статьи, файлы рисунков и сведения об авторах (научная степень, научное звание, должность, место работы, e-mail авторов) необходимо предоставить на кафедру «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета по адресу: г. Ульяновск, ул. Северный венец, 32, Вельмисову П. А. Файлы можно также выслать на электронный адрес [velmisov@ulstu.ru](mailto:velmisov@ulstu.ru)
8. *Тексты статей, оформленные с нарушениями данных требований, не включаются в сборник научных трудов.*

---

Научное издание

**ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Сборник научных трудов

ЛР № 020640 от 22.10.97

Подписано в печать 28.12.2011. Формат 60×84/16.

Усл. печ. л. 29,53. Тираж 150 экз. Заказ 115.

Ульяновский государственный технический университет  
432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.

Типография УлГТУ, 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.